РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Препринт 200
Январь 2008

С.С. Кутателадзе

СОБОЛЕВ
И
ИСЧИСЛЕНИЕ XX ВЕКА

НОВОСИБИРСК

УДК 517.95:517.98 Дата поступления 25 января 2008 г.

Кутателадзе С. С.
Соболев и исчисление XX века. — Новосибирск, 2008. — 26 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 200).

Kutateladze S. S.
Sobolev and the Calculus of the Twentieth Century

Два доклада о С. Л. Соболеве (1908–1989) и его вкладе в формирование современных аналитических воззрений.

Адрес автора:
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4
630090 Новосибирск, Россия

E-mail: sskut@math.nsc.ru

СОБОЛЕВ ИЗ ШКОЛЫ ЭЙЛЕРА

Сергей Львович Соболев — представитель российской математической школы, вошедший в список ученых, чье творчество создало главные интеллектуальные сокровища мировой культуры.

Математика изучает формы мышления. В самом общем смысле дифференцирование — определение тенденций процесса, а интегрирование — предсказание будущего по тенденциям. Современное человечество не мыслит себя без интегрирования и дифференцирования. Дифференциальное и интегральное исчисление открыто Ньютоном и Лейбницем. Флюксии Ньютона и монады Лейбница сделали их первопроходцами классического анализа. Используя понятия, предложенные Ньютоном и Лейбницем, Эйлер взрастил и выпестовал новую математику переменных величин, совершив немало гениальных открытий и создав неисчерпаемую собственную коллекцию поразительных формул и теорем. Двести лет математический анализ оставался исчислением Ньютона, Лейбница и Эйлера. В двадцатом веке классическое исчисление превратилось в теорию распределений. Ключевыми объектами современного анализа стали интеграл в смысле Лебега и производная в смысле Соболева, определенные для самых общих зависимостей, неподвластных операциям классического дифференцирования и интегрирования. Лебег и Соболев вошли в историю, предложив новые подходы к интегралу и производной, существенно расширив сферы влияния и области приложений математики.

К столетию со дня рождения С. Л. Соболева (6.10.1908–3.1.1989).

Исторические фигуры и открытия достойны исторических параллелей и анализа. Математический дар передается от учителя к ученику. Эта чередующаяся цепь преемственных поколений — материальный носитель математической школы. Характеризуя научные школы, Лузин отмечал, что «чем старее школа, тем она ценнее. Ибо школа есть совокупность накопленных веками творческих приемов, традиций, устных преданий об отшедших ученых или ныне живущих, их манере работать, их взглядах на предмет исследований. Эти устные предания, — накапливающиеся столетиями и не подлежащие печати или сообщению тем, кого считают неподходящим для этого — эти устные предания суть сокровища, действенность которых трудно даже представить себе и оценить... Если искать каких-либо параллелей или сравнений, то возраст школы, накопление ею традиций и устных преданий, есть не что иное, как энергия школы, в неявной форме»[1]. Соболев принадлежит к школе, ведущей родословную от Леонарда Эйлера (1707–1783)[2].

Эйлер и Россия

Человек — объект физический и может быть отчасти представлен своей мировой линией в 4-мерном пространстве-времени Минковского. «Математика не знает рас... Для математики весь культурный мир представляет собой единую страну» — констатировал Гильберт на Конгрессе в Болонье в 1928 году[3]. Никакое государство физическим объектом не является. В пространстве-времени страну можно отождествить с воронкой мировых линий проживающих в ней людей. Большая часть мировой линии Эйлера принадлежит России. Нет ни швейцарской, ни русской математики, но есть математика в России, есть отечественная математическая традиция и отечественная математическая школа. Уроженец Швейцарии, Эйлер нашел в России свою вторую Родину и покоится в земле Петербурга. Да Винчи от математики, он давно стал неотъемлемой частью русского духа. Наши соотечественники с гордостью считают Эйлера основателем российской математической школы.

Усилиями Эйлера Петербург стал математической столицей мира восемнадцатого века. Даниэл Бернулли писал Эйлеру: «Я не могу Вам довольно выразить, с какою жадностью повсюду спрашивают о Петербургских мемуарах»[4]. Речь идет о знаменитых «Комментариях Санкт-Петербургской Академии», ставших ведущим научным журналом той эпохи. Это издание не раз меняло свое название и превратилось со временем в Известия РАН (серия математическая). Журнал Петербургской Академии наук поместил 473 статьи Эйлера, которые поочередно выходили в свет в течение многих лет после кончины Эйлера вплоть до 1830 года.

От Остроградского до Соболева

В начале девятнадцатого века центр математической мысли переместился во Францию, где творили Лаплас, Пуассон, Фурье и Коши. Идеи новых творцов математики воспринял М. В. Остроградский, учившийся в Париже после лишения за-

[1] Из частного письма Н. Н. Лузина. Цитируется по [1].
[2] Об Эйлере см. [2].
[3] Цитируется по книге К. Рид [3, с. 245].
[4] См. [4, с. 101].

конно полученного аттестата об окончании Харьковского Императорского университета. В 1825 году Коши в одной из своих статей характеризовал Остроградского как молодого человека, одаренного большой проницательностью и весьма сведущего в исчислении бесконечно малых[5]. Репутация, приобретенная Остроградским во Франции, и ряд мемуаров, представленных Академии наук, способствовали признанию его заслуг в России. Уже в 1832 году в возрасте 32 лет Остроградский был избран ординарным академиком по прикладной математике. Он быстро становится признанным лидером российской математической школы.

Остроградский прекрасно понимал значение Эйлера для отечественной науки. Именно он энергично ставил вопрос об издании наследия Эйлера. В пояснительной записке по этому поводу Остроградский писал: «Эйлер создал современный анализ, обогатив его один сам более, чем все его предшественники вместе, и сделал из него самый могущественный инструмент ума человеческого»[6]. Издание в 28 томах предполагалось осуществить в течение 10 лет, но средств у Академии наук на это не нашлось ни в то время, ни по сей день...

К московской ветви школы Остроградского относятся Н. Д. Брашман, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин. К петербургской — П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов. Многие другие математики и механики России испытали на себе влияние Остроградского.

Среди учеников Чебышева[7] были А. Н. Коркин и А. А. Марков, у которых учился Н. М. Гюнтер, ставший научным руководителем дипломной работы Соболева. Вторым своим учителем Соболев считал В. И. Смирнова, ученика В. А. Стеклова, ученика А. М. Ляпунова. Такова блестящая цепь научного генеалогического древа Соболева[8].

Архив Эйлера принадлежит России, однако издание собрания сочинений Эйлера было осуществлено в Швейцарии. В его подготовке живо участвовали А. М. Ляпунов, А. Н. Крылов, А. А. Марков и В. И. Смирнов. Лучшие умы России старались сохранить идейное наследие Эйлера, о котором В. И. Смирнов, перефразируя фразу Гёте о Моцарте, писал «Эйлер всегда останется чудом, которое не подлежит объяснению»[9]. Уже увидели свет 60 томов *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, а завершить 72-томное издание намечено в этом году.

Математика России в 1930-е годы

Великие открытия — вехи неизбежности, которые не возникают сами собой. Решение проблемы подразумевает ее постановку, наличие средств и возможностей для решения. Необходимость прокладывает свой путь через дремучую чащу случайностей. Открытия Соболева относятся к годам великого перелома в мировой

[5] Б. В. Гнеденко в [4, с. 60] дает ссылку на работу Е. Ф. Сабинина, датированную 1901 годом.

[6] Цитируется по [4, с. 101–102], где в качестве источника указан Архив АН СССР, ф. 2, оп. 1844. лл. 13–14.

[7] О Чебышеве см. [5].

[8] История петербургской–ленинградской математической школы отражена в [6]. О ранних годах Соболева немного рассказано в [7].

[9] См. [8, с. 54].

и отечественной науке. Двадцатый век по праву носит имя века свободы. Развитие социальных институтов демократии проходило одновременно с раскрепощением всех сторон духовной жизни людей. Математика раскрывала свою сущность науки о свободных формах мышления. Свобода — понятие историческое, отражающее способ разрешения конфликта между безграничными в своем разнообразии индивидуальностями и ограничивающими формами их коллективного сосуществования. Исторический антураж — обязательный компонент каждого триумфа и каждой трагедии.

Осмысливая свои достижения в 1957 году, сам Соболев отмечал[10]:

> В процессе изучения разнообразных задач на отыскание функций, удовлетворяющих некоторым уравнениям в частных производных, оказалось полезным использовать класс функций, не обладающих повсюду непрерывными производными нужного порядка, но являющихся в некотором смысле предельными для настоящих решений уравнений. Такие обобщенные решения ищутся, естественно, в различных функциональных пространствах, иногда полных, а иногда специально пополняемых при помощи введения новых «идеальных элементов».
>
> От индивидуального решения наука перешла к изучению функциональных пространств, операторов в них и тех элементов, которые являются решениями.
>
> Вопрос о том, когда эти обобщенные решения будут решениями в классическом смысле, при таком рассмотрении становится самостоятельным.

