Об использовании в механике твердого тела концепции пространства, наделенного иерархией структурных уровней

А.Ф. Ревуженко

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, 630091, Россия

Рассматривается пространство, в качестве координатных осей которого выступают неархимедовые прямые. Неархимедовое пространство характеризуется наличием многих масштабных уровней. Материальная точка в своем движении в неархимедовом пространстве все промежуточные положения не проходит, подобно движению колеса по дороге с неровностями, много меньшими диаметра колеса. Обсуждается вопрос об использовании концепции неархимедового пространства для построения моделей пластических сред, обладающих иерархией структурных уровней.

1. Введение

Все реальные твердые тела имеют дискретную структуру, которая охватывает целый ряд масштабных уровней. Процессы, происходящие на различных уровнях, тесно связаны между собой и исследуются в рамках новой научной дисциплины, получившей название — физическая мезомеханика [1]. Дискретность твердых тел проявляется на довольно малых, но тем не менее конечных масштабах длины. Это обстоятельство делает невозможным непосредственное использование наиболее разработанного математического аппарата — классического анализа. Основная процедура анализа — предельный переход — требует, чтобы исследуемые переменные (например скорости) были определены не просто в близких точках, а в бесконечно близких точках пространства. Для того чтобы удовлетворить этому условию, вводится предположение о том, что среда полностью заполняет определенную область пространства. Именно таким образом появляется гипотеза, которая лежит в основе механики сплошной среды. Уже само название — «сплошная среда» — подчеркивает, что предположение о бесконечной близости точек, в которых определены параметры среды, считается равносильным понятию о ее непрерывности, связности или, иными словами, равносильным понятию «сплошности» в том смысле, в котором мы считаем «сплошным» само пространство, в котором происходят исследуемые процессы.

Такой подход позволяет продвинуться в построении математических моделей различных сред, в том числе и сред, имеющих внутреннюю структуру. Структура среды учитывается путем введения внутренних переменных. Например, считается, что кинематика деформирования среды описывается не только полем скоростей, но и дополнительной переменной, которой придается смысл микровращения. Микровращение не зависит от ротора поля скоростей, но также, как и ротор, определено в каждой точке области пространства, заполненной средой. Это явно противоречивый подход. Если взять произвольную точку пространства, то микровращение, определенное в ней, должно быть реализовано в некоторой окрестности этой точки. Но с другой стороны, в любой окрестности точки определено также и поле скоростей, а значит, и соответствующий ему ротор. Таким образом, фигурально выражаясь, для реализации микровращения места в пространстве уже нет.

Здесь уместно отметить, что наличие подобных и других гораздо более существенных «противоречий» является типичной чертой многих прикладных исследований. Благодаря именно такому подходу удается продвинуться в решении сложных задач [2, 3]. С другой стороны, такой подход безусловно предполагает, что в процессе дальнейших исследований все «противоречия» будут постепенно сниматься, или по крайней мере, значительно ослабляться.

Последовательное развитие моделей с внутренними переменными приводит к необходимости использования в качестве независимой такой переменной, которая уже сама по себе имеет внутреннюю структуру [4, 5]. Последнее фактически означает, что определенной структурой наделяется само пространство. Это довольно радикальный шаг, и ниже будут рассмотрены дополнительные аргументы, указывающие на его необходимость. Перейдем теперь к существу дела.

2. Неархимедовая прямая

Прежде всего уточним исходную постановку задачи. В настоящей работе не ставится задача исследования физического пространства. Ниже под пространством понимается только то пространство, которое используется в механике сплошной среды, то есть арифметическое пространство. Точка такого пространства однозначно характеризуется тремя своими координатами. Каждая из координат представляет собой вещественное число (будем его называть также обычным вещественным числом). Таким образом, можно сказать, что точка трехмерного пространства отождествляется с тремя обычными вещественными числами. В свою очередь, вещественное число отождествляется с точкой на числовой оси. В нашем привычном представлении точка — это некоторый неделимый, элементарный объект, что-то что существует, но тем не менее никаких «частей не имеет». Так ли это на самом деле?

Общий ответ на подобные вопросы хорошо известен. Если речь идет о физических объектах, то ответ зависит от разрешающей способности инструментов, которые используются для их исследования. Ситуация будет точно такой же и в мире идеальных объектов. Теоретические построения часто сравнивают с инструментами для физических наблюдений. Это позволяет говорить о степени разрешающей способности той или иной теории. Если иметь в виду разрешающую способность наиболее совершенного инструмента теоретических исследований — классического анализа, то можно сказать, что точка числовой прямой является элементарным, неделимым объектом. Однако если ту же самую точку рассмотреть с разрешением, бóльшим чем принято в классическом анализе, то у точки обнаружится довольно сложная внутренняя структура. Перейдем к ее описанию.

Вначале обратимся к исходному определению вещественного числа. Наиболее известными являются определения по Дедекинду и Кантору. Они эквивалентны между собой. Для наших целей удобнее исходить из определения по Кантору. Изложим его так, чтобы был виден путь дальнейших построений.

В качестве первого шага, следуя Кронекеру, примем, что натуральные числа

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \tag{1}$$

и арифметические операции над ними заданы изначально. В этом смысле они будут иметь для нас абсолютное значение. Образуем неограниченные последовательности рациональных чисел $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ и т.д.

Рациональные числа r отождествим со стационарными последовательностями: $r = \{r\}$. Из всевозможных последовательностей рациональных чисел выделим фундаментальные последовательности. Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное N, что для любых n, $m > N$ будет иметь место неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2}$$

Фундаментальные последовательности и являются тем исходным материалом, который используется для построения вещественных чисел. Числа строятся следующим образом. Предполагается, что две фундаментальные последовательности, члены которых неограниченно сближаются между собой (но при этом необязательно совпадают), можно не различать. Точнее, две последовательности a и b считаются эквивалентными, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ найдется такой номер M, что для любых $n > M$

$$|a_n - b_n| < \varepsilon. \tag{3}$$

Классы эквивалентности (2), (3) и называются вещественными числами. Таким образом, элементарная, «неделимая» точка на обычной вещественной прямой — это класс эквивалентных между собой последовательностей (2), (3).

