РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Препринт 70
март 2000

А.Г.Кусраев, С.С.Кутателадзе

НЕРЕШЕННЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

НОВОСИБИРСК

УДК 517.11+517.98 Дата поступления 21 марта 2000 г.

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.
Нерешенные нестандартные задачи. — Новосибирск, 2000. — 20 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 70).

Собраны нерешенные задачи из нестандартного математического анализа. Особое внимание уделено вопросам, связанным с комбинированием булевозначных и инфинитезимальных методов, и приложениям к функциональному анализу и теории меры.

Библиогр. 76.

Ключевые слова и фразы: инфинитезимальный анализ, булевозначный анализ, нерешенные задачи

Адрес авторов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4. 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sskut@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН   Препринт № 70, март 2000

НЕРЕШЕННЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Осенью 1990 г. по просьбе группы студентов-дипломников и аспирантов Новосибирского государственного университета мы организовали небольшой коллоквиум по проблематике нестандартного анализа. В обсуждении приняли участие также Е. И. Гордон и А. Г. Качуровский. Формулировались нерешенные задачи из разных областей анализа, которые, по мнению их авторов, заслуживали внимания. Возникший при этом список задач в слегка приглаженном виде был опубликован [22].

В 1994 году на международной конференции «Взаимодействие между функциональным анализом, гармоническим анализом и теорией вероятностей» (Университет Миссури, Каламбия, США, 31 мая–6 июня 1994 г.) состоялось обсуждение проблем, связанных с комбинированием нестандартных методов. Важнейшие из них сформулированы в [57]. Та же проблематика была представлена на международном конгрессе «Анализ и логика» (Университет Монс-Гено, Бельгия, 25–29 августа 1997 г.), см. [58].

В 1998 г. группой математиков (А. Викстед, М. Вольф, Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе и др.) был подготовлен научный проект, в рамках которого сформулированы задачи 17–28.

Задачи из [20–22, 25, 56–59] составляют основу настоящей публикации. Следует подчеркнуть, что среди сформулированных ниже проблем наряду с несложными задачами учебного характера встречаются темы для серьезного исследования, доступного студентам старших курсов и аспирантам. Некоторые вопросы нуждаются в творческой переработке с целью дальнейшего уточнения и детализации. Иными словами, отбор задач во многом случаен и осуществлен in statu nascendi. В нем, несомненно, отразились личные вкусы авторов и направленность их исследований в области анализа.

З.1. Нестандартные оболочки и меры Лёба

1.1. Нестандартная оболочка относится к числу важнейших конструкций инфинитезимального анализа. Она было введена Дж. Люксембургом. Накоплено множество интересных результатов о строении нестандартных оболочек банаховых и топологических векторных пространств (см. [44, 53, 70]). Однако остается неясной взаимосвязь некоторых конструкций и понятий из теории банаховых пространств с нестандартной оболочкой. Не имеется также детального описания нестандартной оболочки многих встречающихся в анализе функциональных пространств и пространств операторов.

Ниже приведем несколько формулировок. Символом $\widehat{X}$ обозначается нестандартная оболочка банахова пространства X. Нужные сведения из теории нормированных пространств и ограниченных операторов имеются в [34, 45, 46].

Задача 1. *При каких условиях пространство $\widehat{X}$ обладает свойством Крейна — Мильмана?*

Близкий круг задач, связанных с теоремой Крейна — Мильмана и ее обобщениями на K-пространства, см. в [21].

Задача 2. *При каких условиях пространство $\widehat{X}$ обладает свойством Радона — Никодима?*

Задача 3. *Исследовать другие геометрические свойства нестандартной оболочки, например, гладкость, равномерную выпуклость, асплундовость и т. п.*

Задача 4. *Описать нестандартную оболочку проективного тензорного произведения банаховых пространств.*

Задача 5. *Описать нестандартные оболочки различных классов ограниченных операторов: операторов Радона — Никодима, радонифицирующих, порядково суммирующих, p-абсолютно суммирующих и тому подобных операторов.*

1.2. В векторном пространстве $M(\nu)$ из классов эквивалентности измеримых функций на пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ с конечной мерой имеется метрика:

$$\rho(f,g) = \int\limits_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\nu.$$

Снабженное топологией этой метрики пространство $M(\nu)$ становится топологическим векторным пространством. Рассмотрим *нестандартную оболочку* $M(\nu)^\wedge := M(\nu)_{\mathrm{fin}}/\mu_\rho(0)$, где $\mu_\rho(0) := \{f \in M(\nu) : \rho(f,0) \approx 0\}$, $M(\nu)_{\mathrm{fin}} := \{f \in M(\nu) : \varepsilon f \in \mu_\rho(0)$ при $\varepsilon \approx 0\}$. Пусть $(\Omega, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Тогда пространства $M(\nu)^\wedge$ и $M(\nu_L)$ изометричны.

Задача 6. *Как обстоит дело в случае пространства измеримых вектор-функций? Точнее, как связаны между собой пространства $M(\nu, X)^\wedge$ и $M(\nu_L, \widehat{X})$?*

Пусть E — порядковый идеал в $M(\nu)$, т. е. E — подпространство $M(\nu)$ и для $f \in M(\nu)$ и $g \in E$ из неравенства $|f| \leq |g|$ следует $f \in E$. Обозначим через $E(X)$ пространство тех $f \in M(\nu, X)$, для которых функция $v(f) : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in \Omega)$ входит в E (эквивалентные функции отождествляются). Если E — банахова решетка, то $E(X)$ — банахово пространство относительно смешанной нормы $|\!|\!|f|\!|\!| = \|v(f)\|_E$.

Задача 7. *Описать нестандартную оболочку пространства со смешанной нормой $E(X)$.*

1.3. Предположим, что (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Рассмотрим такое гиперконечное множество $M \subset {}^*X$, что $\mu(A) = \frac{|A \cap M|}{|M|}$. Пусть (M, S_L, ν_L) — соответствующее пространство Лёба. Задачи 8–10 сформулировал Е. И. Гордон.

Задача 8. *Верно ли, что при соответствующем вложении $\varphi : \Sigma/\mu \to S_L/\nu_L$ правильная подалгебра $\varphi(\Sigma/\mu)$ выделится сомножителем? Если это так, то описать внутренние множества, соответствующие другому сомножителю (так сказать, «чисто нестандартные» элементы S_L/ν_L).*

Задача 9. *Та же задача для вложения отрезка с мерой Лебега в пространство Лёба.*

Задача 10. *Та же задача для пространств из задач 70 и 71.*

1.4. Пусть $(X, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — стандартные пространства с конечными мерами. Функция $\mu : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$ называется *случайной мерой*, если

(1) для любого элемента $A \in \mathscr{A}$ функция $\mu(A, \cdot)$ является $\mathscr{B}$-измеримой;
(2) для ν-почти всех $y \in Y$ функция $\mu(\cdot, y)$ является положительной конечной мерой на $\mathscr{A}$.

Задача 11. *Дать понятие случайной меры Лёба μ_L так, чтобы она оказалась случайной мерой на паре $(X, \mathscr{A}_L, \lambda_L)$ и $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$.*

Задача 12. *Какова связь между интегральными операторами $\int f(x)\, d\mu(x, \cdot)$ и $\int f(x)\, d\mu_L(x, \cdot)$? Что является аналогом S-интегрируемости в данном случае?*

Задача 13. *Дать понятие меры Лёба со значениями в векторной решетке (без топологии). При этом случайная мера Лёба из задачи 11 должна быть согласована с понятием меры Лёба для векторной меры $A \mapsto \mu(A, \cdot)$.*

1.5. Следующие три задачи навеяны работой [40] и относятся к теории пространств дифференцируемых функций (см. [3, 4, 10, 30, 31]).

Задача 14. *Развить нелинейную теорию потенциала на основе меры Лебега — Лёба.*

Задача 15. *Развить нестандартную теорию емкости.*

Задача 16. *Ввести и исследовать пространства дифференциальных форм на основе меры Лебега — Лёба (см. [3, 4]).*

3.2. Гиперконечные аппроксимации и спектральная теория

2.1. В работах [5, 8, 49] развивается подход к аппроксимациям топологических групп конечными группами на основе нестандартного анализа. Центральным объектом является гиперконечная аппроксимация G топологической группы $\mathfrak{G}$, т. е. гиперконечная подгруппа $G \subset \mathfrak{G}$, «хорошо расположенная» в $\mathfrak{G}$. Оказывается, что для локально компактной абелевой группы есть гиперконечная аппроксимация и она сохраняется при переходе к двойственным группам, а преобразования Фурье аппроксимируются дискретным преобразованием Фурье. В этой связи интересно исследовать случай некоммутативных групп. Возникает новый класс локально компактных групп, допускающих гиперконечную аппроксимацию. По-видимому, этот класс включает аменабельные группы, однако точное его описание неизвестно, см. [8, 49, 75]. Следующие ниже задачи 17–28 предложил Е. И. Гордон.

Задача 17. *Для локально компактной (не обязательно абелевой) группы G построить гиперконечные аппроксимации линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L_2(G)$.*

2.2. Теория гиперконечных аппроксимаций локально компактных абелевых групп, построенная Е. И. Гордоном, позволяет строить гиперконечномерные аппроксимации псевдодифференциальных операторов в гильбертовом пространстве функций на локально компактной абелевой группе. Для операторов типа Шредингера и операторов Гильберта — Шмидта, в случае групп с компактными открытыми подгруппами, это было проделано в [75]. Другой подход развит в [62, 63, 76]. Этот подход является более общим, так как он не ограничивается пространствами функций на локально компактной группе. Но первый подход приводит к более детализированным результатам. Взаимодействие этих двух подходов также представляется плодотворным. Возникает интересная задача расширения полученных результатов на другие псевдодифференциальные операторы на локально компактной группе и построения аналогичных аппроксимаций для операторов в функциональных пространствах на других аппроксимируемых группах, таких, например, как [**, **].

Следующая группа задач состоит в исследовании сходимости спектров и собственных значений конечномерной аппроксимации псевдодифференциального оператора на локально компактной абелевой группе.

Задача 18. *Доказать сходимость спектров и собственных значений конечномерной аппроксимации оператора типа Шредингера с положительным потенциалом, возрастающим на бесконечности, а также операторов Гильберта — Шмидта в конечномерном пространстве.*

Задача 19. *Исследовать ту же задачу для оператора Шредингера с периодическим потенциалом.*

Задача 20. *Изучить связь между гиперконечной аппроксимацией локально компактной абелевой группы и ее боровской компактификации.*

Задача 21. *Построить аппроксимации оператора типа Шредингера с почти периодическим потенциалом на основе задачи 20 и исследовать их сходимость.*

Задача 22. *Установить сходимость спектров аппроксимирующих операторов в краевой задаче для оператора Шредингера в прямоугольной области конечномерного пространства.*

2.3. Теперь приведем группу задач, относящихся к построению аппроксимации операторов в функциональных пространствах на аппроксимируемой некоммутативной локально компактной группе и сходимости этих аппроксимаций.

Задача 23. *Изучить аппроксимации неприводимых представлений группы Гейзенберга посредством представлений аппроксимирующих конечных групп.*

Задача 24. *В гильбертовом пространстве функций на группе Гейзенберга построить аппроксимации операторов, содержащихся в алгебре, порожденной операторами умножения на матричные элементы неприводимых представлений и сдвигами.*

Задача 25. *Рассмотреть тот же вопрос, что и в задаче 24 для других аппроксимируемых нильпотентных групп и некоторых матричных групп над локальными полями.*

Задача 26. *Исследовать проблему аппроксимируемости простых групп Ли.*

Задача 27. *Изучить метод суммирования расходящихся рядов над дискретной аппроксимируемой группой, основанной на аппроксимации этой группы конечными группами.*

Задача 28. *Исследовать связи между нестандартными методами суммирования расходящихся рядов и нестандартным расширением не всюду определенного оператора.*

2.4. Аппроксимация оператора гиперконечномерными операторами не обязательно связана с гиперконечной аппроксимацией локально компактной группы. Более того, если область определения оператора — пространство функций, определенных не на группе, то метод гиперконечной аппроксимации вообще не применим. Однако используя ту или иную структуру области определения оператора, можно строить аппроксимации гиперконечномерными операторами. Приведем несколько задач в этом направлении (задачи 30 и 32 сформулированы с участием В. Т. Плиева).

Задача 29. *Развить теорию определителей Фредгольма, построив подходящий метод гиперконечномерной аппроксимации.*

Задача 30. *Доказать теорему Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерных операторов на основе гиперконечномерной аппроксимации.*

Задача 31. *Применить нестандартные методы дискретизации к изучению спектральных свойств операторных пучков. В частности, получить обобщения теоремы М. В. Келдыша о полноте производных цепочек операторных пучков (см. [19]).*

Задача 32. *Построить нестандартный (гипер)конечномерный аналог преобразования Радона [37] в духе [5, 8, 49].*

Задача 33. *Применить гиперконечную аппроксимацию преобразования Радона к анализу дискретных схем сканирования в компьютерной томографии [32].*

3.3. Комбинирование нестандартных методов

3.1. Как уже отмечалось, возможны различные способы комбинирования нестандартных методов: можно строить инфинитезимальные конструкции в булевозначном универсуме или же искать булевозначные интерпретации в теориях внутренних и внешних множеств (см. [20]). Однако здесь возникают серьезные препятствия и не всегда ясно, как их обойти. В то же время последовательное применение нестандартных методов часто приводит к успеху, как в 4.2. Имеются и другие примеры такого применения нестандартных методов, см. [58].

Задача 34. *Развить синтетическую технику «скаляризации-дискретизации», унифицирующую комбинирование нестандартных методов.*

Задача 35. *Развить булевозначный вариант меры Лёба и соответствующую теорию интеграла. Изучить возникающий при этом класс операторов. В частности, построить меру Лёба со значениями в пространстве Канторовича.*

Задача 36. *Построить булевозначную интерпретацию нестандартной оболочки. Изучить соответствующую конструкцию «спущенной» нестандартной оболочки.*

Задача 37. *Используя различные нестандартные методы, построить комбинированный принцип переноса с конечномерных нормированных алгебр на некоторые классы банаховых алгебр.*

Задача 38. *Используя комбинированную нестандартную технику «скаляризации-дискретизации», построить гиперконечномерные аппроксимации представлений локально компактных групп в гильбертовом пространстве.*

3.2. Замена логической части ZF законами интуиционистской логики (см. [48, 50, 73]) приводит к интуиционистской теории множеств $\mathrm{ZF_I}$. Модели $\mathrm{ZF_I}$ также можно строить по излагаемой схеме. Именно, если Ω — полная гейтингова решетка, то универсум $\mathbf{V}^{(\Omega)}$ станет гейтинговозначной моделью теории $\mathrm{ZF_I}$, если определить соответствующие функции истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ из $\mathbf{V}^{(\Omega)} \times \mathbf{V}^{(\Omega)}$ в $\mathbf{V}^{(\Omega)}$. Подробности см. в [48, 50, 72, 73]. Другие варианты моделирования интуиционистской теории множеств дают топосы и категории пучков, см. [2, 11, 36].

Задача 39. *Исследовать различные числовые системы в гейтинговозначных моделях и соответствующие им алгебраические системы, см. [2, 11, 36].*

Задача 40. *Исследовать классические банаховы пространства в гейтинговозначных моделях, см. [42].*

Задача 41. *Приводит ли к какой-нибудь содержательной теории гильбертовых модулей интерпретация теории гильбертовых пространств в гейтинговозначной модели?*

3.3. Рассмотрим следующее утверждение. *Пусть X и Y — нормированные пространства, X_0 — подпространство X и T_0 — линейный ограниченный оператор из X_0 в Y. Для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует продолжение T оператора T_0 на все X с сохранением линейности и ограниченности, такое что $\|T\| \leq (1+\varepsilon)\|T_0\|$.*

В конструктивной математике теорема Хана — Банаха не выполняется. Однако устанавливается (см. [41]), что сформулированное утверждение верно для функционалов ($Y = \mathbb{R}$). Следовательно, данное утверждение для функционалов выполняется в гейтинговозначной модели.

Это же утверждение верно и в классическом смысле (т. е. в универсуме фон Неймана) для компактных операторов, принимающих свои значения в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q (см. [60]).

Задача 42. *Является ли схожесть упомянутых двух фактов о продолжении функционала и оператора следствием какого-нибудь принципа переноса для гейтинговозначных моделей?*

Задача 43. *Для каких объектов и задач функционального анализа и теории операторов существует эффективный принцип переноса, использующий технику гейтинговозначных моделей? Топосов? Пучков? (См. [47] и весь сборник [51].)*

3.4. Пусть B — (квантовая) логика (см. [23]). Если определить функции $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ по формулам [9, 2.1.4] и ввести оценки истинности формул, как в [9, 2.1.7], то в универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$ истинными окажутся аксиомы [9, 1.1.4]. Таким образом, в $\mathbf{V}^{(B)}$ можно развить теорию множеств. В частности, вещественные числа внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ будут соответствовать наблюдаемым в математической модели квантово-механической системы (см. [71]).

В [71] показано, что если B — квантовая логика (см. [23]), то универсум $\mathbf{V}^{(B)}$ служит моделью для определенной квантовой теории множеств. Изучение квантовых теорий как логических систем, построение квантовой теории множеств и развитие соответствующей квантовой математики — интересная и актуальная проблематика, но в этом направлении сделано немного. Адекватные математические средства и правильные ориентиры намечаются, возможно, в теории алгебр фон Неймана и выросших из нее различных «некоммутативных» направлений (некоммутативная теория вероятностей, некоммутативное интегрирование и т. п.).

Задача 44. *Возможен ли какой-нибудь вариант принципа переноса из теории интеграла (меры) в некоммутативную теорию интеграла (меры) на основе модели* $\mathbf{V}^{(B)}$ *для квантовой теории множеств?*

Задача 45. *Построить некоммутативную теорию меры Лёба, т. е. применить конструкции меры Лёба к мере, определенной на квантовой логике.*

Задача 46. *Построить теорию некоммутативного векторного (центрозначного) интегрирования на алгебре фон Неймана или, более общо, на* AW^**-алгебре и исследовать соответствующие пространства измеримых и интегрируемых элементов, используя метод булевозначной реализации.*

Задача 47. *Какие свойства квантовых комплексных чисел (т. е. комплексных чисел в модели* $\mathbf{V}^{(B)}$ *для квантовой логики* B*) соответствуют содержательным свойствам алгебр фон Неймана (*AW^**-алгебр)?*

3.5. Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Оператор T из E в произвольное векторное пространство называют *ортогонально аддитивным*, если $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \perp x_2$. Множество всех ортогонально аддитивных порядково ограниченных операторов из E в F обозначают символом $\mathscr{U}(E, F)$; элементы $\mathscr{U}(E, F)$ называют *абстрактными операторами Урысона* (см. [1]). В [1] установлено, что пространство $\mathscr{U}(E, F)$ есть порядково полная векторная решетка, если определить в нем порядок следующим образом: $S \geq 0$ тогда и только тогда, когда $S(x) \geq 0$ для всех $x \in E$, а $S_1 \geq S_2$ означает $S_1 - S_2 \geq 0$.

Ортогонально аддитивный оператор в K-пространстве, перестановочный со всеми порядковыми проекторами, назовем *абстрактным оператором Немыцкого.*

Задача 48. *Применить комбинированный нестандартный метод «скаляризации-дискретизации» к нелинейным интегральным операторам Урысона, а также к* *их абстрактным аналогам — ограниченным ортогонально аддитивным операторам.*

Задача 49. *Рассмотреть булевозначную интерпретацию ортогонально аддитивного функционала и изучить в духе 4.2 и 4.3 класс нелинейных операторов, возникающий при такой интерпретации.*

Задача 50. *На основе задачи 49 описать полосу, порожденную положительным ортогонально аддитивным оператором.*

Задача 51. *Дать булевозначную реализацию абстрактного оператора Немыцкого и получить его функциональное представление.*

3.6. Следующая задача по виду относится к выпуклому анализу. Однако она отражает принципиальную трудность, связанную с неоднозначностью операции стандартной части и других инфинитезимальных конструкций внутри булевозначного универсума. Некоторые аспекты такой неоднозначности отражены, например, в [9, **].

Задача 52. *Пусть E — стандартное K-пространство. Изучить субдифференциал оператора $p(e) = \inf{}^*\{f \in E : f \geq e\}$.*

3.4. Выпуклый анализ и экстремальные задачи

Относительно материала этого параграфа см. [21, 24, 25].

4.1. Пусть X — векторное пространство, а E — K-пространство. Рассмотрим сублинейный оператор $p : X \to E$. *Опорное множество* или *субдифференциал в нуле* ∂p оператора p определяется формулой:

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X)\, Tx \leq p(x)\}.$$

Возьмем еще одно K-пространство F, и пусть $0 \leq T \in L(E, F)$. Оператор $S \in \partial p$ назовем *T-крайней точкой* множества ∂p, если $T \circ S$ является крайней точкой множества $\partial(T \circ p)$. Будем говорить, что $S \in \partial p$ является *о-крайней точкой* множества ∂p, если S — T-крайняя точка, каков бы ни был порядково непрерывный оператор T, действующий из E в произвольное K-пространство F.

Пусть $X^{\#}$ обозначает алгебраически сопряженное пространство к X, т. е. множество всех линейных функционалов на X. *Преобразованием Юнга — Фенхеля* (или *сопряженной функцией*) функции $g : X \to \mathbb{R}$ называют функцию $g^* : X^{\#} \to \overline{\mathbb{R}}$, действующую по правилу

$$g^*(x^{\#}) := \sup\{\langle x \mid x^{\#}\rangle - g(x) : x \in X\}.$$

где $\langle x \mid x^{\#}\rangle := x^{\#}(x)$.

Задача 53. *Изучить точки, бесконечно близкие к крайним точкам того или иного субдифференциала.*

Задача 54. *Выяснить булевозначный статус о-крайних точек субдифференциалов [24].*

Задача 55. *Описать внешние эквивалентности, сохраняемые преобразованием Юнга — Фенхеля (см. [24]).*

4.2. Пусть (Q, Σ, μ) — пространство с мерой, X — банахово пространство, а E — банахова решетка. Обозначим буквой Y некоторое пространство измеримых вектор-функций $u : Q \to X$. Эквивалентные функции отождествляются. Допустим, что отображение $f : Q \times X \to E \cup \{+\infty\}$ выпукло по второй переменной $x \in X$ при почти всех $t \in Q$, а суперпозиция $t \mapsto f\bigl(t, u(t)\bigr)$ измерима при всех $u \in Y$. Тогда можно определить интегральный оператор I_f на Y формулой

$$I_f(u) = \int\limits_Q f\bigl(t, u(t)\bigr)\, d\mu(t) \qquad (u \in Y).$$

При этом считается $I_f(u) = +\infty$ в том случае, когда вектор-функция $f\bigl(\cdot, u(\cdot)\bigr)$ не суммируема. Очевидно, что оператор $I_f : Y \mapsto E \cup \{+\infty\}$ выпуклый. В выпуклом анализе значительное внимание уделяется изучению операторов указанного вида. В частности, часто рассматривают вопросы о строении субдифференциала $\partial I_f(u_0)$ и двойственного по Юнгу — Фенхелю $(I_f)^*$. Общие свойства выпуклых операторов см. в [24, 29], а интегральных выпуклых функционалов ($E = \mathbb{R}$) — в [29, 39, 43].

Как показал Е. И. Гордон в [7], существуют число Δ и гиперконечное множество $\{t_1, \dots, t_N\} \subset Q$ такие, что

$$\int\limits_Q \varphi(t)\, d\mu(t) = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} \varphi(t_k)\right)$$

для каждой стандартной измеримой функции φ. Тем самым для интегрального функционала I_f получаем представление

$$I_f(u) = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} f\bigl(t_k, u(t_k)\bigr)\right) \qquad (u \in Y).$$

Задача 56. *Изучить выпуклый интегральный функционал I_f, используя указанное выше представление. В частности, вывести формулы для вычисления субдифференциала $\partial I_f(u_0)$.*

Задача 57. *Изучить выпуклые и невыпуклые интегранты и соответствующие нелинейные интегральные функционалы методом инфинитезимальной дискретизации.*

4.3. При изучении функционалов типа I_f часто используют различные теоремы о селекторах. Приведем точные формулировки двух результатов (см. [29, 39, 43]).

Пусть Q — топологическое (соответственно измеримое) пространство, X — банахово пространство. Соответствие $\Gamma \subset Q \times X$ называют *полунепрерывным снизу* (соответственно *измеримым*), если $\Gamma^{-1}(G)$ открыто (соответственно измеримо) для каждого открытого $G \subset X$. Отображение $\gamma : \operatorname{dom} f \to X$ называют *селектором* Γ, если $\gamma(q) \in \Gamma(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} \Gamma$.

Теорема Майкла. *Пусть Q паракомпактно, соответствие Γ полунепрерывно снизу и для каждого $q \in Q$ множество $\Gamma(q)$ непусто, выпукло и замкнуто. Тогда существует непрерывный селектор соответствия Γ.*

Теорема Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского. *Пусть Q — измеримое пространство, X — польское (= полное сепарабельное метрическое) пространство и $\Gamma \subset Q \times X$ — измеримое соответствие, причем $\Gamma(q)$ замкнуто при всех $q \in Q$. Тогда существует измеримый селектор соответствия Γ.*

Задача 58. *Провести дискретизацию паракомпактного пространства и дать нестандартное доказательство сформулированной выше теоремы Майкла.*

Задача 59. *Разработать нестандартный подход к задаче о существовании измеримого селектора и, в частности, дать нестандартное доказательство теоремы Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского.*

4.4. В работе [26] С. С. Кутателадзе ввел понятие инфинитезимального оптимума. Возьмем стандартное векторное пространство X, выпуклую функцию $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и выпуклое множество $C \subset X$. Элемент $x_0 \in C$ называют *инфинитезимальным решением задачи* $x \in C$, $f(x) \to \inf$, если для любых стандартных $x \in C$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, выполняется $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$. В этой же работе [26] получено обоснование принципа Лагранжа для инфинитезимального оптимума в задачах выпуклого программирования (см. также [24, 25]). В этой связи возникает направление исследований: вывести необходимые и достаточные условия инфинитезимального оптимума для классов выпуклых и невыпуклых экстремальных задач с ограничениями.

Задача 60. *Развить концепцию инфинитезимального решения для задач оптимального управления и вариационного исчисления.*

Задача 61. *Построить нестандартное расширение нелинейной абстрактной экстремальной задачи с операторными ограничениями и изучить инфинитезимальный оптимум.*

Задача 62. *Применить инфинитезимальный метод к релаксации невыпуклых вариационных задач.*

Задача 63. *Развить субдифференциальное исчисление для функций на булевых алгебрах и изучить экстремальные задачи оптимального выбора элемента булевой алгебры.*

3.5. Разные задачи

В этом параграфе рассмотрим несколько групп задач, относящихся к различным разделам математики.

5.1. *Относительная стандартность.* В следующей задаче используется понятие относительной стандартности множества, введенное в [6] Е. И. Гордоном, предложившим задачи 64–66.

Задача 64. *Используя ломаные Эйлера с шагом, бесконечно малым относительно бесконечно малого параметра ε в уравнении Ван дер Поля, дать непосредственное доказательство существования «уток», не использующее замены переменных (переход к плоскости Льенара) (см. [13]).*

Рассмотрим еще одно определение относительной стандартности:

$$x : \mathrm{st} : y \iff (\exists^{\mathrm{st}} f)\big(x = f(y)\big).$$

При таком определении относительно стандартности оказывается, что существует натуральное n : st : y, для которого имеются меньшие натуральные числа, но нестандартные относительно y. Таким образом, построена модель нестандартного анализа, в которой стандартный натуральный ряд «дырявый», однако принцип переноса и импликация «$\Rightarrow$» в принципе идеализации сохраняются. Следующая задача сформулирована совместно с В. Г. Кановеем.

Задача 65. *Построить какую-либо разумную аксиоматику такого нестандартного анализа.*

Предположим, что y — допустимое множество и (X, Σ, μ) является y-стандартным пространством с σ-аддитивной мерой μ. Элемент $x \in X$ назовем *y-случайным*, если для любого y-стандартного множества $A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) = 0$, выполнено $x \notin A$.

Теорема (Е. И. Гордон). *Если (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) — стандартные пространства с конечными мерами, ξ_1 является случайным элементом X_1, а ξ_2 является ξ_1-случайным элементом X_2, то (ξ_1, ξ_2) является случайным элементом в произведении пространств $X_1 \times X_2$.*

Задача 66. *Верно ли утверждение, обратное приведенной выше теореме?*

Задача 67. *Изучить свойства «размерной» («неоднородной») числовой прямой.*

Задача 68. *Можно ли оправдать физические манипуляции с дробными размерностями?*

5.2. *Топология и меры Радона.* Предположим, что X — внутреннее гиперконечное множество, $\mathscr{R} \subset X^2$ — отношение эквивалентности, которое является пересечением некоторого семейства k (k — кардинал) внутренних множеств. Нестандартный универсум предполагается k^+-насыщенным. В множестве $X^\# := X/\mathscr{R}$ определим топологию, приняв $\{F^\# : F \subset X,\ F \text{ — внутреннее}\}$ за базу замкнутых множеств. Тогда $X^\#$ компактно в том и только том случае, если для любого внутреннего $A \supset \mathscr{R}$ найдется $K \subset X$ стандартной конечной мощности такое, что $X = A(K)$, где $A(K) := \{y \in X : (x, y) \in A \text{ для некоторого } x \in K\}$. При этом любой компакт может быть получен таким образом. Задачи 69–71 предложил Е. И. Гордон.

Задача 69. *Описать в этих терминах связные, односвязные, вполне несвязные и экстремально несвязные компакты.*

Задача 70. *Всякая ли мера Радона на $X^\#$ индуцируется некоторой мерой Лёба на X? Иными словами, верно ли, что для любой меры Радона μ на $X^\#$*

найдется такая мера Лёба ν_L на X, что $A \subset X^{\#}$ μ-измеримо тогда и только тогда, когда ν_L-измеримо $\pi^{-1}(A)$ (здесь $\pi : X \to X^{\#}$ — естественная проекция), причем $\mu(A) = \nu_L(\pi^{-1}(A))$.

Известно, что для любого компакта $\mathscr{X}$ найдутся внутреннее гиперконечное множество X и внутреннее отображение $\Phi : X \to {}^*\mathscr{X}$ такие, что

$$(\forall^{\mathrm{st}}\xi \in {}^*\mathscr{X})(\exists x \in \mathscr{X})\ \Phi(x) \approx \xi,$$

и если $\mathscr{R} = \{(x,y) : \Phi(x) \approx \Phi(y)\}$, то $X/\mathscr{R}$ гомеоморфно ${}^*\mathscr{X}$.

Задача 71. *Верно ли, что для любой меры Радона μ на $\mathscr{X}$ найдутся такое Φ, удовлетворяющее предыдущим условиям (или для любого такого Φ) и такая мера Лёба ν_L на X (индуцированная внутренней функцией $\nu : X \to {}^*\mathbb{R}$ — мерой на атомах), что для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции f*

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu = {}^{\circ}\!\left(\sum_{x\in X} {}^*f\big(\Phi(x)\big)\nu(x)\right)?$$

Задача 72. *Описать другие топологические свойства $X^{\#}$ (регулярность, локальную компактность и т. д.) в терминах свойств $\mathscr{R}$. Какие еще пространства можно получить указанным выше способом?*

Задача 73. *Изучить монады, рассмотрев их как внешние отношения предпорядка (= квазиравномерные пространства).*

5.3. *Теория целых функций.* Эта группа задач также предложена Е. И. Гордоном.

Задача 74. *Описать класс нестандартных многочленов, тени которых являются целыми функциями; целыми функциями конечной степени σ.*

Задача 75. *Дать интерпретацию теоремы Винера — Пэли [35] в терминах задачи 74.*

Задача 76. *Используя результаты решения задачи 74, при помощи нестандартного анализа доказать теорему Котельникова и другие интерполяционные теоремы для целых функций [28, 38].*

Задача 77. *Используя разложение многочленов на множители, получить теоремы о разложении целых функций в бесконечное произведение (аналогично эйлеровскому разложению* sin*) [16, 61].*

5.4. *Эргодическая теория.* Эта группа задач (78–83) предложена А. Г. Качуровским (см. [**, 18, 22]).

Пусть N — бесконечно большое натуральное число. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^N$ называется *микросходящейся*, если для некоторого числа x^* выполняется $x_n \approx x^*$ при всех бесконечно больших $n \le N$. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ сходится (в обычном смысле). Следующие три случая определяют три типа сходимости:

(1) *Белая сходимость*: для любого бесконечно большого N последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ микросходится.

(2) *Цветная сходимость*: существуют два бесконечно больших натуральных числа N и M таких, что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ является микросходящейся, а последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{M}$ — нет.

(3) *Черная сходимость*: для любого бесконечно большого натурального числа N последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ не является микросходящейся.

Статистическая эргодическая теорема Неймана. *Пусть U — изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве H, H_U — подпространство инвариантных относительно U элементов H, т. е. $H_U = \{f \in H : Uf = f\}$, P_U — оператор ортогонального проектирования на H_U. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U^k f - P_U f\right\|_H = 0$$

для любого $f \in H$.

Следствие. *Пусть (Ω, λ) — пространство с (конечной) мерой, T — его автоморфизм, $f \in L_2(\Omega)$. В этом случае последовательность $\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(T^k x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ сходится по норме $L_2(\Omega)$.*

Символом $\widehat{L}_1(\Omega)$ обозначается внешнее множество таких элементов $f \in L_1(\Omega)$, что $\|f\|_1 \ll \infty$ и для всех $E \subset \Omega$ из $\lambda(E) \approx 0$ следует $\int_E f\,d\lambda \approx 0$. Введем также обозначение $\widehat{L}_2(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : f^2 \in \widehat{L}_1(\Omega)\}$. Следующий результат установлен А. Г. Качуровским в [**, 18]. О близких вопросах см. [14, 15].

Теорема об ограниченной флуктуации. *Если f из $\widehat{L}_2(\Omega)$, то последовательность средних имеет ограниченную флуктуацию (и, следовательно, ее сходимость либо белая, либо цветная, т. е. не черная).*

Задача 78. *Указать другие (возможно, более слабые) достаточные признаки ограниченности флуктуации (и нечерной сходимости) последовательности средних в сформулированном выше следствии.*

Задача 79. *Найти необходимые признаки ограниченности флуктуации и нечерной сходимости в указанном выше следствии, возможно, более близкие к достаточному (указанному в формулировке теоремы об ограниченной флуктуации или получаемому при решении задачи 78).*

Задача 80. *Вопрос задачи 78 для статистической эргодический теоремы Неймана.*

Задача 81. *Вопрос задачи 79 для статистической эргодической теоремы Неймана.*

Задача 82. *Вопрос задачи 78 для эргодической теоремы Биркгофа —Хинчина.*

Задача 83. *Вопрос задачи 79 для эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина и задачи 82.*

5.5. Приведем еще несколько задач, не попавших ни в один из предыдущих разделов.

Задача 84. *Сформулировать признаки околостандартности и предстандартности элементов конкретных классических нормированных пространств.*

Задача 85. *Построить теорию борнологических пространств, основываясь на монаде борнологии [52].*

Задача 86. *Сформулировать признаки сравнения для конечных сумм с бесконечно большим числом слагаемых.*

Задача 87. *Построить схемы внешней аппроксимации для общих алгебраических систем (булевозначных систем).*

Пусть X — банахово пространство и $B(X)$ обозначает пополнение метрического пространства $X^{\wedge}$, стандартного имени X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Тогда $B(X)$ — банахово пространство внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.

Задача 88. *Для каких банаховых пространств X и для каких булевых алгебр B имеет место соотношение $\mathbf{V}^{(B)} \models B(X') = B(X)'$?*

Литература

1. Векслер А. И., Гордон Е. И. Нестандартное расширение не всюду определенных положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 720–727.
2. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.
3. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. О формуле Кюннета для L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 29–42.
4. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Об аппроксимации точных и замкнутых дифференциальных форм финитными // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 49–65.
5. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.
6. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.
7. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.—С. 25–33.
8. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.
9. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—380 с.
10. Деллашери К. Емкости и случайные процессы.—М.: Мир, 1972.
11. Джонстон П. Т. Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.
12. Емельянов Э. Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартного расширения булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 286–296.
13. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных операторов // Успехи мат. наук.—1984.—Т. 34, № 2.—С. 77–127.
14. Иванов В. В. Колебания средних в эргодической теореме// Докл. РАН.—1996.—Т. 347, № 6.—С. 736–738.
15. Иванов В. В. Геометрические свойства монотонных функций и вероятности случайных колебаний//Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 117–150.
16. Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, № 4.—С. 57–81.
17. Качуровский А. Г. Ограниченность флуктуации средних в статистической эргодической теореме // Оптимизация.—1990.—Вып. 48(65).—С. 71–77.
18. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук.—1996.—Т. 51, № 4.—С. 73–124.
19. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 4.—С. 15–41.
20. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.—С. 111–119.
21. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация.— 1992.— № 51 (68).—С. 5–18.
22. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. 55 нерешенных задач из нестандартного анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.—16 с.
23. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—398 с.

24. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.
25. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordhecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 p.
26. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 4.—С. 84–92.
27. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000.—336 с.
28. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.
29. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
30. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград, 1985.
31. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, № 6.—С. 67–138.
32. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.
33. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.
34. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.
35. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
36. Фурман М. П. Логика топосов // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1983.—Ч. 4.—С. 241–277.
37. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.
38. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике.—М.: Наука, 1971.
39. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.—М.: Мир, 1979.
40. Arkeryd L. and Bergh J. Some properties of Loeb–Sobolev spaces // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 2.—P. 317–334.
41. Bishop E. and Bridges D. Constructive Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1985.
42. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Springer, Berlin.
43. Castaing C. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin etc.: Springer, 1977. (Lectures Notes in Math., **580**).—278 p.
44. Cutland N. (ed.) Nonstandard Analysis and Its Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
45. Diestel J. Geometry of Banach Spaces — Selected Topics. Berlin etc.: Springer, 1975.
46. Diestel J. and Uhl J. J. Vector measures. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1977 (Math. Surveys; **15**).
47. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. (eds.), Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Springer, Berlin, 1979.
48. Fourman M. P. and Scott D. S. Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer, 1979.—P. 302–401.
49. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
50. Grayson R. J. Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer, 1979.—P. 402–414.
51. Hofman K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves, 1979, Springer, Berlin.
52. Hogbe-Nlend H. Theorie des Bornologie et Applications.—Berlin etc.: Springer, 1971.
53. Hurd A. E. (ed.) Nonstandard Analysis. Recent Development.—Berlin: Springer, 1983.
54. Kanovei V. and Reeken M. Internal approach to external sets and universes // Studia Logica, part 1: **55**, 227–235 (1995); part II: **55**, 347–376 (1995); part III: **56**, 293–322 (1996).
55. Kanovei V. and Reeken M. Mathematics in a nonstandard world, I // Math. Japonica.—1997.—V. 45, No. 2.— P. 369–408.
56. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl.—1992. Ser. 2.—V. 151.—P. 91–105.

57. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Dekker Inc., 1995.—P. 301–306.
58. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in functional analysis // Осетинский мат. журн. (Полнотекст. база данных, номер гос. регистр. 0229905212). —2000.—T. 2. № 1. (http://alanianet.ru/omj/journal.htm)
59. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in the theory of positive operators // Matematychni Studii. 1997.—V. 7, No. 1.—C. 33–40.
60. Lindenstrauss J. Extension of Compact Operators // Memours AMS.—1964.—V. 48.—112 p.
61. Luxemburg W. A. J. What is nonstandard analysis? // Amer. Math. Monthly.—1973.—V. 80, No. 6.—P. 38–67.
62. Raebiger F. and Wolff M. P. H. Spectral and asymptotic properties of dominated operators // J. Austral. Math. Soc. (Series A).— 1997.—V. 63.— P. 16–31.
63. Raebiger F. and Wolff M. P. H. On the approximation of positive operators and the behaviour of the spectra of the approximants // Integral Equations Operator Theory.—1997.—V. 28.—P. 72–86.
64. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer, 1974.—376 p.
65. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzing: Teubner, 1984.—208 p.
66. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.
67. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.
68. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.
69. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.
70. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York etc.: Academic Press, 1976.
71. Takeuti G. Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York and London: Plenum Press, 1981.—P. 303–322.
72. Takeuti G. and Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.
73. Takeuti G. and Titani S. Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin and New York: Springer, 1981.—P. 189–306.
74. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer, 1973.—238 p.
75. Vershik A. M. and Gordon E.I. The groups locally embedded into the class of finite groups // Algebra and Analysis.—1997.—V. 9, No. 1.—P. 71–97.
76. Wolff M. P. H. An introduction to nonstandard functional analysis // L. O. Arkeryd, N. J. Cutland, C. Ward Henson (eds): Nonstandard Analysis, Theory and Applications.—Kluwer: Dordrecht, 1997.—P. 121–151.

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.

Нерешенные нестандартные задачи

Препринт № 70

Подписано в печать	27.03.2000.	Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,8.	Уч.-изд. л. 1,4.	Тираж 100 экз. Заказ № 19.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.