Как мы видим, Соболев выделил неразрывную связь своей теории с гильбертовой идеей социализации математических проблем. Методология Гильберта опиралась на канторову теорию множеств.

Идея пересмотра понятия решения дифференциального уравнения носилась в математической атмосфере начала двадцатого века. Нет сомнений, что обращение Соболева к этой проблематике связано с Гюнтером. В некрологе, написанном Соболевым и Смирновым, подчеркивалась роль Гюнтера в пропаганде идеи Лебега о необходимости пересмотра подхода к уравнениям математической физики на основе теории функций множеств[11].

С идеями функционального анализа Соболев знакомился в семинаре, организованном Смирновым. Именно в этом семинаре изучалась классическая книга Дж. фон Неймана по математическим методам квантовой механики. Нейман резко критиковал подход Дирака: «„несобственные“ конструкции (такие, как $\delta(x)$, $\delta'(x), \dots$) лежат за пределами обычно употребляемых математических методов»[12]. Идеи Неймана вызвали интерес и другого участника семинара Смирнова — Л. В. Канторовича, университетского товарища Соболева, который опубликовал в 1935 году две заметки в ДАН, посвященные проблеме расширения понятия функции в духе К. Фридрихса и содержащие описание обобщенного дифференцирования умеренных периодических распределений[13].

---

[10]Цитируется по [9, с. 596], где воспроизведена статья в *Весн. Друштва математичара и физичара Народ. Репуб. Србиjе.*1957, Т. 9, С. 215–244 (1957).

[11]См., в частности, [10].

[12]Цитируется по [11, с. 29]. Первое издание датировано 1932 годом. Нейман писал там же, что “Dirac fingierte trotzdem die Existenz einer solchen Funktion” (ср. [11, с. 27]).

[13]Статьи [12, 13]. В 1991 году И. М. Гельфанд охарактеризовал эти работы следующим образом: «По существу Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал

Представляется совершенно невероятным, чтобы Соболев и Канторович, близкие друзья и участники одного семинара, могли не знать о работах друг друга на родственные темы. Однако ни тот, ни другой никогда не упоминали об этом эпизоде в дальнейшем. Становится ясным, что в те годы между Соболевым и Канторовичем, поддерживавшими теплую и сердечную дружбу до конца своих дней, имело место временное взаимное отчуждение. Понять его природу помогают исключительно острые политические события, развернувшиеся в начале тридцатых годов прошлого века в математической среде Ленинграда и Москвы.

Против старой математической профессуры северной столицы был развернут «ленинградский математический фронт». Главным объектом атаки стал Гюнтер, возглавлявший Петроградское математическое общество с момента его возрождения в 1920 году. Гюнтер был по полной программе обвинен в идеализме и отрыве от практики, получив клеймо «реакционера в общественной жизни» и «консерватора в науке». Под «Декларацией инициативной группы по реорганизации Ленинградского физико-математического общества» от 10 марта 1931 года, содержащей ужасные обвинения против Гюнтера, поставили свои подписи 13 человек, среди которых были И. М. Виноградов, Б. Н. Делоне, Л. В. Канторович и Г. М. Фихтенгольц. Гюнтер оставил руководство кафедрой и был вынужден написать покаянное письмо, впрочем, также заклейменное «математиками-материалистами». К среде идеалистов был причислен также В. А. Стеклов, скончавшийся в 1926 г.[14]. К чести Соболева и Смирнова, они не присоединились к публичной травле своих наставников[15]. Антидотом послужила явная близость научных взглядов учителей и учеников.

Обстановка в математическом сообществе страны мало отличалась от общих нравов той эпохи. Старую профессуру травили и в Москве[16]. К участию в дрязгах москвичи пытались привлечь и Канторовича, который в те годы входил в число первых специалистов по дескриптивной теории функций и множеств. Канторович от каких-либо нападений на Лузина воздержался, в то время как Соболев был активным членом чрезвычайной академической комиссии по «делу Лузина»[17].

Трагедия математики в России в 1930-е годы была всеобщей. Всеобщими были и ее триумфы.

Соболев и бомба

Homo sapiens проявляет себя как человек творящий. Сила человека в способности создавать и передавать идеальные неосязаемые ценности. Математика хранит древнейшие технологии безошибочных интеллектуальных приемов. Наука и искусство доказательных исчислений, математика расположена в эпицентре культуры.

об этом задолго до Лорана Шварца» (см. [14]). Статья Соболева «Задача Коши в пространстве функционалов» опубликована в томе 3 ДАН СССР за 1935 г. (см. [9, с. 11–13]).

[14] «Декларация» и прочие документы «ленинградского математического фронта» вошли в брошюру [15].

[15] Досталось и Смирнову, причисленному к правым примиренцам и прикрывателям Гюнтера [15, с. 10, 33].

[16] Литературные ссылки имеются, в частности, в [16].

[17] Исторические подробности и стенограммы заседаний Комиссии АН СССР представлены в [17].

Свобода мышления — это sine qua non личной свободы человека. Математика, положенная в основу мировоззрения, становится гарантом свободы. Творчество Эйлера и лучших представителей его школы дают тому неисчислимые примеры. Не стала исключением и судьба Соболева.

В двадцатом веке человечество подошло к краю безопасных границ своего существования, проявив неспособность остановить поджигателей Первой и Второй мировых войн. Гарантом свободы стало оружие сдерживания. Создание атомной бомбы в США и России — демонстрация удивительной силы науки, последнего резерва выживания человечества. Математики могут гордиться участием своих коллег в этом процессе. В Манхеттенском проекте работали Нейман и Улам. В осуществлении отечественного проекта «Энормоз»[18] участвовали С. Л. Соболев и Л. В. Канторович.

В настоящее время большинство документов, касающихся истории создания ядерного оружия, рассекречено и опубликовано, и мы можем ощутить накал той героической эпохи.

Начало работ по атомному проекту в нашей стране принято связывать с распоряжением ГКО № 2352сс «Об организации работ по урану» от 28 сентября 1942 года[19]. Спустя несколько месяцев 11 февраля 1943 года ГКО принимает решение об организации Лаборатории № 2 АН СССР для изучения атомной энергии. Руководство Лабораторией и всеми работами по атомной проблеме было поручено И. В. Курчатову. Вскоре Соболев был назначен одним из заместителей Курчатова и вошел в группу И. К. Кикоина, где занимались проблемой обогащения урана с помощью каскадов диффузионных машин для разделения изотопов.

В Особой папке хранится отчет Курчатова и Кикоина, датированный августом 1945 года. В преамбуле этого документа говорится:

> Работы по использованию внутриатомной энергии урана начались в СССР в 1943 году, когда для этой цели была организована в Академии наук СССР Лаборатория № 2 под руководством академика Курчатова И. В.
>
> Так как лаборатория не имела помещения, оборудования, кадров и урана, ее работа сводилась к анализу полученных нами секретных материалов о работах иностранных ученых над проблемой урана, к расчетам по проверке этих данных и к проведению отдельных экспериментов.
>
> Во второй половине 1944 г. и [в] начале 1945 г. Лаборатории № 2 по решению ГОКО оказана помощь в обеспечении помещением, оборудованием, материалами и кадрами специалистов, что дало ей возможность приступить к проведению собственных исследовательских работ.
>
> Одновременно к разработке отдельных вопросов проблемы урана был привлечен по программе Лаборатории № 2 ряд институтов, конструкторских и проектных организаций СССР (Радиевый, Физический и Энергетический институты АН СССР, Всесоюзный институт минерального сырья, Государственный институт редких металлов, Гос. НИИ-42 НКХП и др.).
>
> Из четырех известных за границей способов получения атомных взрывчатых веществ (урана-235 и плутония-239), а именно: способом «котел уран — графит», способом «котел уран —

[18]Это название использовалось в оперативной переписке советской разведки.

[19]Подпись Председателя ГКО И. В. Сталина на подлиннике отсутствует. В приложенном списке на рассылку указано, что полный текст распоряжения был направлен В. М. Молотову, С. В. Кафтанову, А. Ф. Иоффе, В. Л. Комарову, Я. Е. Чадаеву.

тяжелая вода», способом диффузионным, способом магнитным, руководящие работники Лаборатории № 2 (академики Курчатов, Соболев, члены-корреспонденты Академии наук Кикоин, Вознесенский) считают, что по трем первым из указанных способов Лаборатория № 2 в настоящее время имеет уже достаточные данные для проектирования и сооружения установок[20].

