

СЕРГЕЙ ЛЬВОВИЧ СОБОЛЕВ 1908–1989

6-го октября 1998 г. мировая научная общественность отмечает 90 лет со дня рождения одного из крупнейших математиков XX века Сергея Львовича Соболева. С. Л. Соболев внес основополагающий вклад в развитие современной математики. Им созданы новые разделы математики, введены важные понятия, разработаны мощные методы исследования, решен ряд крупных, давно стоявших проблем.

С. Л. Соболев сыграл важнейшую роль в формировании крупнейших математических школ в нашей стране и за рубежом, в становлении и развитии новых направлений прикладной математики, имеющих важное государственное значение.

Сергей Львович Соболев родился в Петербурге, в семье присяжного поверенного Льва Александровича Соболева. Лев Александрович учился в Петербургском университете, но за участие в революционном движении был исключен из университета и отправлен в солдаты. Впоследствии он сдал экстерном государственные экзамены за юридический факультет при Харьковском университете. Дед Сергея Львовича со стороны отца был потомственным сибирским казаком.

Сергей Львович рано потерял отца и его воспитывала мать, Наталья Георгиевна, образованнейшая женщина, преподаватель литературы и истории. Наталья Георгиевна имела и вторую специальность: она закончила медицинский институт и работала доцентом 1-го Ленинградского медицинского института. Она привила С. Л. Соболеву те принципиальность, честность и целеустремленность, которые характеризовали его как ученого и человека.

Программу средней школы Сергей Львович освоил самостоятельно, особенно увлекаясь математикой. В годы гражданской войны он вместе с матерью жил в Харькове. Там он один семестр учился на подготовительных курсах вечернего рабочего техникума. В 15 лет он знал весь курс математики, физики, химии и других наук в объеме средней школы, прочитал много классиков русской и зарубежной литературы, книги по философии, медицине, биологии. Переехав в 1923 г. из Харькова в Петроград, Сергей Львович поступил в последний класс 190-й школы и закончил ее с отличием в 1924 г.

После окончания школы поступить в университет он не смог по возрасту (ему было 15 лет). Он начал учиться в Первой государственной художественной студии по классу фортепьяно.

В 1925 г. С. Л. Соболев поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета, одновременно занимаясь в художественной студии. В ЛГУ С. Л. Соболев слушал лекции профессоров Н. М. Гюнтера, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца и других. Дипломную работу об аналитических решениях системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными он написал под руководством Н. М. Гюнтера.

В те годы ЛГУ был крупнейшим научным математическим центром, сохранявшим замечательные традиции Петербургской математической школы, знаменитой своими величайшими открытиями и связанной с именами П. Л. Чебышёва, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова.

После окончания в 1929 г. Ленинградского университета Сергей Львович начинает работать в теоретическом отделе Ленинградского сейсмологического института под руководством В. И. Смирнова. В этот период им в тесном сотрудничестве с В. И. Смирновым был решен ряд фундаментальных математических задач теории распространения волн.

В 1930 г. Сергей Львович опубликовал в Трудах Сейсмологического института работу о волновом уравнении в неоднородной среде. Эта работа и последующие публикации Сергея Львовича на ту же тему важны с математической точки зрения потому, что в них создан известный метод Соболева решения задачи Коши для гиперболических уравнений 2-го порядка.

Многие важные решения волнового уравнения, например, однородные нулевой степени однородности решения, являются функционально-инвариантными. Отражая функционально-инвариантные решения от плоской границы при классических краевых условиях, опять получаем функционально-инвариантные решения.

С. Л. Соболев совместно с В. И. Смирновым с помощью этого нового метода решил в явном виде знаменитую задачу Лэмба о нахождении смещения упругой полуплоскости под действием сосредоточенного импульса. С помощью принципа суперпозиции был решен также трехмерный осесимметрический случай задачи Лэмба. Легко видеть, что при падении плоской ступенчатой волны на угол (нуль перед фронтом, единица — за фронтом) решение должно быть однородной функцией нулевой степени однородности. Аппарат однородных функционально-инвариантных решений оказался здесь чрезвычайно удобным.

С 1932 г. Сергей Львович работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова в Ленинграде, а затем с 1934 г. в Москве. В этот период он продолжил изучение гиперболических уравнений. Сергей Львович предложил новый метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, основанный на обобщении формулы Кирхгофа. Используя соотношения на характеристическом конусе, он свел задачу к интегральному уравнению типа Вольтерра, которое решается с помощью обычных последовательных приближений. Новый метод явился развитием прежнего, предложенного им для решения задачи Коши для волнового уравнения в неоднородной среде. С. Л. Соболев также изучил условия существования аналитического решения задачи Гурса.

Работы, связанные с гиперболическими уравнениями, привели Сергея Львовича к пересмотру классического понятия решения дифференциального уравнения.

Понятие обобщенного решения дифференциального уравнения рассматривалось и ранее некоторыми математиками, например, Н. М. Гюнтером и К. О. Фридрихсом. Однако именно в работах С. Л. Соболева это понятие впервые получило систематическое применение и глубокое развитие. Рассмотрение С. Л. Соболевым решений в пространствах функционалов положило начало теории обобщенных функций. Сергей Львович в 1933–1935 гг. опубликовал цикл исследований по задаче Коши для гиперболических уравнений, в которых были установлены разрешимость и единственность решения задачи Коши в пространствах обобщенных функций. Эти работы сыграли важную роль в развитии современной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Аппарат обобщенных функций вызвал к жизни новые методы в теории уравнений с частными производными, которые позволили решить ряд давно стоявших проблем, придать окончательную форму многим ранее полученным результатам, поставить и решить ряд новых задач. Новый аппарат и связанные с ним понятия и методы, особенно бурно развивавшиеся в 50-е годы в работах Л. Шварца и последовавших за ними исследованиях, изменили за короткий срок облик многих разделов теории уравнений с частными производными.

Определив понятие обобщенной производной, С. Л. Соболев ввел в математику пространства функций, обобщенные производные которых интегрируемы в некоторой фиксированной степени. Эти объекты теперь называют пространствами Соболева.

Пусть f и g — локально суммируемые функции, определенные в открытом подмножестве G пространства \mathbb{R}^n , а α — некоторый мультииндекс. Функция g

называется обобщенной производной функции f в смысле С. Л. Соболева или слабой производной порядка α и обозначается $D^\alpha f$, если для всякой пробной функции φ , т.е. такой что носитель φ компактен и лежит в G и φ непрерывно дифференцируема $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ раз в G , выполняется равенство

$$\int_G f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G g(x) \varphi(x) dx,$$

где $D^\alpha \varphi$ — классическая производная φ порядка α .

Подпространство W_p^l векторного пространства (классов эквивалентных) локально суммируемых функций f на G , имеющих в G все обобщенные производные $D^\alpha f$ при $|\alpha| \leq l$, суммируемые в степени p , где $p \geq 1$, становится банаховым пространством, если в нем ввести норму, например, следующего вида

$$\|f\|_{W_p^l} = \left(\int_G |f|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{|\alpha|=l} \left(\int_G |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Сергей Львович нашел общие критерии эквивалентности различных норм в W_p^l и показал, что ставить краевые задачи для эллиптических уравнений наиболее естественно в терминах этих пространств. Такой вывод базировался на глубоком изучении свойств введенных им пространств, важнейшими из которых являются теоремы вложения. Суть теорем вложения, найденных С. Л. Соболевым и ставших классическими, состоит в специальных неравенствах между нормами одной и той же функции, рассматриваемой как элемент различных пространств. Неравенства С. Л. Соболева включают в себя в качестве частных случаев интегральные неравенства, установленные ранее А. Пуанкаре, В. А. Стекловым, Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвудом и другими.

Опираясь на теоремы вложения, С. Л. Соболев нашел корректную постановку краевых задач для эллиптических уравнений в многомерных областях, когда краевые условия заданы на многообразиях различных размерностей, и доказал существование и единственность решений этих задач.

Созданная С. Л. Соболевым теория вложения пространств дифференцируемых функций успешно развивается. Получил дальнейшее развитие аппарат интегральных представлений функций, распространенный на анизотропные случаи. Найденные новые шкалы функциональных пространств. Для этих функциональных пространств обнаружены новые теоремы вложения, исследована компактность оператора вложения, найдены связи между различными пространствами, изучена возможность и скорость различного рода аппроксимаций.

В современных исследованиях стал классическим разработанный С. Л. Соболевым аппарат интегральных представлений функций, срезающих и усредняющих функций, проекционных операторов и т. д.

Сергей Львович Соболев был превосходным педагогом. Прекрасные и яркие лекции Сергея Львовича слушали студенты Ленинградского электротехнического института, Ленинградского, Московского и Новосибирского университетов. На основе содержательных и глубоких лекций были созданы учебник «Уравнения математической физики» и две монографии «Некоторые применения функционального анализа в математической физике» и «Введение в теорию кубатурных формул». Его книга «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», вышедшая в 1950 г. и переведенная на многие иностранные языки, стала настольной для всех математиков, работающих в области функционального анализа и дифференциальных уравнений. Отметим, что в 1978 г., т. е. 28 лет спустя, она вновь была переиздана в США. Идеи, разработанные Сергеем Львовичем и изложенные в этой книге, оказали большое влияние на последующее развитие теории обобщенных функций,

теории вложения функциональных пространств и уравнений с частными производными. Эти книги Сергея Львовича сохраняют свое значение многие годы, оказывают и еще долго будут оказывать глубокое влияние на математиков. Не случайно в конце 80-х — начале 90-х годов выходит целая серия переработанных переизданий и переводов книг С. Л. Соболева.

Число учеников С. Л. Соболева огромно. Влияние идей и методов Сергея Львовича настолько велико, что многие видные ученые считают себя его учениками и последователями, хотя непосредственно и не учились у него. Сергей Львович руководил рядом научно-исследовательских семинаров в Ленинградском, Московском, Новосибирском университетах и в Институте математики.

Научные результаты Сергея Львовича принесли ему заслуженное и широкое признание. В 1933 г. в возрасте 24 лет С. Л. Соболев избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1939 г. он стал её действительным членом. Тогда он был и долго оставался самым молодым академиком в нашей стране. В 1941 г. за работы по математической теории упругости С. Л. Соболеву была присуждена Государственная премия.

В 1958 г. Сергей Львович еще раз вернулся к тематике вложения функциональных пространств и построил теорию вложений для абстрактных функций, которая тесно связана с краевыми задачами для квазилинейных уравнений с частными производными. При этом им было проведено глубокое исследование по теории интегрирования абстрактных функций.

Начало большому направлению в теории дифференциальных уравнений в частных производных — изучению поведения при больших значениях времени решений краевых задач для нестационарных уравнений, положили работы С. Л. Соболева о почти-периодичности решений волнового уравнения. В работах С. Л. Соболева, опубликованных в 1945 г., была доказана почти-периодичность решений смешанной задачи для уравнений 2-го порядка гиперболического типа. Почти-периодичность вытекала из оценки интеграла от суммы квадратов вторых производных решения указанной задачи как функции времени. Здесь также нашли применение теоремы вложения.

В сороковых годах, в связи с прикладными задачами, С. Л. Соболев начал изучение системы дифференциальных уравнений, описывающей малые колебания вращающейся жидкости. С. Л. Соболев пришел к этой системе, исследуя устойчивость движения вращающегося волчка, имеющего полость, заполненную идеальной жидкостью. С. Л. Соболев получил условия устойчивости вращающегося волчка с полостью, заполненной жидкостью, в зависимости от формы полости и ее параметров, разобрав подробно случаи цилиндрической полости и полости — эллипсоида вращения. При изучении этой задачи С. Л. Соболевым впервые была поставлена и исследована задача о спектре оператора, являющегося эрмитовым относительно некоторой индефинитной метрики.

В связи с этими исследованиями Сергея Львовича возникло еще одно новое направление в общей теории дифференциальных уравнений в частных производных — исследование решений задачи Коши и краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старших производных по времени. Для систем такого типа изучены вопросы корректности задачи Коши, в частности, найдены условия, аналогичные условиям Петровского корректности постановки задачи Коши для систем, разрешенных относительно старших производных по времени.

Во время Великой Отечественной войны и в послевоенный период стремительно возросло значение вычислительной математики и вычислительной техники. Сергей Львович активно включился в работу, связанную с развитием этих направлений в нашей стране.

Работая много лет на посту главного заместителя директора Института атомной энергии, возглавляемого И. В. Курчатовым, Сергей Львович принимал активное и непосредственное участие в решении важных прикладных задач, имеющих оборонное значение. Именно в это время, в январе 1952 г. Сергей

Львович Соболев был удостоен высшей награды страны — ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда за исключительные заслуги перед государством. За работы, выполненные в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, Сергею Львовичу дважды были присуждены Государственные премии 1-й степени.

Сергей Львович Соболев — один из первых математиков, кто понял особую важность и необходимость быстрее развития в нашей стране вычислительной математики и кибернетики. С 1952 по 1960 гг. С. Л. Соболев возглавлял в МГУ первую в стране кафедру вычислительной математики, сыгравшую неоценимую роль в развитии этой важной области математики наших дней. Сергею Львовичу удалось объединить на этой кафедре сплоченный коллектив энтузиастов, организовав высокий уровень исследований, обеспечив выпуск первых квалифицированных специалистов по вычислительной математике.

При решении задач вычислительной математики Сергей Львович широко использовал аппарат функционального анализа, уравнений с частными производными, теорию функций; часто сами задачи вычислительной математики ставятся в его работах как задачи функционального анализа. Сергей Львович писал по этому поводу, что теорию вычислений сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин.

Еще в довоенные годы появились работы Сергея Львовича по оценкам сумм значений функций, заданных на сетке: это были первые работы по разностным аналогам теорем вложения. Это направление исследований получило существенное развитие и сейчас является необходимым инструментом при изучении сходимости, получении оценок для сеточных решений и погрешности. Качественное исследование поведения решений разностных уравнений и исследование устойчивости для многих классов сеточных задач сводится к изучению поведения функций Грина сеточных задач. Сергеем Львовичем были получены тонкие оценки асимптотического поведения разностной функции Грина для уравнения Лапласа.

При изучении сходимости и устойчивости алгоритмов решения задач математической физики С. Л. Соболевым были введены полезные для теории приближенных методов понятия равномерной вполне непрерывности и правильного приближения последовательности операторов, а также понятие регулярного и нерегулярного замыкания вычислительного алгоритма (некоторого непрерывного аналога, получаемого предельным переходом из соотношений, составляющих вычислительный алгоритм). Если замыкание алгоритма регулярно, то имеется основание ожидать, что он будет устойчив к различным возмущениям. Эти работы привлекли внимание к вопросам общей теории вычислительных алгоритмов, к исследованию приемов и методов, используемых для решения больших систем уравнений.

Сибирский период научной деятельности Сергея Львовича ознаменовался большими достижениями в теории кубатурных формул. Задача о приближенном интегрировании функций является одной из основных задач теории вычислений; эта задача необычайно трудоемка в вычислительном отношении для многомерных интегралов. Отыскание и исследование наилучшей кубатурной формулы и получение точной оценки ее погрешности является сложнейшей задачей для

классов функций, встречающихся в приложениях. Она требует привлечения глубоких и тонких фактов из других областей математики. Проблема оптимизации формул интегрирования в современном понимании выглядит как проблема отыскания минимума нормы функционала погрешности l , заданного на некотором пространстве функций.

Сергей Львович развил теорию кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно некоторой группы вращения G . Им доказана основная теорема о том, что инвариантные кубатуры, интегрирующие точно все инвари-

антные относительно G сферические гармоники некоторого порядка, будут точно интегрированы и все остальные гармоники этого порядка. Считая, что узлы кубатуры расположены в вершинах некоторой правильной решетки в n -мерном пространстве с шагом h , а веса подчинены условию точности кубатуры на всех многочленах степени $m > n/2$, С. Л. Соболев рассмотрел кубатуры составного типа, получаемые суммированием кубатур для малых областей. Им установлено, что для таких кубатур с точностью до членов более высокого порядка малости выполняется $\|l\| = Ah^m$, где величина A выражается через функцию Эпштейна, зависящую от формы решетки.

С. Л. Соболевым были введены и изучены кубатурные формулы специального вида, так называемые формулы с регулярным пограничным слоем, обобщающие известные квадратурные формулы Грегори на функции многих переменных. В них веса одинаковы вне пограничного слоя, а сами формулы обладают асимптотически минимальной нормой функционала погрешности. Исследования Сергея Львовича по кубатурным формулам были продолжены большой группой его учеников.

Научная деятельность С. Л. Соболева была неотделима от его организаторской работы в науке. В конце пятидесятых годов академики М. А. Лаврентьев, С. Л. Соболев и С. А. Христианович выступили с инициативой организации нового крупного научного центра — Сибирского отделения Академии наук. Для многих ученых СО АН первого призыва веским аргументом в принятии решения о переезде на работу в Новосибирск был пример Сергея Львовича, привлекательность его личности и его научный авторитет.

Невозможно переоценить роль Сергея Львовича в формировании Сибирской математической школы. Основатель Института математики Сибирского отделения и его директор в течение четверти века, С. Л. Соболев внес решающий вклад в определение научной судьбы Института, который носит теперь его имя. Велика роль С. Л. Соболева и в создании Новосибирского государственного университета, где им основана кафедра дифференциальных уравнений.

С. Л. Соболев активно работал в Бюро отделения математики, являлся членом Президиума Сибирского отделения с момента его основания, был председателем Национального комитета математиков; многократно избирался депутатом советов разных уровней.

Научные и организаторские заслуги С. Л. Соболева получили высокую оценку руководства страны: он был награжден многими орденами и медалями. Научная деятельность С. Л. Соболева пользовалась широким международным признанием. Он был почетным доктором университета им. Гумбольда в Берлине, почетным доктором Карлова университета в Праге, почетным доктором Высшей школы архитектуры и строительства в Веймаре. С. Л. Соболев был иностранным членом Французской академии наук, иностранным членом Национальной академии деи Линчеи в Риме, иностранным членом Академии наук ГДР в Берлине, почетным членом Эдинбургского королевского общества, почетным членом Московского математического общества и Американского математического общества. В 1978 г. С. Л. Соболев был награжден Чехословацкой академией наук золотой медалью «За заслуги перед наукой и человечеством» и в 1981 г. — золотой медалью им. Б. Больцано. В 1987 г. ему была присуждена серебряная медаль Чехословацкой академии наук. В 1989 г. С. Л. Соболеву присуждена высшая награда Академии наук — Золотая медаль Ломоносова.

Разносторонность дарований Сергея Львовича проявлялась в его увлечении музыкой, литературой, поэзией. Широкая эрудиция, оригинальные мысли, умение найти малозаметные, но существенные детали в обсуждаемом, отточенная логика, легкий юмор, человеческое обаяние делали его прекрасным собеседником и полемистом.

Сергея Львовича отличали необыкновенная щедрость души, оптимизм, доброжелательность и доверие к людям, глубина и ясность ума, скромность и отзывчивость.

Академик С. Л. Соболев входил в редколлегию «Сибирского математического журнала» с момента его основания. Он был главным редактором журнала с 1968 по 1988 гг. Репутация и облик журнала этих десятилетий во многом определялись научными и этическими принципами и личными качествами С. Л. Соболева.

Научные идеи Сергея Львовича Соболева вошли в золотой фонд мировой науки, став достоянием многих поколений математиков настоящего и будущего. Им суждено долго украшать нашу науку.

*М. М. Лаврентьев, В. Л. Береснев, А. А. Боровков,
С. К. Годунов, Ю. Л. Ершов, С. С. Кутателадзе,
Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов*