Бесплатно

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

На правах рукописи

КУТАТЕЛАДЗЕ
Семен Самсонович

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01 — ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ЛЕНИНГРАД
1977

Работа выполнена в Отделе функционального анализа Института математики Сибирского отделения АН СССР.

Официальные оппоненты:

действительный член АН СССР, доктор физико-математических наук, профессор Л. В. КАНТОРОВИЧ,
доктор физико-математических наук, профессор Б. З. ВУЛИХ,
доктор физико-математических наук А. А. МИЛЮТИН

Ведущее предприятие — Ленинградское отделение Математического института АН СССР.

Защита диссертации состоится « . . . » . . . . 197 г. на заседании специализированного совета Д 063.57.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Ленинградском государственном университете имени А. А. Жданова (Ленинград, В. О., 10 линия, д. 33).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан « . . . » . . . . 197 г.

Ученый секретарь совета
кандидат физико-матем... В

8 июня 1978
доп. оп. Борисов Юрий Федорович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Последние десятилетия отмечены бурным прогрессом в теории выпуклости. Существенные продвижения достигнуты в области теории двойственности выпуклых функций - теория Фенхеля - Моро, в области математического программирования - теория выпуклых экстремальных задач, в теории выпуклых операторов - математические модели экономической динамики, в теории выпуклых множеств - граничная теория Шоке и в ряде смежных разделов анализа и геометрии.

Развитие исследований по теории выпуклости привело к формированию в рамках функционального анализа нового раздела - выпуклого анализа. В выпуклом анализе нашли завершение многие геометрические концепции двойственности - сопряженные функции, поляры, субдифференциалы, двойственные калибры и модели и т.д.

С некоторым преувеличением можно сказать, что локальные конструкции двойственности в настоящее время изучены полностью. Иначе дело обстоит с вопросами глобальной двойственности - с задачами о связи выпуклых функций и множеств с поведением линейных операторов и функционалов. Прогресс в этом направлении незначителен. Между тем, как легко видеть, информация о строении двойственных конусов к конусам функций и множеств - это центральный момент при решении любых массовых задач теории выпуклости. Действительно, основные задачи выпуклого анализа, носящие массовый характер, - задачи о линейных интегральных неравенствах и пометках, задачи о строении и аппроксимации максимальных операторов, экстремальные задачи с выпуклыми решениями, в частности, задачи изопериметрического типа теории выпуклых поверхностей, и т.д. - являются по сути дела линейными: их решение упирается в характер сведений о строении положительных форм и операторов на рассматриваемых классах функций и множеств.

Изучение указанных задач представляется тем более актуальным, что подобные вопросы в различных постановках исследуются в ряде смежных разделов анализа и геометрии - теория Шоке, теория выпуклых поверхностей, теория аппроксимации, геометрия банаховых сфер и т.д. Следует подчеркнуть при этом, что, несмотря на значительное число частных результатов в указанных направлениях, систематическое изучение характеристик выпуклости на языке поведения операторов и функционалов до последнего времени не проводилось. В то же время имеющиеся конструкции недостаточны для решения многих известных линейных задач выпуклого анализа.

Ц е л ь р а б о т ы . Изложенные обстоятельства определяют основной объект и замысел настоящей работы. Основным объектом исследования являются задачи, сводящиеся к вопросам о строении упорядоченностей, наводимых верхними решетками в конусах положительных операторов и функционалов, - линейные задачи выпуклого анализа. Замысел работы - получить способы двойственного задания классов выпуклых элементов на языке описания соответствующих отношений порядка и показать, как эти методы работают при исследовании конкретных задач.

Рассматриваемые задачи делятся на две группы. Первая группа - задачи аналитического характера, связанные с теорией Шоке, изучающей строение максимальных элементов в упорядоченностях, наводимых верхними решетками. Здесь речь идет о таких вопросах теории интегральных представлений как строение ядер максимальных операторов, проблема единственности выметания, абстрактная задача Дирихле, теория границ для операторов, задачи аппроксимации положительных операторов и т.п. Вторая группа - задачи геометрического характера. Здесь речь идет об основных вопросах теории двойственности Минковского - строение конусов, двойственных к конусам множеств, интегральные характеристики классов поверхностей, проблема параметризации задач изопериметрического типа со многими ограничениями и т.п. Подобное деление, формально носящее несущественный характер, преследует цель показать не только содержательность развиваемых конструкций на уровне теории K-пространств, но и то, что предлагаемый общий подход к линейным задачам выпуклого анализа отвечает существу дела, т.е. позволяет доводить до удовлетворительного решения известные конкретные проблемы анализа и геометрии.

Общая методика выполнения исследований. Исследование линейных задач выпуклого анализа оказывается естественным проводить в рамках теории упорядоченных векторных пространств. Действительно, после классических работ Фенхеля и Хермандера становится ясным, что класс выпуклых функций и класс выпуклых множеств в известном смысле устроены одинаково. Общее их свойство, играющее роль решающего обстоятельства при анализе ряда задач, состоит в том, что оба этих класса составлены из элементов, выпуклых относительно соответствующего конуса. Иными словами, элементы указанных классов отождествляются с верхними гранями подмножеств конуса. В случае выпуклых множеств таким конусом служит множество линейных функционалов, а в случае выпуклых функций - множество аффинных функций. Можно показать, что таким же простым и естественным способом конструируются и многие другие объекты анализа: выпуклые в смысле Фаня множества, множества с паретовской границей, устойчивые множества, монотонные полунормы, непрерывные функции, функции, выпуклые в смысле Буземана, в смысле Бобока - Корнеа, в смысле Линделефа и Фрагмена и т.д. При этом центральные конструкции выпуклого анализа - схема Минковского - Фенхеля, схема Фенхеля - Моро и др. - используют, фактически, только свойства выпуклости относительно конуса.

Основная ситуация упрощенно здесь описывается следующим образом. Пусть Y - некоторое K-пространство и H - конус в Y. Непустое подмножество $\mathcal{U}$ конуса H называется выпуклым относительно H или H-выпуклым, если $\mathcal{U}$ совпадает с множеством $\mathcal{U}_p^H=\{h\in H: h\leq p\}$ лежащих в H нижних границ некоторого элемента $p\in Y$. Класс всех H-выпуклых множеств обозначается $\mathscr{P}(H,Y)$. Элемент $p\in Y$ называется выпуклым относительно H или H-выпуклым, если p допускает представление $p=\sup \mathcal{U}_p^H$. Множество всех H-выпуклых элементов обозначается через $P(H,Y)$.

Важное значение имеет наличие биекции $\varphi: P(H,Y)\to\mathscr{P}(H,Y)$, действующей по формуле $\varphi: p\mapsto \mathcal{U}_p^H$. Эта биекция называется двойственностью Минковского. Двойственность Минковского играет существенную роль, позволяя устранить параллелизм теорий выпуклых функций и выпуклых множеств и показывая, что объекты выпуклого анализа представляют собой естественные объекты теории упорядоченных векторных пространств.

Элементы, выпуклые относительно конуса, заполняют в свою очередь конус P в соответствующем упорядоченном пространстве. В связи с этим возникает задача о строении глобально двойственного объекта - двойственного конуса P^*, т.е. множества линейных функционалов, положительных на P. Иными словами, возникает проблема линеаризации конуса выпуклых функций или множеств - задача описания конуса P на языке линейного анализа. Последняя задача обычно изучается в эквивалентной постановке - в форме вопроса о строении упорядоченности, наводимой конусом P^*, - это так называемая упорядоченность Шоке. Аналогичную задачу имеет смысл рассматривать также и для соответствующей упорядоченности в конусе положительных операторов. Ясно, что результаты о представлении подобных упорядоченностей можно использовать для перехода от супремальных конструкций к линейным операциям.

Разумеется, что применение описанной методики для решения конкретной задачи анализа или геометрии требует привлечения дополнительных средств, связанных со спецификой рассматриваемой задачи.

Научная новизна. Излагается новый функционально-аналитический подход к линейным задачам выпуклого анализа. Суть этого подхода в том, что классы выпуклых в том или ином смысле функций и множеств каноническим способом реализуются как верхние решетки в соответствующих упорядоченных векторных пространствах, а затем линеаризуются - описываются поведением на них линейных функционалов и операторов. Указанный подход апробируется на широком комплексе задач анализа и геометрии.

В области теории выпуклых функций развит метод границ для максимальных операторов, получены условия единственности выметания, решены задачи о пробных функциях при аппроксимации положительными и нерастягивающими операторами, изучена абстрактная задача Дирихле в связи с симплициальными конусами в K-пространствах.

В области теории выпуклых множеств получены вычислительно эффективные характеристики неравенств над классами поверхностей, развиты метод учета операторных ограничений для изопериметрических задач при параметризации Минковского и метод программирования таких задач при параметризации поверхностными функциями, описывающие как новые классы разрешимых задач с произвольным числом связей, так и их общие решения.

Разобраны и другие приложения излагаемого подхода - к непрерывным барицентрическим координатам, к сверхминимальным мерам симметрии, к описанию некоторых функциональных пространств, к построению локального выпуклого анализа в K-пространствах и т.п.

Практическая ценность. Результаты работы обосновывают правомерность и эффективность развития выпуклого анализа на основе теории упорядоченных векторных пространств. Эти результаты можно применять при анализе конкретных проблем граничного поведения операторов, для решения экстремальных задач над классами поверхностей, для построения локального выпуклого анализа и теории многокритериального принятия решений, и в смежных с этими разделах анализа и геометрии.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на различных семинарах в Москве, Ленинграде, Воронеже и Новосибирске, а также на конференциях в Москве, Дрогобыче, Тбилиси и Новосибирске, в Сибирском и Ленинградском математических обществах.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1] - [27].

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, шестнадцати параграфов и комментария, занимающих 191 страницу машинописного текста, и приложения на 29 страницах. Библиография содержит 225 наименований и помещена на страницах 192 - 208.

Материалы условно объединены в две главы: задачи теории Шоке в K-пространствах и задачи теории двойственности Минковского. В первой главе собраны, в основном, задачи аналитического характера, во второй - геометрического характера. Такое расположение материала прежде всего объясняется тем, что в первой главе приводятся результаты, базирующиеся главным образом на технике упорядоченных векторных пространств, а во второй главе наряду с этой техникой существенно используются геометрические методы: теория Брунна - Минковского и теория поверхностных функций. Каждая глава открывается неформальной характеристикой ее содержания. Работа заключена краткими историческими и литературными комментариями. В приложении к работе показывается, как развиваемые идеи можно применять для построения локального выпуклого анализа в K-пространствах.

Приведем теперь несколько более развернутую характеристику содержания работы.

Глава первая

Задачи теории Шоке в K-пространствах

I.0. Предварительные замечания. В этой главе изучаются линейные задачи выпуклого анализа, возникающие в теории Шоке.

"Теоремы об интегральном представлении Шоке и Бишопа - де Лю вместе с теоремой единственности Шоке ознаменовали, фактически, новую эру в бесконечномерной выпуклости" (Э. Алфсен). Действительно, теория Шоке содержит унифицированный подход к интегральным представлениям в задачах разнообразных дисциплин - в выпуклом анализе, в теории потенциала, в эргодической теории, в теории равномерных алгебр и т.д. Быть может, еще большее влияние на многие отделы анализа оказало появление новых технических средств. Речь, прежде всего, идет о классической упорядоченности Шоке, т.е. об отношении порядка, наводимом выпуклыми функциями в конусе положительных бэровских мер, и о максимальных в этом упорядочении вероятностных мерах.

В то же время говорить о существовании ясной и достаточно

полной теории границ и максимальных операторов представляется преждевременным. В самом деле, задача о строении упорядоченности, наводимой различными классами выпуклых функций и множеств, - это, помимо всего прочего, ключевой пункт исследования любых вариационных задач с выпуклыми решениями (например, экстремальных задач изопериметрического типа в теории выпуклых поверхностей или задач выпуклой аппроксимации). Однако имеющийся запас информации об устройстве таких отношений порядка все еще недостаточен для получения эффективных уравнений Эйлера - Лагранжа ряда экстремальных задач. В настоящее время теория Шоке достаточно продвинута для двух принципиально аналогичных случаев - для максимальных мер Радона и для конических мер. В то же время приложения (теория потенциала, задачи о пробных функциях в теории аппроксимации, задачи геометрии банаховых сфер, задачи порождения упорядоченных векторных пространств с помощью операции взятия супремума и т.д.) требуют сведений о характеристике максимальных операторов в общем случае. Действительно, в естественном смысле максимальны такие отображения как проектор на границу Шоке, интеграл Пуассона и обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, регулярные булевы меры, градиенты норм в точках гладкости и т.п. Однако результаты в указанном направлении практически отсутствуют, несмотря на большое число модификаций и обобщений конструкций теории Шоке.

Именно в связи с изложенными обстоятельствами Шоке поставил общие задачи о характеристике положительных линейных форм, максимальных относительно коинициальной верхней решетки в K-линеале, предложив аксиоматику максимальных форм. К сожалению, эти работы долгое время оставались незамеченными. К этому была и объективная причина - в предложенной схеме отсутствовало главное, там не было места границе Шоке.

Генеральное соображение, положенное в основу этой главы, заключается в том, что границы Шоке в первоначально предложенной схеме нет по существу дела. Граница Шоке есть объект, внешний по отношению к исходному упорядоченному векторному пространству - это компонента некоторого K-пространства, более общо, элемент полной булевой алгебры, которая и используется для характеристики максимальных операторов. Разумеется, что при таком подходе изучению подлежат операторы, связанные с выбранным внешним K-пространством. Таким образом, возникает расслоение основной задачи по выбираемым булевым алгебрам и соответствующий спектр границ. Указанная мысль позволяет строить удовлетворительную теорию максимальных операторов, изложение которой и составляет содержание этой главы.

Здесь же уместно отметить, что необходимость привлечения более широкого набора булевых алгебр для характеристики максимальных мер была осознана достаточно давно. Дело в том, что стандартные алгебры борелевских и бэровских множеств исходного компакта, вообще говоря, слишком бедны для полного описания граничных форм. Ниже будет показано, что природа этого явления чисто K-пространственная. Более того, оказывается, что в рамках теории упорядоченных векторных пространств можно не только построить достаточно широкую булеву алгебру, пригодную для характеристики максимальных форм, но и показать, что существенные черты теории сохраняются на самом деле для произвольных K-пространств.

I.I. Мотивировка основной диаграммы. В этом параграфе, носящем вспомогательный характер, обосновывается следующая исследуемая в граничной теории ситуация.

Пусть X - упорядоченное векторное пространство, Y - некоторое K-пространство и H - конус в X. Конус H,

наводит упорядоченность (точнее, предпорядок) $\succ_H$ в множестве $\mathcal{L}^+(X,Y)$ положительных линейных операторов, действующих из X в Y. Именно, $S \succ_H T$ означает, что $Sh \geq Th$ для всех $h \in H$. Если X является K-линеалом, а $P(H)$ - наименьшая верхняя решетка, натянутая на H, но отношение $\succ_{P(H)}$ называется упорядоченностью Шоке, порожденной конусом H. Максимальные элементы в $\mathcal{L}^+(X,Y)$ (относительно $\succ_H$) называются максимальными операторами. Ниже всегда предполагается, что на H максимален нулевой функционал и что рассматриваемые пространства регулярно упорядочены.

Пусть Z - еще одно K-пространство и $T_0 \in \mathcal{L}^+(X,Z)$- оператор, фиксирующий связь исходного пространства X и пробного пространства Z. Оператор $T \in \mathcal{L}^+(Z,Y)$ называется T_0-максимальным, если максимальна суперпозиция TT_0.

Основными задачами теории Шоке являются нахождение характеристики ядер операторов T в терминах булевой алгебры проекторов на компоненты Z и изучение случаев, когда за каждым положительным оператором следует (в смысле $\succ_H$) единственный максимальный оператор, т.е. явления симплициальности конуса H.

I.2. Теорема декомпозиции. Здесь устанавливается один из центральных результатов всей работы - теорема декомпозиции, которая описывает поведение регулярных операторов, положительных на заданной решетке выпуклых элементов.

ТЕОРЕМА. Пусть X является K-линеалом, Y является K-пространством, $H_1,\ldots,H_m$ - конусы в X и операторы S,T входят в $\mathcal{L}^+(X,Y)$. Неравенство

$$S(h_1 \vee \ldots \vee h_m) \geq T(h_1 \vee \ldots \vee h_m) \quad (h_k \in H_k)$$

имеет место в том и только в том случае, когда

$$\forall \hat{T}\ \exists \hat{S}:\ \hat{S} \succ_H \hat{T},$$

где $H = H_1 \times \ldots \times H_m$, а $\hat{S}$, $\hat{T}$ - разбиения S и T соответственно, т.е. операторы из $\mathcal{L}^+(X^m, Y)$, превращающие в коммутативные треугольники, составленные из S , T и диагонального вложения Δ пространства X в X^m , т.е. $S = \hat{S}\Delta$; $T = \hat{T}\Delta$.

Эта теорема, представляющая по сути дела двойственную форму теоремы Рисса - Канторовича, соединенную с теоремой о сэндвиче, дает окончательное решение задачи о связи операторов, положительных на конусе H-выпуклых элементов и на исходном конусе H . Здесь же уместно отметить, что понятие декомпозиции складывалось постепенно. Для выпуклых поверхностей впервые аналогичное свойство ввел Ю.Г. Решетняк, а для выпуклых функций - Люмис. Приведенный результат является более точным, нежели имеющиеся, даже в классических ситуациях. Завершается этот параграф типичным по технике приложением декомпозиции к задаче описания правильных подпространств и пространств Гротендика.

I.3. Максимальные операторы. В этом параграфе собраны основные сведения о максимальных операторах. Центральными здесь являются предложения об условиях существования максимальных операторов, теорема о том, что максимальные в упорядоченности Шоке операторы воспроизводят компоненту и локальные характеристики максимальности - операторная форма леммы Шоке-Макободского.

Напомним, что для K-линеала X оператор T называется граничным, если его модуль $|T|$ максимален.

ТЕОРЕМА. Граничные в смысле Шоке операторы заполняют компоненту $\mathfrak{B}(Y)$ в K-пространстве регулярных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$.

Этот факт носит принципиальный характер, хотя не отмечался ранее даже в канонических ситуациях. В самом деле, приведенное утверждение показывает как K-пространственный характер теории Шоке (задача теории - описать компоненту в присоединенном пространстве), так и K-пространственный характер возникающих трудностей (компоненты в пространстве форм не обязаны быть полярами).

I.4. Граница Шоке и ядра максимальных операторов. Идея метода границ состоит в том, чтобы заменить условие "оператор максимален" условием "оператор обращается в нуль вне некоторой границы". В известном смысле речь идет об аппроксимации компоненты граничных операторов компонентами, порожденными проекторами в области определения рассматриваемых операторов. Вообще говоря, даже если область определения рассматриваемых операторов есть K-пространство, таких компонент недостаточно для описания всей базы пространства операторов. Однако устанавливаемая в этом параграфе теорема об анормальности показывает, что компоненты граничных операторов обладают существенной спецификой - существует естественная граница, вне которой максимальные операторы анормальны и, значит, дизъюнктны ко всем вполне линейным операторам. Опишем положение формально.

В ситуации параграфа I.I проектором Шоке называется верхняя грань в булевой алгебре проекторов на компоненты Z множества T_0-максимальных проекторов. Этот проектор обозначается $P_{Ch(H,T_0)}$ или $P_{Ch(T_0)}$. Область значений $P_{Ch(H,T_0)}$ называют компонентой Шоке или границей Шоке и обозначают $Ch(H,T_0)$ или $Ch(T_0)$. В случае, если T_0 - вложение, используются обозначения P_{Ch} и $Ch(H,X,Z)$.

ТЕОРЕМА. Проектор Шоке является T_0-максимальным. При этом сужение произвольного T_0-максимального оператора на дизъюнктное дополнение границы Шоке анормально. Более того, выполняется $Ch(T_0)^d = N^{dd}$, т.е. дополнение границы Шоке является наименьшей компонентой, содержащей общую часть ядер или нулевых решеток всех T_0-максимальных операторов.

Отсюда, в частности, следует, что мера Радона μ максимальна в упорядоченности Шоке, наводимой конусом H в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q, в том и только в том случае, если компонента существенной положительности μ содержится в компоненте Шоке $Ch(H, C(Q), C(Q)'')$, иными словами, если μ сосредоточена на границе Шоке.

<u>I.5. Выметания и шиловские проекторы.</u> Этот параграф носит отчасти технический характер. В нем дается определение выметания как селектора отображения

$$T \mapsto \{T' \in \mathcal{L}^+(X,Y) : T' >_H T\} \cap \mathcal{E}(Y),$$

приводится лемма о выметании и разбирается связанный с этим вопрос о ядрах шиловских проекторах.

<u>I.6. Симплициальные конусы.</u> В этом параграфе на основе леммы о фильтрации ростка устанавливается, что свойство единственности выметания - симплициальность конуса - не зависит от области значений рассматриваемых операторов и в силу двойственности Минковского является внутренним свойством данного конуса. Соответствующее свойство явно формулируется в терминах типа интерполяционного свойства Рисса.

Здесь же собраны простейшие сведения о разрешимости задачи Дирихле на границе симплекса. В частности, для подпространств со свойством интерполяции Рисса устанавливается разрешимость такой задачи в множестве аффинных элементов второго класса.

<u>I.7. Стандартные конусы и операторы Дирихле.</u> В этом параграфе изучаются наиболее важные в приложениях симплициальные конусы.

Итак, пусть H - коинициальная верхняя решетка в некотором K-линеале X, причем $X = \overline{H-H}$ и конус H является

симплициальным. Конус H называется стандартным или симплициальным в смысле Бауэра, если оператор выметания в формах $\Psi_H : X' \to X'$ непрерывен при наделении X' топологией $\sigma(X', X)$, порожденной двойственностью X и X' (здесь считается, что оператор Ψ_H распространен по линейности на все присоединенное пространство). Тем самым определен и сопряженный оператор Ψ_H^*, действующий из X в X. Этот оператор называется оператором Дирихле стандартного конуса H и обозначается $\mathcal{D}_H$.

ТЕОРЕМА. На стандартном конусе H оператор Дирихле является максимальным и идемпотентным, причем $\mathcal{D}_H\langle X\rangle = \overline{H} \cap (-\overline{H})$. Более того, для любого K-пространства Y и оператора $T \in \mathcal{L}^+(X,Y)$ его выметание $\Psi_H(T)$ представимо в виде $\Psi_H(T) = T\mathcal{D}_H$.

На основе этой теоремы о факторизации получается следующий результат о разрешимости задачи Дирихле, поставленной на границе Шоке.

ТЕОРЕМА. Пусть H - подпространство K-пространства Z, причем $X = P(H) - P(H)$ и P_{Ch} - проектор Шоке на границу $Ch(H, X, Z)$.

(I) Если H является K-линеалом в упорядоченности, индуцированной Z, и P - проектор в Z, причем $P \le P_{Ch}$, то $P\langle X\rangle = P\langle H\rangle$.

(2) Если шиловский проектор P таков, что $P\langle X\rangle = P\langle H\rangle$, то $P \le P_{Ch}$ и, кроме того, H является K-линеалом в индуцированном из Z порядке.

В оставшейся части параграфа изучается связь стандартности конуса со случаем дополняемости компоненты граничных форм $\mathcal{E}(R)$. Такая связь установлена теоремой о перестройке.

ТЕОРЕМА. Пусть H - коинициальный конус в K-линеале $X = \overline{P(H) - P(H)}$, являющемся подлинеалом K-пространства Z. Пусть, далее, компонента граничных в смысле Шоке форм дополняема в слабой топологии пространства X' и Ψ - соответствующий положительный идемпотентный оператор. Положим $\mathfrak{D}=\Psi^*$ и $H_1=\mathfrak{D}\langle X\rangle$. Пусть H_1 коинициален Z и $X=P(H_1)-P(H_1)$. Тогда

(I) компоненты граничных операторов в упорядоченностях Шоке, наводимых H и H_1, совпадают,

(2) конус $P(H_1)$ является стандартным,

(3) оператор $\mathfrak{D}$ совпадает с оператором Дирихле $\mathfrak{D}_{P(H_1)}$,

(4) оператор Ψ совпадает с единственным выметанием $\Psi_{P(H_1)}$.

На основе этой теоремы можно конструировать симплексы Бауэра, например, из пространств аффинных функций на выпуклых компактах, обладающих свойством непрерывности выпуклых оболочек вогнутых функций.

<u>I.8.Граница Шоке в случае операторов с абстрактной нормой.</u> В этом заключающем первую главу параграфе приводятся конструкции, позволяющие строить граничную теорию для классов, вообще говоря, не положительных операторов. В рамках данной работы изучение таких операторов необходимо в связи с анализом задачи о пробных функциях для ограниченных функционалов или, вообще, для операторов с абстрактной нормой.

В основу первой главы положен расширенный вариант работы [23], дополненный результатами статей [9], [I2], [I6] - [22].

Глава вторая

Задачи теории двойственности Минковского

<u>2.0. Предварительные замечания.</u> В этой главе изучаются линейные задачи выпуклого анализа, возникающие в теории двойственности Минковского.

Хорошо известно, что исторически первым примером такой

двойственности является установленное Минковским и Фенхелем биективное соответствие между сублинейными функционалами и выпуклыми компактами в конечномерном числовом пространстве. Развитие выпуклого анализа показало, что аналогичные соответствия встречаются в самых разнообразных задачах, при этом их присутствие позволяет применять синтетические методы для ответов на конкретные вопросы, разрешая в зависимости от обстоятельств привлекать аналитические или геометрические соображения.

Ниже излагаются как общие вопросы теории двойственности Минковского - задачи линеаризации конусов выпуклых функций и множеств, иными словами, задачи двойственного описания выпуклых элементов, так и конкретные задачи, как правило геометрического характера, использующие указанные линеаризации. Основное внимание при этом уделяется качественной стороне дела и иллюстрации возможностей методов. Многие имеющиеся детализации, как не отвечающие общему замыслу работы, не рассматриваются.

<u>2.I. Двойственность Минковского.</u> В этом параграфе приводится схема двойственности Минковского в нужной для дальнейшего общности. Здесь же собраны используемые примеры выпуклых элементов и описана конструкция пространства выпуклых множеств.

<u>2.2. Двойственное задание выпуклых элементов.</u> Здесь указываются основные свойства поляры конуса H-выпуклых функций. На основе теоремы декомпозиции полностью описываются конусы, обладающие свойством Решетняка - Люмиса.

Именно, пусть X - локально выпуклый K-линеал, Y - некоторое K-пространство, подлинеалом которого является X. Определим $P(H,X)=P(H,Y)\cap X$ - множество H-выпуклых элементов, лежащих в X. Ясно, что $P(H,X)$ - это конус. В множестве X'_+ непрерывных положительных над X функционалов рассмотрим два отношения порядка. Первое - это уже встречавшееся выше отношение $\succ_H$, наведенное конусом $P(H,X)^*$, двойственным к $P(H,X)$. Второе отношение - отношение H- сильнее $\gg_H$ - определяется следующим образом. Для положительных функционалов μ и ν запись $\mu \gg_H \nu$ означает, что для любого набора $\nu_1, \dots, \nu_n$, где $\nu_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{n} \nu_k = \nu$, найдется набор $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \mu$ такой, что $\mu_k - \nu_k \in H^*$.

ТЕОРЕМА. Отношения $\succ_H$ и $\gg_H$ совпадают в том и только в том случае, если $\overline{P(H)} \supset P(H,X)$.

В этом же параграфе в случае метризуемых компактов описываются конусы, обладающие свойством Харди - Литтлвуда - Полиа. Здесь же выясняется связь концепции H-выпуклости с выпуклостью Бобока - Корнеа и слабой выпуклостью (т.е. выпуклостью, определяемой переносом точечных неравенств типа Иенсена).

<u>2.3. Примеры декомпозиции в пространстве выпуклых множеств.</u> В этом параграфе содержатся примеры применения полученных результатов к теории выпуклых множеств. В частности, здесь разбираются конкретные задачи двух типов - задачи о линейных неравенствах над классами выпуклых поверхностей и задачи об описании классов множеств, замкнутых относительно решеточных операций. Задачи первого типа представляют особый интерес, например, потому, что явный вид таких неравенств непосредственно необходим для получения уравнений Эйлера - Лагранжа любых задач изопериметрического типа, поставленных в соответствующих классах множеств. Приведем пример, показывающий характер результатов.

ПРИМЕР. Пусть K - выступающий замкнутый конус в R^n. Будем считать K конусом в пространстве $C(K^* \cap Z_n)$, где Z_n - единичная евклидова сфера, т.е. отождествлять элементы K, рассматриваемые как функционалы над R^n, с их следами на множество $K^* \cap Z_n$. В этом случае K- выпуклые множества -

элементы $P(K, C(K^* \cap Z_n))$ - отождествляются с K-нормальными выпуклыми компактными подмножествами K.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть μ, ν - положительные меры на $K^* \cap Z_n$. Неравенство

$$\int_{K^* \cap Z_n} \max_{x \in U} (\cdot, x)\, d\mu \geq \int_{K^* \cap Z_n} \max_{x \in U} (\cdot, x)\, d\nu$$

имеет место для любого выпуклого K-нормального подмножества U конуса K в том и только в том случае, если $\mu \gg_K \nu$.

Задачи второго типа служат иллюстрацией возможностей синтетического подхода. В частности, здесь выписываются линейные программы нахождения пометок выпуклых множеств и приводится явный вид конечнопорожденных верхних решеток в конусе шаров Минковского $\mathcal{W}_n S$. Именно, пусть семейство $(S_\xi)_{\xi \in \Xi}$ невырождено, т.е. состоит из ненулевых множеств, причем

$$\sup_{\xi \in \Xi} \| A \|_{S_\xi} < +\infty \qquad (A \in \mathcal{L}(R^n, R^n)),$$

и $\mathfrak{T}\uparrow(\Xi)$ - наименьший замкнутый конус в $\mathcal{W}_n S$, содержащий S_ξ для $\xi \in \Xi$ и замкнутый относительно $\vee$.

ТЕОРЕМА. Ненулевое множество S входит в $\mathfrak{T}\uparrow(\Xi)$ в том и только в том случае, если для любых неравных нулю одновременно векторов $x_1, \dots, x_p$ из R^n выполняется включение

$$\frac{S}{\sum_{k=1}^{p} \| x_k \|_{S^\circ}} \leq \bigvee_{\xi \in \Xi} \frac{S_\xi}{\sum_{k=1}^{p} \| x_k \|_{S_\xi^\circ}}.$$

Аналогично, чтобы получить наименьшую коническую решетку, содержащую данное невырожденное семейство, следует сначала замкнуть это семейство относительно сумм, растяжений и пересечений, а затем добавить к результату выпуклые оболочки ограниченных сверху подмножеств полученного семейства. Иными словами, бесконечного итерирования указанных операций не требуется, хотя соответствующая решетка и недистрибутивна.

2.4. Структура Минковского в программировании изопериметрических задач. Следующие два параграфа непосредственно используют результаты третьего параграфа и посвящены решению экстремальных задач теории выпуклых поверхностей, к которым в принципе неприменима техника симметризаций. Поясним основной замысел.

Как известно, применение геометрических методов сильно лимитирует число дополнительных ограничений, участвующих в постановке экстремальной задачи. Уже три или четыре дополнительных ограничения создают, как правило, непреодолимые трудности для решения. В то же время с точки зрения теории экстремальных задач трудность качественного анализа задачи от числа ограничений не зависит. Существенным моментом является параметризация задачи - выбор векторного пространства, в котором будет проводиться исследование.

В четвертом параграфе метод параметризации, основанный на концепции пространства множеств, развивается для анализа задач, в которых присутствуют ограничения операторного типа. В частности, здесь выписываются эффективные критерии оптимальности - уравнения Эйлера - Лагранжа для задач, в которых присутствуют условия типа включения: "решение симметрично", "решение содержится в данной фигуре" и т.п.

2.5. Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач. В пятом параграфе содержится изложение принципиально иного подхода, позволяющего применять методы функционального анализа к решению задач, не поддающихся технике пространства множеств. Именно, здесь для вложения изопериметрических задач в задачи программирования используются поверхностные функции (меры) А.Д. Александрова. Идея такого подхода была высказа-

на в начале века В. Бляшке, однако ее техническое оформление стало возможным совсем недавно. Структура Бляшке позволяет существенно расширить класс линейных задач изопериметрического типа.

Поясним качественную сторону указанных двух подходов к параметризации геометрических экстремальных задач.

Пусть, как обычно, $\mathscr{V}_n/R^n$ - конус выпуклых компактов, факторизованный по сдвигам, и $\mathfrak{A}_n$ - конус поверхностных функций. Структура Минковского в $\mathscr{V}_n/R^n$ наводится вложением с помощью двойственности Минковского в пространство $C(Z_n)/R^n$, а структура Бляшке - вложением в сопряженное пространство $(C(Z_n)/R^n)'$, составленное из разностей поверхностных функций. Важнейшие соотношения указанных структур видны из таблицы.

Объекты параметризации	Структура Минковского	Структура Бляшке
конус множеств	$\mathscr{V}_n/R^n$	$\mathfrak{A}_n$
двойственный конус	$(\mathscr{V}_n/R^n)^*$	$\mathfrak{A}_n^*$
положительный конус	$\mathfrak{A}_n^*$	$\mathfrak{A}_n$
типичный линейный функционал	$V_1(z_n,\cdot)$ - ширина	$V_1(\cdot,z_n)$ - площадь
вогнутый функционал	$V^{1/n}(\cdot)$	$V^{(n-1)/n}(\cdot)$
простейшая выпуклая программа	задача Урысона	изопериметрическая задача
ограничение операторного типа	$\mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0$	$\mu(\mathfrak{x}) \leq \mu(\mathfrak{x}_0)$
цена	поверхность	положительная функция
дифференциал объема $V(\cdot)$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ пропорционален	$f \mapsto \int_{Z_n} f\, d\bar{\mathfrak{x}}$	$\mu \mapsto \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}}\, d\mu$

Приведем пример применения этой таблицы.

ПРИМЕР. Рассмотрим внешнюю задачу Урысона: среди фигур, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданную интегральную ширину, найти тело максимального объема. Видно, что эта задача представляет собой выпуклую программу в структуре Минковского. Значит, получается

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ. Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внешней задачи Урысона в том и только в том случае, если найдется положительная мера μ и число $\bar{\alpha} \in R_+$ такие, что

$$\bar{\alpha}\,\mu(\mathfrak{z}_n) \gg_{R^n} \mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu\ ;$$

$$V(\bar{\mathfrak{x}}) + \frac{1}{n}\int\limits_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}}\, d\mu = \bar{\alpha}\, V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\mathfrak{x}})\ ;$$

$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad \text{для всех } z \text{ из носителя } \mu\ .$$

Здесь $\mu(\mathfrak{x})$ - поверхностная функция $\mathfrak{x}$ и, кроме того, $\mathfrak{x}$ отождествлено со своей опорной функцией.

Если, в частности, $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_{n-1}$, то искомым телом является, очевидно, шаровая линза, т.е. пересечение двух шаров одного радиуса, а множителем Лагранжа μ - след поверхностной функции шара $\bar{\alpha}^{-1/(n-1)}\mathfrak{z}_n$ на дополнение носителя этой линзы до Z_n . Если $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_1$ и $n = 3$, из приведенного критерия вытекает, что решение следует искать в классе веретенообразных поверхностей вращения постоянной кривизны.

<u>2.6. Граничные значения мер симметрии.</u> В этом параграфе содержится анализ задачи Грюнбаума о строении так называемых сверхминимальных мер симметрии. Здесь на основании комбинирования методов теории Шоке и структуры Бляшке дается способ построения таких мер. Полученный результат показывает, что меры симметрии, даже с условием сверхминимальности, могут принимать, вообще говоря, произвольные значения на симплексах.

<u>2.7. Задачи о пробных функциях.</u> Предыдущие параграфы существенно связаны с идеей разложения, описанной теоремой декомпозиции. Остальные два параграфа этой главы в большей мере связаны с понятием максимального оператора. Говоря формально, седьмой и восьмой параграфы посвящены ситуации супремального порождения. Иными словами, в простейших случаях речь здесь идет о конусах H в подпространстве X некоторого K-пространства Z , обладающих тем свойством, что любой элемент из X является H-выпуклым в смысле порядка, наведенного Z . Такие конусы, как это апостериори ясно, интенсивно исследуются в работах по теории аппроксимации, связанных с так называемой задачей о пробных функциях. Развитые методы позволяют получить окончательные результаты в этом направлении. Оказывается, что как правило эффект пробных функций эквивалентен максимальности аппроксимируемого оператора в соответствующем классе. Таким образом, указанные задачи превращаются в частный случай общих вопросов теории Шоке в K-пространствах. Исчерпывающий анализ возникающих связей выпадает из общего замысла настоящей работы (он проведен весьма подробно, в частности, в [11] , [25]), поэтому здесь указываются лишь основные факты, раскрывающие принцип получения конкретных результатов.

<u>2.8. Некоторые приложения супремальных генераторов.</u> Здесь приводятся некоторые наиболее интересные с точки зрения теории двойственности примеры применения супремальных генераторов, т.е. конусов с большой границей Шоке. Среди них можно отметить порядковую характеристику вложимости компакта в данное числовое пространство и одну модификацию метода квазилинеаризации Беллмана и Калабы.

В основу второй главы положены работы [1] - [15], [24]. В обзорном плане приведенные в ней результаты отражены в [11], [18], [25].

Приложение. Локальный выпуклый анализ в K-пространствах (схема построения). В этом приложении показывается, как основные идеи, заложенные в работу, могут быть применены к построению локального выпуклого анализа. Именно, здесь дается схематический анализ локальных конструкций двойственности - конкретных вариантов двойственности Минковского: опорных множеств, субдифференциалов, преобразований Юнга для произвольных выпуклых операторов, действующих в K-пространства. Поскольку такие конструкции лежат несколько в стороне от основного замысла работы, приводятся только некоторые наиболее типичные схемы рассуждений.

Методологической основой являются теория упорядоченных векторных пространств и идея разложения, заложенная в теорему декомпозиции. На этой основе удается не только существенным и неочевидным образом расширить область приложений указанных конструкций, но и получить ряд принципиально новых фактов - общие формулы для вычисления субдифференциалов, правила замены переменных в преобразовании Юнга, принцип Лагранжа для векторных программ.

Принципиальным является введение канонического оператора [26]. При этом оказывается, что произвольный сублинейный оператор представляет собой суперпозицию канонического оператора с некоторым линейным. Таким образом, фактически дело сводится к анализу одного просто устроенного канонического оператора. На основе этого по схеме декомпозиции выводится общая формула для опорного множества суперпозиции сублинейных операторов, играющая ту же роль, что теорема о дифференциале сложной функции. Опишем ситуацию формально.

Пусть Y - некоторое K-пространство и $\mathfrak{A}$ - произвольное множество. Символом $\Delta_{\mathfrak{A}}$ обозначим оператор вложения Y в диагональ пространства $Y^{\mathfrak{A}}$. Введем в рассмотрение пространство $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ ограниченных Y-значных функций на $\mathfrak{A}$, т.е. нормальную оболочку диагонали $\Delta_{\mathfrak{A}}\langle Y\rangle$. На пространстве $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ действует канонический сублинейный оператор $\varepsilon_{\mathfrak{A}}: (Y^{\mathfrak{A}})_\infty \to Y$ по правилу

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}}: (y_A)_{A\in\mathfrak{A}} \mapsto \sup\{y_A : A\in\mathfrak{A}\}.$$

В случае, когда $\mathfrak{A}$ является слабо порядково ограниченным множеством в пространстве линейных операторов $L(X, Y)$, возникает естественный линейный оператор $[\mathfrak{A}]: X \to (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$, определенный соотношением $[\mathfrak{A}]x = (Ax)_{A\in\mathfrak{A}}$.

ЛЕММА. Пусть X - векторное пространство, Y - некоторое K-пространство, $P: X\to Y$ - сублинейный оператор и $\partial(P) = \{A\in L(X,Y) : Ax\leq Px\ (x\in X)\}$ - его опорное множество. Тогда справедливо представление

$$\partial(P) = \partial(\varepsilon_{\partial(P)})\circ[\partial(P)].$$

На основе этой леммы получается следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $P_1: X\to Y$ - сублинейный оператор, а $P_2: Y\to Z$ - возрастающий сублинейный оператор, причем Y и Z являются K-пространствами. Тогда

$$\partial(P_2\circ P_1) = \{A\circ[\partial(P_1)] : A\circ\Delta_{\partial(P_1)} \in \partial(P_2);\ A\in\mathcal{L}^+((Y^{\partial(P_1)})_\infty, Z)\}.$$

Подчеркнем, что метод рассуждений, тесно связанный с теорией Шоке, является новым уже для числовых функций. Это неслучайно - дело в том, что прямые геометрические методы отделимости в векторном случае непосредственно неприложимы.

Литература

I. Пример на декомпозицию. Оптимальное планирование, I7, I970, I45-I48.

2. Ограничения типа включения в задачах изопериметрического типа. Оптимизация, 3:20, I97I, I03-II0.

3. Об операциях над шарами Минковского. Оптимизация, 3:20, I97I, III-II9.

4. Некоторые классы H-выпуклых функций и множеств. ДАН СССР, I97:6, I97I, I26I-I263 (совместно с А.М. Рубиновым).

5. Супремальные генераторы. ДАН СССР, I99:4, I97I, 776-777 (совместно с А.М.Рубиновым).

6. Слабая H-выпуклость. Оптимизация, 4:2I, I97I, 2I-27.

7. О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору. Сиб.мат.ж., I3:2, I972, 464-466.

8. О двойственных способах задания выпуклых функций. Оптимизация, 5:22, I972, I06-I20.

9. Супремальные генераторы относительно операторов. Оптимизация, 8:25, I972, 23-42.

I0. Об одном способе представления решений дифференциальных уравнений. Дифф.ур., 8:4, I972, 73I-733 (совместно с А.М. Рубиновым).

II. Двойственность Минковского и ее приложения. Успехи мат. наук, 27:3, I972, I27-I76 (совместно с А.М. Рубиновым).

I2. Некоторые теоремы о сходимости операторов. ДАН СССР, 208:4, I973, 77I-774.

I3. Супремальные генераторы и сходимость нерастягивающих операторов. Мат.заметки, I3:I, I973, 55-65.

I4. Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач. Мат.заметки, I4:5, I973, 745-754.

I5. Замечание о пометках выпуклых множеств. Оптимизация, I2:29, I973, 86-89.

I6. Некоторые теоремы операторной теории Шоке. ДАН СССР, 2I5:4, I974, I045-I047.

I7. Непрерывные барицентрические координаты и CE-свойство. Оптимизация, I4:3I, I974, I24-I29.

I8. Выпуклость относительно конуса и ее приложения. Оптимизация, I5:32, I974, II5-I25.

I9. О границе Шоке для нерастягивающих операторов. Оптимизация, I5:32, I974, I26-I32 (совместно с В.Н.Дятловым).

20. Максимальные операторы и компонента Шоке. Сиб.мат.ж., I5:4, I974, 882-89I.

2I. Ядра максимальных операторов и симплициальные конусы. ДАН СССР, 2I6:6, I974, I2I9-I22I.

22. Симплициальные конусы и операторы Дирихле в K -пространствах. Сиб.мат.ж., I6:4, I975, 743-752.

23. Границы Шоке в K -пространствах. Успехи мат.наук, 30:4, I975, I07-I46.

24. О мерах симметрии. Мат. заметки, I9:4, I976, 6I5-622.

25. Двойственность Минковского и ее приложения. "Наука", Новосибирск, I976, 254 с. (совместно с А.М.Рубиновым).

26. Опорные множества сублинейных операторов. ДАН СССР, 230:5, I976, I029-I032.

27. Формулы для вычисления субдифференциалов. ДАН СССР, 232:4, I977, 770-772.

М - I7339. Подписано к печати I3.05.77. Заказ I396.

Тираж II0, формат бумаги 60 x 84 I/I6

I,75 печ.л. Ротапринт тип. № 2 "Ленуприздата"

I92I04, Ленинград, Литейный пр., дом № 55