Уже в 1946 году были построены первые газовые компрессоры и освоено их серийное производство. Начались эксперименты по обогащению газообразного шестифтористого урана. Работа требовала решения колоссального числа разнообразных научных, технологических и организационных проблем, ставших на долгие годы главным делом Соболева. Достаточно привести их перечень из справки для Л. П. Берии от 15 августа 1946 года[21]:

1. Выбор общей схемы технологического процесса промышленного разделительного завода.
2. Сырье.
3. Проблема фильтров.
4. Нагнетатели (компрессоры).
5. Проблема уплотнения (герметизация) компрессоров и смазка.
6. Вопросы коррозии материалов в шестифтористом уране.
7. Анализ обогащения легкого изотопа.
8. Проблема регулирования и автоматики.

Соболев работал как в группе по плутонию-239, так и в группе по урану-235[22], организовал и направлял работу вычислителей, разрабатывал вопросы регулирования процесса промышленного разделения изотопов и отвечал за снижение потерь производства. Его роль в атомном проекте возрастала. В феврале 1947 г. Курчатов пишет Берии:

Академик С. Л. Соболев до настоящего времени был ознакомлен с материалами Бюро № 2 только в той части, которая относилась к диффузионному методу. В связи с назначением его на должность заместителя начальника Лаборатории № 2 АН СССР я прошу Вашего разрешения ознакомить академика Соболева С. Л. с материалами Бюро № 2 по всем вопросам проблемы[23].

Испытание РДС-1 состоялось около Семипалатинска в 8 часов местного времени 29 августа 1949 г. Ровно через два месяца более восьмисот участников атомного проекта были награждены орденами. Соболев получил орден Ленина. Еще в середине 1949 г. Лаборатория № 2 была переименована в ЛИПАН — Лабораторию измерительных приборов Академии наук. Усилия Кикоина и Соболева были сфокусированы на производственной деятельности диффузионного завода. Один из пунктов Постановления Совета Министров СССР № 5472-2086сс/оп от 1 декабря 1949 г. гласил:

Возложить на т. Соболева С. Л. (заместителя начальника Лаборатории № 2 Академии наук СССР) руководство расчетно-теоретическим сектором Центральной лаборатории комбината № 813[24], обязав его находиться на комбинате для выполнения указанных работ не менее 50%

---

[20]Полностью документ приведен в [18, с. 307]. На титульном листе есть пометка рукой И. В. Сталина: «Прочесть».

[21]См. [18, с. 567].

[22]Об этом см. [18, с. 386].

[23]Цитируется по [19, с. 432]. На этом совершенно секретном документе, написанном в единственном экземпляре, имеется резолюция от руки: «Согласен. Л. Берия. 21/11–47».

[24]В настоящее время Уральский электромеханический завод, г. Новоуральск.

всего времени (по согласованию с т. Курчатовым И. В.)[25].

В ЛИПАНе Соболев написал главную книгу своей жизни — «Некоторые применения функционального анализа в математической физике».

Атомный проект обогатил научный и личностный потенциал Соболева. До конца жизни огромное место в его творчестве заняла вычислительная математика. С 1952 по 1960 гг. он возглавлял кафедру вычислительной математики МГУ. Уже в Сибири Соболев построил теорию кубатурных формул, удивительную красотой своей универсальности. В ней Соболев синтезировал идеи классических приближенных методов и теории распределений. Вычисления на сетках Соболев стал рассматривать как интегралы, содержащие обобщенные функции, в рамках отстаиваемой им идеи неразрывной связи функционального анализа и теории вычислений.

Работа в ЛИПАНе добавила Соболеву новые яркие краски в понимании математики. По его словам именно в те годы он понял, что для многих задач важен не абстрактный вопрос существования решения, а конкретное предъявление разумного приближенного варианта к назначенному сроку.

Выдающуюся роль в истории отечественной науки сыграли выступления Соболева в октябре 1958 г. на Всесоюзном совещании по философским проблемам естествознания. Детализируя и развивая положения письменного доклада, подготовленного совместно с А. А. Ляпуновым[26], Соболев отстаивал свободу науки от идеологического вмешательства, защищал идеи кибернетики и генетики, остро критикуя неоламаркистскую чепуху[27]. В частности, в докладе говорилось, что «ни один ученый не выдвинул бы тезиса о приспособительной наследственности или направленной эволюции, независимой от отбора» [20, с. 252]. В заключительном слове Соболев сказал[28]:

> ...кибернетика не есть идеалистическая наука, потому что она изучает факты, а факты не бывают ни материалистическими, ни идеалистическими... Нельзя разделить физику на физику материалистическую и физику идеалистическую. Нельзя говорить, что эта атомная бомба материалистическая, а эта — идеалистическая, что этот ускоритель элементарных частиц идеалистический, а этот — материалистический. Таких вещей не бывает. Главная дорога развития физики — это дорога строго научная. Могут быть те или иные философские взгляды, но факты и теории, которые привели к крупнейшим достижениям современной физики, которые мы видим, нельзя классифицировать как материализм и идеализм. Так же точно обстоит дело с кибернетикой...

Материалы конференции были опубликованы значительным тиражом[29], показав академическому сообществу страны, что защита науки может осуществляться не только в почтительной форме личных или коллективных писем в ЦК КПСС.

Гражданская смелость Соболева в отстаивании новых идей генетики, киберне-

[25] См. [19, с. 363–364].

[26] Опубликован в [20, с. 237–260]

[27] Всем было ясно, что объект критики — Т. Д. Лысенко.

[28] См. [20, с. 572].

[29] Книга была подписана к печати 22.10.1959. Следует напомнить, что 29.06.1959 Н. С. Хрущев выступил на Пленуме ЦК КПСС с докладом, где хвалил Т. Д. Лысенко и ругал как научный вклад Н. П. Дубинина, так и руководство Сибирского отделения за назначение Н. П. Дубинина директором Института цитологии и генетики СО АН СССР (см. [21, с. 192–199].

тики и математической экономики в годы послевоенного наступления мракобесов от «марксизма» стоит в одном ряду с его участием в проекте «Энормоз» и освоении научной целины Сибири.

Вклад Соболева в создание атомного оружия отмечен не только званием Героя Социалистического Труда, но и вечной благодарностью нашего народа известным и анонимным защитникам свободы отечества.

Новая производная — новое исчисление

Исследования Соболева связаны с переосмыслением понятия решения дифференциального уравнения. Соболев предложил решать задачу Коши в пространстве функционалов, то есть отказаться от стандартного понимания решения как функции. Фактически Соболев стал считать дифференциальное уравнение решенным даже в тех случаях, когда нам доступны всевозможные интегральные характеристики поведения процесса. При этом решение как функция времени может быть не только неизвестным, но и просто отсутствующим. В науку вошло качественно новое понимание ключевых принципов прогнозирования.

Эйлер еще в 1755 году дал универсальное определение функции, которое почти двести лет воспринималось как наиболее общее и совершенное. В своем знаменитом курсе дифференциального исчисления он писал[30]:

> Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменениям, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает переменное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями.

Обобщенные производные Соболева под эйлерово понятие функции не подпадают. Дифференцирование, предложенное Соболевым, опирается на новое понимание взаимозависимости математических величин. Обобщенная функция определяется неявно с помощью интегральных характеристик своих воздействий на всех представителей заранее выбранного класса пробных функций. Открытия Ньютона и Лейбница подытожили многовековую предысторию дифференциального и интегрального исчисления[31], открыв дорогу новым исследованиям. Достижения Лебега и Соболева продолжили размышления их гениальных предшественников и осветили путь математиков нашего времени[32].

Соболев был среди пионеров применения функционального анализа в математической физике, создав свою теорию в 1935 году. В работах Лорана Шварца[33],

[30] См. [22, с. 38], [23].

[31] Неевропейские корни анализа мало исследованы. В частности, по поводу Секи Такаказу Кова и Мадхава из Сангамаграма см. [24, с. 310], [25].

[32] О предыстории теории распределений см. [26]. Знаменитый спор Эйлера и Даламбера о колеблющейся струне открыл дорогу поискам обобщений понятия решения дифференциального уравнения (см. [26, с. 15–24] и [27]). В свободе Эйлера при обращении с расходящимися рядами легко видеть отблески будущей теории распределений (см. [2, с. 187–188]).

[33] Взгляды Л. Шварца на открытие теории распределений представлены в его автобиографии [28]. Дополнительные литературные ссылки имеются в [29].

независимо пришедшего к тем же идеям спустя целое десятилетие, новое исчисление стало общедоступным, представ в виде элегантной, мощной и чрезвычайно прозрачной теории распределений, утилизировавшей многие прогрессивные идеи алгебры, геометрии и топологии.

Соболев исключительно высоко оценивал вклад Шварца в разработку аппарата преобразования Фурье распределений[34]:

> Обобщенные функции так же, как и обычные функции, могут быть подвергнуты преобразованию Фурье. Можно сказать больше. Преобразование Фурье сталкивалось в классическом анализе с рядом существенных трудностей таких, как расходимость интегралов, невозможность истолковать в определенном смысле получаемые бесконечные выражения и т. п. Теория обобщенных функций сняла многие из этих трудностей и превратила преобразование Фурье в мощное средство анализа[35].

