Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.9+519.8

МАТЕМАТИКА И ЭКОНОМИКА Л. В. КАНТОРОВИЧА

С. С. Кутателадзе

Аннотация: Краткое обсуждение творческого пути и вклада Л. В. Канторовича в формирование современных воззрений на взаимодействие математики и экономики.

Ключевые слова: линейное программирование, функциональный анализ, прикладная математика

Путь Канторовича

Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 г. (6 января по старому стилю). Интересно, что во многих справочниках указана другая дата. Сам Канторович всегда с улыбкой отмечал, что он себя помнит с 19.01.1912. Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 г. в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет. Вскоре он стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. Ранние студенческие годы сформировали первую когорту наиболее близких товарищей. В кружке Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др., с которыми Леонид Витальевич был дружен всю жизнь. Старые друзья до конца жизни за глаза называли его «Лёнечка».

Закончив ЛГУ в 1930 г., Канторович начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая ее с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 г. он профессор Ленинградского института инженеров гражданского строительства и доцент ЛГУ. В 1934 г. Канторович становится профессором своей alma mater.

Основные труды в области математики Канторович создал именно в свой «ленинградский» период. При этом в 1930 годы он опубликовал больше статей по чистой математике, а 1940 годы для него — время работ по вычислительной математике, где он стал признанным лидером в стране.

При подготовке собрания сочинений Канторовича в его личном архиве было обнаружено письмо Н. Н. Лузина, датированное 29 апреля 1934 г. Один из первых математиков того времени и основатель знаменитой «Лузитании» писал (см. [1]):

> «Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...».

В 1935 г. Канторович совершил свое главное математическое открытие — он определил K-пространства, т. е. векторные решетки, в которых каждое непустое порядково ограниченное множество имеет точные грани.

Пространства Канторовича предоставили естественные рамки для построения теории линейных неравенств — области, до того времени практически никак не изученной. Очевидно, что концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов. Важным источником интереса к линейным неравенствам служила экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно связывать с языком отношений частичного сравнения. Наконец, концепция линейных неравенств неразрывна с ключевой идеей выпуклого множества. Функциональный анализ по самому своему понятию предполагает наличие нетривиальных непрерывных линейных функционалов в рассматриваемом пространстве. Наличие же такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве. В случае общего положения выпуклые множества суть в точности решения подходящей системы линейных неравенств.

В конце 1940 годов Канторович в серии работ сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики:

> «Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель этой статьи[1] — в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики...».

Канторович выделил три технологии: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах. Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов (не обязательно метрических)[2]. Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов. Соответствующие приёмы можно рассматривать как своего рода скаляризацию векторных целей.

С конца 1930 годов творчество Канторовича обрело новые черты — он совершил серьезный прорыв в экономической науке. В 1939 г. вышла в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.

[1]См. [2].

[2]Это положение включено в совместный доклад [3], подготовленный С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником и Л. В Канторовичем для III Всесоюзного математического съезда в 1956 г.

В 1940 годы на поверхности научного информационного потока экономические работы Канторовича практически не публиковались. Однако в его творчестве экономическая проблематика выступила на первый план.

Уже в военные годы он завершил работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», принесшей ему в 1975 г. Нобелевскую премию. Эта работа опережала время, не соответствовала догматам господствующей политической экономии, и ее публикация оказалась возможной только в 1959 г. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали использоваться в экономической практике.

В 1948 г. Совет Министров СССР особо секретным постановлением № 1990–774сс/оп решил «в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича». Так Канторович вошёл в число участников проекта по созданию отечественного ядерного оружия[3].

В 1957 г. Канторовича пригласили на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Вскоре он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению экономики. Основные публикации Канторовича этого периода относятся к экономике, за исключением, прежде всего, всемирно известного курса «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанного совместно с Г. П. Акиловым.

Нельзя не отметить одну блестящую придумку Канторовича и его учеников — научные тарифы на такси. Люди старшего поколения помнят, как в 1960 годы была введена плата за посадку и уменьшена такса за проезд, что немедленно привело к повышению рентабельности перевозок и выгодности коротких поездок для клиентов и водителей. Эта экономическая мера была разработана в результате математического моделирования, осуществленного Канторовичем и группой его молодых учеников-математиков, и опубликована в самом престижном математическом журнале страны — в «Успехах математических наук».

В 1964 г. Канторович избран действительным членом АН СССР по Отделению математики и в 1965 г. удостоен Ленинской премии.

В начале 1970 годов Канторович переехал в Москву, где продолжил занятия экономическим анализом. Канторович всегда мечтал о внедрении новых математических методов в хозяйственную практику своей Родины и служил этой мечте до своей кончины 7 апреля 1986 г., невзирая на непонимание и откровенное противодействие ретроградов от науки и политики, управлявших страной. Он похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Научное наследие

Научное наследие Канторовича огромно. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Он по праву входит в число основоположников современной математической экономики.

Канторович — автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: дескриптивная теория функций и теория

[3] В оперативной переписке советской разведки — операция «Энормоз».

множеств, конструктивная теория функций, приближенные методы анализа, функциональный анализ, функциональный анализ и прикладная математика, линейное программирование, вычислительная техника и программирование, оптимальное планирование и оптимальные цены, экономические проблемы плановой экономики.

Говоря о математических работах Канторовича, нельзя не выделить особо три обзорные статьи [2, 4, 5] в журнале «Успехи математических наук». Первая из них снабжена названием, несказанно впечатляющим своим масштабом особенно при её сравнении с возрастом автора. Именно эта статья фигурирует в формуле Сталинской премии второй степени в размере 100 000 рублей, присужденной Канторовичу в 1948 году. Учебник Канторовича и Акилова, многие годы служивший настольной книгой многих теоретиков и прикладников, возник на основе идей этого блестящего математического сочинения.

Удивительное многообразие направлений исследований скреплено и личностью Канторовича, и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения разнородных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.

Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

Функциональный анализ и прикладная математика

Творческий стиль Канторовича основан на принципе единства теоретических и прикладных исследований. Именно он привёл к первоклассным достижениям на границах функционального анализа и прикладной математики. Техника Канторовича состояла в развитии и применения методов мажорации, аппроксимации и оптимизации.

Пусть X и Y — вещественные векторные пространства, нормированные соответственно пространствами Канторовича E и F. Таким образом заданы векторные нормы $|\!\cdot\!|_X$ и $|\!\cdot\!|_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$

Если при этом

$$|Tx|_Y \leq S|x|_X \quad (x \in X),$$

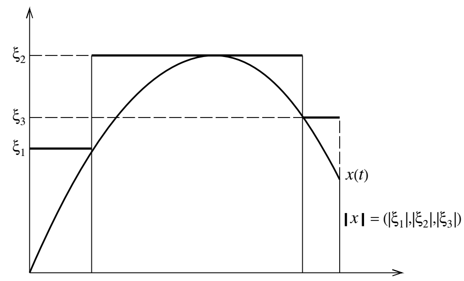
то S называют *мажорантой* T. Если в множестве всех мажорант T имеется наименьший элемент, то его называют *точной* или *наименьшей мажорантой* T и обозначают символом $|T|$. Таким образом, точная мажоранта $|T|$ — положительный оператор из E в F, для которого

$$|Tx| \leq |T|\big(|x|\big) \quad (x \in X).$$

Канторович писал по этому (см. [6]):

«Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений. В случае бесконечной системы уравнений неизвестным является последовательность, и в качестве её нормы можно принять не одно число, а конечную систему, например, модули первых элементов и оценку остатка:

$$|\!|(\xi_1, \xi_2, \dots)|\!| = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \geq N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$



Это позволяет уточнить условия применимости метода итераций для бесконечных систем. Одновременно этот подход позволяет получить и приближенные решения указанных задач, при этом приближенные решения с избытком или с недостатком, с одновременной оценкой погрешности. Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних».

Классические исследования метода Ньютона, принесшие Канторовичу мировое признание в области методов вычислений, были основаны на самой общей схеме мажорирования.

В наши дни развитие методов мажорирования осуществляется в рамках булевозначного анализа (см. [7]). Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств. Важнейшие взаимосвязи здесь таковы. Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели. Наконец, банахово пространство X получается из некоторого банахова пространства в булевозначной модели посредством специальной процедуры ограниченного спуска в том и только в том случае, если X содержит полную булеву алгебру проекторов единичной нормы, обладающей свойством цикличности. Последнее равносильно тому, что X — пространство Банаха — Канторовича и норма в X является смешанной[4].

