УДК 513.588

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. С. Кутателадзе

Аннотация. Рассматривается проблема выбора параметризации для экстремальных задач изопериметрического типа, связанных с размещением выпуклых фигур при наличии многих дополнительных ограничений. Проводится сопоставление параметризаций, основанных на использовании опорных и поверхностных функций.

Цель настоящей статьи — привлечь внимание к новым задачам оптимизации, возникающим при анализе изопериметрических проблем теории выпуклых поверхностей. Классический объект вариационного исчисления, экстремальные задачи геометрии представляют значительный интерес с точки зрения прикладных задач, связанных с оптимальным размещением фигур.

Содержательная экстремальная задача не требует априорной информации об алгебраической структуре множества допустимых решений. Для постановки задачи нужен лишь некоторый предпорядок в множестве значений целевой функции. Конечно, в такой общности нетривиальный теоретический анализ задачи невозможен. Имеющиеся методы исследования вариационных задач используют структуру векторного пространства. При этом существенные упрощения обеспечиваются при выпуклости допустимой области и целевой функции задачи минимизации.

Исследование изопериметрических задач в теории выпуклых тел проводится по общей схеме анализа любой реальной задачи оптимизации.

(а) Осуществляется *параметризация* задачи, т. е. выбирается векторное пространство, в терминах которого формулируется исходная проблема. Допуская вольность речи, выбранное векторное пространство также именуют *параметризацией.*

(б) Описываются поляры конусов допустимых направлений. Вычисляются субдифференциалы или производные по направлениям целевой функции и ограничений.

(в) Формулируются уравнения Эйлера — Лагранжа, которые можно трактовать как *критерии оптимальности* допустимого решения.

На этапе (в) осуществляется перевод полученных результатов с языка параметризации в исходные термины. Требование решить экстремальную задачу с теоретической точки зрения часто воспринимается как необходимость получить уравнения Эйлера — Лагранжа. Выбор параметризации определяет вид критериев оптимальности и тем самым эффективность анализа исходной задачи. Экстремальные задачи выпуклой геометрии доставляют уникальный пример ситуации, в которой разработаны две принципиально различные параметризации. Соответствующие структуры Минковского и Бляшке являются основным объектом дальнейшего изложения.

Настоящая статья возникла в связи с Сибирской конференцией по индустриальной и прикладной математике, посвященной памяти Л. В. Канторовича. Работа последних лет по изданию трудов Л. В. Канторовича в области

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00001) .

прикладного функционального анализа [1] и трудов А. Д. Александрова по теории смешанных объемов выпуклых поверхностей [2] возродила давний интерес автора к смежным вопросам геометрии и математического программирования.

1. Векторные структуры в множестве выпуклых поверхностей

Изучая множество $\mathcal{V}_N$ выпуклых поверхностей в N-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, обычно рассматривают две наиболее распространенные параметризации.

Первая основывается на классической *двойственности Минковского*, состоящей в отождествлении выпуклого компактного подмножества $\mathfrak{x}$ пространства $\mathbb{R}^N$ и его опорной функции $\mathfrak{x}(z) := \sup\{(x,z) \mid x \in \mathfrak{x}\}$ для $z \in \mathbb{R}^N$. Рассматривая элементы $\mathbb{R}^n$ как одноточечные фигуры, считают, что $\mathbb{R}^n$ включено в $\mathcal{V}_N$. Двойственность Минковского индуцирует в $\mathcal{V}_N$ структуру конуса в пространства $C(S_{N-1})$ непрерывных функций на единичной евклидовой сфере S_{N-1} — границе шара $\mathfrak{z}_N$. Эту параметризацию называют *структурой Минковского.* Сложению опорных функций при этом соответствует переход к их алгебраической сумме, называемой *суммой Минковского.* Полезно отметить, что *линейная оболочка* $[\mathcal{V}_N]$ конуса $\mathcal{V}_N$ плотна в $C(S_{N-1})$.

Вторая параметризация — *структура Бляшке* — порождена идентификацией класса эквивалентных с точностью до переноса выпуклых поверхностей $\{z+\mathfrak{x} \mid z \in \mathbb{R}^N\}$ с соответствующей мерой на сфере — с *поверхностной функцией* этого класса $\mu(\mathfrak{x})$. Корректность этой параметризации определена классической теоремой Александрова о возможности восстановления выпуклой поверхности по заданной поверхностной функции. Поверхностная функция представляет собой *александровскую меру.* Так называют положительную меру на сфере, не сосредоточенную ни в одном сечении сферы гиперподпространством и аннулирующую точки. Александровская мера является инвариантным относительно сдвигов функционалом на конусе $\mathcal{V}_N$. В контексте теории выпуклых тел последнее свойство меры называют инвариантностью относительно сдвигов. Конус положительных инвариантных относительно сдвигов мер в сопряженном пространстве $C'(S_{N-1})$ обозначают через $\mathcal{A}_N$. Уточним некоторые из используемых понятий.

Пусть $\mathcal{V}_N$ — множество выпуклых компактов в $\mathbb{R}^N$. Для $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathcal{V}_N$ символическая запись $\mathfrak{x} =_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$ означает совпадение $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ с точностью до параллельного переноса. Можно сказать, что $=_{\mathbb{R}^N}$ — отношение эквивалентности, связанное с предпорядком $\geq_{\mathbb{R}^N}$ в $\mathcal{V}_N$, выражающим вместимость одной фигуры в другую при помощи параллельного переноса. Рассмотрим фактор-множество $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$, составленное из классов транслятов элементов $\mathcal{V}_N$. Ясно, что $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ — конус в фактор-пространстве $[\mathcal{V}_N]/\mathbb{R}^N$ векторного пространства $[\mathcal{V}_N]$ по подпространству $\mathbb{R}^N$.

Между $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathcal{A}_N$ существует естественная биекция. Класс точек отождествляется с нулевой мерой. Классу, содержащему отрезок с концами x и y, сопоставляется мера

$$|x-y|(\varepsilon_{(x-y)/|x-y|} + \varepsilon_{(y-x)/|x-y|}),$$

где $|\cdot|$ — евклидова длина, и для $z \in S_{N-1}$ символ ε_z обозначает *меру Дирака*, сосредоточенную в точке z. Если размерность аффинной оболочки $\operatorname{Aff}(\mathfrak{x})$ представителя $\mathfrak{x}$ класса поверхностей из $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ больше единицы, то считаем, что $\operatorname{Aff}(\mathfrak{x})$ — подпространство $\mathbb{R}^N$ и класс отождествляем с поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ в $\operatorname{Aff}(\mathfrak{x})$, являющейся в данном случае некоторой мерой на $S_{N-1} \cap \operatorname{Aff}(\mathfrak{x})$. Продолжая эту меру тривиальным способом до меры на S_{N-1}, получаем элемент из $\mathcal{A}_N$, отвечающий классу, порожденному $\mathfrak{x}$. Биективность этого соответствия легко вытекает из теоремы Александрова.

Структура векторного пространства в множестве регулярных борелевских мер индуцирует в $\mathcal{A}_N$ и, следовательно, в $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ структуру конуса, точнее, структуру $\mathbb{R}_+$-операторной коммутативной полугруппы с сокращением. Эту структуру в $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ и называют *структурой Бляшке*. Подчеркнем, что сумма поверхностных функций $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ порождает единственный класс $\mathfrak{x}\#\mathfrak{y}$, называемый *суммой Бляшке* $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$.

Пусть $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ — фактор-пространство пространства $C(S_{N-1})$ по подпространству следов линейных функций на S_{N-1}. Обозначим через $[\mathcal{A}_N]$ пространство $\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_N$ инвариантных относительно сдвигов мер. Легко видеть, что $[\mathcal{A}_N]$ представляет собой также и линейную оболочку множества александровских мер. Пространства $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ и $[\mathcal{A}_N]$ приведены в двойственность канонической билинейной формой

$$\langle f,\mu\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_{S_{N-1}} f d\mu \quad (f\in C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N, \mu\in[\mathcal{A}_N]).$$

Для $\mathfrak{x}\in\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathfrak{y}\in\mathcal{A}_N$ величина $\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle$ совпадает со *смешанным объемом* $V_1(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$. Пространство $[\mathcal{A}_N]$ обычно рассматривают со слабой топологией, порожденной указанной двойственностью с $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.

Под *двойственным конусом* K^* к данному конусу K в векторном пространстве X, приведенном в двойственность с пространством Y, понимают совокупность положительных линейных функционалов на K, т. е. $K^* := \{y \in Y \mid \langle x,y\rangle\}$. Напомним также, что для выпуклого множества U в X и точки $\bar{x}$ из U определен конус

$$K_{\bar{x}} := \mathrm{Fd}(U,\bar{x}) := \{h\in X \mid (\exists\alpha\geq 0)\ x+\alpha h\in U\},$$

называемый *конусом допустимых направлений* к U в точке $\bar{x}$. В рассматриваемой нами ситуации известно описание всех необходимых двойственных конусов.

1.1. *Двойственный конус $\mathcal{A}_N^*$ является конусом положительных элементов в $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.*

1.2. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}}\in\mathcal{A}_N$. Для конуса $\mathcal{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, двойственного к конусу допустимых направлений в точке $\bar{\mathfrak{x}}$, имеет место представление*

$$\mathcal{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^* = \{f\in\mathcal{A}_N^* \mid \langle\bar{\mathfrak{x}},f\rangle = 0\}.$$

Пусть μ и ν — положительные меры на сфере $C(S_{N-1})$. Говорят, что μ *линейно сильнее* ν, и пишут $\mu\gg_{\mathbb{R}^N}\nu$, если для каждого разбиения ν в сумму конечного числа положительных слагаемых $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_m$ найдется разбиение μ в сумму конечного числа положительных слагаемых $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_m$ такое, что $\mu_k-\nu_k\in[\mathcal{A}_N]$ для всех $k=1,\ldots,m$.

1.3. *Пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые фигуры.*
(1) $\mu(\mathfrak{x})-\mu(\mathfrak{y})\in\mathcal{V}_N^*\leftrightarrow\mu(\mathfrak{x})\gg_{\mathbb{R}^N}\mu(\mathfrak{y})$.
(2) Если $\mathfrak{x}\geq_{\mathbb{R}^N}\mathfrak{y}$, то $\mu(\mathfrak{x})\gg_{\mathbb{R}^N}\mu(\mathfrak{y})$.
(3) $\mathfrak{x}\geq_{\mathbb{R}^2}\mathfrak{y}\leftrightarrow\mu(\mathfrak{x})\gg_{\mathbb{R}^2}\mu(\mathfrak{y})$.