Дифференциальное исчисление семнадцатого века неотделимо от общих воззрений классической механики. Теория обобщенных функций связана с механикой квантовой.

Следует особо подчеркнуть, что квантовая механика не является простым обобщением классической механики. Квантовая механика представляет научное мировоззрение, основанное на новых законах. Классические детерминизм и непрерывность уступили место квантованию и неопределенности. В двадцатом веке человечество вышло на совершенно иной уровень понимания природных процессов.

Аналогичным образом дело обстоит и с математическими теориями современности. Логика наших дней не является обобщением логики Аристотеля. Геометрия банаховых пространств не служит обобщением евклидовой планиметрии. Теория распределений, ставшая исчислением нашего времени, коренным образом преобразила всю технологию математического описания физических процессов с помощью дифференциальных уравнений.

Соболев слышал будущее и дарил людей своими пространствами[36]. Его открытия стали триггером многих революционных изменений математики, счастливыми свидетелями и участниками прогресса которой мы являемся.

Последняя серия математических работ Сергея Львовича Соболева была посвящена тонким свойствам корней полиномов Эйлера...

---

[34] Соболев отсчитывал теорию обобщенных функций от своей работы 1935 года и указывал: «Теория обобщенных функций была позднее разработана Л. Шварцем [21], который, в частности, рассмотрел и исследовал преобразование Фурье обобщенных функций» (см. [30, с. 355]). Здесь имеется курьезная опечатка: правильная ссылка на двухтомник Шварца — [47].

[35] См. [30, с. 415].

[36] Б. Л. Пастернак в безымянном стихотворении с первой строкой «Быть знаменитым некрасиво», датированном 1956 годом, писал (см. [31, с. 74]):

Но надо жить без самозванства,
Так жить, чтобы в конце концов
Привлечь к себе любовь пространства,
Услышать будущего зов.

Литература

1. Брылевская Л. И., *Миф об Остроградском: правда и вымысел*, Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 7 (42), Янус-К, М., 2002.
2. Varadarajan V. S., *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, American Mathematical Society, 2006.
3. Рид К., *Гильберт. С приложением обзора Германа Вейля математических трудов Гильберта*, Физматлит, М., 1977.
4. Гнеденко Б. В., *Михаил Васильевич Остроградский*, ГИТТЛ, М., 1952.
5. Прудников В. Е., *Пафнутий Львович Чебышев*, Наука, Л., 1976.
6. Смирнов В. И. (ред.), *Математика в Петербургском–Ленинградском университете*, Изд. ЛГУ, Л., 1970.
7. Рамазанов М. Д. (ред.), *Сергей Львович Соболев. Страницы жизни в воспоминаниях современников*, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2003.
8. Ладыженская О. А., Бабич В. М. (ред.), *Владимир Иванович Смирнов (1887–1974). Изд. 2-е*, Наука, М., 2006.
9. Соболев С. Л., *Избранные труды. Т.2.*, Институт математики, Новосибирск, 2006.
10. Смирнов В. И., Соболев С. Л., *Биографический очерк [Николай Максимович Гюнтер (1871–1941)]*, Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, ГИТТЛ, М., 1953, С. 393–405.
11. Нейман, Иоганн фон, *Математические методы квантовой механики*, Наука, М., 1964.
12. Канторович Л. В., *О некоторых общих методах расширения пространства Гильберта*, Докл. АН СССР **4** (1935), № 3, 115–118.
13. Канторович Л. В., *Некоторые частные методы расширения пространства Гильберта*, Докл. АН СССР **4** (1935), № 4/5, 163–167.
14. Гельфанд И. М., *Леонид Канторович и синтез двух культур*, Леонид Витальевич Канторович — человек и ученый. Том 1, Изд. «Гео», Новосибирск, 2002, С. 162–163.
15. Лейферт Л. А., Сегал Б. И., Федоров Л. И. (ред.), *На ленинградском математическом фронте*, Гос. социально-эконом. изд., М.–Л., 1931.
16. Кутателадзе С. С., *Корни дела Лузина*, Сибирский журн. индустр. мат. **10** (2007), № 2, 85–92.
17. Демидов С. С., Левшин Б. В. (ред.), *Дело академика Николая Николаевича Лузина*, Русский христианский гуманитарный институт, Санкт-Петербург, 1999.
18. Рябев Л. Д. (ред.), *Атомный проект СССР. Документы и материалы. Том II: Атомная бомба 1945–1954. Книга 2*, Наука, Москва, Саров, 2000.
19. Рябев Л. Д. (ред.), *Атомный проект СССР. Документы и материалы. Том II: Атомная бомба 1945–1954. Книга 4*, Наука, Москва, Саров, 2000.
20. Федосеев П. Н. и др. (ред.), *Философские проблемы современного естествознания*, Изд. Академии наук СССР, М., 1959.
21. Дубинина Л. Г. и Овчинникова И. Н. (сост.), *Николай Петрович Дубинин и XX век*, Наука, М., 2006.
22. Эйлер Л., *Дифференциальное исчисление*, Гостехиздат, Л., 1949.
23. Ruthing D., *Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki*, Math. Intelligencer **6** (1984), № 4, 72–77.
24. Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders Collins Publishing, Philadelphia etc., 1983.
25. Joseph G. G., *The Crest of the Peacock: The Non-European Roots of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2000.
26. Lützen J., *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer, New York etc., 1982.
27. Демидов С. С., *О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке*, Историко-математические исследования. Вып. 21, Наука, М., 1976, С. 158–182.
28. Schwartz L., *A Mathematician Grappling with His Century*, Birkhaüser, Basel etc., 2001.
29. Кутателадзе С. С., *Сергей Соболев и Лоран Шварц*, Вестник РАН **75** (2005), № 4, 354–359.
30. Соболев С. Л., *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974.
31. Пастернак Б. Л., *Собрание сочинений в пяти томах. Том второй*, Изд. «Художественная литература», М., 1969.

СЕРГЕЙ СОБОЛЕВ И ЛОРАН ШВАРЦ: ДВЕ СУДЬБЫ, ДВЕ СЛАВЫ

В истории математики немало людей, которых мы вспоминаем парами. Среди них Евклид и Диофант, И. Ньютон и Г. В. Лейбниц, Я. Больяи и Н. И. Лобачевский, Д. Гильберт и А. Пуанкаре, Н. Бурбаки и В. И. Арнольд. В этом ряду стоят С. Л. Соболев и Л. Шварц, имена которых неразрывно связаны с одним из самых ярких математических достижений XX века — теорией распределений или обобщенных функций, предложившей принципиально новый подход к исследованию уравнений в частных производных.

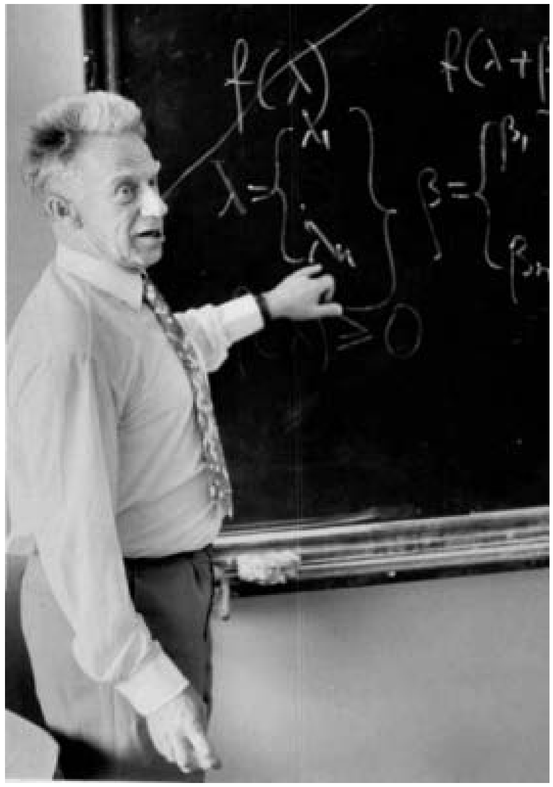
Наиболее законченные и востребованные математические достижения воплощены в формулах и перечнях, списках объектов. Между списками и формулами есть принципиальные отличия. Перечни фиксируют то, что нам открыто. Списки платоновых тел, элементарных катастроф, простых конечных групп сродни «Альмагесту» и гербариям. Они составляют объекты восхищения, совершенные и застывшие. Предмет математического ремесла — формула. Формула возникает как материализация математического творчества, она живет своей особой жизнью и имеет самостоятельную судьбу. Формулу редко используют только по ее прямому назначению. Отчасти формула похожа на домашний прибор, игрушку или программное обеспечение. Редко, кто читает инструкцию по применению нового телевизора или описание правил пользования новой программой — гораздо чаще эти обновки осваивают экспериментально, нажимая подходящие клавиши и кнопки. Так же принято подходить и к формулам. Их «крутят», подставляют в них новые параметры, по-своему трактуют входящие в них символы и т. п.

Математика — ремесло формул, искусство исчисления. Тем, кому эта констатация кажется слабой и неполной, можно напомнить, что в логическом плане теория множеств представляет из себя некоторую разновидность узкого исчисления предикатов.

Теория распределений стала новым дифференциальным исчислением нашего времени. Таков масштаб научного открытия, связанного с именами С. Л. Соболева и Л. Шварца.

Первый вариант статьи подготовлен 10 октября 2003 г. (Препринт ИМ СО РАН № 121). Частично опубликовано в Вестнике РАН, **75** (2005), № 4, 354–359.

Автор благодарит В. А. Александрова и В. П. Голубятникова, которые помогли точнее понять французские источники. Особую благодарность автор приносит Ю. Л. Ершову за настойчивость в предложении сделать доклад на Научной сессии Ученого совета Института математики им. С. Л. Соболева 14 октября 2003 г., посвященной 95-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Автор также признателен В. И. Арнольду и В. С. Владимирову за глубокие замечания к первоначальному тексту доклада, направленные на улучшение изложения и его полноту.



Сергей Львович Соболев

Сергей Львович Соболев родился 6 октября 1908 г. в Петербурге в семье присяжного поверенного Льва Александровича Соболева. Дед Сергея Львовича со стороны отца был потомственным сибирским казаком.

Сергей Львович рано потерял отца и его воспитывала мать, Наталья Георгиевна, высокообразованный преподаватель литературы и истории. Наталья Георгиевна имела и вторую специальность: она окончила медицинский институт и работала доцентом 1-го Ленинградского медицинского института. Мать привила С. Л. Соболеву те принципиальность, честность и целеустремленность, которые характеризовали его как ученого и человека.

Программу средней школы Сергей Львович Соболев освоил самостоятельно, особенно увлекаясь математикой. В годы гражданской войны он вместе с матерью жил в Харькове. Переехав в 1923 г. из Харькова в Петроград, Сергей Львович поступил в последний класс 190-й школы.

В 1924 г. С. Л. Соболев окончил школу с отличием, продолжая параллельно учиться в Первой государственной художественной студии по классу фортепьяно, но поступить в университет не смог по возрасту. В 1925 г. С. Л. Соболев был зачислен на физико-математический факультет Ленинградского университета. В ЛГУ Сергей Львович слушал лекции профессоров Н. М. Гюнтера, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца и др. Под руководством Н. М. Гюнтера он написал дипломную работу об аналитических решениях системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Идеи Н. М. Гюнтера по использованию функций множеств и интегральных тождеств при поиске обобщений понятия решения дифференциального уравнения оказали влияние на дальнейшее творчество С. Л. Соболева[1].

В 1929 г. после окончания университета Сергей Львович был принят в теоретический отдел Ленинградского сейсмологического института. Работая в тесном сотрудничестве с В. И. Смирновым, С. Л. Соболев решил ряд математических задач теории распространения волн.

С 1932 г. Сергей Львович работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова в Ленинграде, а затем с 1934 г. — в Москве. В этот период он предложил новый метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, основанный на обобщении формулы Кирхгофа. Работы, связанные с гиперболическими уравнениями, привели Сергея Львовича к пересмотру классического понятия решения дифференциального уравнения. Предложение С. Л. Соболева ставить и решать задачу Коши в пространстве функционалов было основано на революционном расширении эйлерова понятия функции и зафиксировало 1935 г. как дату рождения теории обобщенных функций.

Определив понятие обобщенной производной, Сергей Львович Соболев обогатил математику пространствами функций, обобщенные производные которых интегрируемы в некоторой фиксированной степени. Эти объекты теперь называют пространствами Соболева.

> Пусть f и g — локально суммируемые функции, определенные в открытом подмножестве G пространства $\mathbb{R}^n$, а α — некоторый мультииндекс. Функция g называется обобщенной производной функции f в смысле С. Л. Соболева или слабой производной порядка α и обозначается $D^\alpha f$, если для всякой пробной функции φ, т. е. такой что носитель φ компактен и лежит в G и φ непрерывно дифференцируема $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ раз в G, выполняется равенство
>
> $$\int\limits_G f(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_G g(x)\varphi(x)\,dx,$$
>
> где $D^\alpha\varphi$ — классическая производная φ порядка α.
>
> Векторное пространство W_p^l, составленное из (классов эквивалентных) локально суммируемых функций f на G, имеющих в G все обобщенные производные $D^\alpha f$, при $|\alpha| \leq l$ суммируемые в степени p, где $p \geq 1$, становится банаховым пространством относительно следующей нормы:
>
> $$\|f\|_{W_p^l} = \Bigg(\int\limits_G |f|^p\,dx\Bigg)^{1/p} + \sum_{|\alpha|=l}\Bigg(\int\limits_G |D^\alpha f|^p\,dx\Bigg)^{1/p}.$$

В 1933 г., в возрасте 24 лет, С. Л. Соболев избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1939 г. он стал ее действительным членом, долгое время оставаясь самым молодым академиком в стране.

---

[1]На особую роль Н. М. Гюнтера в предыстории теории распределений внимание автора обратили А. М. Вершик и В. И. Арнольд.

В 1940-е годы Сергей Львович Соболев изучал системы дифференциальных уравнений, описывающие малые колебания вращающейся жидкости. Сергей Львович получил условия устойчивости вращающегося волчка с полостью, заполненной жидкостью, в зависимости от формы полости и ее параметров, разобрав подробно случаи цилиндрической полости и полости — эллипсоида вращения. Эти исследования С. Л. Соболева привели к возникновению нового направления в общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, посвященного исследованию решений задачи Коши и краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старших производных по времени.

Сергей Львович Соболев одним из первых понял значение вычислительной математики и кибернетики. С 1952 по 1960 гг. С. Л. Соболев возглавлял первую в стране кафедру вычислительной математики МГУ. Исследования С. Л. Соболева этого периода стали одним из истоков общей теории вычислительных алгоритмов, связанной с абстрактным изучением приемов решения больших систем уравнений.

Задачи вычислительной математики в работах С. Л. Соболева обычно ставятся в рамках функционального анализа. Стали крылатыми его слова о том, что теорию вычислений сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин.

Особо стоит выделить важную роль в становлении кибернетики и других новых направлений исследований, которую в 1950-е годы сыграли публичные выступления С. Л. Соболева, открыто вставшего на защиту науки от идеологизированного мракобесия.

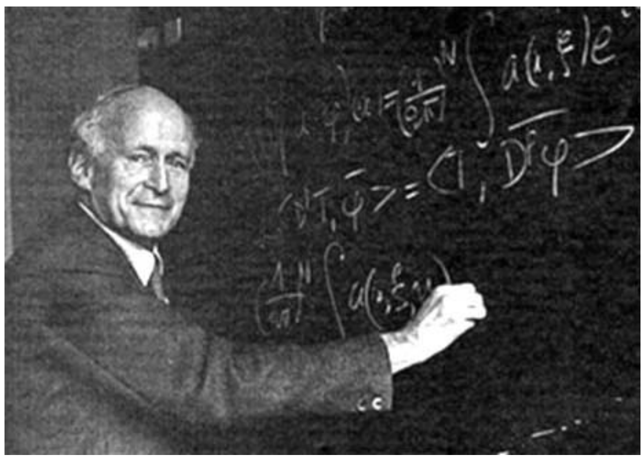
Невозможно переоценить вклад Сергея Львовича в создание ядерного щита нашей страны. С первых лет атомного проекта СССР С. Л. Соболев входил в число руководителей Лаборатории № 2, переименованной по соображениям секретности в 1949 г. в Лабораторию измерительных приборов АН СССР и ставшую впоследствии Институтом атомной энергии им. И. В. Курчатова. Главным участком совместной работы с И. К. Кикоиным было осуществление диффузионного обогащения урана для создания атомного заряда. С. Л. Соболев организовал и направлял работу вычислителей, разрабатывал вопросы регулирования процесса промышленного разделения изотопов, отвечал за снижение потерь производства и решал массу иных организационных и технических вопросов. За работы по созданию ядерного заряда Сергею Львовичу присуждены две Сталинские премии 1-й степени. В январе 1952 г. С. Л. Соболев был удостоен символом высшего признания в СССР, получив звание Героя Социалистического Труда за исключительные заслуги перед государством.

Научная деятельность Сергея Львовича Соболева была неотделима от его организаторской работы в науке. В конце 1950-х годов академики М. А. Лаврентьев, С. Л. Соболев и С. А. Христианович выступили с инициативой организации нового крупного научного центра — Сибирского отделения Академии наук. Для многих ученых СО АН первого призыва веским аргументом в принятии решения о переезде на работу в Новосибирск был пример Сергея Львовича Соболева, привлекательность его личности и его научный авторитет.

Сибирский период научной деятельности Сергея Львовича ознаменовался большими достижениями в теории кубатурных формул. Задача о приближенном интегрировании функций многих переменных является одной из основных и наиболее трудоемких в теории вычислений. Проблема оптимизации формул интегрирования сводится к нахождению минимума нормы функционала погрешности, заданного на некотором пространстве функций. Сергей Львович Соболев предложил оригинальные подходы к названной проблематике, ввел и изучил новые типы оптимальных кубатурных формул.

В 1988 г. ему присуждена высшая награда Российской академии наук — Золотая медаль имени М. В. Ломоносова.

С. Л. Соболев скончался 3 января 1989 г. в Москве.



Лоран Шварц

Лоран Шварц родился в Париже 5 марта 1915 г. в семье хирурга. Среди его родственников было немало выдающихся людей. Ж. Адамар был братом его бабушки. Много знаменитостей было по линии его матери Клэр Дебре (к этой фамилии принадлежало и принадлежит много незаурядных политиков голлистского толка). В 1938 году Л. Шварц женился на Мари-Элен Леви, дочери выдающегося математика П. Леви, одного из основоположников функционального анализа. Мари-Элен со временем стала математиком-профессионалом и заняла позицию полного профессора в 1963 г.

Богатое дарование Л. Шварца проявилось еще в его лицейские годы. Он стал победителем по латыни в наиболее престижном соревновании лицеистов во Франции — Concours Général. Л. Шварц колебался в выборе дальнейшей специальности между «классикой» (греческим и латынью) и геометрией. Любопытно, что Адамар был не в восторге от математических интересов Л. Шварца, так как шестнадцатилетний Лоран не знал дзета-функцию Римана. Как ни удивительно, в сторону геометрии Л. Шварца подталкивали один из педагогов по классике и педиатр Робер Дебре.

Лоран поступил в Высшую Нормальную Школу после двухлетней подготовки в 1934 г. вместе с Г. Шоке, победителем Concours Général по математике. Вместе с ними поступила и Мари-Элен, ставшая одной из первых слушательниц Высшей Нормальной Школы. В те годы математическую атмосферу в Высшей Нормальной Школе определяли такие люди, как Э. Борель, Э. Картан, А. Данжуа, М. Фреше, П. Монтель. В соседнем Колледже Франции читал лекции А. Лебег и вел семинары Ж. Адамар. В студенческие годы возникла и укрепилась неистребимая любовь Л. Шварца к теории вероятностей под воздействием бесед со своим будущим тестем Полем Леви.

Вскоре после окончания Высшей Нормальной Школы Л. Шварц решил пройти обязательную военную службу (сроком 2 года) и в 1939–1940 гг. он остался на службе ввиду военного времени. Военные годы были особенно тяжелыми для молодой четы Шварцев — как евреи они не могли оставаться в оккупированной зоне и вынуждены были покинуть родной север и жить на небольшие и не слишком определенные стипендии (в частности, от фонда Мишлена, всемирно известной фирмы по производству шин). В 1941 г. Л. Шварц встретился в Тулузе с А. Картаном и Ж. Дельсартом, которые посоветовали молодой чете перебраться в Клемон-Ферран, где в те годы собрались вытесненные немцами профессора Страсбургского университета Ж. Дьедонне, Ш. Эресманн, А. Лихнерович, С. Мандельбройт. Там Л. Шварц написал кандидатскую диссертацию по приближению непрерывной функции на оси суммами экспонент.

К сожалению, в математическую судьбу Л. Шварца опять вмешалась война — семья вынуждена была скитаться под чужими документами. Любопытно, что при открытии распределений в ноябре 1944 г. Л. Шварц жил под фамилией Селимартин. Основы своей теории Л. Шварц опубликовал в Анналах Гренобльского университета в 1945 г. Процесс своего открытия он сам характеризовал как «церебральную перколяцию». После года работы в Гренобле Л. Шварц получает позицию в Нанси, где попадает в самый центр «бурбакизма» — как известно, Н. Бурбаки жил в Нанкаго, смеси Нанси и Чикаго. В Чикаго был А. Вейль, а в Нанси — Ж. Дельсарт, Ж. Дьедонне. Вскоре Л. Шварц был введен в состав группы Бурбаки. В 1950 г. он получил Филдсовскую медаль за теорию распределений, а затем увидел свет его знаменитый двухтомник “Théorie des Distributiones”.

В 1952 г. Л. Шварц вернулся в Париж и стал преподавать сначала в Сорбонне, а с 1959 г. — в Политехнической Школе (где работал его тесть П. Леви).

Прямыми учениками Л. Шварца были многие знаменитости, среди них А. Гротендик, Ж.-Л. Лионс, Б. Мальгранж и А. Мартино.

Л. Шварц писал: «Чтобы совершить открытие в математике, надо преодолеть сдержанность и традицию. Нельзя двигаться вперед, не будучи подрывным элементом». Это высказывание хорошо коррелирует с чрезвычайно активной и разноплановой общественной деятельностью Л. Шварца. Став в юности троцкистом из протеста против капиталистических мерзостей и сталинского террора 1930-х годов, он никогда в своей жизни не мирился с тем, что воспринимал как нарушение прав человека, угнетение и несправедливость. Он был активным борцом против американской войны во Вьетнаме и советского вторжения в Афганистан. Сражался за освобождение ряда математиков, преследуемых по политическим мотивам, среди них Хосе Луи Массера, Вацлав Бенда и др.

Л. Шварц был выдающимся лепидоптеристом и обладал коллекцией, насчитывающей более 20 000 бабочек. Не случайно изображения бабочек украшают суперобложку второго издания его «Теории распределений».

Лоран Шварц скончался 4 июля 2002 г. в Париже.

Успехи теории распределений

В основе теории распределений лежит стремление применить технологии функционального анализа для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Функциональный анализ характеризуется алгебраизацией, геометризацией и социализацией аналитических задач. Под социализацией обычно понимают включение конкретной задачи в целый класс аналогичных проблем. Социализация позволяет стереть «случайные черты» — избавиться от трудностей, привносимых чрезмерной спецификой задачи. К началу 1930-х годов достоинства функционального анализа уже были продемонстрированы в сфере интегральных уравнений. На повестке дня стояли уравнения дифференциальные.

Следует подчеркнуть, что размышления над природой интегрирования и дифференцирования лежат в основе большинства теорий современного функционального анализа. Это неудивительно ввиду особой роли этих замечательных линейных операций. Общеизвестно, что интегрирование обладает более привлекательными свойствами по сравнению с дифференцированием: эта операция монотонна и повышает гладкость. Указанные приятные свойства начисто отсутствуют у оператора дифференцирования. Всем известно, что классическое дифференцирование — это замкнутый, но не непрерывный оператор (в естественной топологии, порожденной метрикой Чебышева). Ряды гладких функций, вообще говоря, нельзя дифференцировать почленно, что существенно затрудняет применение аналитических средств для решения дифференциальных уравнений.

В настоящее время мало кто усомнится в том, что центральным в теории распределений является понятие обобщенной производной. Производная рассматривается теперь как оператор, действующий на негладкие функции по тем же интегральным законам, которым подчиняется процедура взятия классической производной. Именно такой подход был впервые явно сформулирован С. Л. Соболевым. На предложенном пути стало возможным капитально расширить запас формул дифференцирования. В частности, оказалось, что любые распределения обладают производными любых порядков, поточечно сходящиеся ряды распределений можно сколь угодно много раз дифференцировать почленно, а многие «традиционно расходящиеся» ряды Фурье допускают суммирование в виде явных формул. Математика приобрела дополнительные фантастические степени свободы, что обессмертило имя С. Л. Соболева как пионера нового исчисления.

Развернутые изложения достижений новой теории появились в свет практически одновременно. В 1950 г. в Париже вышел первый том «Теории распределений» Л. Шварца, а в Ленинграде — книга С. Л. Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике». В 1962 г. Сибирское отделение издало репринт этой книги, а в 1963 г. вышел в свет ее английский перевод в США. Второе издание книги Л. Шварца было немного расширено (за счет включения обобщенной версии теории потоков Ж. де Рама) и опубликовано в 1966 г. Любопытно, что Л. Шварц практически не изменил историческое введение к книге.

Предложенные теорией распределений новые методы оказались столь сильными, что позволили выписать в некотором явном виде общее решение произвольного дифференциального уравнения в частных производных в случае, когда коэффициенты при производных постоянны. Дело сводится к наличию фундаментальных решений — частных решений, отвечающих случаю, когда в правой части уравнения поставлена дельта-функция П. Дирака. Существование таких решений было установлено уже в 1953–1954 гг. независимо в работах Б. Мальгранжа и Л. Эренпрайса. Но лишь в 1994 г. фундаментальное решение было выписано явно сначала Х. Кёнигом, а затем несколько позже и в более элементарном виде Н. Ортнером и П. Вагнером. Сформулируем их результат.

Теорема. *Пусть $P(\partial) \in \mathbb{C}[\partial]$, $m := \deg P$ – степень многочлена P, $\eta \in \mathbb{R}^n$ и $P_m(\eta) \neq 0$, где P_m — главная часть P. Тогда распределение E, задаваемое формулой*

$$E := \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int\limits_{\mathbb{T}} \lambda^m e^{\lambda \eta x} \mathfrak{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(\frac{\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}}{P(i\xi + \lambda\eta)} \right) \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda},$$

является фундаментальным решением оператора $P(\partial)$, причем $E/\operatorname{ch}(\eta x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Полезно обратить внимание на структуру этой формулы, показывающей роль преобразования Фурье для распределений $\mathfrak{F}$ и пространства Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, составленного из умеренных распределений[2].

Факт существования фундаментального решения у произвольного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами по праву носит название *теоремы Мальгранжа — Эренпрайса.* Трудно переоценить это замечательное достижение, ставшее одним из триумфов абстрактной теории топологических векторных пространств.

Путь от обобщенных решений к классическим лежит через пространства Соболева. Исследование вложений и следов пространств Соболева и их обобщений стало одним из основных направлений современной теории функций вещественной переменной. Достаточно назвать таких математиков, как С. М. Никольский, О. В. Бесов, Г. Вейс, В. П. Ильин, В. Г. Мазья, чтобы представить масштабы этого математического направления. Десятки книг упоминают в своем названии пространства Соболева, что бывает не так уж часто в нашей науке.

Широкий пласт современных исследований связан с применением обобщенных функций в математической и теоретической физике, в комплексном анализе, в теории псевдодифференциальных операторов, тауберовой теории и в других разделах математики.

[2] Они же «обобщенные функции медленного роста».

Физические источники теории распределений и связи последней с теоретической физикой — предметы большой важности, требующие специального и подробного анализа, выходящего за рамки этой статьи[3]. Ограничимся здесь лишь краткими историческими замечаниями В. С. Владимирова[4]:

> Даже сами создатели этой теории С. Л. Соболев [4] и Л. Шварц (см. [17]) занимались приложениями теории обобщенных функций в математической физике. Н. Н. Боголюбов после беседы с С. Л. Соболевым по обобщенным функциям использовал его классы [2] основных C^m_{comp} и обобщенных $(C^m_{\mathrm{comp}})^*$ функций при построении своей аксиоматической квантовой теории поля [18–20]. Это относится также к аксиоматике Вайтмана [21]. Более того, без обобщенных функций вообще нельзя построить аксиоматику квантовой теории поля. А в теории дисперсионных соотношений [22], выводимых из аксиоматики Боголюбова, обобщенные функции (и их обобщения — гиперфункции) выступают как граничные значения голоморфных функций (многих) комплексных переменных. Этот факт и связанные с ним аспекты, например, теорема об «острие клина» Боголюбова существенно обогащают теорию обобщенных функций.

Разные мнения об истории распределений

Ж. Лерэ, один из самых ярких французских математиков XX века, удостоенный в 1988 г. вместе с С. Л. Соболевым Золотой медали имени М. В. Ломоносова, отмечал в своем отзыве о трудах С. Л. Соболева 1930–1955 гг., написанном при выборах С. Л. Соболева в Академию наук Института Франции в 1967 г.:

> Теория распределений получила в настоящее время большое развитие благодаря теории векторных топологических пространств и их двойственности, благодаря понятию распределения умеренного роста, представляющему собой одно из важных достижений Л. Шварца (Париж), позволившим ему построить прекрасную теорию преобразований Фурье для распределений; Ж. де Рам (G. de Rham) ввел в дополнение к понятию распределения понятие потока, которое включает понятия дифференциальной формы и топологической цепи; Л. Хёрмандер (L. Hörmander, Лунд, Принстон), Б. Мальгранж (B. Malgrange, Париж), Ж.-Л. Лионс (J.-L. Lions, Париж) с помощью теории распределений обновили теорию уравнений с частными производными; П. Лелон (P. Lelong, Париж) установил одно из фундаментальных свойств аналитических множеств. Богатый содержанием двухтомный трактат Л. Шварца и еще более богатый пятитомный трактат Гельфанда и Шилова (Москва) — все эти достижения, столь важные, что уже один лишь французский вклад заслуживает высших наград, присужденных нашим Сообществом, приложения, которые получила теория распределений во всех областях математики, теоретической физики и численного анализа ныне подобны густому лесу, который скрывает дерево, из зерен которого он вырос. Впрочем, мы знаем, что если бы С. Л. Соболев не сделал это открытие около 1935 г. в России, оно было бы сделано во Франции незадолго до 1950 г., а несколько спустя в Польше; США также льстят себя мыслью, что они сделали бы

[3]Некоторые исторические подробности см. в книге [24], а также в статье [25], с которой Ж.-М. Кантор ознакомил автора заблаговременно при любезном содействии Ч. Дэвиса, главного редактора журнала The Mathematical Intelligencer. По инициативе Ч. Дэвиса статью Ж.-М. Кантора сопровождают краткие послесловия [26] и [27].

[4]Цитируется по рукописному отзыву для Вестника РАН от 10 декабря 2003 г.

его в ту же пору: математическая наука и различные ее технические приемы запоздали бы по сравнению с Россией лишь на 15 лет...

Резким контрастом с этой оценкой звучит суждение Ф. Трева, который в статье, посвященной памяти Л. Шварца и вышедшей в октябре 2003, писал:

Математиком 1930-х годов, наиболее близко подошедшим к общему определению распределения, был Соболев в его работах [Соболев, 1936] и [Соболев, 1938][5] (Лерэ имел обыкновение ссылаться на «распределения, изобретенные моим другом Соболевым»). В самом деле, Соболев действительно определяет распределения данного, но произвольного конечного порядка m как *непрерывные линейные функционалы* на пространстве C^m_{comp} финитных функций класса C^m. Он фиксирует целое число m; он никогда не рассматривает пересечение C^∞_{comp} пространств C^m_{comp} по всем m. Это тем более удивительно, что он доказывает, что C^{m+1}_{comp} плотно в C^m_{comp}, используя прием Винера свертывания функций $f \in C^m_{\mathrm{comp}}$ с последовательностью функций, принадлежащих C^∞_{comp}! В связи с этой явной слепотой по отношению к возможной роли C^∞_{comp}, любопытно, что в 1944 г., когда Шварц заикнулся Анри Картану о своем намерении использовать элементы C^∞_{comp} в качестве пробных функций, Картан попытался разубедить его: «Они уж чересчур страшноватенькие (trop monstrueuses)».

Используя сопряжение, Соболев определяет произведение функционалов, принадлежащих $(C^m_{\mathrm{comp}})^*$, на функции из C^m и дифференцирование этих функционалов: d/dx отображает $(C^m_{\mathrm{comp}})^*$ в $(C^{m+1}_{\mathrm{comp}})^*$. Но опять нет и упоминания ни о дираковской $\delta(x)$, ни о свертке, нет и никакой связи с преобразованием Фурье. Он ограничивает себя применением своего нового подхода к переформулировке и решению задачи Коши для линейного гиперболического уравнения. И он и не пытается развить свои замечательные открытия. Только после войны он наконец изобретает пространства Соболева H^m и то только для целых $m \geq 0$. Надо ли говорить, что Шварц не читал этих статей Соболева ввиду военной службы и мировой войны (и невежества западных математиков относительно работ их советских коллег). Нет сомнений, что знакомство с этими статьями сберегло бы ему месяцы тревожной неопределенности.

К чести Ф. Трева несколько позже он отходит от оценки опубликованных работ по тому, чего в них нет, и пишет о том, что обессмертило имя Л. Шварца:

Если допустить, что Шварца можно заменить в качестве изобретателя распределений, какие вещи тем не менее можно будет рассматривать как его важнейший вклад в их теорию? Автор этой статьи может упомянуть по крайней мере две из них, которые сохранятся: (1) решение о том, что пространство Шварца $\mathcal{S}$ функций, быстро убывающих на бесконечности, и его сопряженное $\mathcal{S}'$ являются «правильными» рамками для анализа Фурье, (2) теорема Шварца о ядре.

Мнение Ф. Трева почти полностью совпадает с суждением самого Л. Шварца, попавшим в его автобиографию, опубликованную в 1997 г. Более того, в этой автобиографии Л. Шварц написал о С. Л. Соболеве даже следующее:

...он не установил теорию применительно к общим приложениям, а ограничился только специальным вопросом: найти обобщенное решение уравнения в частных производных со вторым членом и с данными начальными условиями. Он превратил начальные условия во второй

[5] Имеются в виду статьи в Мат. сборнике [2, 3].

> член и представил их в форме функционалов, записанных по границе. Он доказал также замечательную теорему о гиперболических уравнениях в частных производных второго порядка. Даже сегодня она является одним из лучших приложений теории распределений, это очень удачная находка. Но все эти вещи оставались незавершенными. Его статья 1936 г., написанная по-французски, называется «Новый метод решения проблемы Коши для линейных нормальных гиперболических уравнений». После этой статьи он не сделал ничего нового в этом направлении, по крайней мере ничего плодотворного. Другими словами, сам Соболев не увидел важности своего собственного открытия.

Невозможно согласиться с этими оценками. Довольно странно читать об отсутствии упоминаний дельта-функции Дирака среди обобщенных функций Соболева вопреки ее очевидному присутствию во всех пространствах $(C^m_{\mathrm{comp}})^*$.

Поражает полное отсутствие каких-либо упоминаний классической книги С. Л. Соболева 1950 г., которая долгие годы была настольной у многих специалистов по функциональному анализу и уравнениям в частных производных. И наконец, в 1997 г. Л. Шварц не был на военной службе и не участвовал в мировой войне. Значит, были какие-то другие причины, по которым он не упоминает о книге С. Л. Соболева «Введение в теорию кубатурных формул», где разработаны принципиально новые приложения теории распределений к вычислительной математике. Свои пионерские результаты в области численного интегрирования С. Л. Соболев основывал на развитии теории преобразования Фурье обобщенных функций, разработанной Л. Шварцем.

Сдержанный в оценках в свои зрелые годы, исключительно тактичный и скромный человек, С. Л. Соболев всегда уклонялся от сколь-либо подробных экскурсов в историю теории распределений как в личных беседах, так и в своих многочисленных сочинениях. Все, что он счел необходимым оставить будущим поколениям по этому поводу, заключено в следующих указаниях об истории теории распределений, предваряющих главу VIII его книги «Введение в теорию кубатурных формул», опубликованной в 1974 г.:

> Обобщенные функции представляют собой «идеальные элементы», которые пополняют классические функциональные пространства по тому же образцу, как вещественные числа пополняют множество рациональных.
>
> В этой главе мы изложим вкратце необходимую нам в дальнейшем теорию таких функций. Мы будем придерживаться способа изложения, близкого к тому, который был впервые использован автором в 1935 году [16][6]. Теория обобщенных функций была позднее разработана Л. Шварцем [21][7], который, в частности, рассмотрел и исследовал преобразование Фурье обобщенных функций.
>
> Исторически обобщенные функции в явном виде встречались уже в исследованиях по теоретической физике, в работах Ж. Адамара, М. Риса, С. Бохнера и других.

Поэтому можно лишь отчасти согласиться со следующей констатацией Л. Шварца [9, с. 248]:

[6] Ссылка на статью 1936 г. в Мат. сборнике [2].

[7] Ссылка на двухтомник Л. Шварца [7, 8]. Ссылка на [21] — опечатка: должно быть [47].

> ...Соболев и я (и все прочие до нас) были хорошо подготовлены нашей эпохой, нашим окружением и нашими предшествующими работами. Это никому не добавляет славы, но каждый из нас развивал свой оригинальный подход (более того, каждый игнорировал работы всех остальных).

Многие согласятся, что арбитром в теории распределений следует считать И. М. Гельфанда. Написанная им с учениками многотомная серия монографий «Обобщенные функции», начатая еще в середине 1950-х годов, остается одной из вершин мировой математической литературы, энциклопедией теории распределений. В предисловии к первому изданию первого выпуска этой серии И. М. Гельфанд писал:

> Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С. Л. Соболев в 1936 г. ... В 1950–1951 гг. появилась монография Л. Шварца «Теория распределений». В этой книге Л. Шварц систематизировал теорию обобщенных функций, связал воедино все прежние подходы, привлек к ее обоснованию теорию линейных топологических пространств и получил ряд существенных и далеко идущих результатов. После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года приобрели чрезвычайно широкую популярность.

Это суждение взвешено и справедливо. Его стоит принять.

Классицизм и романтизм

Размышляя о судьбах С. Л. Соболева и Л. Шварца, невозможно обойти вопрос о причинах поляризации оценок, касающихся математического открытия, связанного с их именами. Наивно полагать, что этот вопрос когда-либо получит простой и полный ответ, убедительный для всех и каждого. Достаточно обратиться к имеющемуся опыту, касающемуся других знаменитых пар математиков, споры о судьбе и творчестве которых продолжаются иногда столетиями, вызывая резкие столкновения мнений по сей день. Думается, что истоки этого явления довольно универсальны и заключены не только в особенностях личностей обсуждаемых людей, но и, не в последнюю очередь, в природе самого математического творчества.

Прибегая к несколько рискованной аналогии, можно отметить, что математике присущи черты, ассоциирующиеся с теми направлениями в искусстве, которые принято называть классицизмом и романтизмом. Трудно не увидеть классические черты эллинской традиции в сочинениях Евклида, И. Ньютона, Я. Больяи, Д. Гильберта и Н. Бурбаки. Невозможно не отозваться на аккорды романтического гимна человеческому гению, звучащие со страниц сочинений Диофанта, Г. В. Лейбница, Н. И. Лобачевского, А. Пуанкаре и В. И. Арнольда.

Лучшие черты математического классицизма и романтизма нашли воплощение в творчестве С. Л. Соболева и Л. Шварца. Эти люди и их достижения навсегда останутся с нами...

Литература

1. Соболев С. Л., *Задача Коши в пространстве функционалов*, Докл. АН СССР **3** (1935), № 7, 291–294.
2. Соболев С. Л., *Méthode nouvelle à résoudre le probléme de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Мат. сборник **1** (1936), № 1, 39–70.
3. Соболев С. Л., *Об одной теореме функционального анализа*, Мат. сборник **4** (1938), № 3, 471–496.
4. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.
5. Соболев С. Л., *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974.
6. Schwartz L., *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, Annales Univ. Grenoble **21** (1945), 57–74.
7. Schwartz L., *Théorie des Distributiones.* Tome I, Hermann, Paris, 1950.
8. Schwartz L., *Théorie des Distributiones.* Tome II, Hermann, Paris, 1951.
9. Schwartz L., *Un Mathématicien aux Prises avec le Siècle*, Editiones Odile Jacob, Février, 1997.
10. Ortner N. and Wagner P., *A Short Proof of the Malgrange–Ehrenpreis Theorem*, Functional Analysis (Trier, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, С. 343–352.
11. Ortner N. and Wagner P., *A Survey on Explicit Representation Formulae for Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators*, Acta Appl. Math. **47** (1997), № 1, 101–124.
12. Лерэ Ж., *Отзыв о трудах С. Л. Соболева* 1930–1955 *гг.* (Публикация А. П. Юшкевича), Историко-математические исследования, Т. 34, Наука, М., 1993, С. 267–273.
13. Tréves F., Pisier G., and Yor M., *Laurent Schwartz* (1915–2002), Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), № 9, 1072–1084.
14. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними.* Изд. 2, ГИФМЛ, М., 1959.
15. Chandrasekharan K., *The Autobibliography of Laurent Schwartz*, Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), № 9, 1141–1147.
16. Кутателадзе С. С. (Ред.), *Сергей Львович Соболев* (1908–1989)*. Биобиблиографический указатель*, Изд. Ин-та математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 2003.
17. Шварц Л., *Математические методы для физических наук*, Мир, М., 1965. (Перевод с фр.)
18. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантовых полей*, Наука, М., 1984.
19. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Оксак А. И., *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
20. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., *Вопросы теории дисперсионных соотношений*, Физматлит, М., 1958.
21. Streater R. and Wightman A. S., *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, 1964.
22. Владимиров В. С., *Уравнения математической физики. Изд. 5*, Наука, М., 1988.
23. Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике. Изд. 2*, Наука, М., 1979.
24. Lützen J., *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, New York etc., 1982.
25. Kantor J.-M., *Mathematics East and West, Theory and Practice: The Example of Distributions*, Math. Intelligencer **26** (2004), № 1, 39–50.
26. Kutateladze S. S., *Some Comments on Sobolev and Schwartz*, Math. Intelligencer **26** (2004), № 1, 51.
27. Lax P., *The Reception of the Theory of Distributions*, Math. Intelligencer **26** (2004), № 1, 52.

Кутателадзе Семён Самсонович

Соболев и исчисление XX века

Препринт № 200

Ответственный за выпуск
академик Ю. Г. Решетняк

Издание подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом

This publication was typeset using $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro package

Подписано в печать 25.01.08. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ № 112.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск