РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Препринт 241

Май 2010

С.С. Кутателадзе

РЕИНКАРНАЦИЯ ИДЕЙ ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА

НОВОСИБИРСК

УДК 517.95:517.98 Дата поступления 11 мая 2010 г.

Кутателадзе С. С.
Реинкарнация идей прикладного анализа. — Новосибирск, 2010. — 16 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 241)

Доклад 8 мая 2010 г. на конференции «Теория приближений» в Международном математическом институте им. Л. Эйлера о современном состоянии некоторых идей прикладного анализа.

Kutateladze S. S.
Reincarnation of Ideas of Applied Analysis.

This is a talk about the present state of some ideas of applied analysis on May 8, 2010 at the conference “Approximation Theory” in the Euler Mathematical Institute.

Адрес автора:
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4. 630090 Новосибирск, Россия;
E-mail address: sskut@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН   Препринт № 241, май 2010

РЕИНКАРНАЦИЯ ИДЕЙ ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА

1. Повестка

- Предмет сообщения — современное состояние и границы применимости методов мажорирования, дискретизации и скаляризации, предложенных одним из пионеров вычислительной математики Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912–1986).
- Основное внимание уделено новым возможностям в теории линейных неравенств и, в частности, операторным вариантам леммы Фаркаша.

2. Предмет математики

- Предмет математики — формы человеческого мышления.
- Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний.
- Математика была и остается ремеслом формул, искусством вычисления, наукой исчислять.
- Со временем меняются требования к доказательствам и технологиям их получения, возникает деление математики на чистую и прикладную.

3. Фрэнсис Бэкон

- «Математика бывает или чистая, или смешанная. К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом... Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики...».

  Великое восстановление наук. Разделение наук (1605).

4. Математика чистая и прикладная

- Спустя полтора века в 1761 г. Леонард Эйлер использовал термин «чистая математика» в заголовке сочинения “Specimen de usu observationum in mathesi pura.” Примерно в то же время термин «чистая математика» попал в старейшую английскую энциклопедию *Encyclopaedia Britannica.* В XIX веке «смешанную» математику начинают именовать «прикладной».
- Появляются знаменитые журналы *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (основанный Жозефом Лиувиллем в 1836 г.) и *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1857 г.).
- Искусство и ремесло математической техники для задач других наук составляют предмет математики прикладной.

5. Механика и физика

- Традиционной сферой приложения математики XIX века была классическая механика, понимаемая в самом широком смысле. Отражением этой исторической традиции служат механико-математические и математико-механические факультеты ведущих университетов России.
- Начало XX века отмечено резким расширением сферы приложений математики. Возникла квантовая механика, потребовавшая развития нового математического аппарата. Теория операторов в гильбертовых пространствах и теория обобщенных функций были ориентированы, прежде всего, на адаптацию эвристических методов новой физики.

6. Математизация социума

- В 1920–1930 гг. социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов.
- Существенно возросла потребность в статистической обработке данных.
- Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов.
- Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

7. Функциональный анализ и прикладная математика

- В 1930 годах прикладная математика стремительно сближается с нарождающимся функциональным анализом.
- Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований.
- В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Канторович.

8. Принцип Канторовича

- «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

  Канторович, Докл. АН СССР (1935).

9. Линейные неравенства

- Пространства Канторовича дали рамки для построения теории линейных неравенств, необходимой в приближенных вычислениях для оценок точности.
- Поставщиком линейных неравенств в век свободы стала экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно формулировать в терминах частичного сравнения.
- Теория линейных неравенств неразрывна с выпуклыми множествами, представляющими полные решения систем линейных неравенств.

10. Линейное программирование

- Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Как известно, пионером здесь быль Жан Батист Фурье, считавший эту тему одной из вершин своей работы.
- Открытие линейного программирования Канторовичем последовало вскоре за созданием им основ теории своих пространств.

11. Функциональный анализ и прикладная математика

- В конце 1940 годов Канторович в серии работ формулирует и развивает тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики.
- Канторович выделял метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

12. Три технологии

- Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах.
- Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов из доклада С. Л. Соболева, Л. А. Люстерника и Л. В Канторовича, сделанного в 1956 г. на Третьем Всесоюзном математическом съезде.
- Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов или *скаляризацию* векторных целей.

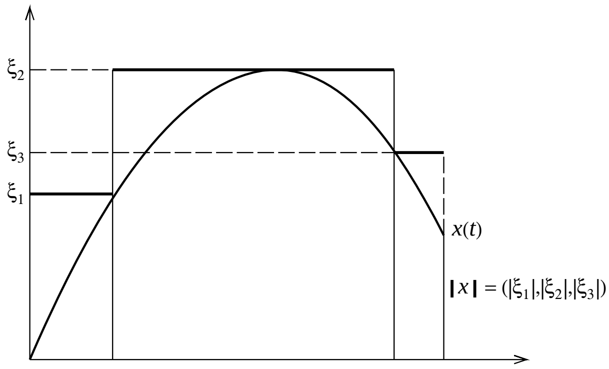
13. Абстрактная норма

- «Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений».

  Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

14. Нормирование последовательностей

- $$\mathopen{|\!|}(\xi_1, \xi_2, \dots)\mathclose{|\!|} = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \geq N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$



- «Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних».

  Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

15. Мажорирование

- Пусть X и Y — вещественные векторные пространства, и заданы векторные нормы $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$

- Если при этом $|Tx|_Y \leq S|x|_X \quad (x \in X)$, то S называют *мажорантой* T.
- *Точная мажоранта* $|T|$ — наименьший положительный оператор из E в F, для которого $|Tx| \leq |T|(|x|) \quad (x \in X)$.

16. Математика и логика

- Революционные изменения математики на рубеже XIX и XX веков связаны с возникновением математической логики, подвергшей анализу сам процесс формального доказательства. Математика стала рефлексивной наукой, занятой не только поиском истины, но и анализом собственных способов ее поиска.
- Новые черты математики афористично обрисовал Соломон Бохнер блестящей заменой слова «миф» во фразе одного литературоведа:

  “Mathematics is a form of poetry which transcends poetry in that it proclaims a truth; a form of reasoning which transcends reasoning in that it wants to bring about the truth it proclaims; a form of action, of ritual behaviour, which does not find fulfilment in the act but must proclaim and elaborate a poetic form of truth.”

  Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (1966).

17. Булевозначный анализ

- Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств.
- Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича.
- Каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

18. Булевозначный универсум

- Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра. Взяв ординал α, положим

$$V_\alpha^{(\mathbb{B})} := \{x \mid (\exists \beta \in \alpha)\ x : \mathrm{dom}(x) \to \mathbb{B} \ \&\ \mathrm{dom}(x) \subset V_\beta^{(\mathbb{B})}\}.$$

- *Булевозначный универсум*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

  где On — класс всех ординалов.
- Каждой формуле φ теории ZFC, суженной на $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, отвечает оценка истинности $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$.

19. Спуски и подъемы

- Пусть φ — формула ZFC и $y \in \mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Положим $A_\varphi := A_{\varphi(\cdot,\ y)} := \{x \mid \varphi(x,\ y)\}$.
- *Спуск* $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ — это

$$A_\varphi{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![\varphi(t,\ y)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

- Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t *удовлетворяет* $\varphi(\cdot,\ y)$ *внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- *Спуск* $x{\downarrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — определяется так:

$$x{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![t \in x]\!] = \mathbb{1}\},$$

  т. е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Класс $x{\downarrow}$ — множество.
- Если x — непустое множество внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то

$$(\exists z \in x{\downarrow})[\![(\exists t \in x)\ \varphi(t)]\!] = [\![\varphi(z)]\!].$$

- Функтор *подъема* действует в противоположном направлении.

20. Булевозначные числа

- Внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует объект $\mathscr{R}$, моделирующий $\mathbb{R}$, т. е.
$$[\![\mathscr{R} \text{ – поле вещественных чисел}]\!] = \mathbb{1}.$$
- Пусть $\mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск носителя $|\mathscr{R}|$ алгебраической системы $\mathscr{R} := (|\mathscr{R}|, +, \cdot, 0, 1, \le)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- Осуществим спуск структур из $|\mathscr{R}|$ на $\mathscr{R}{\downarrow}$ по правилам:
$$x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$x \le y \leftrightarrow [\![x \le y]\!] = \mathbb{1};$$
$$\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^{\wedge} x = y]\!] = \mathbb{1}\ (x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).$$
- Теорема Гордона. *$\mathscr{R}{\downarrow}$ со спущенными структурами — расширенное пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, изоморфной $\mathbb{B}$.*

21. Спуск леммы Фаркаша

- Классическая лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации.
- Скаляризация, предлагаемая булевозначным анализом, открывает нам некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств.

22. Пример

- Пусть $A_1, \dots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.
- *Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*

  (1) *Существуют $x \in L_p$ и измеримые подмножества $U, V \subset T$, причем $\mu(U) \ne 0$, $U \subset V$ такие, что*
$$Bx(t) > 0\ (t \in U), A_1x(t) \le 0, \dots, A_Nx(t) \le 0 \quad (t \in V).$$
  (2) *Найдутся положительные измеримые функции $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ на T, для которых*
$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

23. Постановка

- Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}$. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y.
- Если X снабжено некоторой Y-полунормой, под $L^{(m)}(X, Y)$ мы будем понимать пространство мажорированных линейных операторов из X в Y.
- Для $T : X \to Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем $\{T \le y\} := \{T(\cdot) \le y\} := \{x \in X \mid Tx \le y\}$ и $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.

- $\mathrm{Orth}(Y)$ — коммутант $\mathbb{B}$ в $L^{(r)}(Y)$.

24. Неравенства: явное доминирование

- Ищем $\mathfrak{X}$ такой, что

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & W \arrow[d, dotted, "\mathfrak{X}"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

- $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$.
- *Если W упорядочено W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, то*[1]

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

25. Фаркаш: неявное доминирование

Лемма 1. *Пусть X — векторное пространство над подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Допустим, что f и g — это R-линейные функционалы на X; т. е. $f, g \in X^{\#} := L(X, \mathbb{R})$.*

Включение

$$\{g \leq 0\} \supset \{f \leq 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$, такое что $g = \alpha f$.

26. $\mathbb{R}$: явное доминирование

- Лемма 2. *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное пространство над подполем R поля $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $f_1, \dots, f_N$ и g — это ограниченные R-линейные функционалы над X, символически $f_1, \dots, f_N, g \in X^* := L^{(m)}(X, \mathbb{R})$.*
- *Включение*

$$\{g \leq 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \leq 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что $g = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$.

27. Контрпример: нет доминирования

- Лемма 1, описывающая следствия одного неравенства, не ограничивает класс рассматриваемых функционалов.
- Аналогичная версия леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто неверна.
- Включение $\{f = 0\} \subset \{g \leq 0\}$, эквивалентное включению $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, не влечет того, что f и g пропорциональны в случае произвольного подполя $\mathbb{R}$. Достаточно рассмотреть $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{Q}$ и тождественный автоморфизм $\mathbb{Q}$.

[1]Теорема Канторовича.

28. Восстановление: нет доминирования!

- Теорема. *Пусть A и B из $L(X,Y)$. Эквивалентны утверждения:*
  (1) $(\exists \alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$;
  (2) *Существует проектор $\varkappa \in \mathbb{B}$ такой, что*

$$\{\varkappa b B \leq 0\} \supset \{\varkappa b A \leq 0\}; \quad \{\neg\varkappa b B \leq 0\} \supset \{\neg\varkappa b A \geq 0\}$$

для всех $b \in \mathbb{B}$.

29. Интервальные операторы

- Пусть X — векторная решетка. *Интервальный оператор* $\mathbf{T}$ из X в Y — это порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в $L^{(r)}(X,Y)$, где $\underline{T} \leq \overline{T}$.
- Интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ по определению имеет *слабое интервальное решение* при условии $(\exists \mathfrak{X})(\exists A \in \mathbf{A})(\exists B \in \mathbf{B})\ \mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$.
- Взяв интервальный оператор $\mathbf{T}$ and $x \in X$, положим

$$P_{\mathbf{T}}(x) = \overline{T}x_+ - \underline{T}x_-.$$

- Оператор $\mathbf{T}$ *адаптирован* при условии, что $\overline{T} - \underline{T}$ — это сумма конечного числа дизъюнктных слагаемых.
- Положим $\sim(x) := -x$ для всех $x \in X$.

30. Интервальные уравнения

- Теорема. *Пусть X — векторная решетка, а Y — пространство Канторовича. Допустим, что $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ — адаптированные интервальные операторы и $\mathbf{B}$ — произвольный интервальный оператор в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X,Y)$.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
  (1) *Интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$.
  (2) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ выполнено*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^{\sim} \leq 0\} \cap \dots \cap \{b\mathfrak{A}_N^{\sim} \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^{\sim} := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ для $k := 1, \dots, N$ и $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.

31. Неоднородные неравенства

- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное пространство, где Y — пространство Канторовича. Возьмем $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X,Y)$ и $u_1, \dots, u_N, v \in Y$. Допустим, что система $A_1 x \leq u_1, \dots, A_N x \leq u_N$ совместна.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
  (1) $\{bB \leq bv\} \supset \{bA_1 \leq bu_1\} \cap \dots \cap \{bA_N \leq bu_N\}$ *для всех $b \in \mathbb{B}$.*

(2) *Существуют* $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k; \quad v \geq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k.$$

32. Неоднородные матричные неравенства

- В приложениях встречаются неоднородные матричные неравенства над различными конечномерными пространствами.
- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A \in L^{(m)}(X, Y^s)$, $B \in L^{(m)}(X, Y^t)$, $u \in Y^s$ и $v \in Y^t$, где s и t — натуральные числа.*

  Следующие утверждения эквивалентны:

  (1) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ неоднородное операторное неравенство $bBx \leq bv$ является следствием совместного неоднородного неравенства $bAx \leq bu$, т. е. $\{bB \leq bv\} \supset \{bA \leq bu\}$.*

  (2) *Существует $s \times t$-матрица из положительных ортоморфизмов $m(Y)$ такая, что $B = \mathfrak{X}A$ и $\mathfrak{X}u \leq v$ для соответствующего линейного оператора $\mathfrak{X} \in L_+(Y^s, Y^t)$.*

33. Комплексные скаляры

- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное комплексное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Пусть еще заданы $u_1, \dots, u_N, v \in Y$ и доминированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y_{\mathbb{C}})$ из X в комплексификацию $Y_{\mathbb{C}} := Y \otimes iY$ of Y. Допустим, что система неоднородных неравенств $|A_1x| \leq u_1, \dots, |A_Nx| \leq u_N$ совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

  (1) $\{b|B(\cdot)| \leq bv\} \supset \{b|A_1(\cdot)| \leq bu_1\} \cap \dots \cap \{b|A_N(\cdot)| \leq bu_N\}$ *для всех* $b \in \mathbb{B}$.

  (2) *Существуют комплексные ортоморфизмы $c_1, \dots, c_N \in \mathrm{Orth}(m(Y)_{\mathbb{C}})$ такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} c_k A_k; \quad v \geq \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k.$$

34. Теорема об альтернативе

- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A_1, \dots, A_N$ и B взяты из $L^{(m)}(X, Y)$.*

  Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:

  (1) *Существуют $x \in X$ и $b, b' \in \mathbb{B}$ такие, что $b' \leq b$ и*

$$b'Bx > 0, bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0.$$

  (2) *Найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+$, для которых*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

35. Дискретизация

- Уравнение
$$Tx = y,$$
где $T : X \to Y$, а X и Y — банаховы пространства, заменяют на уравнение
$$T_N x_N = y_N$$
подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \\
X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"']
\end{tikzcd}$$

- Этот процесс дискретизации «изнутри» пространства называют *гипоаппроксимацией.*

36. Гипераппроксимация

- Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\
E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#}
\end{tikzcd}$$

- Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

37. Оболочка пространства

- Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над $^*\mathbb{F}$, а $\operatorname{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ — внешние множества доступных и бесконечно малых элементов E. По определению $E^{\#} = \operatorname{ltd}(E)/\mu(E)$.
- Нормируем $E^{\#}$, полагая $\|\varphi x\| := \|x^{\#}\| := \operatorname{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \operatorname{ltd}(E))$.
- Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^{\#} : \operatorname{ltd}(E) \to E^{\#}$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа.