1.4. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые фигуры.*
(1) Если $\mathfrak{y}-\bar{\mathfrak{x}}\in\mathcal{A}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y}=_{\mathbb{R}^N}\bar{\mathfrak{x}}$.
(2) Если $\mu(\mathfrak{y})-\mu(\bar{\mathfrak{x}})\in\mathcal{V}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y}=_{\mathbb{R}^N}\bar{\mathfrak{x}}$.

В дальнейшем различие между выпуклым компактом, соответствующим классом транслятов в $\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$ и отвечающей этому классу мерой в $\mathcal{A}_N$ обычно не проводится, что отражено в использовании единого обозначения для соответствующих объектов.

Можно отметить, что в случае структуры Минковского *объем* $V(\mathfrak{x}) := \langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle$ является однородным полиномом степени N_0. По этой причине вычисление его субдифференциала не вызывает затруднений. Особенностью структуры Минковского является сложное строение конуса, двойственного к конусу множеств, описание которого дается с помощью отношения $\gg_{\mathbb{R}^N}$ в пространстве мер $[\mathcal{A}_N]$. При сложении поверхностей по Бляшке в пространстве размерности $N \geq 3$ двойственный конус к конусу поверхностей устроен просто. Однако объем перестает быть однородным полиномом, что усложняет анализ.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$p : \mathfrak{x} \mapsto V^{1/N}(\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N);$$
$$\widehat{p} : \mathfrak{x} \mapsto V^{(N-1)/N}(\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x} \in \mathcal{A}_N).$$

Таким образом, *неравенство Минковского* переписывается в виде

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \geq p(\mathfrak{x})\widehat{p}(\mathfrak{y}).$$

1.5. Теорема Брунна — Минковского. *Функционал p, определенный на конусе $\mathcal{V}_N$, суперлинеен.*

Отметим, что справедливо следующее важное утверждение, известное, по-видимому, еще Г. Минковскому.

1.6. *Функционал $\widehat{p}$, определенный на конусе $\mathcal{A}_N$, суперлинеен.*

1.7. Теорема Герглотца. *Функция p, определенная на выпуклом множестве $\mathcal{A}_N$, вогнута.*

Поскольку *площадь поверхности* $\mathfrak{x}$ записывается в виде $S(\mathfrak{x}) = N\langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle$, то изопериметрическая задача в структуре Бляшке превращается в задачу выпуклого программирования.

1.8. Изопериметрическая задача.
(1) $\mathfrak{x} \in \mathcal{A}_N$.
(2) $\langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle = b$.
(3) $\widehat{p}(\mathfrak{x}) \to \max$.

Простейшим примером выпуклой программы в структуре Минковского служит задача Урысона, состоящая в максимизации объема при заданной интегральной ширине.

1.9. Задача Урысона.
(1) $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_N$.
(2) $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle = b$.
(3) $p(\mathfrak{x}) \to \max$.

Таким образом, поскольку двойственные конусы описаны, дело сводится к нахождению производной объема по допустимым направлениям. Пусть $p_{\bar{\mathfrak{x}}}$ — производная функционала $\mathfrak{y} \in \mathcal{V}_N \mapsto \widehat{p}(\bar{\mathfrak{x}})p(\mathfrak{y})$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$. Аналогично обозначим через $\widehat{p_{\bar{\mathfrak{x}}}}$ производную функционала $\mathfrak{y} \in \mathcal{A}_N \mapsto \widehat{p}(\mathfrak{y})p(\mathfrak{x})$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$.

1.10. *Имеют место представления:*
(1) $\widehat{p_{\bar{\mathfrak{x}}}}(\mathfrak{g}) = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{g} \rangle$ *для всякого направления* $\mathfrak{g} \in \mathcal{A}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$;
(2) $p_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \langle g, \bar{\mathfrak{x}} \rangle$ *для всякого направления* $g \in \mathcal{V}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$.

2. Структура Минковского в программировании изопериметрических задач

В этом параграфе будет изложен способ учета простейших операторных ограничений для задач изопериметрического типа в структуре Минковского. Речь пойдет об ограничениях типа «фигура содержится в данной», «фигура симметрична» и т. п., добавленных к экстремальной задаче, в которой прочие ограничения и целевая функция задаются через смешанные объемы. Ограничение включения в многогранник можно трактовать как конечный набор линейных неравенств для опорной функции решения. Прямое применение этого соображения приводит к техническим неудобствам. Именно, в уравнениях Эйлера — Лагранжа возникают решения некоторых задач линейного программирования. Более того, даже для многогранников внешняя изопериметрическая задача не может быть сформулирована на языке конечного числа точечных неравенств. Ограничение типа включения следует рассматривать как неравенство в пространстве множеств. При этом упрощение достигается за счет появления всего одного множителя Лагранжа, отвечающего за нарушение такого ограничения.

Для удобства сначала излагается техника получения критериев оптимальности для плоских задач, а затем обсуждается достаточно рутинный характер ее изменения в пространствах бо́льших размерностей.

2.1. Внутренняя изопериметрическая задача. *Среди выпуклых фигур, содержащихся в фиксированном теле* $\mathfrak{x}_0$ *и имеющих заданный периметр* $S(\bar{\mathfrak{x}})$, *найти фигуру наибольшей площади.*

Для этой и подобных задач вопросы существования решения легко решаются с помощью теоремы Бляшке о выборе, утверждающей компактность множества выпуклых фигур, содержащихся в данной. Единственность решения с точностью до параллельного переноса обосновывается строгой вогнутостью объема, т. е. условиями равенства в изопериметрических неравенствах.

2.2. Критерий оптимальности. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением внутренней изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся фигура* $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_2$ *и число* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ *такие, что*

(1) $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{z}_2$;

(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* z *из* $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$.

Через $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$ обозначен *носитель фигуры* $\mathfrak{x}$, т. е. носитель меры $\mu(\mathfrak{x})$ — поверхностной функции $\mathfrak{x}$. Критерий оптимальности совпадает с субдифференциальным условием максимума лагранжиана исходной задачи. Фигура $\mathfrak{x}$, определяющая решение, является *множителем Лагранжа*, отвечающим за ограничение включения. Такой множитель Лагранжа принято называть *критической фигурой* ввиду его роли в строении оптимального решения. Носитель $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$ критической фигуры $\mathfrak{x}$ содержится в носителе $\operatorname{supp}(\mathfrak{x}_0)$ фигуры $\mathfrak{x}_0$.

Задание периметра, подсчитанного в стандартной евклидовой метрике, в задаче 2.1 можно заменить ограничением на периметр в произвольной геометрии Минковского, в том числе и порожденной несимметричным диском. Такой периметр является смешанной площадью с подходящей фигурой. Решение видоизмененной задачи по-прежнему представляет собой обкатку критической фигуры. В общем случае к критической фигуре добавляется растянутая поляра диска исходной геометрии.

Если $\mathfrak{x}_0$ — многогранник, то, как следует из сделанного замечания, критическая фигура принадлежит *семейству Линделёфа, порожденному* $\mathfrak{x}_0$, т. е. представляет собой многоугольник, ненулевые стороны которого параллельны ребрам $\mathfrak{x}_0$.

Рассмотрение лишь одного ограничения на смешанный объем общего вида непринципиально. Случай любого числа таких ограничений в соответствии с общей теорией экстремальных задач автоматически приводит к вполне аналогичным явным формулам. Геометрическая интуиция же здесь применима, так как множители Лагранжа в количестве, равном числу ограничений на смешанные площади или объемы, представляют решение системы уравнений соответствующего порядка. Для иллюстрации приведем соответствующий аналог задачи 2.1.

2.3. Обобщенная внутренняя изопериметрическая задача. *Пусть* $\mathfrak{x}_0$ *— фиксированное тело,* $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$ *— заданные выпуклые фигуры. Требуется* *среди фигур, лежащих в* $\mathfrak{x}_0$ *и таких, что* $\langle \mathfrak{y}_k, \mathfrak{x}\rangle \le \langle \mathfrak{y}_k, \bar{\mathfrak{x}}\rangle$ *для* $k = 1, \ldots, m$*, найти фигуру максимальной площади.*

Поскольку градиент функционала $V_1(\mathfrak{y}_k, \cdot\,)$ пропорционален $\mu(\mathfrak{y}_k)$, получаем следующий

2.4. Критерий оптимальности. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением обобщенной внутренней изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся* $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_2$ *и* $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in \mathbb{R}_+$ *такие, что*

(1) $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x} + \sum\limits_{k=1}^{m} \bar{\alpha}_k \mathfrak{y}_k$*;*

(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x})$*.*

2.5. Внешняя изопериметрическая задача. *Среди фигур, содержащих фиксированную фигуру* $\mathfrak{x}_0$ *и имеющих заданный периметр* $S(\bar{\mathfrak{x}})$*, найти фигуру наибольшей площади.*

Эквивалентная выпуклая программа ставится следующим образом:
(1) $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}$;
(2) $-\mathfrak{x} \le -\mathfrak{x}_0$;
(3) $S(\mathfrak{x}) \le S(\bar{\mathfrak{x}})$;
(4) $p(\mathfrak{x}) \to \max$.

Наличие знака минус в условии (2) осложняет критерий оптимальности (но не способ его получения), так как конус $\mathcal{V}^*_{2,\bar{\mathfrak{x}}}$, двойственный к конусу возможных направлений для нерегулярной фигуры $\bar{\mathfrak{x}}$, вообще говоря, не нулевой. Обойти это обстоятельство ссылкой на 1.4(2) так же, как в случае задачи 2.1, нельзя, поскольку простые примеры показывают, что не все элементы из $\mathcal{V}^*_{2,\bar{\mathfrak{x}}}$ имеют вид $\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}}$.

2.6. Критерий оптимальности. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением внешней изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура* $\mathfrak{x}$ *и положительное число* $\bar{\alpha}$ *такие, что*

(1) $\bar{\alpha}\mathfrak{z}_2 \ge_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$*;*

(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) + \mathfrak{x}(z) = \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2(z)$ *для всех* $z \in \operatorname{supp}(\bar{\mathfrak{x}})$*;*

(3) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x})$*.*

2.7. Тело Ковнера — Безиковича. *Найти наибольшую центрально симметричную фигуру, содержащуюся в данном теле* $\mathfrak{x}_0$*, — тело Ковнера — Безиковича — для* $\mathfrak{x}_0$*.*

Ясно, что решением задачи 2.7 является центрально симметричная фигура, содержащаяся в $\mathfrak{x}_0$ и имеющая наибольшую среди таких фигур площадь. Поэтому единственная тонкость в анализе этой задачи связана с описанием поляры конуса симметричных фигур. Ответ дается в терминах симметризации Минковского. Напомним, что *симметризацией Минковского* фигуры $\mathfrak{x}$ называют фигуру $\mathfrak{x}^s$ с опорной функцией $z \mapsto (\mathfrak{x}(z) + \mathfrak{x}(-z))/2$.

2.8. *Неравенство*

$$\int\limits_{S_1} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}) \ge \int\limits_{S_1} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{y})$$

имеет место для любой центрально симметричной фигуры $\mathfrak{z}$ *в том и только в том случае, если симметризация Минковского фигуры* $\mathfrak{y}$ *размещается при помощи параллельного переноса в симметризации Минковского фигуры* $\mathfrak{x}$*.*

2.9. *Тело Ковнера — Безиковича* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является симметризацией Минковского фигуры* $\mathfrak{x}$ *такой, что* $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x})$*.*

Эти предложения показывают, что условие центральной симметрии можно включить в задачи типа 2.1, 2.3, 2.5.

2.10. Внутренняя изопериметрическая задача в классе центрально симметричных фигур. *Среди центрально симметричных фигур, содержащихся в* $\mathfrak{x}_0$ *и имеющих заданный периметр* $S(\bar{\mathfrak{x}})$*, найти фигуру, обладающую наибольшей площадью.*

Эквивалентная задача программирования в пространстве выпуклых множеств отличается от задачи, эквивалентной задаче 2.1, лишь тем, что в ней условие $\mathfrak{x} \in \mathcal{V}_2$ заменено условием центральной симметричности $\mathfrak{x}$. Критерий оптимальности представляет собой комбинацию критериев для задач 2.1 и 2.7.

2.11. Критерий оптимальности. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи 2.10 в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура* $\mathfrak{x}$ *и число* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ *такие, что*
(1) $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x}^s + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2$;
(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x})$.

Аналогичным образом можно модифицировать и задачи типа 2.5.

2.12. Изопериметрическая задача с зоной. *Среди фигур данного периметра и таких, что* $\mathfrak{x}(z) \leq \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* $z \in Z_0$*, где* Z_0 *— некоторый (для удобства) симметричный компакт, содержащийся в* S_1*, найти фигуру максимальной площади.*

В этом случае «зонное» ограничение следует рассматривать как порожденное оператором сужения, действующим из $C(S_1)$ в $C(Z_0)$. Метод анализа в остальном не меняется.

2.13. Критерий оптимальности. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением изопериметрической задачи с зоной* Z_0 *в том и только в том случае, если найдутся фигура* $\mathfrak{x}$ *и число* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ *такие, что*
(1) $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x} + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2$;
(2) $\operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \subset Z_0$;
(3) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x})$.

Приведенная техника распространяется на задачи оптимального размещения нескольких фигур в ячейки, образованные семейством плоскостей с заданными нормалями. Такие задачи принято называть *задачами с текущими многогранниками.* Они относятся к классу экстремальных *задач со свободными границами.*

2.14. Внутренняя изопериметрическая задача с текущей прямой. *Найти две выпуклые фигуры* $\bar{\mathfrak{x}}$ *и* $\bar{\mathfrak{y}}$*, лежащие в данной фигуре* $\mathfrak{x}_o$ *по разные стороны от прямой с единичной нормалью* z_0*, такие, что их суммарный объем максимален при заданном суммарном периметре.*

2.15. Критерий оптимальности. *Допустимая пара тел* $\bar{\mathfrak{x}}$ *и* $\bar{\mathfrak{y}}$ *является решением задачи 2.14 в том и только в том случае, если найдутся фигуры* $\mathfrak{x}$ *и* $\mathfrak{y}$ *и положительные числа* $\bar{\alpha}$ *и* $\bar{\beta}$ *такие, что*
(1) $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2$;
(2) $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y} + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2$;
(3) $\mu(\mathfrak{x}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{z_0}$, $\mu(\mathfrak{y}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{-z_0}$;
(4) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus z_0$;
(5) $\bar{\mathfrak{y}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus -z_0$.

Перейдем теперь к обсуждению особенностей многомерного случая.

Для общей изопериметрической задачи в пространстве $[\mathcal{V}_N]$ можно, как правило, получить лишь необходимое условие экстремума. Дело в том, что, например, *изопифанная задача* «выпукла не в ту сторону», т. е. сводится к задаче максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. В самом деле, в силу теоремы Брунна — Минковского функционал $\mathfrak{x} \mapsto S^{1/(N-1)}(\mathfrak{x})$ является вогнутым, где $S(\mathfrak{x})$ по-прежнему площадь поверхности $\mathfrak{x}$. Для превращения изопифанной задачи в задачу выпуклого программирования необходимо привлечение другой векторной структуры Бляшке. Поэтому в полной мере методы, изложенные для плоского случая, переносятся лишь для выпуклых изопериметрических задач. Таким образом, аналогом внешней изопериметрической задачи служит

2.16. Внешняя задача Урысона.
(1) $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{x}_0$;
(2) $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \leq b$;
(3) $p(\mathfrak{x}) \to \max$.

Другое отличие плоскости от пространств больших размерностей состоит в том, что лишь на ней совпадают суммы Минковского и Бляшке. При этом в приведенных выше уравнениях Эйлера — Лагранжа речь идет о функциональных параметрах, т. е. в частности о суммах Бляшке. Это означает, что при переформулировке плоских критериев оптимальности в многомерных случаях следует заменять суммы Минковского суммами Бляшке. Например, в задаче 2.10 речь пойдет о *симметризации Бляшке*.

Следующей особенностью пространств размерности больше двух является наличие инвариантных относительно сдвигов положительных вырожденных (т. е. не александровских) мер, которые можно трактовать как поверхностные функции фигур лишь в меньших размерностях. В связи с этим в уравнениях Эйлера — Лагранжа возникает не критическая фигура, а вообще говоря, критическая мера.

Последняя особенность состоит в том свойстве, что при $N \geq 3$ из условия $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$ не следует, что $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$. Природа этого известного факта станет ясной и из последующего.

Подводя качественный итог, можно сказать, что двойственное исследование многомерных задач изопериметрического типа содержит единую особенность — аппарат опорных функций заменяется аппаратом поверхностных функций.

Проиллюстрируем описанные обстоятельства примером.

2.17. Внешняя задача Урысона. *Среди фигур, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданную интегральную ширину, найти тело максимального объема.*

2.18. Критерий оптимальности. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением задачи 2.17 в том и только в том случае, если найдутся положительная мера μ и число $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ такие, что*
(1) $\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_N) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu$;
(2) $V(\bar{\mathfrak{x}}) + \frac{1}{N} \int\limits_{S_{N-1}} \bar{\mathfrak{x}} d\mu = \bar{\alpha} V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}})$;
(3) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех z из носителя μ.*

Если, в частности, $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_{N-1}$, то искомым телом является *шаровая линза*, т. е. пересечение двух шаров одного радиуса, а критической мерой — след поверхностной функции шара радиуса $\bar{\alpha}^{1/(N-1)}$ на дополнение носителя этой линзы до S_{N-1}. Если $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_1$ и $N = 3$, то из полученного результата вытекает, что решение следует искать в классе так называемых веретенообразных поверхностей вращения постоянной кривизны (см. [3, с. 157]).

Отметим еще, что комбинации приемов, собранных в этом параграфе, позволяют находить уравнения Эйлера — Лагранжа для широкого класса экстремальных задач. При этом в конкретных случаях целесообразно использовать и другие известные приемы геометрии и математического программирования. Проиллюстрируем последнее утверждение достаточно типичным примером.

2.19. *Среди фигур, имеющих заданные толщину и интегральную ширину, найти фигуру наибольшего объема.*

Напомним, что *толщина* $\Delta(\mathfrak{x})$ выпуклой фигуры $\mathfrak{x}$ определена соотношением

$$\Delta(\mathfrak{x}) := \inf_{z \in S_{N-1}} (\mathfrak{x}(z) + \mathfrak{x}(-z)).$$

Прежде всего задача 2.19 по постановке является «выпуклой не в ту сторону». Однако однократное применение симметризации Минковского показывает, что решение лежит в классе центрально симметричных фигур, для которых ограничение на толщину можно записать как ограничение типа включения.

2.20. Критерий оптимальности. *Пусть положительная мера* μ *и числа* $\bar\alpha$, $\bar\beta \in \mathbb{R}_+$ *таковы, что*

(1) $\bar\alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \bar\beta(\varepsilon_{z_0} + \varepsilon_{-z_0}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu$;

(2) $V(\bar{\mathfrak{x}}) + \frac{1}{N}\int\limits_{S_{N-1}} \bar z\, d\mu = \bar\alpha V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}) + \frac{1}{N}\bar\beta(\bar{\mathfrak{x}}(z_0) + \bar{\mathfrak{x}}(-z_0))$;

(3) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \frac{1}{2}\Delta$ *для всех* z *из носителя* μ.

Тогда допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи 2.19.*

Таким образом, фигура $\bar\alpha\mathfrak{z}_N \# \bar\beta\mathfrak{z}_{N-1}$, имеющая заданные интегральную ширину и толщину, оптимальна для задачи 2.19. При $n = 3$ решение следует искать в классе так называемых сырообразных поверхностей вращения постоянной кривизны (см. [3, с. 171]).

В заключение текущего параграфа коснемся связи изложенных приемов со стандартным подходом, основанным на применении изопериметрических неравенств.

Прежде всего отметим, что решения сформулированных задач порождают изопериметрические неравенства вида

$$\varphi(\bar{\mathfrak{x}}, \bar\alpha) \geq \varphi(\tilde{\mathfrak{x}}, \bar\alpha) \quad (\tilde{\mathfrak{x}} \in \mathcal{V}_N),$$

где φ — соответствующий *лагранжиан.*

Интуитивно ясно, что для ограничений на смешанные объемы соответствующие неравенства должны сводиться к стандартным неравенствам типа Брунна — Минковского. В приведенные слова можно вложить некоторый точный смысл. Рассмотрим, например, задачу 2.1.

Неравенства $\varphi(\bar{\mathfrak{x}}, \bar\alpha) \geq \varphi(\tilde{\mathfrak{x}}, \bar\alpha)$ в этом случае переписываются в следующем виде:

$$V(\bar{\mathfrak{x}}) \geq (V(\bar{\mathfrak{x}})V(\bar{\mathfrak{x}}))^{1/2} + \bar\alpha(V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_2) - V_1(\tilde{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_2)) + V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) - V_1(\tilde{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}).$$

Поскольку $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0) = V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}})$, ибо $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ для всех z из носителя $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$, то получается, что

$$V(\bar{\mathfrak{x}}) \geq (V(\bar{\mathfrak{x}})V(\tilde{\mathfrak{x}}))^{1/2} + V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x} + \bar\alpha\mathfrak{z}_2) - V_1(\mathfrak{x} + \bar\alpha\mathfrak{z}_2, \tilde{\mathfrak{x}}).$$

Так как $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{x} + \bar\alpha\mathfrak{z}_2$, то из последнего неравенства имеем соотношение

$$V(\tilde{\mathfrak{x}})V(\bar{\mathfrak{x}}) \leq V_1^2(\tilde{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}}),$$

представляющее собой классическое неравенство Минковского.

В свою очередь, предположив, что фигура $\bar{\mathfrak{x}}$ удовлетворяет условиям критерия оптимальности для задачи 2.1, и повторив приведенные выкладки в обратном порядке, получим, что $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внутренней изопериметрической задачи. Таким образом, зная структуру решения, обосновать соответствующее утверждение двойственности можно стандартным путем. Для общей задачи угадать решение все же маловероятно, поскольку к задачам типа 2.3 формально редуцируются все линейные программы.

3. Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач

Как уже отмечалось, многие классические экстремальные задачи геометрии не являются выпуклыми программами в структуре Минковского, что приводит к серьезным неудобствам уже при анализе простейших задач. Даже классическая изопериметрическая задача, поставленная в структуре Минковского при $N \geq 3$, «выпукла не в ту сторону». Очевидное необходимое условие экстремума для нее выписывается в градиентах и имеет вид $\bar{\alpha}\mu_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N) = \mu(\bar{\mathfrak{x}})$, где μ_1 — соответствующая смешанная поверхностная функция.

В силу теоремы Александрова — Волкова можно сделать вывод об отсутствии регулярных решений изопериметрической задачи, отличных от шара. Окончательный вывод о решении без привлечения добавочной информации на этом основании невозможен. Подобные сложности нарастают при увеличении числа дополнительных ограничений. Идея преодоления указанных препятствий принадлежит В. Бляшке [3, с. 135]. По существу, он отметил, что, складывая вместо поверхностей их поверхностные функции, мы превращаем изопериметрическую задачу в выпуклую программу. Само по себе это замечание не позволяет, разумеется, решать задачи. Реализация идеи Бляшке требует описания должной параметризации конуса поверхностей, представления сопряженного конуса и выяснения субдифференциала объема. Нужные сведения приведены в параграфе 1. Поэтому мы можем перейти к обсуждению особенностей решения экстремальных задач в структуре Бляшке.

3.1. Обобщенная изопериметрическая задача. *Заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$ в $\mathbb{R}^N$ и числа $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}_+$. Требуется среди выпуклых фигур, удовлетворяющих неравенствам $\langle \mathfrak{y}_k, \mathfrak{x} \rangle \leq b_k$ $(k = 1, \dots, m)$, найти тело, доставляющее максимум объему.*

3.2. Критерий оптимальности. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением обобщенной изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\bar{\mathfrak{x}} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\alpha}_1\mathfrak{y}_1 + \dots + \bar{\alpha}_m\mathfrak{y}_m$.*

Задача 3.1 хорошо иллюстрирует различия в программировании в структурах Бляшке и Минковского. В последней при $N \geq 3$ задача 3.1 не выпуклая и необходимое условие экстремума для нее имеет вид

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu_1 \left(\bar{\mathfrak{x}}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \mathfrak{y}_j \right).$$

Извлечь из последнего условия требуемое представление решения удается лишь в предположении априорной регулярности $\bar{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$ на основе упомянутой выше теоремы Александрова — Волкова.

В качестве еще одного типичного примера рассмотрим следующую задачу с операторным ограничением на кривизны. Для экономии места, как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать лишь одно ограничение общего вида.

3.3. Задача Линделёфа. *Пусть $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}$ — заданные выпуклые тела. Требуется среди фигур, удовлетворяющих условиям*

(1) $\mu(\mathfrak{x}) \leq \mu(\mathfrak{x}_0)$;

(2) $\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle \leq \langle \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle$,

найти фигуру, доставляющую максимум объему.

Уместно здесь же подчеркнуть, что программирование задач с ограничениями вида 3.3(1) непосредственно в пространстве выпуклых множеств $[\mathcal{V}_N]$ затруднено невыпуклостью соответствующей допустимой области при $N \geq 3$.

3.4. Критерий оптимальности. *Если существует* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ *такое, что*
(1) $\bar{\mathfrak{x}} \geq \bar{\alpha}\mathfrak{y}$*;*
(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \bar{\alpha}\mathfrak{y}(z)$ *для всех* $z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x}_0) - \mu(\mathfrak{x}))$*,*
то допустимое тело является решением задачи Линделёфа.

4. Сопоставление структур Бляшке и Минковского

Задачи изопериметрического типа с дополнительными ограничениями на способ размещения выпуклых фигур представляют во многом уникальный класс содержательных задач математического программирования, допускающих две существенно различные параметризации. Важнейшие характеристики последних видны из таблицы.

Объект параметризации	Структура Минковского	Структура Бляшке
конус множества	$\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$	$\mathcal{A}_N$
двойственный конус	$\mathcal{V}_N^*$	$\mathcal{A}_N^*$
положительный конус	$\mathcal{A}_N^*$	$\mathcal{A}_N$
типичный линейный функционал	$V_1(\mathfrak{z}_N, \,\cdot\,)$ (ширина)	$V_1(\,\cdot\,, \mathfrak{z}_N)$ (площадь)
вогнутый функционал (степень объема)	$V^{1/N}(\,\cdot\,)$	$V^{(N-1)/N}(\,\cdot\,)$
простейшая выпуклая программа	задача Урысона	изопериметрическая задача
ограничение операторного типа	включение фигур	неравенства на «кривизны»
множитель Лагранжа	поверхность	функция
дифференциал объема в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ пропорционален	$V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \,\cdot\,)$	$V_1(\,\cdot\,, \bar{\mathfrak{x}})$

Из этой таблицы видно, что классическая изопериметрическая задача не является выпуклой программой в структуре Минковского при $N \geq 3$. В этом случае необходимое условие экстремума приводит к решению лишь при дополнительных предположениях регулярности. В структуре же Бляшке эта задача выпуклая и необходимое и достаточное условие экстремума для нее гласит: «решение есть шар».

Вопрос о выборе подходящей параметризации для широкого класса задач практически не исследован. В основном не решены те задачи геометрии, где комбинируются ограничения, каждое из которых линейно относительно одной из различных векторных структур в множестве выпуклых поверхностей. Простейшей из «комбинированных» нерешенных задач остается внутренняя изопериметрическая задача в пространстве $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$.

Приведенные выше геометрические факты указывают на целесообразность исследования общей проблемы параметризации классов экстремальных задач, возникающих в содержательных приложениях.

Комментарий

По поводу экстремальных задач геометрии существует обширная литература. Отметим здесь только обзоры Боннезена и Фенхеля [4] и Буземана [5], а также книгу Хадвигера [6]. Следует особо выделить цикл статей А. Д. Александрова по теории смешанных объемов, переизданных в [2]. В этих работах к задачам теории выпуклых поверхностей впервые была применена техника функционального анализа. А. Д. Александров дал первые наиболее фундаментальные применения структуры Минковского к экстремальным задачам выпуклой геометрии. Отметим также сравнительно недавние обзорные монографии [7–9], в которых представлены необходимые сведения из выпуклой геометрии и собрана весьма подробная библиография по изопериметрическим неравенствам и задачам. Выделим яркую монографию Л. Хёрмандера [10], включающую, в частности, подробное изложение теории Брунна — Минковского. Между прочим, Л. Хёрмандеру принадлежит одно из первых исследований по параметризации классов выпуклых подмножеств общих топологических векторных пространств. В этих работах можно найти все использованные сведения из теории смешанных объемов и поверхностных функций. По поводу задачи Урысона см. [11] и обзор Л. А. Люстерника [12].

Общая схема применения двойственности Минковского к экстремальным задачам выпуклой геометрии представлена в обзоре [13] и в его развернутом варианте, составившим монографию [14]. Эта схема основана на комбинировании идей математического программирования, принадлежащих Л. В. Канторовичу, и функционально-аналитических методов в теории выпуклых тел, созданных А. Д. Александровым. В [13, 14] дано более развернутое обоснование техники получения критериев оптимальности для задач, приведенных в параграфе 2. К сожалению, результаты работ [13, 14] сформулированы в терминах излишне громоздких описаний двойственных конусов к конусам возможных направлений. Используемое в настоящей работе упрощение основано на свойстве 1.4.2, впервые выписанном в таком виде в [15]. Простейшие линейные программы для конечно параметрических семейств при наличии текущих многогранников в качестве свободных границ представлены в [14]. Задача с текущей прямой публикуется впервые. Подробный детальный анализ общих внешних и внутренних задач с текущими многогранниками станет предметом специальной статьи. Отметим, что при анализе подобных задач особенно уместно комбинировать развитые выше приемы программирования с классической техникой симметризаций Штейнера, Щварца и др.

Относительно сложения Бляшке см. [3, 7, 15–18]. Приведенное в параграфе 1 построение фактически проведено в работе [17]. В пространственном случае предложение 1.6 отмечено в [16], см. также [15]. Формализм для программирования задач в структуре Бляшке был предложен в [15]. Там же было подсчитано замыкание производной объема. В работе [19], детализируя рассуждения из [15], Д. М. Гойхман показал замкнутость соответствующей производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kantorovich L. V.* Selected Works. London etc.: Gordon and Breach, 1996. Part 1, 2.

2. *Alexandrov A. D.* Selected Scientific Papers. London etc.: Gordon and Breach, 1996. Part 1.

3. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.

4. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der Konvexen Korper. Berlin; New York: Springer and Chelsea, 1934, 1948.

5. *Буземан Г.* Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1961.

6. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.

7. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.

8. *Mitrinović D. C., Pečarić J. E., Volenec V.* Recent Advances in Geometric Inequalities. Dordrecht: Kluwer, 1989.

9. *Handbook* on Convex Geometry / Eds Gruber P. M., Wills J. M. Vol. A., B. Amsterdam: Elsevier, 1993.

10. *Hörmander L.* Notions of Convexity. Boston etc.: Birkhäuser, 1994.

11. *Урысон П. С.* Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 477–485.

12. *Люстерник Л. А.* Применение неравенства Брунна — Минковского к экстремальным задачам // Успехи мат. наук. 1936. Т. 2. С. 47–54.
13. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, №2. С. 127–176.
14. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.
15. *Кутателадзе С. С.* Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач // Мат. заметки. 1973. Т. 14, №5. С. 745–754.
16. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.
17. *Firey W.* Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies // Proc. of the Colloquium on Convexity, 1965. Copenhagen: Kobenhavns Univ. Mat. Inst., 1967. P. 94–101.
18. *Firey W., Grünbaum B.* Addition and decomposition of convex polytopes // Israel J. Math. 1964. V. 2, N. 2. P. 91–100.
19. *Гойхман Д. М.* О дифференцируемости объема в структуре Бляшке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, №6. С. 1406–1408.

г. Новосибирск *Статья поступила 30 апреля 1998 г.*