Указанные классы (т.е. вещественные числа) будем обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$. Класс эквивалентности α в случае, когда он содержит последовательность $\{a_n\}$, будем обозначать как

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n \tag{4}$$

(ниже знак «$\to \infty$» будем опускать). Если последовательность вещественных чисел $\alpha_k = \lim\limits_n a_{kn}$ является фундаментальной, то примем по определению, что

$$\lim_k \lim_n a_{kn} = \lim_n a_{nn}. \tag{5}$$

Нетрудно доказать, что (4) и диагональное определение (5) эквивалентны обычному определению предела.

Более наглядно процедуру построения вещественных чисел можно описать таким образом. Представим себе пространство, в котором каждая последовательность выглядит как точка, подобно звезде в наблюдаемой нами Вселенной. Каждая последовательность строго индивидуальна: $a = b$, если $a_n = b_n$ для любого n. Поэтому наблюдение пространства с различением любых несовпадающих между собой последовательностей — это наблюдение с максимально возможной разре-

шающей способностью. Введем теперь ряд объективов, каждый из которых уменьшает исходную разрешающую способность наблюдения.

Пусть объектив W суживает поле зрения: через W видны только фундаментальные последовательности. Объектив A уменьшает исходную разрешающую способность наблюдений таким образом: при взгляде через A скопление последовательностей, близких в смысле (3), сливается в одну точку. Таким образом, вещественные числа — это те объекты, которые мы увидим, направив на наше пространство инструмент, соединяющий в себе объективы W и A. Замечательной особенностью наблюдаемых объектов будет их линейная упорядоченность. Об этом можно сказать и так: направив объективы W, A на исходное бесконечномерное пространство, которое упорядочено только частично, мы увидим прямую линию — линейно упорядоченную числовую ось.

Теперь сделаем следующий шаг. Заменим условие эквивалентности (3) на более жесткое условие, а именно: две последовательности будем считать эквивалентными, если для них существует такое число N, что при $n > N$

$$|a_n - b_n| = 0. \tag{6}$$

Классы эквивалентности последовательностей (6) назовем кофинитными числами. По аналогии с (4) класс эквивалентности, содержащий последовательность $\{a_n\}$, будем обозначать как

$$A = \operatorname*{Lim}_n a_n.$$

Объект A по отношению к последовательности $\{a_n\}$ будем называть кофинитным пределом последовательности, а члены a_n по отношению к A — приближениями A. Операции над кофинитными числами введем через их приближения. Например,

$$\operatorname*{Lim}_n a_n + \operatorname*{Lim}_n b_n = \operatorname*{Lim}_n (a_n + b_n).$$

Аналогично введем и остальные операции, а также частичный порядок: $A > B$, если $A \neq B$ и, начиная с некоторого номера, $a_n \geq b_n$. Если $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, то объект $\operatorname*{Lim}_n a_n$ будем называть фундаментальным кофинитным числом. Для некоторых чисел введем фиксированные обозначения:

$$\omega = \operatorname*{Lim}_n n, \ \mathrm{E} = \frac{1}{\omega} = \operatorname*{Lim}_n \frac{1}{n},$$

$$\mathrm{E}^* = \operatorname*{Lim}_n \left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right].$$

Число ω больше любого натурального числа (1). Следовательно, ω — это актуальное бесконечно большое число. Число ω, а также положительный результат операций сложения, вычитания и умножения между числом ω и натуральными числами будем относить к натуральным (бесконечно большим) числам.

Таким образом, мы приходим к следующему натуральному ряду

$$1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega - 1, \omega, \omega + 1, \ldots, 2\omega, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots. \tag{7}$$

Аналогично для любого рационального $r > 0$ имеем $\mathrm{E} < r$, $\mathrm{E}^* < r$. Подобные числа являются актуальными бесконечно малыми. Процедуре (6) отвечает введение нового объектива, который имеет большую разрешающую способность, чем объектив A (обозначим его через L). При взгляде через L в одну точку сливаются только последовательности, которые отличаются друг от друга только конечным числом членов. Последовательности же, которые сближаются в смысле (3), но тем не менее отличаются друг от друга неограниченным числом членов, воспринимаются через объектив L уже как различные.

Смысл следующего шага сводится к тому, чтобы рассмотреть вещественное число и вещественную числовую ось с помощью средств, имеющих бóльшую разрешающую способность, чем W, A. Тогда можно будет увидеть структуру числовой оси и затем использовать ее для построения неархимедовой числовой прямой — нового объекта, который представляет собой линейно упорядоченное множество кофинитных чисел. Последние включают в себя актуальные бесконечно большие и малые числа. (Именно поэтому числовая система называется неархимедовой. Напомним, что система является архимедовой, если для любых чисел α, $\beta > 0$ найдется натуральное N такое, что будет иметь место равенство $N\alpha > \beta$).

Итак, рассмотрим произвольную точку обычной числовой оси, например, вещественное число 1. Прежде всего отметим, что это число принципиально отличается от натурального числа 1. Натуральное число 1 задано изначально и, как отмечалось, в этом отношении имеет для нас абсолютное значение. Вещественное же число 1 — это класс эквивалентности, в который входит натуральное число 1 и, кроме того, множество других фундаментальных кофинитных чисел. Например, чисел

$$1 \pm \mathrm{E}, 1 \pm 2\mathrm{E}, 1 \pm \mathrm{E}^*, 1 \pm \mathrm{E}^* + \mathrm{E}^3.$$

Натуральное число 1 выделяется из всех составляющих вещественного числа 1_b. Назовем его ядром вещественного числа. (Здесь и ниже вещественные числа отмечены индексом «b», а их ядра — индексом «0».)

Легко заметить, что между различными составляющими вещественного числа линейного порядка нет, а есть только частичный порядок. Это означает, что некоторые числа сравнимы между собой, например, $1_0 - \mathrm{E} < 1_0 < 1_0 + \mathrm{E} < 1_0 + 2\mathrm{E}$, а некоторые числа — несравнимы, например, $1_0 + \mathrm{E}$ и $1_0 + \mathrm{E}^*$. На этом основании фундаментальные кофинитные числа, входящие в состав вещественного числа, можно назвать ореолом ядра и представлять себе как некоторое шаровидное скопление, окружающее ядро. Аналогичные определе-

ния примем для других вещественных рациональных чисел.

Для алгебраических чисел ядра определим как идеальные объекты. Например, ядром вещественного числа $\sqrt{2}_{\text{b}}$ будем называть идеальный объект $\alpha_0 = \sqrt{2}_0$, относительно которого известно, что $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_0^2 = 2_0$. Однако этот способ не позволяет описать ядра трансцендентных вещественных чисел.

Более универсальным является определение ядра, основанное на принципе стягивающихся отрезков. Согласно принципу Кантора, существует единственное вещественное число, принадлежащее каждому из стягивающихся отрезков. Например, отрезкам $[1_0 - 10^{-n},\ 1_0 + 10^{-n}]$ принадлежит вещественное число 1_{b}. На неархимедовой прямой такой формулировки принципа недостаточно, так как каждому из указанных отрезков будет принадлежать уже бесконечно много чисел, например, чисел вида

$$[1_0 - r\text{E}, 1_0 + r\text{E}],$$

где r — любое положительное рациональное число. Нам же нужен принцип, который давал бы в качестве ядра числа 1_{b} именно натуральное число 1_0.

Обобщение принципа должно быть принято в качестве новой аксиомы. Смысл ее — в постулировании степени разрешающей способности теории. Разрешающая способность классического анализа определяется следующим известным утверждением: если относительно вещественных чисел α и β известно, что $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, где ε — рациональное положительное и сколь угодно малое число, то $\alpha = \beta$. На неархимедовой прямой роль числа ε будет играть число $\lambda(\text{E})$.

Пусть $\lambda(\text{E}) = \operatorname*{Lim}_n \lambda\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ — произвольное положительное и сколь угодно малое кофинитное число. (Здесь $\lambda\left(\frac{1}{n}\right)$ — сколь угодно быстро убывающая функция, например, $\lambda\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}; \frac{1}{n^n}, \ldots$ и т.д.).

Примем, что два числа на неархимедовой прямой совпадают, если модуль их разности меньше любого сколь угодно малого кофинитного числа $\lambda(\text{E}) > 0$. Последнее означает, что математические сущности, более тонкие, чем те, которые можно выразить через актуальную бесконечно малую величину E, здесь не рассматриваются и в этом смысле не существуют.

Теперь можно вернуться к принципу стягивающихся отрезков. Пусть α — некоторое вещественное число и $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность, которая входит в состав числа α, например, для неперова числа

$$\alpha = e_{\text{b}} \text{ и } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

В состав вещественного числа e_{b} входят также и кофинитные числа

$$\operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \ldots <$$
$$< \operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < \ldots < \operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n!} < \ldots. \quad (8)$$

Интуитивно ясно, что каждое из последующих чисел указанного ряда находится ближе к «ядру» числа e_{b}, чем предыдущее. Поэтому «ядро» необходимо определить как некоторый «предел» данной последовательности. Это можно сделать следующим образом. Прежде всего отметим, что каждое из чисел (8) можно рассматривать как непрерывное продолжение последовательности $\{a_n\}$ на соответствующие бесконечно большие значения индекса (7). Действительно, запишем значения a_n как функцию аргумента n: $a_n = a(n)$.

Положим

$$a(\omega) = a\left(\operatorname*{Lim}_n n\right) = \operatorname*{Lim}_n a(n). \quad (9)$$

Структура равенства является такой же, как и в определении непрерывности в классическом анализе. Поэтому значение $a(\omega) = a_\omega$, удовлетворяющее условию (9), будем называть непрерывным продолжением последовательности $\{a_n\}$ на значение индекса, равное ω. Аналогично определим и продолжения на любые натуральные бесконечно большие значения $\nu(\omega)$. Таким образом, имеем продолженную последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots,$$
$$\ldots, a_{2\omega}, \ldots, a_{\omega^2}, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots. \quad (10)$$

Пусть теперь $\{b_n\}$ — монотонно убывающая последовательность, входящая в состав того же самого вещественного числа α. Тогда для любого числа $\lambda(\text{E})$ найдется такой номер $N(\omega)$, что для любых $\nu > N(\omega)$ будет иметь место условие

$$|b_\nu - a_\nu| < \lambda(\text{E}). \quad (11)$$

Идеальный объект α_0, удовлетворяющий условию

$$a_\nu \le \alpha_0 \le b_\nu,$$

назовем ядром вещественного числа α. Будем использовать также обозначение

$$\alpha_0 = \operatorname*{limit}_k a_k = \operatorname*{limit}_k b_k. \quad (12)$$

Таким образом, исследование вещественной прямой со степенью разрешения WL дает следующую картину. Во-первых, каждое вещественное число из точки превращается в скопление фундаментальных кофинитных чисел. В центре скопления находится ядро, которое окружено ореолом. Порядок, который есть для вещественных чисел, сохраняется и для их составляющих. Так, если для двух вещественных чисел α, β имеет место неравенство $\alpha > \beta$, то такое же неравенство будет иметь место и для любых составляющих этих чисел.

В связи с этим обычную числовую прямую можно представить себе как ось (подобную спице), на которую

в определенном порядке нанизаны указанные шаровые скопления. Каждое скопление довольно размыто и поэтому между ними зазоров нет. Именно в этом смысле можно сказать, что вещественная числовая прямая является непрерывной. Если иметь в виду роль числовой оси как инструмента (типа масштабной линейки) для проведения измерений, то можно сказать, что деления на линейку нанесены без зазоров, но при этом каждое деление имеет свою определенную ширину так, что зазоры отсутствуют благодаря только этому обстоятельству. Естественно, что точность измерения подобным инструментом не может быть выше, чем ширина каждого деления (риски).

Сделанные выше построения дают возможность усовершенствовать указанный инструмент и значительно повысить его точность, а именно: появляется возможность вместо самих шаровых скоплений, которыми оказались вещественные числа, ввести в рассмотрение только их центры — ядра. Иными словами, появилась возможность на каждой размытой риске в ее центре нанести «точечную» отметку.

Нетрудно доказать, что ядра вещественных чисел образуют поле, изоморфное полю вещественных чисел. Поэтому все возможности классического анализа сохраняются, если вместо вещественных чисел использовать их ядра (будем их называть также идеальными вещественными числами). При этом, однако, появляются новые возможности, которые связаны с тем обстоятельством, что ядра вещественных чисел полностью оси не заполняют. Например, между числом 0 и любым положительным идеальным вещественным числом можно поместить число $\mathrm{E} > 0$ или число $\mathrm{E}^* > 0$ и т.д. Для самих вещественных чисел такой возможности не было, так как фундаментальные кофинитные числа E, E^* сами входят в состав вещественного числа 0_b и отличить их от 0_b было невозможно. Именно поэтому поле вещественных чисел, а значит, и поле идеальных вещественных чисел, является архимедовым.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы заполнить промежутки между идеальными вещественными числами и тем самым повысить точность всей числовой системы. Мы хотим, чтобы новая числовая система была как можно ближе к системе вещественных чисел. Поэтому естественно принять следующие требования, которым должен удовлетворять процесс заполнения числовой оси.

1^0. В исходном состоянии на ось помещены только идеальные вещественные числа. Они образуют линейно упорядоченное поле, изоморфное полю вещественных чисел.

2^0. Новое число δ может быть помещено на числовую ось только в том случае, если оно упорядочено относительно любого числа, которое уже находится на оси и, кроме того, если вместе с числом δ на ось можно поместить также результаты любого конечного числа арифметических операций между δ и числами, уже помещенными на ось. (То есть числовая система на любом этапе своего становления всегда должна образовывать линейно упорядоченное поле).

Легко понять, что поставленная задача имеет неединственное решение. Например, если мы поместим на ось число $\mathrm{E} > 0$, то поместить на ось число $\mathrm{E}^* > 0$ уже невозможно, так как указанные числа между собой несравнимы. И наоборот, поместив на ось число E^*, для числа E «места» на оси найти уже не удается. Какую из указанных возможностей следует выбрать? Ясно, что, в конечном счете, все должно определяться характером поставленных задач. В зависимости от выбора мы будем получать различные числовые системы, пригодные для измерения тех или иных величин.

Выше предполагалось, что натуральные числа заданы изначально, причем они заданы в своем естественном порядке (1). Поэтому можно принять, что и кофинитное число ω, которое является классом последовательностей, включающим натуральный ряд (1), также выделяется из всех остальных кофинитных чисел. Иными словами, можно принять, что число ω, так же как и натуральные числа (1), имеет некоторое абсолютное значение.

Введение числа ω означает с необходимостью введение и числа $\omega^{-1} = \mathrm{E}$ и, следовательно, решение проблемы выбора между E и E^*, а также другими подобными числами.

В соответствии с требованием 2^0, вместе с числом E на ось необходимо поместить числа вида

$$X = \eta_k \omega^k + \ldots + \eta_1 \omega + x + + \zeta_1 \mathrm{E} + \ldots + \zeta_m \mathrm{E}^m, \qquad (13)$$

а также результаты арифметических операций между числами вида (13).

Здесь $\eta_k, \ldots, \eta_1, x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — идеальные вещественные числа; k, m — натуральные числа. Легко заметить, что построенная выше числовая система полностью оси не заполняет. Вакантными на ней являются, например, точки $2^{-\omega}$, E^{ω}. Необходимая степень заполнения оси должна определяться конкретными задачами.

Итак, согласно (13), независимая переменная, а значит, и само пространство наделяются иерархией структурных (масштабных) уровней. Уровень переменной x естественно назвать вещественным уровнем, уровни переменных $\zeta_1 \mathrm{E}$, $\eta_1 \omega$ — первым микро- и мегауровнями соответственно и т.д. Обычной вещественной прямой соответствует только один (вещественный) уровень на указанной неархимедовой прямой (13). Тем не менее, вещественная прямая является «сплошной», непрерывной, в то время как прямая (13), которая неизмеримо богаче обычной прямой, заведомо «сплошной» не является. Как уже отмечалось, это связано только с тем

обстоятельством, что обычные вещественные числа являются достаточно размытыми объектами. Стоит заменить их на «точечные» идеальные вещественные числа, как на оси обнаруживается множество вакансий самых различных уровней.

3. Неархимедовое пространство

Возьмем теперь неархимедовые прямые в качестве осей декартовых координат. В результате получим пространство, наделенное иерархией структурных уровней. Возникает вопрос о том, будет ли такое пространство изотропным. Ведь, заменив «размытое» вещественное число его «точечным» ядром, мы получаем в пространстве что-то вроде квадратной решетки, которая представляет собой уже анизотропный объект (ограничимся только двумерным пространством, то есть плоскостью). У нас есть только один метод исследования пространства — аналитический.

Пусть X и Y — переменные, взятые вдоль декартовых осей. Тогда точки пространства — это пары координат (X, Y), а само пространство — это совокупность точек (X, Y). Как исследуется вопрос об изотропии пространства в случае обычных, архимедовых осей Ox, Oy? Для этого совокупность точек (x, y) преобразовывается в другую совокупность

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{14}$$

где φ — произвольный угол от 0 до 2π. (Это соответствует повороту точки (x, y) на угол φ вокруг начала координат). Для обычных вещественных чисел совокупность (14) совпадает с исходной совокупностью точек (x, y). Отсюда можно заключить, что пространство (x, y) является изотропным.

Таким образом, для использования аналогичной процедуры в неархимедовом пространстве мы должны вначале определить тригонометрические функции. Для этого понадобится операция предельного перехода. Можно считать, что равенство (12) определяет предел последовательности рациональных или идеальных вещественных чисел. Предел последовательности кофинитных чисел определим как

$$\underset{k}{\mathrm{limit}}\, A_k = \underset{k}{\mathrm{limit}}\,\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, a_{kn} = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\,\underset{k}{\mathrm{limit}}\, a_{kn}.$$

Естественно принять, что

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \underset{k}{\mathrm{limit}}\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\varphi^{2k-1}}{(2k-1)!}\right], \\ \cos\varphi &= \underset{k}{\mathrm{limit}}\left[1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \ldots + (-1)^{k}\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть величина угла φ представляет собой идеальное вещественное число. Формулы (15) показывают, что величины $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ будут также идеальными вещественными числами. По своему построению числовые оси OX, OY содержат числа вида (13), а также результаты арифметических операций между числами указанного вида. Поэтому вместе с двумя числами X и Y оси будут принадлежать и их линейные комбинации типа (14). Последнее означает, что пространство по отношению к повороту на идеальный вещественный угол является изотропным.

Таким образом, на вещественном масштабном уровне пространство изотропно. Однако на других масштабных уровнях возможна и анизотропия структуры. Например, возьмем угол поворота, равным актуальной бесконечно малой величине Е: $\varphi = \mathrm{E}$. Числа $\sin \mathrm{E}$ и $\cos \mathrm{E}$ не выражаются через конечное число арифметических операций с числами вида (13). Поэтому соответствующее пространство будет анизотропным. С другой стороны, числа $\sin \mathrm{E}$, $\cos \mathrm{E}$ упорядочены относительно чисел, которые уже помещены на оси. Поэтому, поместив на оси числа вида $(\sin\varphi, \cos\varphi)$, можно получить пространство, изотропное и на микроуровнях.

Изотропный и самый общий случай можно получить путем обобщения концепции Кантора на случай неархимедовой прямой. Пусть (10) — последовательности, заданные при натуральных значениях индексов, включая бесконечно большие. (То есть в общем случае (10) не обязательно задается как непрерывное продолжение некоторой последовательности, определенной при конечных значениях индекса). Последовательность (10) назовем фундаментальной, если для любого $\lambda(\mathrm{E}) > 0$ найдется натуральное число $N(\omega)$, такое, что для любых $\nu(\omega)$, $\mu(\omega) > N(\omega)$ будет иметь место условие

$$\left|a_\nu - a_\mu\right| < \lambda(\mathrm{E}). \tag{16}$$

Классы эквивалентности (11) фундаментальных последовательностей (16) могут рассматриваться в качестве чисел на неархимедовой прямой, если они удовлетворяют указанным выше условиям упорядочивания.

По аналогии с (4), (5) класс эквивалентности (11), (16), содержащий последовательность (10), будем обозначать как $\underset{\nu}{\mathrm{limit}}\, a_\nu$. Тогда числам вещественного масштабного уровня будет отвечать случай, когда последовательности (10) построены как непрерывное продолжение исходных последовательностей $\{a_n\}$, заданных при конечных значениях индекса.

Например, пусть последовательность $\{a_n\}$ отвечает десятичному разложению числа $\sqrt{2}_{\mathrm{b}}$:

$$\sqrt{2}_{\mathrm{b}} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots = 1.414\ldots p_n\ldots .$$

Тогда ядро числа $\sqrt{2}$ имеет вид:

$$\sqrt{2}_0 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots + \frac{p_\omega}{10^\omega} + \frac{p_{\omega+1}}{10^{\omega+1}} + \ldots + \frac{p_\nu}{10^\nu} + \ldots = 1.14\ldots p_n\ldots p_\omega\ldots p_\nu\ldots,$$

где $p(\nu(\omega)) = \operatorname*{Lim}_n p(\nu(n))$. В общем случае выполнение последнего равенства необязательно, и мы приходим к числам вида

$$p_0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_n \cdots p_\omega p_{\omega+1} \cdots p_\nu \cdots.$$

Таким образом, подводя итог, можно сказать, что рациональным числам отвечает конечное число десятичных знаков после запятой (не считая периодических разложений), а обычным иррациональным числам — число знаков после запятой, большее любого конечного натурального числа. На неархимедовой прямой мы приходим к иррациональности качественно нового типа — здесь число знаков после запятой больше любого актуального бесконечно большого натурального числа (7).

4. Два типа предельных переходов

Операция предельного перехода открывает возможность определения производных и интегралов. На неархимедовой прямой можно рассматривать два типа предельных переходов: в смысле limit и в смысле Lim. Операция Lim была определена для последовательностей рациональных и идеальных вещественных чисел. Пусть теперь задана последовательность кофинитных чисел

$$A_k = \operatorname*{Lim}_n a_{kn}.$$

Предположим, что применение оператора Lim к последовательности $\{A_k\}$ математических объектов нового типа уже не дает:

$$\operatorname*{Lim}_k A_k = \operatorname*{Lim}_k \operatorname*{Lim}_n a_{kn} = \operatorname*{Lim}_n a_{nn}$$

(диагональное определение повторного предела, аналогичное определению (5) классического анализа).

Пусть $Y = F(X)$ — функция, заданная на неархимедовой прямой и X_k — некоторая последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке X. Последнее означает, что

$$X_k = X + \Delta X_k,$$
$$\operatorname*{Lim}_k \Delta X_k = 0.$$

Если имеет место условие

$$F(X) = F(\operatorname*{Lim}_k X_k) = \operatorname*{Lim}_k F(X_k), \tag{17}$$

то будем говорить, что функция F непрерывна в точке X при переходе в точку X по пути $\{X_k\}$. Здесь возможно множество самых различных и чрезвычайно интересных вариантов. Например, пусть

$$X = \mathrm{E} \text{ и } X_k = \frac{1}{k},\ \Delta X_k = \frac{1}{k} - \mathrm{E}.$$

Все точки X_k принадлежат вещественному масштабному уровню, а предельная точка $X = \mathrm{E}$ — первому микроуровню. Поэтому (17) — это условие непрерывности при переходе с вещественного уровня на первый микроуровень. Однако в ту же самую точку $X = \mathrm{E}$ можно перейти и с мегауровня прямой, например, по следующему пути

$$X = \mathrm{E},\ X_k = \frac{\omega}{k^2},\ \Delta X_k = \frac{\omega}{k^2} - \mathrm{E}.$$

В зависимости от пути различный смысл будут иметь место и производные, характеризующие связь процессов на различных структурных уровнях пространства:

$$\left.\frac{DF(X)}{DX}\right|_{X_k} = \operatorname*{Lim}_{\mathrm{k}} \frac{F(X + \Delta X_k) - F(X)}{\Delta X_k}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность X_k стремится к значению X в смысле limit:

$$X_k = X + \Delta X_k,$$
$$\operatorname*{limit}_k \Delta X_k = 0.$$

Тогда условие непрерывности и выражение для производной имеют следующий вид:

$$\operatorname*{limit}_k F(X_k) = F(\operatorname*{limit}_k X_k),$$
$$\left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X_k} = \operatorname*{limit}_k \frac{F(X + \Delta X_k) - F(X)}{\Delta X_k}. \tag{18}$$

Если значения F, X и ΔX_k принадлежат вещественному масштабному уровню и, кроме того, предел (18) не зависит от стремления ΔX_k к 0, то формулы (18) переходят в формулы классического анализа. В остальных случаях в зависимости от выбора последовательностей вторая формула (18) будет описывать локальные производные на различных масштабных уровнях неархимедовой прямой.

5. Неархимедовое время

Выше неархимедовые прямые рассматривались в качестве пространственных осей координат. Естественно рассмотреть подобную прямую и в качестве оси времени. Ограничимся только двумя масштабными уровнями времени — вещественным и первым микроуровнем. Пусть физическое время имеет следующую структуру:

$$T = t + \tau \mathrm{E},$$

где t, τ — идеальные вещественные переменные; Е — актуальная бесконечно малая величина.

Предположим, что вдоль оси OX движется материальная точка. Закон ее движения дается некоторой функцией времени

$$X = F(T) = F(t + \tau\mathrm{E}) = \varphi(t, \tau, \mathrm{E}) =$$
$$= \varphi_0(t, \tau) + \varphi_1(t, \tau)\mathrm{E} + \varphi_2(t, \tau)\mathrm{E}^2 + \ldots. \tag{19}$$

Предположим, что непосредственно мы можем наблюдать только вещественный уровень пространства и времени. Следовательно, функция $X = F(T)$ будет нами восприниматься как $x = \varphi_0(t)$.

Рассмотрим основные варианты. По-видимому, случаи, когда функция φ_0 в разложении (19) зависит от аргумента τ, практически невозможны. Действительно,

если φ_0 зависит от τ, то это означает, что в фиксированный (с нашей точки зрения) момент времени $t = t^0$ тело исчезает из положения $\varphi_0(t^0, 0)$ и в то же самое мгновение появляется в некоторой другой точке пространства $\varphi_0(t^0, \rho)$. Не исключено, что подобные возможности можно использовать для описания квантовых переходов. Однако для макрообъектов указанные переходы исключим и будем считать, что φ_0 может зависеть только от переменной t. Далее, зависимость функции φ_1 от τ представляется естественной: функция φ_1 описывает смещения на микроуровне, которые совершаются на микромасштабном уровне времени. Здесь переменная t выступает как параметр.

Рассмотрим два примера. Пусть

$$\begin{aligned} X &= F(t+\tau\mathrm{E}) = \upsilon^0 t, \\ X &= F(t+\tau\mathrm{E}) = \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \tag{20}$$

где υ^0, $g = \mathrm{const}$. Для наблюдателя вещественного масштабного уровня первый закон воспринимается как непрерывное движение с постоянной скоростью υ^0, а второй закон — как непрерывное движение с постоянным ускорением g. Тот факт, что смещение X не зависит от τ означает, что при t = const и изменении времени τ точка находится в покое, причем она покоится в течение сколь угодно больших значений τ: $0 \le \tau < \infty$. Этот случай аналогичен тому, который описывается в дискретных моделях пространства и времени [6], когда тело либо покоится, либо скачком передвигается на некоторое расстояние, равное фундаментальной длине. В законе (20) ситуация является в общем такой же, только «фундаментальная длина» представляет собой актуальную бесконечно малую величину. Это позволяет, сохранив основные черты представлений [6], использовать для исследования операцию предельного перехода и, следовательно, весь аппарат математического анализа. Закон движения (20) можно также сравнить с движением изображения на киноэкране: для зрителя движение выглядит как непрерывное, хотя в действительности оно представляет собой смену различных статических картин [6].

Предположим теперь, что

$$\begin{aligned} X &= F(t+\tau\mathrm{E}) = \upsilon^0 T = \upsilon^0 t + \upsilon^0 \tau\mathrm{E}, \\ X &= F(t+\tau\mathrm{E}) = \frac{gT^2}{2} = \frac{g(t+\tau\mathrm{E})^2}{2} = \\ &= \frac{gt^2}{2} + gt\tau\mathrm{E} + \frac{g\tau^2}{2}\mathrm{E}^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Для внешнего наблюдателя движение (21) будет таким же равномерным или равноускоренным, как и в случае (20). Однако на микроуровнях законы движения (20) и (21) отличаются принципиально. Движение (20) было разрывным при переходе с одного масштабного уровня на другой, в то время как движение (21) является непрерывным, причем непрерывность имеет место для всех значений t и τ. Нетрудно построить законы движения, когда непрерывность будет иметь место только для одного значения $\tau = \rho$ и т. д.

Рассмотренные законы движения выявляют одну их интересную и, возможно, принципиально важную особенность. В своем движении вдоль прямой материальная точка «все» промежуточные положения не проходит. Например, промежуточные положения третьего и последующих уровней для точки (21) являются просто недоступными. Такое движение похоже на движение колесного экипажа по неровной дороге. Если диаметр колеса больше размера неровности, то все точки углублений для такого колеса будут просто недоступными, хотя формально они и находятся «между» какими-то двумя положениями колеса. Сделав пересадку на экипаж с меньшим диаметром колеса, мы сможем достичь некоторых промежуточных положений. Однако неровности меньшего масштаба будут по-прежнему преодолеваться скачком и т.д.

6. Модели неупругих сред в неархимедовом пространстве

Обратимся теперь к задачам механики сплошной среды. Как уже отмечалось, концепция сплошной среды связана только с математическим аппаратом, который используется в механике. Считается, что деформируемая среда «заполняет» каждую точку определенной области пространства. Если же среда занимает область неархимедового пространства, то вопрос о степени ее «сплошности» нуждается в уточнении. Реальное тело может занимать только ограниченную область пространства. Поэтому мегауровни сразу исключим. Естественно предположить, что подобная ограниченность имеет место и на микроуровнях. Например, если тело заполняет только два масштабных уровня, то его протяженность на микроуровне должна быть ограничена некоторой постоянной величиной ρ. Например,

$$X = x + \xi\mathrm{E},\ \ Y = y + \eta\mathrm{E},$$
$$|x| \le L,\ \ |y| \le L,\ \ 0 \le \xi,\ \ \eta \le \rho.$$

Поле скоростей имеет вид:

$$u(X, Y) = u(x+\xi\mathrm{E},\ y+\eta\mathrm{E}) = \varphi(x, y, \xi, \eta, \mathrm{E}),$$
$$\upsilon(X, Y) = \upsilon(x+\xi\mathrm{E},\ y+\eta\mathrm{E}) = \psi(x, y, \xi, \eta, \mathrm{E}).$$

Необходимо подчеркнуть, что хотя задача и является плоской, каждая из компонент скорости зависит от четырех аргументов. Поэтому деформации, вращение и другие характеристики на каждом из масштабных уровней будут, вообще говоря, различными. Например, для скорости вращения имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\xi E)}-\frac{\partial\varphi}{\partial(\eta E)}\right).$$

Здесь макро- и микровращения реализуются на различных масштабных уровнях пространства и поэтому парадокса с наложением областей их определения не возникает.

Выше было рассмотрено условие непрерывности функций при переходе с одного масштабного уровня аргумента на другой уровень. Если непрерывность имеет место для любых путей, связывающих два масштабных уровня, то функции φ и ψ будут зависеть только от линейных комбинаций аргументов $x+\xi \mathrm{E}$ и $y+\eta \mathrm{E}$ [5]. Это ограничение является весьма сильным. Поэтому можно ожидать, что основной интерес будут представлять случаи, когда непрерывности не будет. В этих случаях появляются новые характеристики функций, а именно: ее скачки при переходе с одного масштабного уровня на другой.

В пластичности подобные разрывы могут соответствовать проскальзываниям между структурными элементами среды. В [5] рассмотрен случай простого сдвига и показано, что деформирование элемента на двух структурных уровнях, включая проскальзывания между ними, можно описывать функциями, заданными на неархимедовой плоскости. В [5] рассмотрена также задача о пути между двумя точками, для преодоления которого требуется наименьшее время. У траектории на микроуровне допускаются изломы. Считается, что скорость зависит от локальной ориентации траектории (подобная ситуация имеет место при движении парусника галсами [7]).

Интересно отметить, что необходимость в подобных решениях возникает и в теории обработки металлов давлением. Так, в [8] рассматриваются пути нагружения, которые позволяют достичь заданных деформаций тела при наименьших затратах энергии. Тело удовлетворяет обобщенному закону Максвелла. Показано, что траектории нагружения должны включать в себя вертикальные отрезки, которым соответствует «ударная, ковочная» деформация. При этом деформации должны носить пульсирующий характер: чем больше частота пульсаций, тем меньше общая работа. В пределе переключения должны осуществляться с бесконечно большой частотой.

Таким образом, в теории пластичности и в ряде других областей возникают задачи, которые приводят к близким математическим объектам: траекториям нагружения с бесконечно малыми изломами, полям скоростей, которые испытывают разрывы на микроуровнях и т.д. Подобные объекты можно конструировать и исследовать с помощью функций, заданных в неархимедовом пространстве. Такой подход приводит к естественному и достаточно ясному математическому аппарату, который непосредственно примыкает к классическому анализу.

7. Исторические предпосылки

И все же, если говорить о необходимости более или менее радикальных изменений в математическом аппарате, для создания которого потребовалось более двух тысяч лет, то хотелось бы иметь для этого более глубокие основания, чем потребность в решении современных задач теории пластичности или оптимального управления. Таким основанием может быть только проблема, которая была поставлена и не забыта в течение времени, сопоставимом со временем создания классического анализа. Такая проблема есть — это проблема измерения роговидных углов. Она была поставлена еще в античности и изложить ее можно таким образом.

Рассмотрим различные отрезки прямой. Будем говорить, что отрезок b больше, чем отрезок a, если при наложении их левых концов правый конец отрезка b лежит правее, чем конец отрезка a. Такой порядок удовлетворяет всем необходимым условиям (если $b>a$ и $c>b$, то $c>a$ и др.). Мы знаем, что среди вещественных чисел всегда найдется такое число, которое можно будет назвать длиной любого заданного отрезка.

Рассмотрим теперь различные углы [9]. Пусть одна из сторон угла всегда будет прямолинейным лучом, а другая — либо лучом, либо дугой окружности. Совместим вершины и прямолинейные лучи углов α и β. Будем говорить, что $\beta>\alpha$, если область, занятая углом α, лежит внутри области, занятой углом β. Такой порядок также удовлетворяет всем необходимым условиям. Однако для измерения указанной системы величин запаса вещественных чисел уже недостаточно. Например, если измерять угол, образованный двумя прямолинейными лучами, его тангенсом, то для измерения угла, образованного прямой и касательной к ней дугой окружности, никакого вещественного числа найти не удается. Величина такого угла будет всегда меньше любого положительного вещественного числа ε. Причем среди подобных углов есть свой порядок: дуге радиуса 2 отвечает угол, меньший, чем угол с дугой радиуса 1 и т.д. Таким образом, можно сказать, что для измерения указанной системы величин точности обычных вещественных чисел уже недостаточно. Следовательно, необходимо введение новой числовой системы, а это влечет за собой и необходимость изменений в соответствующем математическом аппарате.

Рассмотрим теперь некоторые доводы общего характера. Как уже отмечалось, математические теории часто сравнивают с инструментами для физических наблюдений. Каждый инструмент имеет свою собственную разрешающую способность. Это в полной мере относится и к наиболее совершенному инструменту исследований — классическому анализу. Как и любая математическая модель реальности, классический анализ имеет свою собственную и вполне определенную разрешающую способность. А если это так, то можно поставить

вопрос о создании математического аппарата, имеющего бóльшую разрешающую способность, чем классический.

Эту возможность можно реализовать, если снять ограничение, которое устанавливается одной из аксиом теории вещественных чисел (а значит, и анализа) — аксиомы Архимеда: если имеется два положительных вещественных числа α и β, причем $\alpha < \beta$, то всегда найдется натуральное число N такое, что значение $N\alpha$ превзойдет значение β, то есть

$$0 < \alpha < \beta, \; Na > \beta. \qquad (22)$$

Не будем торопиться с признанием «очевидности» этой аксиомы. Подобная «очевидность» навязана только опытом работы с обычными вещественными числами. В случае преодоления ограничения, связанного с указанной аксиомой, нас ожидают качественно новые возможности.

Действительно, что означает аксиома Архимеда? Она означает следующий очень простой факт. Если мы выбираем любой шаг, с которым хотим продвигаться вперед, то шагая вдоль числовой прямой таким образом, мы рано или поздно или, лучше сказать, всегда достигнем любого пункта на нашем пути. Необходимо сделать только одну оговорку относительно числа 0. Она станет очевидной, если аксиому Архимеда сформулировать несколько иначе: для любого положительного числа α и любого числа $\beta > \alpha$ найдется натуральное N, что

$$0 < \alpha < \beta, \; \frac{\beta}{N} < \alpha. \qquad (23)$$

В такой формулировке мы видим, что отправляясь от любого числа $\beta > \alpha$ способом (23), мы можем добраться до любого сколь угодно малого числа α. До любого числа, кроме числа 0. Поэтому число 0 на вещественной оси следует считать особым.

Итак, двигаясь вдоль оси способом (22) или (23), мы можем достичь любой точки на прямой. Об этом факте можно сказать и по-другому: при указанном способе движения никаких непреодолимых препятствий на нашем пути не имеется. В этом смысле можно сказать, что все точки вещественной оси (кроме 0) относятся к одному уровню (или принадлежат одному масштабному уровню).

Как изменится эта картина, если мы снимем ограничение, которое диктуется аксиомой Архимеда? В этом случае, отправляясь от заданной точки с фиксированным шагом, некоторых точек на прямой мы достигнем, а некоторые остаются принципиально недостижимыми. Последнее означает, что мы имеем определенную иерархию масштабных уровней на неархимедовой прямой. Уже сам по себе подобный факт указывает на большую адекватность неархимедовой, а значит, и многомасштабной прямой по сравнению с обычной, одномасштабной прямой.

Действительно, наличие иерархии является наиболее универсальным свойством реального мира. Иерархия строения и функционирования сложных систем приводит к появлению у них целого ряда масштабных уровней. Основным средством их теоретического изучения являются математические модели. Адекватные модели и сам математический аппарат, который лежит в их основе, должны отражать основное свойство реальных объектов — наличие в них различных масштабных уровней.

Аналитическое описание структур со многими масштабными уровнями возможно в рамках неархимедовых числовых систем. Работы в этом направлении уже ведутся и их результатом явилось создание новой научной дисциплины, которая получила название нестандартного анализа (иногда ее называют также инфинитезимальным анализом [10]). Методы нестандартного анализа (в их современном виде) являются сравнительно новыми и уже находят применение для исследования различных задач. Результаты по общей теории нестандартных методов, ее приложениям и дальнейшие библиографические ссылки можно найти в [10, 11].

8. Выводы

В заключение сформулируем основные выводы.

1. Пространство, которое используется в механике сплошной среды, является архимедовым. Это значит, что отправляясь от любой его точки с некоторым фиксированным шагом, мы сможем достичь любой другой точки пространства. В этом смысле архимедовое пространство является одномасштабным.

2. Развитие моделей пластических сред, обладающих иерархией структурных уровней, приводит к необходимости введения неархимедового пространства и времени, которые характеризуются наличием уже многих масштабных уровней. Потребность в таком обобщении возникает также и в других современных областях исследований. Однако без преувеличения можно сказать, что такая потребность была всегда — линейно упорядоченные системы величин, для измерения которых точность обычных вещественных чисел оказывается недостаточной — известны со времен античности.

3. Классическая концепция вещественной числовой прямой однозначно определяет и основное понятие классического математического анализа — понятие предела. Изменение концепции прямой приводит к необходимости соответствующего изменения и понятия предела, а значит, и других понятий анализа. В целом, это приводит к математическому аппарату, который обладает большей разрешающей способностью, чем классический анализ. Это дает в руки дополнительный инструмент для построения моделей сред с микроструктурой, а также для решения ряда других задач.

Литература

1. *Физическая* мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2 т. / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т.2. – 320 с.
2. *Новожилов В.В.* Вопросы механики сплошной среды. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
3. *Блехман И.И., Машкис А.Д., Пановко Я.П.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. Издание 2. – М.: Наука, 1990. – 360 с.
4. *Ревуженко А.Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2000. – 428 с.
5. *Ревуженко А.Ф.* Теория пластичности и математический анализ на неархимедовой прямой // Физ. мезомех. – 2001. – Т.4. – № 3. – С. 73–83.
6. *Вяльцев А.Н.* Дискретное пространство-время. – М.: Наука, 1965. – 397 с.
7. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.
8. *Кротов В.Ф., Бровман М.Я.* Экстремальные процессы пластического деформирования металлов // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 148–153.
9. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
10. *Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Инфинитезимальный анализ. В 2 ч. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001. – Ч. 1. – 315 с., Ч. 2. – 247 с.
11. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хуэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. – М.: Мир, 1990. – 616 с.

On the use of the concept of space with the hierarchy of structural levels in solid mechanics

A.Ph. Revuzhenko

Institute of Mining, SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

Consideration is given to the space whose coordinate axes are non-Archimedean lines. The non-Archimedean space is characterized by the presence of numerous scale levels. A material point moving in the non-Archimedean space does not travel through each elementary point. Its motion is similar to that of a wheel over a road with a roughness much less than the wheel diameter. The non-Archimedean space concept is discussed as applied to the development of models of plastic media with a hierarchy of structural levels.