38. Оболочка оператора

- Пусть $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор из E в F. Числовое множество $c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \le C\|x\|\}$ является внутренним и ограниченным и $\|T\| := \inf c(T)$.
- Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на $E^\#$ — *оболочка* $T^\# : E^\# \to F^\#$, действующая по правилу

$$T^\# \varphi_E x := \varphi_F T x \quad (x \in E).$$

39. Наличие гипераппроксимаций

- Пространство $E^\#$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным.*
- Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.
- Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

40. Скаляризация

- Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу, неизбежное в задачах многоцелевой оптимизации. Особенность реальных экстремальных задач состоит в наличии большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Векторная оптимизация чревата серьезными трудностями, отсутствующими в случае скаляров.
- Широкие возможности скаляризации дает булевозначный анализ. Более распространены традиционные методы, связанные с ранжированием или нормированием предпочтений. На первый план здесь выходит анализ разумных понятий оптимальности для многоцелевых задач, среди которых можно выделить идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, а также приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

41. Идеальный оптимум

- Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^\bullet := E \cup +\infty$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторная программа* — это пара (C, f), записываемая в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

- Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Ясно, что $e = -f^*(0)$.

- Допустимый элемент x_0 называют *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $x_0 \in C$ и $f(C) \subset f(x_0) + E^+$.

42. Приближенная оптимальность

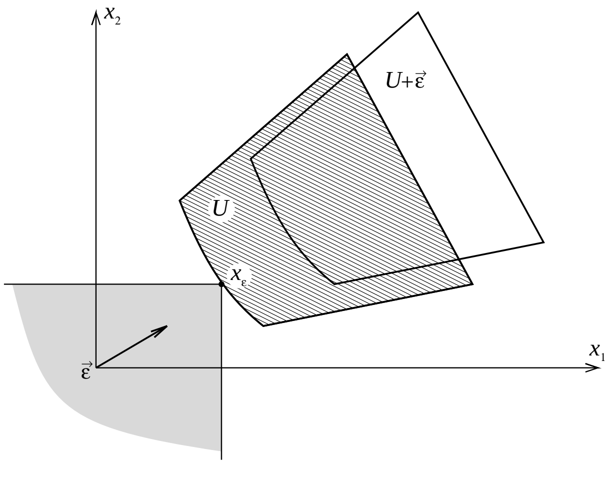
- Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка x_0 называется *ε-решением* или *ε-оптимумом* программы (C, f), если $f(x_0) \le e + \varepsilon$, где e — значение программы.
- Таким образом, x_0 есть ε-решение программы (C, f), если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$.
- Очевидно, что точка x_0 будет ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$, т. е.

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

- Здесь фигурирует ε-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$. Напомним, что элемент l последнего — это линейный оператор из X в E такой, что $(\forall x \in X) l(x - x_0) \le f(x) - f(x_0) + \varepsilon$.

43. Приближенная эффективность

- Допустимая точка x_0 называется *ε-оптимальной по Парето* или *ε-Парето-оптимальной* в программе (C, f), если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $U + \varepsilon$, где $U := f(C)$, т. е. если $(f(x_0) - E^+) \cap (f(C) + \varepsilon) = [f(x_0)]$.
- Более подробно, ε-Парето-оптимальность точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \ge f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$.



44. Элиминация ε

- ε-решение при достаточно малом ε можно рассматривать как кандидатуру на роль «практического оптимума», приемлемого на практике решения исходной задачи.
- Правила вычисления ε-субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощрена. В то же

время возникающие точные формулы труднообозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют эвристические правила «отбрасывания малых».

- Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

45. Инфинитезимальный оптимум

- Предположим, что существует конечное значение $e := \inf_{x \in C} f(x)$ программы (C, f).
- Допустимую точку x_0 называют *инфинитезимальным решением*, если верно $f(x_0) \approx e$, т. е. если для каждого $x \in C$ и любого стандартного $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполняется $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$.
- Точка $x_0 \in X$ является инфинитезимальным решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in Df(x_0)$, где $Df(x_0)$ — внешнее объединение соответствующих ε-субдифференциалов по всем бесконечно малым ε.

46. Перспективы

- Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности.
- Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Пути назад в науке нет — новые методы со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.

47. Заключение

- Благодарю ленинградских и петербургских математиков за их вдохновляющий вклад в прикладной анализ и за неизменную любезность.
- Сердечно поздравляю Владимира Васильевича Жука с 70-летием.
- Спасибо за внимание.
- С Днём Победы!

Список литературы

[1] Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

[2] Канторович Л. В. Принцип мажорант и метод Ньютона // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 76, № 1.—С. 17–20.

[3] Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Вестник ЛГУ.—1948.—Т. 6.—С. 3–18.

[4] Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 6.—С. 3–50.

[5] Соболев С. Л., Люстерник Л. А., Канторович Л. В. Функциональный анализ и вычислительная математика// В кн.: Труды 3 Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956 г. — М., 1956.— Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл.—С. 43.

[6] Канторович Л. В. Функциональный анализ (Основные идеи)// Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 7–16.

[7] Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.

[8] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. —М.: Наука, 2005.—526 с.

[9] Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. —1979.—Т. 34, вып. 1.—С. 167–196.

[10] Кутателадзе С. С. Выпуклое ε-программирование // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 245, № 5.—С. 1048–1050.

[11] Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. — С. 84–92.

[12] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. —М.: Наука, 2007.—560 с.

[13] Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Избранные темы.—М.: Наука, 2009.—400 с.

[14] Zalinescu C. Convex Analysis in General Vector Spaces.—London etc.: World Scientific Publishers, 2002.—367 p.

[15] Singer I. Abstract Convex Analysis.— New York: John Wiley and Sons, 1997.—492 p.

[16] Chen G. Y., Huang X., and Yang X. Vector Optimization. Set-Valued and Variational Analysis.— Berlin: Springer-Verlag, 2005.—306 c. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 541).

[17] Loridan P. ε-Solutions in vector minimization problems// J. Optim. Theory Appl.—1984.—Vol. 43, No. 3.—P. 265–276.

[18] Valyi I. Approximate saddle-point theorems in vector optimization// J. Optim. Theory Appl.—1987.—Vol. 55.—P. 435–448.

[19] Liu J. C. ε-Duality theorem of nondifferentiable nonconvex multiobjective programming// J. Optim. Theory Appl.—1991.—Vol. 69, No. 1.—P. 153–167.

[20] Liu J. C., Yokoyama K. ε-Optimality and duality for multiobjective fractional programming// Comput. Math. Appl.—1999.—Vol. 37, No. 8.—P. 119–128.

[21] Liu J. C. ε-Properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems// Appl. Math. Lett.—1999.—Vol. 12, No. 6.—P. 109–113.

[22] Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization// Comput. Optim. Appl.—2006.—Vol. 35, No. 3.—P. 305–324.

[23] Gutiérrez C., Jiménez B., and Novo V. Optimality conditions for metrically consistent approximate solutions in vector optimization // J. Optim. Theory Appl.—2007.—Vol. 133, No. 1.—P. 49–64.

[24] Floudas C. A. and Pardalos P. M. (eds.) Encyclopedia of Optimization.—Berlin and New York: Springer, 2009.

[25] Кутателадзе С. С. Новая форма леммы Фаркаша// Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 1.—С. 98–109.

[26] Kjeldsen T. H., Different motivations and goals in the historical development of the theory of systems of linear inequalities// Arch. Hist. Exact Sci.—2002.—V. 56, No. 6.—P. 459–538.

Кутателадзе Семён Самсонович

Реинкарнация идей прикладного анализа

Препринт № 241

Ответственный за выпуск
А. Е. Гутман

Подписано в печать 11.05.10. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 75 экз. Заказ № 59.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск