А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Ученый Совет Института математики
по присуждению ученых степеней

На правах рукописи

КУТАТЕЛАДЗЕ СЕМЕН САМСОНОВИЧ

ВЫПУКЛОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНУСА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

(01.01.01. - функциональный анализ и теория функций)

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск
1973

Диссертация выполнена в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук Решетняк Юрий Григорьевич
доктор физ.-мат. наук Семенов Евгений Михайлович
доктор физ.-мат. наук Тихомиров Владимир Михайлович

Ведущее учреждение:
Ленинградский государственный университет им. А.А.Жданова

Автореферат разослан " " __________ 1973 г.

№ 28-I-808.I/2023

Защита диссертации состоится " " _________ 1973 г. в _____ часов на заседании Ученого Совета Института математики Сибирского отделения АН СССР в конференц-зале этого Института.

Адрес Института: Новосибирск-90, Университетский проспект, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО АН СССР.

Ученый секретарь Совета
доктор физ.-мат. наук Д. Смирнов /Д.М.СМИРНОВ/

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Ученый Совет Института математики СО АН СССР по присуждению ученых степеней

На правах рукописи

КУТАТЕЛАДЗЕ СЕМЕН САМСОНОВИЧ

ВЫПУКЛОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНУСА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

(0I.0I.0I.- функциональный анализ и теория функций)

Автореферат

диссертации, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск
1973

1^0. В последние десятилетия возрос интерес к задачам, использующим понятие выпуклости. Интенсификация исследований таких задач привела к формированию в рамках функционального анализа нового раздела - выпуклого анализа [1]. Основными объектами выпуклого анализа являются выпуклые функции и множества и их подклассы. После классических работ Фенхеля [2] и Хермандера [3] стало ясно, что класс выпуклых функций и класс выпуклых множеств в известном смысле одинаково устроены. Общее их свойство, играющее роль решающего обстоятельства при анализе ряда задач, состоит в том, что оба эти класса составлены из элементов, выпуклых относительно соответствующего конуса. Иными словами, элементы этих классов отождествляются с верхними гранями подмножеств конуса. В случае выпуклых множеств таким конусом служит множество линейных функционалов, а в случае выпуклых функций - множество аффинных функций. Можно показать, что таким же естественным и простым способом конструируются многие другие объекты выпуклого анализа - множества с паретовской границей, устойчивые множества, монотонные полунормы, непрерывные функции и т.д. При этом центральные конструкции выпуклого анализа - двойственность Минковского, схема Фенхеля-Моро и др. - используют, фактически, только свойства выпуклости относительно конуса. Более того, понятие выпуклости относительно конуса охватывает ряд концепций обобщенной выпуклости, используемых в смежных с выпуклым анализом дисциплинах - выпуклость в смысле Фаня, выпуклость на не выпуклом множестве, выпуклость в смысле Бобока-Корнеа и др.

Эти обстоятельства определяют основной объект исследования настоящей работы - функции и множества, выпуклые относительно некоторого конуса H. Точнее, в полной решетке Y (представляющей, как правило, пространство Канторовича с присоединенными наибольшим и наименьшим элементами) рассматривается подмножество H (как правило, конус), не содержащее элемента $\inf Y$.

Подмножество U множества H называется выпуклым относительно H (или, H-выпуклым), если U совпадает с множеством U_y лежащих в H нижних границ некоторого элемента y из Y, то есть если $U = U_y = \{h \in H : h \leq y\}$. Класс всех H -выпуклых множеств обозначается $\mathcal{K}(H,Y)$. Элемент p из Y называется выпуклым относительно H (или, H -выпуклым), если p есть верхняя грань H -выпуклого множества, то есть если p допускает представление $p = \sup U_p$. Множество всех H -выпуклых элементов обозначается через $P(H,Y)$. Существенную роль играет наличие биекции $\mathcal{C}: P(H,Y) \to \mathcal{K}(H,Y)$, действующей по формуле $\mathcal{C}: p \mapsto U_p$. Эта биекция, называемая двойственностью Минковского, позволяет вести одновременное изучение как выпуклых функций, так и выпуклых множеств.

Как правило, элементы, выпуклые относительно конуса, заполняют, в свою очередь, конус P в соответствующей решетке Канторовича. В связи с этим возникает задача о строении двойственного объекта - конуса P^*, двойственного к конусу P, то есть множества линейных функционалов, положительных на P. Эта задача обычно изучается в эквивалентной форме - в форме задачи о представлении упорядоченности, наводимой конусом P^* в конусе положительных функционалов, - это так называемая упорядоченность Шоке. Аналогичную задачу имеет смысл рассматривать также и для соответствующей упорядоченности в конусе положительных операторов. Ясно, что теоремы о представлении указанных упорядоченностей можно трактовать, как способы перехода от супремальных конструкций к линейным операциям, то есть как результаты о двойственном задании выпуклых элементов.

Изучение указанных задач представляется тем более оправданным, что подобные вопросы в различных постановках исследуются в ряде смежных разделов анализа и геометрии - теория Шоке, теория аппроксимации, геометрия выпуклых поверхностей, геометрия банаховых сфер и т.д. Следует отметить, однако, что несмотря на значительное число частных результатов в указанных направлениях, систематическое исследование характеристик выпуклости на языке поведения функционалов и операторов до последнего времени не проводилось. В то же время классические конструкции не достаточны для решения ряда задач.

Эти обстоятельства определяют общий замысел работы - получить способы двойственного задания выпуклых элементов на языке описания указанных отношений порядка и показать, как эти методы работают при исследовании конкретных задач. При этом в качестве основных приложений рассматриваются задачи теории выпуклых множеств, связанные с необходимостью описания положительных линейных относительно операций Минковского функционалов и задачи, связанные с описанием максимальных операторов (в упорядоченностях типа Шоке) и процессов их аппроксимации.

В работе получены общие результаты о представлении конусов, двойственных к конусам выпуклых элементов. На этой основе в области теории выпуклых множеств получены характеристики ряда классов выпуклых множеств, методы учета ограничений типа включения в изопериметрических задачах с большим числом связей, метод программирования изопериметрических задач с использованием структуры Бляшке и т.д. В области аппроксимации получены индивидуальные признаки определенности сходимости последовательностей операторов и функционалов их сходимостью на конусе, признаки однозначной определенности значениями на конусе оператора в классе положительных операторов, в классе операторов с абстрактной нормой и т.д. Разобраны и некоторые другие приложения излагаемых конструкций. Полученные критерии, вообще говоря, необходимы и достаточны. При этом установленные условия не только покрывают большинство известных (как правило, достаточных) признаков, но позволяют получить ряд существенно новых результатов, часть которых содержит более точные по сравнению с известными условия даже в случае обычной выпуклости.

2°. Работа состоит из 43 параграфов, сведенных в пять глав. Поскольку работа посвящена ряду смежных вопросов, помимо литературных указаний, предваряющих каждую главу, в работе приводятся краткие дополнительные библиографические замечания. По той же причине к работе приложены краткие сводки используемых в основном тексте результатов из теории упорядоченных векторных пространств и теории выпуклых поверхностей.

В первой главе, носящей вспомогательный характер, приводятся основные определения и простейшие свойства элементов и множеств, выпуклых относительно некоторого конуса. Здесь же собраны важнейшие примеры - вводятся различные классы выпуклых и сублинейных функций, нормальные и устойчивые множества, выпуклые в смысле Бобока-Корнеа функции, множества, выпуклые в смысле Фаня и т.д. Здесь же проводятся необходимые параллели схем двойственности - рассматриваются соответствующие обобщения схем Минковского-Фенхеля, Фенхеля-Моро, обсуждается конструкция пространства выпуклых множеств. За исключением немногих доказываемых утверждений материал носит стандартный характер.

Во второй главе излагаются основные способы двойственного задания выпуклых функций. Центральными из них являются теорема декомпозиции и операторный принцип сохранения неравенств. Теорема декомпозиции (и отвечающее ей свойство Решетняка-Люмиса) является, по-видимому, наиболее естественным способом перехода от супремальных конструкций к линейным операциям. Второй способ задания выпуклости - так называемый операторный принцип сохранения неравенств, представляющий собой специальную форму теоремы Хана-Банаха-Канторовича, - является основным средством анализа связей выпуклости с поведением операторов, изучению которых посвящены главы IУ и У. В этой же главе устанавливается связь строения конуса, двойственного к конусу выпуклых функций, с операторным принципом сохранения неравенств. Эта связь отражена тем фактом, что свойством Харди-Литтлвуда-Полиа в пространстве непрерывных функций на метризуемом компакте обладают те и только те конусы, в которые входит строго отрицательная функция. Завершается глава применениями полученных признаков для выявления связей выпуклости относительно конуса и слабой выпуклости, а также к задаче о сохранении неравенств, представляющей интерес в связи с теорией генераторов.

В третьей главе предыдущие результаты прилагаются к исследованию некоторых задач теории выпуклых множеств. Здесь устанавливается связь излагаемых конструкций с теорией Шоке, в частности, выявляется строение выпуклых по Фаню множеств. Значительное внимание уделено приложению декомпозиционной техники к исследованию различных классов выпуклых множеств. В частности, приводятся описания положительных функционалов над подмножествами конуса, над коническими пирамидами, полиэдронами (непрерывными линейными комбинациями политопов с заданным числом вершин); приводятся характеристики элементов пинскеровского конуса, критерии замкнутости конуса относительно операций выпуклой оболочки объединения и пересечения и т. д. Далее, понятия декомпозиции и пространства выпуклых множеств применяются для анализа ограничений типа включения в задачах изопериметрического типа в геометрии выпуклых поверхностей. В частности, рассматриваются внешняя и внутренняя изопериметрические задачи, некоторые задачи над центрально-симметричными фигурами и т.д. В заключение этой главы строится конструкция вложения изопериметрических задач в задачи математического программирования в пространстве, сопряженном к пространству множеств. Возможность такого вложения была указана ещё Бляшке, однако, до последнего времени она не была реализована.

В четвертой главе излагаются элементы теории супремальных генераторов относительно пространств Канторовича, то есть таких конусов, что каждый элемент пространства порождается как супремум некоторого подмножества конуса, или, иными словами, является выпуклым относительно этого конуса. Задача о генераторах имеет своими корнями теорию аппроксимации положительными операторами. Дело в том, что супремальный генератор может быть охарактеризован тем свойством, что из сходимости (в том или ином смысле) последовательностей положительных операторов к тождественному на этом конусе вытекает сходимость (в том же смысле) на всем пространстве. Основное внимание уделено изучению генераторов пространства непрерывных функций, поскольку оказывается, что наиболее интересные - конечные - генераторы бывают только в таких пространствах (при естественных дополнительных предположениях). Интересно отметить, что результатам о таких генераторах можно придать форму теорем о представлении полунепрерывных снизу функций с помощью суперпозиций заданного числа выпуклых функций. Здесь же устанавливаются связи с так называемыми системами Коровкина, с задачами классификации компактов, с методом квазилинеаризации Беллмана и Калабы и т.п. Основные результаты параграфов 4.2, 4.3, 4.6 и теорема 8.I получены совместно с А.М.Рубиновым.

В пятой главе излагаются основные результаты о связи свойств выпуклости с поведением различных классов операторов. При этом, в отличие от большинства посвященных этой тематике работ, подход, использующий H -выпуклость, позволяет получить необходимые и достаточные признаки сходимости последовательностей операторов не только к тождественному оператору, но и к произвольному положительному оператору, к оператору с абстрактной нормой, к нерастягивающему оператору (в пространствах с сильной единицей) и т.д. Полученные результаты существенно перекрывают имеющиеся признаки. Из отдельных приложений этой главы можно отметить установление связи генератора с теоремой Келдыша о единственности обобщенного решения задачи Дирихле, теорему 2.2, устанавливающую признак эффекта типа "полной тени", теоремы 4.I и 6.2, представляющие далекие обобщения соответствующей теоремы Шмульяна, а также установление некоторых характеристик генератора с помощью теоремы Майкла о селекторах.

3°. Приведем теперь точные формулировки некоторых из отмеченных выше основных результатов.

Т е о р е м а 2.I.I (декомпозиции). Пусть X отделимая локально выпуклая решетка Канторовича и $H_1,\dots,H_n$ замкнутые конусы в X. Пусть, далее, f, g – положительные функционалы из X'. Неравенство

$$f(h_1\vee\dots\vee h_n)\geq g(h_1\vee\dots\vee h_n)$$

имеет место для любых элементов $h_k\in H_k$ ($k=1,\dots,n$) в том и только том случае, если для всякого разбиения $g_k\geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} g_k=g$ функционала g найдется разбиение $f_k\geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} f_k=f$ функционала f такое, что

$$f_k-g_k\in H_k^* \quad (k=1,\dots,n).$$

В качестве простейшего приложения теоремы декомпозиции получается

Т е о р е м а 2.2.2. Замкнутый конус в отделимой локально выпуклой решетке Канторовича обладает свойством Решетняка-Люмиса.

Иными словами, в описанной ситуации совпадают упорядоченность Шоке, наводимая конусом H (то есть отношение порядка в конусе положительных функционалов, порожденное конусом, двойственным к наименьшей верхней решетке, содержащей H), и упорядоченность, построенная с помощью декомпозиции.

Понятие декомпозиции складывалось постепенно. Ю.Г.Решетняк ввел соответствующее свойство для выпуклых компактов, Люмис [4] – для выпуклых функций. Теорема 2.2.2 для выпуклых функций получена Картье, Феллом и Мейе [5], а для выпуклых

компактов в [6]. Некоторые задачи декомпозиции рассмотрены Динджесом [7]. Теорема 2.I.I, дающая общий признак декомпозиции, является более точной даже в случае обычных выпуклых функций, так как устанавливает условие обрыва разбиений.

Теорема декомпозиции показывает, что выпуклость связана с переносом неравенств. Точное положение вещей в этом отношении описывает

Т е о р е м а 2.4.I (операторный принцип сохранения неравенств). Пусть X векторное подпространство пространства Канторовича Y и H коинициальный конус в X. Элемент x из X является H-выпуклым в том и только том случае, если $Tx\geq x$ для любого оператора T из положительного ростка оператора тождественного вложения X в Y на конусе H.

Напомним, что положительный росток $Spr(T,H)$ оператора $T: X\to Y$ на конусе H в X есть левая стрелка, то есть множество

$$Spr(T,H)=\{T'\in\mathcal{L}^+(X,Y): T'h\geq Th \ (h\in H)\},$$

где $\mathcal{L}^+(X,Y)$ множество положительных операторов, действующих из X в Y.

Сохранение неравенств для мер впервые, по-видимому, появилось у Кейдисона [8]. В дальнейшем этот эффект в пространствах непрерывных функций рассмотрен Бауэром [9], Бобоком и Корнеа [10] и др. Некоторые родственные задачи рассмотрены Карлиным [11] и Зиглером [12].

Техника декомпозиции находит естественные приложения в анализе задач теории выпуклых множеств, а распространение неравенств позволяет решить ряд задач, связанных с максимальными операторами. Разумеется, что при анализе конкретных задач наряду с общими результатами об устройстве упорядоченностей типа Шоке необходимо привлекать многие дополнительные соображения.

Остановимся сначала на некоторых геометрических результатах.

Т е о р е м а 3.3.I. Пусть H подпространство R^n, а $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_{n-1}$ фиксированные выпуклые поверхности. Неравенство для смешанных объемов

$$V(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{z}) \geq V(\mathfrak{y}_1, \dots \mathfrak{y}_{n-1}, \mathfrak{z})$$

имеет место для любой фигуры $\mathfrak{z}$, лежащей в H , в том и только том случае, если смешанная поверхностная функция $\mu(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{n-1})$ больше смешанной поверхностной функции $\mu(\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_{n-1})$ (в смысле декомпозиционной упорядоченности, порожденной следами функционалов из H на сферу направлений Z_n).

Т е о р е м а 3.4.I. Пусть $S_1, \dots, S_m$ - шары Минковского в R^n . Множество S получается из $S_1, \dots, S_m$ с помощью операций сложения по Минковскому, растяжения, взятия выпуклой оболочки объединения и перехода к пределу (в метрике Бляшке) в том и только том случае, если для не равных нулю одновременно векторов $x_1, \dots, x_p$ из R^n справедливо включение

$$\frac{S}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^0}} \leq \frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^0}} \vee \dots \vee \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^0}} .$$

Иными словами,

$$S = \bigwedge_{(x_1, \dots, x_p)} \sum_{k=1}^{p} S(x_k) \left[\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} S_1(x_k)} \vee \dots \vee \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p} S_m(x_k)} \right] .$$

Здесь S° поляра к S и, как обычно, множество отождествлено со своей опорной функцией.

Ряд результатов относится к анализу экстремальных задач геометрии выпуклых поверхностей.

Рассмотрим в качестве примера внутреннюю изопериметрическую задачу в классе центрально-симметричных фигур: среди центрально-симметричных фигур, содержащихся в $\mathfrak{x}_c$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру наибольшей площади.

Т е о р е м а 3.6.5. Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением указанной задачи в том и только том случае, если найдутся (критическая) фигура $\mathfrak{x}$ и положительное число $\bar{\lambda}$ такие, что

а) $\bar{\mathfrak{x}} \underset{\tau}{=} \mathfrak{x}^s + \bar{\lambda}\, \mathfrak{z}_2$

б) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ для всех z из $s(\mathfrak{x})$.

Здесь $\mathfrak{x}^s$ - симметризация Минковского фигуры $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}_2$ - единичный евклидов круг и $s(_0\mathfrak{x})$ - носитель $\mathfrak{x}$. Символ $\underset{\tau}{=}$ означает равенство с точностью до параллельного переноса. Аналогичный результат справедлив в случае любого числа линейных ограничений (на смешанные площади).

Метод анализа таких задач существенно связан с привлечением структуры Минковского, поэтому в многомерном случае в уравнениях Эйлера-Лагранжа типа теоремы 3.6.5 возникают объекты так называемой структуры Бляшке - симметризация Бляшке, сложение по Бляшке и т.д. Используя же последнюю структуру, можно избежать трудностей, связанных с устройством двойственных конусов (и приобрести взамен другие, связанные с потерей полилинейности смешанного объема). Для реализации идеи, высказанной Бляшке ([I3], см. также [I4]), о вложении изопериметрических задач в задачи вариационного исчисления в пространстве, сопряженном к пространству выпуклых множеств, необходимо описание субдифференциала объема в этой структуре. Соответствующий субдифференциал описывает

Т е о р е м а 3.8.5. Для замыкания производной функционала $\mathfrak{x} \mapsto V^{\frac{1}{n}}(\bar{\mathfrak{x}})\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{x})$, где $V(\mathfrak{x})$ - объем $\mathfrak{x}$, имеет место представление

$$g \longmapsto \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}}\, dg ,$$

где g допустимое направление в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ к конусу поверхностных функций.

С помощью этой теоремы, например, можно решать задачи с операторными ограничениями на кривизны типа задачи Линделёфа.

Приложения, основанные на сохранении неравенств, связаны, главным образом, с задачами теории аппроксимации.

Пусть H конус в подпространстве X пространства Канторовича Y . Элемент x из X называется H -аффинным, если

$$x = \sup_{h \leq x,\, h \in H} h = \inf_{h \geq x,\, h \in -H} h .$$

(В пространстве непрерывных функций эквивалентный объект был введен Бауэром [9]- это так называемые H -гармонические функции.)

Теорема 4.I.2. Пусть конус H коинициален X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) элемент x из X является H-аффинным;

(2) Если последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(X,Y)$ такова, что $\lim\limits_n T_n h \geq h$ для всех h из H, то последовательность $(T_n x)$ является (o)-сходящейся к x;

(3) Если $T \in Spr(E,H)$, то $Tx = x$.

В задачах о пробных функциях как правило интересуются ситуациями, в которых свойства (2) и (3) имеют место для всего пространства. В связи с этим, естественно, возникает задача о генераторах.

Конус H называется супремальным генератором векторного подпространства X пространства Канторовича Y (относительно Y), если любой элемент из X является H-выпуклым (или, что то же самое, H-аффинным). Наибольший интерес в аппроксимации представляет случай, когда генератор конечен. Оказывается (теорема 4.3.I), что это бывает лишь в решетках ограниченных элементов (в случае, когда X решетка Канторовича). При этом особенный интерес приобретает сходимость в сильной операторной топологии.

Теорема 4.4.I. Пусть Q компактное пространство, H конус в пространстве $C(Q)$ непрерывных на Q функций. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) H супремальный генератор $C(Q)$ относительно пространства $B(Q)$ всех ограниченных на Q функций;

(2) Граница Шоке конуса H совпадает с Q;

(3) Если последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$ такова, что равномерный $\lim\limits_n T_n h \geq h$ ($h \in H$), то (T_n) сходится в сильной операторной топологии к оператору вложения E;

(4) Оператор вложения максимален относительно конуса H;

(5) Для каждой точки x из Q и последовательности (μ_n) положительных мер, такой что $\lim\limits_n \mu_n(h) \geq h(x)$ для $h \in H$, следует, что (μ_n) сходится к ε_x в $\sigma(C'(Q), C(Q))$.

Существенное отличие этой теоремы от имеющихся (см., например, [15], [16]) - замена подпространств на конусы, что позволяет перейти от условий равенства к неравенствам (в меньшем числе) и локальность приведенных признаков (ср. с теоремой 4.1.2).

В описанной ситуации оказывается возможным подсчитать размерность минимального генератора. Число m называется супремальным рангом Q, если найдутся функции $f_1, \ldots, f_m$ такие, что конус, натянутый на -1 и эти функции, является генератором $C(Q)$ относительно $B(Q)$ и никакое меньшее число функций этим свойством не обладает.

Теорема 4.6.2. Супремальный ранг компакта Q равен $n+1$ ($n \geq 1$) в том и только том случае, если наименьшая размерность евклидова пространства, в которое Q топологически вкладывается, равна n.

Уместно отметить, что родственные характеристики, построенные по подпространствам, как известно [17], не отличают куба от сферы.

В качестве еще одного из приложений генераторов в работе приводится обобщение метода квазилинеаризации Беллмана и Калабы [18]. Именно, для задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ выписывается явное выражение для решения через квадратуры и операцию $maxmin$ (теорема 4.8.I).

Дальнейшие результаты связаны с общей задачей о сходимости к максимальному оператору. В этом направлении в теории аппроксимации имелись лишь отдельные продвижения, связанные, главным образом, с работами [19], [20].

Пусть X пространство Крейна, Y пространство Канторовича и T положительный оператор из X в Y. Конус H в X называется супремальным генератором X относительно оператора T, если для любого $x \in X$ имеет место представление

$$Tx = \sup_{h \leq x,\, h \in H} Th .$$

Теорема 5.I.I. Пусть H коинициален X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус H является супремальным генератором X относительно T;

(2) Если последовательность (T_n) положительных операторов такова, что $\underline{\lim_n}\, T_n h \geqslant Th$ для $h \in H$, то $T_n x \xrightarrow{(o)} Tx$ для всех $x \in X$;

(3) Оператор T максимален относительно H.

Типичный пример на эту теорему - теорема Келдыша об операторном определении обобщенного решения задачи Дирихле [21].

Для случая аппроксимации операторами с абстрактной нормой в работе получена, например,

Т е о р е м а 5.6.2. Пусть X векторное пространство, нормированное посредством решетки Канторовича Z, а T - регулярный оператор, действующий из X в пространство Канторовича Y. Пусть, далее, H конус в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус $H \times (-K)$ является супремальным генератором пространства $X \times Z$, упорядоченного конусом $\{(x,z) \in X \times Z : |x| \leqslant z\}$, относительно оператора $(T, |T|)$, действующего из $X \times Z$ в Y по формуле

$$(T, |T|) : (x, z) \mapsto Tx + |T| z,$$

где K - конус положительных элементов в Z, а $|T|$ - абстрактная норма T;

(2) Для любого элемента $x \in X$ имеет место представление

$$Tx = \sup_{h \in H} (Th - |T||x-h|);$$

(3) Для любой последовательности регулярных операторов $T_n : X \to Y$ такой, что $|T_n| \leqslant |T|$ и, кроме того, $\underline{\lim_n}\, T_n h \geqslant Th$ для $h \in H$, следует, что $T_n x \xrightarrow{(o)} Tx$ для $x \in X$;

(4) Любой регулярный оператор $T' : X \to Y$ такой, что $|T'| \leqslant |T|$ и, кроме того, $T'h \geqslant Th$ для всех $h \in H$, совпадает с T.

Эту теорему (в части (3) $\Leftrightarrow$ (4)) можно рассматривать как аналог теоремы Шмульяна о дифференцируемости нормы [22].

Помимо конструкции надстройки, изложенной в этой теореме, для решеток ограниченных элементов развивается подход, основанный на удвоении генератора, упрощающий построение таких конусов. Отдельно получаются критерии сходимости для компактных операторов со значениями в $C(Q)$.

4°. Материалы работы докладывались на различных семинарах в Московском, Ленинградском и Воронежском университетах и в Институте математики СО АН СССР, а также в Сибирском математическом обществе. Основные результаты опубликованы в работах [23] - [34] и отражены в обзорной статье [35].

Л и т е р а т у р а

I. Rockafellar R., Convex analysis, Princeton Univ.Press,1970

2. Fenchel W., Convex cones, sets and functions, Lecture notes by D.Blackett, Princeton Univ.,1953

3. Hörmander L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes une espace localement convexe, Arkiv för Mathematik, 3:2 (1955),181-186

4. Loomis L., Unique direct integral decompositions on convex sets, Amer.Math.J., 84:3 (1962),509-526

5. Cartier P., Fell J., Meyer P., Comparaison de measures portees par un ensemble convexe compact, Bull.Soc.Math.Fr., 92 (1964),435-445

6. Кутателадзе С.С., Положительные линейные в смысле Минковского функционалы над выпуклыми поверхностями, Доклады АН СССР, 192:5 (1970), 984-986.

7. Dinges H., Decompositions in ordered semigroups, J.Funct. Anal., 5:3 (1970),436-484

8. Kadison R., A representation theory for commutative topological algebras, Mem.Amer.Math.Soc., 7 (1951)

9. Bauer H., Šilovsher rand und Dirichlet problem, Ann.Inst. Fourier, II (1961),89-136

10. Boboc N., Cornea A., Convex cones of lower semicontinuous functions,Rev.roum.math.pures appl.,12:4(1967),471-525

11 Karlin S., Total positivity,v.I,Stanford Univ.Press,1968

12. Ziegler Z., Linear approximation and generalized convexity J.Approx.Theory, I:4 (1968), 420-443

13. Бляшке В., Круг и шар, "Наука", М., 1967.

14. Grünbaum B., Convex polytopes, Interscience Publ.,1967

15. De Vore R., The approximation of continuous functions by positive linear operators, Springer, 1972

16. Lawrent P., Approximation et optimization, Hermann, 1972

17. Шашкин Ю.А., Конечно-определенные линейные операторы в пространствах непрерывных функций, Успехи мат. наук, 20:6 (1965), 175-180.

18. Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, "Мир", М., 1968.

19. Климов В.С., Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов, Труды матем. об-ва, 15 (1966), 55-69.

20. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Принцип сходимости последовательностей положительных линейных операторов, Studia.math., 31:5 (1968), 455-468.

21. Келдыш М.В., О задаче Дирихле, Доклады АН СССР, 32:5 (1941), 308-309.

22. Шмульян В.Л., О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха, Доклады АН СССР, 27:7 (1940), 643-648.

23. Кутателадзе С.С., Пример на декомпозицию, Оптимальное планирование, 17 (1970), 145-148.

24. Кутателадзе С.С., Ограничения типа включения в задачах изопериметрического типа, Оптимизация, 3:20 (1971), 103-110.

25. Кутателадзе С.С., Об операциях над шарами Минковского, Оптимизация, 3:20 (1971), 111-119.

26. Кутателадзе С.С., Слабая H -выпуклость, Оптимизация, 4:21 (1971), 21-27.

27. Кутателадзе С.С., О двойственных способах задания выпуклых функций, Оптимизация, 5:22 (1972), 106-120.

28. Кутателадзе С.С., Супремальные генераторы относительно операторов, Оптимизация, 8:25 (1972), 23-42.

29. Кутателадзе С.С., Замечание о связи селекторов и генераторов, Оптимизация, 8:25 (1972), 43-47.

30. Кутателадзе С.С., О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору, Сиб.мат.журн., 13:2(1972), 464-466.

31. Кутателадзе С.С., Некоторые теоремы о сходимости операторов, Доклады АН СССР, 208:4 (1973), 771-774.

32. Кутателадзе С.С., Супремальные генераторы и сходимость нерастягивающих операторов, Матем. заметки, 13:1 (1973), 55-65.

33. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Некоторые классы H-выпуклых функций и множеств, Доклады АН СССР, 197:6(1971), 1261-1263.

34. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Супремальные генераторы, Доклады АН СССР, 139:4 (1971), 776-777.

35. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Двойственность Минковского и ее приложения, Успехи мат.наук, 27:3 (1972), 127-176.

Подписано к печати 20/VI -1973г. МН 08807
Формат бумаги 60х84 1/16. Объем 1п.л. 0,75 уч.-изд.л.
Заказ 911. Тираж 200 экз.

Отпечатано на ротапринте ИМ СО АН СССР, Новосибирск,90