Подводя итоги своим исследованиям по общей теории приближенных методов, Канторович писал[5]:

[4] Современная теория мажорированных операторов обстоятельно представлена в монографии А. Г. Кусраева [8].

[5] См. [9].

«Имеется весьма большое число различных методов для разных классов задач и уравнений, и их конструирование и исследование в каждом конкретном случае представляло немалые трудности. Поэтому возникла мысль о построении общей теории, которая позволяла бы их строить и исследовать из некоего единого источника. Эта теория основывалась на идее связи данного пространства, в котором задано исследуемое уравнение, с некоторым более простым, в которое исходное пространство отображается. На основе исследования „приближенного уравнения“ в более простом пространстве открывалась возможность строить и изучать конкретные приближенные методы в исходном пространстве...

Мне кажется, что основная идея этой теории носит общий характер и отражает общий гносеологический принцип исследования сложных систем. Он, разумеется, применялся и раньше, применяется и в системном анализе, но не имеет строгого математического аппарата. Попросту этот принцип состоит в том, что данная большая сложная система, расположенная в некотором пространстве, сопоставляется с более простой, малоразмерной моделью, расположенной в этом же или более простом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. Изучение этой упрощенной модели оказывается, естественно, более доступным и осуществимым. Этот метод предъявляет, конечно, определенные требования к качеству аппроксимирующей системы».

Классическая схема дискретизации, предложенная Канторовичем для анализа уравнения $Tx = y$, где $T : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, действующий между банаховыми пространствами X и Y, состоит в подборе конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и соответствующих вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle \imath_N}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \jmath_N} \\ X_N & \xrightarrow[T_N]{} & Y_N \end{array}$$

При этом уравнение $T_N x_N = y_N$ рассматривается как конечномерное приближение исходной задачи.

Булевозначный анализ позволяет расширить пределы применимости пространств Банаха — Канторовича и более общих модулей для исследования экстенсиональных уравнений.

Многообещающие возможности открывает новый метод гипераппроксимации, связанный с идеями инфинитезимального анализа. Классическая дискретизация использует аппроксимацию бесконечномерного пространства с помощью лежащих внутри его конечномерных подпространств. В рамках нестандартной теории множеств допустимо аппроксимировать бесконечномерные векторные пространства более широкими внешними конечномерными пространствами. Разумеется, размерности таких гипераппроксимаций представляют собой актуальные бесконечно большие натуральные числа.

Примерная схема гипераппроксимации отражена следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle \varphi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_F} \\ E^{\#} & \xrightarrow[T^{\#}]{} & F^{\#} \end{array}$$

Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке. Напомним соответствующие конструкции.

Пусть E — внутреннее векторное пространство над ${}^*\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — *основное поле* скаляров, т. е. одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $*$ — символ робинсоновской стандартизации. Таким образом, заданы две внутренние операции $+ : E \times E \to E$ и $\cdot : {}^*\mathbb{F} \times E \to E$, удовлетворяющие обычным аксиомам векторного пространства. Поскольку $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$, то внутреннее векторное пространство E будет также и векторным пространством над $\mathbb{F}$, т. е. внешним векторным пространством, которое, однако, не будет ни нормированным, ни гильбертовым, даже если E является таковым как внутреннее пространство. Тем не менее с каждым внутренним нормированным или предгильбертовым пространством связано некоторое внешнее банахово, соответственно гильбертово, пространство.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$. Как обычно, элемент $x \in E$ называют *доступным*, если $\|x\|$ — доступное число, допускающее по определению некоторую стандартную мажоранту. Если $\|x\|$ — бесконечно малое число, то вектор x также считают *бесконечно малым*. Обозначим через $\operatorname{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества доступных и бесконечно малых элементов пространства E. Множество $\mu(E)$ представляет собой *монаду* нуля в E. Нет сомнений, что $\operatorname{ltd}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Обозначим фактор-пространство $\operatorname{ltd}(E)/\mu(E)$ символом $E^{\#}$. На $E^{\#}$ возникает естественная норма по формуле

$$\|\varphi x\| := \|x^{\#}\| := \operatorname{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \operatorname{ltd}(E)).$$

Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^{\#} : \operatorname{ltd}(E) \to E^{\#}$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа. При этом $(E^{\#}, \|\cdot\|)$ становится внешним нормированным пространством, именуемым *нестандартной оболочкой* E. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то нестандартной оболочкой E называют пространство $({}^*E)^{\#}$, построенное по робинсоновскому изображению ${}^*E$.

Для каждого $x \in E$ элемент $\varphi({}^*x) = ({}^*x)^{\#}$ содержится в $({}^*E)^{\#}$, причем $\|x\| = \|({}^*x)^{\#}\|$. Таким образом, отображение $x \mapsto ({}^*x)^{\#}$ осуществляет изометрическое вложение E в $({}^*E)^{\#}$. Обычно считают, что $E \subset ({}^*E)^{\#}$.

Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор. Числовое множество

$$c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E) \|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

является внутренним и ограниченным. Как известно, $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\operatorname{ltd}(E)) \subset \operatorname{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на фактор-пространство — внешний оператор $T^{\#} : E^{\#} \to F^{\#}$, действующий по правилу $T^{\#}\varphi_E x := \varphi_F T x \quad (x \in E)$. Оператор $T^{\#}$ линеен (относительно скаляров из $\mathbb{F}$) и ограничен, причем $\|T^{\#}\| = \operatorname{st}(\|T\|)$. Оператор $T^{\#}$ называют *нестандартной оболочкой* T. Важно подчеркнуть, что пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта. Гипераппроксимация наших дней имеет корнями идеи дискретизации Канторовича.

Уже в 1930 годы Канторович начал исследовать задачи, связанные с принятием практических решений. Увлеченный идеями функционального анализа и порядка, Канторович рассматривал такие задачи в духе поиска оптимального решения.

Канторович отмечал[6]:

> «Многие математические и практические задачи приводят к необходимости разыскания „особых“ экстремумов. Это, с одной стороны, краевые экстремумы, когда экстремум достигается на границе области изменения аргумента. С другой стороны, — это случай, когда функционал не дифференцируем. Большое число такого рода вопросов встречается в самой математике и в её приложениях, и общие методы оказываются здесь неэффективными».

Канторович одним из первым сформулировал признаки оптимальности в весьма общих экстремальных задачах. Стал классическим его подход к теории транспорта, в центре которой расположена задача Монжа — Канторовича (см. [10]).

Еще одна особенность экстремальных задач, возникающих в практике, состоит в наличии большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Фактически здесь всегда речь идет о многоцелевой оптимизации, характерной присутствием векторнозначной функции цели. При поиске управленческого решения в этих обстоятельствах приходится учитывать различные, противоречащие друг другу предпочтения, составляющие единую комплексную цель. При этом, как правило, невозможно выделить какую-либо отдельную скалярную цель, не игнорируя остальные и не меняя тем самым первоначальной постановки задачи.

Специфические трудности практических задач и необходимость сведения их к числовому случаю были связаны в творчестве Канторовича с размышлениями о природе вещественных чисел. Элементы своих K-пространств он рассматривал как обобщенные числа, тем самым развивая идеи, которые в наше время принято называть скаляризацией. Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу. Поскольку число представляет собой меру количества, видно что идея скаляризации имеет общематематическое значение. Исследования Канторовича в области скаляризации были связаны в первую очередь с проблемами экономики, которой он интересовал с первых дней своего творческого пути в науке.

Математика и экономика

Математика изучает формы мышления. Предмет экономики — обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют. Цель математики — безупречные истины и методы их получения. Цель экономики — индивидуальное благополучие и пути его

[6] См. [6].

достижения. Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошёлку. Список коренных различий математики и экономики бесконечен.

Математическая экономика — новация XX века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.

Человек разумный всегда был, есть и будет человеком хозяйствующим. Практическая экономика для каждого из нас и наших предков — это арена здравого смысла. Здравый смысл представляет собой особую способность человека к мгновенным оценочным суждениям. Понимание выше здравого смысла и проявляется как осознанная адаптивность поведения. Понимание не наследуется и, стало быть, не принадлежит к числу врожденных свойств. Уникальной особенностью человека является способность пониманием делиться, превращая оценки в материальные и идеальные артефакты.

Культура — сокровищница понимания. Инвентаризация культуры — суть мировоззрения. Здравый смысл субъективен и родствен духовному подъему веры, то есть силе, превышающей возможности фактов и логики. Проверка суждений с помощью фактов и логики — критический процесс, освобождающий человека от ошибок субъективизма. Наука — трудный путь объективизации понимания. Религиозная и научная версии мировоззрения отличаются по сути способом кодификации артефактов понимания.

Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предваряет предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.

Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

Консолидация мышления

Идеи правят миром. Эту банальную констатацию когда-то с глубокой иронией дополнил Джон Мейнард Кейнс. Свой капитальный труд «Общая теория занятости, процента и денег» он завершил весьма афористично: «Практические люди, мнящие себя совершенно неподверженными никаким интеллектуальным влияниям, обычно являются рабами какого-нибудь замшелого экономиста».

Политические идеи направлены на власть, экономические — на свободу от власти. Политическая экономия неразрывна не только с экономической практикой, но и с практической политикой. Политизированность экономических учений характеризует их особое положение в мировой науке. Изменчивость эпох, их технологических достижений и политических предпочтений отражается в широком распространении эмоционального подхода к экономическим теориям и ставит экономику в положение, немыслимое для остальных наук. Помимо благородных причин, для этого есть и одна довольно циничная: как бы не меняли достижения точных наук жизнь человечества, они никогда не затрагивают обыденное сознание людей столь живо и остро, как суждения об их кошельках и свободах.

Наука — чувственно-сверхчувственный артефакт в том смысле, что ее содержание раскрывается только человеком и без человека, по меньшей мере, вполне понято быть не может. Расположенная в самом центре культуры наука напоминает «Вавилонскую башню» — наивный, но героический и великий проект народов Земли. Стремление к свободе, внутренне присущее человеку, проявляется в неистребимой жажде знания. «Мы должны знать, мы будем знать!» — этот уже вековой тезис Давида Гильберта лежит в кладовой здравого смысла.

Георг Кантор, создатель теории множеств, еще в 1883 г. заметил, что «сущность математики заключена в ее свободе». Свобода математики отнюдь не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых ею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математизация экономики — неизбежный этап пути человечества в царство свободы.

XIX век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.

В XX веке к экономической проблематике обратились математики первой величины — Джон фон Нейман и Л. В. Канторович. Первый развил теорию игр как аппарат изучения экономического поведения, а второй разработал линейное программирование как аппарат принятия решений о наилучшем использовании ограниченных ресурсов. Эти исследования фон Неймана и Канторовича занимают исключительное место в науке. Они показали, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Экономика приблизилась к математике. Оставаясь гуманитарной, она стремительно математизируется, демонстрируя высокую самокритичность и незаурядную способность к объективным суждениям.

Поворот в мышлении человечества, осуществленный фон Нейманом и Канторовичем, не всегда достаточно осознается. Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.

Методологическую пропасть, зиявшую между экономистами и математиками, к 1920 годам четко обозначил Альфред Маршалл, основатель кембриджской школы неоклассиков, «маршаллианцев». Он писал:

> «функция анализа и дедукции в экономической науке состоит не в создании нескольких длинных цепей логических рассуждений, а в правильном создании многих коротких цепочек и отдельных соединительных звеньев»[7].

> «Ясно, что в экономической науке нет места для длинных цепей дедуктивных рассуждений, ни один экономист, даже Рикардо, не пытался их использовать. На первый взгляд может показаться, что частое использование математических формул в экономических исследованиях свидетельствует о противоположном. Но при более тщательном рассмотрении станет очевидно, что такое впечатление обманчиво, за исключением случая, когда чистый

[7]См. [11, с. 225].

математик использует экономические гипотезы ради развлекательных упражнений в математике...»[8].

В 1906 г., в одном из частных писем, Маршалл сформулировал свое скептическое отношение к применению математики в экономике следующим образом:

> «[У меня] в последние годы работы над этим предметом росло ощущение весьма малой вероятности того, что хорошая математическая теорема, имеющая дело с экономическими гипотезами, кажется хорошей экономикой. И я все больше и больше склонялся к следующим правилам:
>
> (1) Используй математику как язык для стенографии, а не исследовательский механизм.
>
> (2) Придерживайся математики, пока не закончил дело.
>
> (3) Переведи на английский.
>
> (4) Проиллюстрируй примерами, важными в реальной жизни.
>
> (5) Сожги математику.
>
> (6) Если не достиг успеха в (4), сожги (3). Особенно часто я пользовался именно последним приемом.
>
> Я не имею ничего против математики, она полезна и необходима, однако очень плохо, что история экономической мысли больше не востребована и даже не предлагается во многих студенческих и аспирантских программах. Это потеря»[9].

Маршалл последовательно противопоставлял экономическое и математическое мышление, призывая строить многочисленные короткие «гребешки» рассуждений в конкретном экономическом анализе. Ясно, что образ «гребешка» не имеет ничего общего с представлением о перевернутой пирамиде — кумулятивной иерархии универсума фон Неймана, в котором обитает современная теория множеств. Красота и сила математики со времен Древней Эллады до наших дней связаны с аксиоматическим методом, предполагающим вывод новых фактов с помощью сколь угодно длинных цепей формальных импликаций.

Бросающаяся в глаза разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави. Этот статус-кво с глубокими историческими корнями всегда был вызовом для Канторовича, противоречащим его тезису о взаимопроникновении математики и экономики.

Линейное программирование

Главным открытием Канторовича на стыке математики и экономики стало линейное программирование, которое теперь изучают десятки тысяч людей во всем мире. Под этим термином скрывается колоссальный раздел науки, посвященный линейным оптимизационным моделям. Иначе говоря, линейное программирование — это наука о теоретическом и численном анализе и решении задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т. е. максимум или минимум некоторой системы показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств.

Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад

[8] См. [11, с. 212].

[9] См. [12, p. 294].

в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.

В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига. Поучительно привести его слова об истории линейного программирования[10]:

> «Русский[11] математик Л. В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 г. он опубликовал обстоятельную монографию под названием „Математические методы организации и планирования производства“... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...
>
> Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались „ценами“, в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих „разрешающих множителей“ для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...
>
> Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше. Однако его первая работа в этой области оставалась неизвестной как в Советском Союзе, так и в других странах, а за это время линейное программирование стало настоящим искусством».

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина.

Взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен — такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

Универсальная эвристика

Целостность мышления проявлялась во всех исследованиях Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. Главным своим математическим достижением Канторович считал выделение K-пространств[12].

Уже в самой первой своей работе в неизведанной области упорядоченных векторных пространств, датированной 1935 г., Канторович писал:

> «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Так была впервые сформулировала важнейшая методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Следует подчеркнуть, что в определение линейного полуупорядоченного пространства

[10] См. [13, с. 29].

[11] В переводе стоит слово «советский», а в английском оригинале «Russian».

[12] В рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_6. Роль K-пространств Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана — Банаха. Оказалось, что в этом центральном принципе функционального анализа можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве.

Эвристический принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей. Этот принцип оказался путеводной идеей, приведшей к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями. Еще в середине прошлого века предпринимались попытки формализации эвристического принципа Канторовича. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства. В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классическими математическими дисциплинами.

Абстрактная теория K-пространств, линейное программирование и приближенные методы анализа — продукты универсальной эвристики Канторовича. В последней своей математической работе [14], над которой Канторович работал уже смертельно больным, он отмечал:

> «При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов, наряду с алгебраическими и другими соотношениями, большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющее место между всеми объектами, упорядочение, имеет обедненный характер, например, можно все виды упорядочить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, оно определяется или фиксируется, а в других случаях оставляется неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый бóльшим второго, если в нем каждого продукта больше, соответственно, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать. Так в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств и, прежде всего, теория K-пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.
>
> Теория K-пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы могут вместо чисел использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Такая нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала».

Современные исследования подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории K-пространств. Было доказано, что выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством.

Эвристический принцип Канторовича связан с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — со знаменитой проблемой континуума. Как известно, множество имеет мощность континуума, если оно находится во взаимнооднозначном соответствии с отрезком числовой прямой. Гипотеза континуума состоит в том, что любое подмножество отрезка либо счетно, то есть допускает пересчет, либо имеет мощность континуума. Проблема континуума ставит вопрос о справедливости или ложности гипотезы континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Кантором в 1878 г. Он был убежден в том, что эта гипотеза является теоремой и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. Гильберт выступил на открытии со своим знаменитым докладом «Математические проблемы», сформулировав 23 проблемы, решение которых девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первой в докладе Гильберта стоит проблема континуума. Оставаясь нерешенной десятилетиями, она порождала глубокие исследования в основаниях математики. В итоге более чем полувековых усилий мы теперь знаем, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута.

К пониманию независимости гипотезы континуума человечество пришло в два этапа: в 1939 г. Курт Гёдель проверил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 г. Поль Коэн доказал, что им не противоречит и отрицание гипотезы континуума. Оба результата установлены путем предъявления подходящих моделей, т. е. построением универсума и интерпретации в нем теории множеств. Подход Гёделя основан на «усечении» универсума фон Неймана. Гёдель показал, что выделенные им конструктивные множества образуют модель, в которой имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуемо. Подход Коэна в известном смысле противоположен технике Гедёля: он основан на контролируемом расширении универсума фон Неймана.

Метод форсинга Коэна был упрощен в 1965 г. с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования, использующей нестандартные модели теории множеств. Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K-пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Эвристика Канторовича постоянно получает блестящее подтверждение, доказывая целостность науки и неизбежность взаимопроникновения математики и экономики.

Мемы для будущего

Противоречие между блестящими достижениями и детская неприспособленностью к практической линии жизни — один из важных парадоксов, оставленных нам Канторовичем. Сама его жизнь стала ярким и загадочным гуманитарным феноменом. Интравертность Канторовича, очевидная в личном общении, совершенно неожиданно сочеталась с публичной экстравертностью. Отсутствие ораторского дара соседствовало с глубиной логики и особыми приемами полемики. Его внутренняя свобода и самодостаточность, мягкость, доброта и исключительная скромность стояли в одном ряду с целенаправленной жесткостью и неутомимостью на пути к поставленной цели. Канторович дал нам образец наилучшего использования ресурсов личности в условиях внешних и внутренних ограничений.

Мемы Канторовича востребованы человечеством, что видно по учебным планам любого экономического или математического факультета в мире. Аппарат математики и идея оптимальности стали подручными орудиями любого практикующего экономиста. Новые методы поставили непреодолимую планку для традиционалистов, рассматривающих экономику как полигон технологий типа маккиавелизма, лизоблюдства, здравого смысла и форсайта.

Экономика как вечный партнер математики избежит слияния с любой эзотерической частью гуманитарных наук, политики или беллетристики. Новые поколения математиков будут смотреть на загадочные проблемы экономики как на бездонный источник вдохновения и привлекательную арену приложения и совершенствования своих безупречно строгих методов.

Вычисление победит гадание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С.* Письмо Н. Н. Лузина Л. В. Канторовичу // Вестник РАН. 2002. Т. 72, № 8. С. 740–742.

2. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № . С. 89–185.

3. *Соболев С. Л., Люстерник Л. А., Канторович Л. В.* Функциональный анализ и вычислительная математика // Труды III Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь –июль 1956 г. Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл. М., 1956. С. 43.

4. *Вулих Б. З., Канторович Л. В., Пинскер А. Г.* Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 3. С. 31–98.

5. *Канторович Л. В.* Об интегральных операторах // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 2. С. 3–29.

6. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Вестник ЛГУ. 1948. Т. 6. С. 3–18.

7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.. М.: Наука, 2005.

8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.

9. *Kantorovich L. V.* Мой путь в науке // Успехи мат. наук. 1987. V. 42, N 2. P. 183–213.

10. *Villani C.* Optimal Transport: Old and New. Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

11. *Маршалл А.* Принципы политической экономии. Том III. М.: Изд. Прогресс, 1984.

12. *Brue S. L.* The Evolution of Economic Thought. 5th Edition. Fort Worth: Harcourt College Publishers, 1993.

13. *Данциг Дж. Б.* Линейное программирование, его обобщения и применения. Пер. с англ.. М.: Прогресс, 1966.

14. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ (основные идеи) // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 1–8.

Статья поступила 19 января 2011 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut @math.nsc.ru