Содержание

Предисловие

Предмет настоящей книги — *субдифференциальное исчисление*. Главный источник этого раздела функционального анализа — теория экстремальных задач.

Поясним происхождение и постановку основных проблем субдифференциального исчисления. Для этого рассмотрим абстрактную задачу минимизации в виде

$$x \in X, \quad f(x) \to \inf .$$

Здесь X — некоторое векторное пространство, а $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — числовая функция, принимающая, быть может, бесконечные значения. Как обычно, в подобных обстоятельствах нас интересуют величина $\inf f(X)$ — *значение* задачи — и ее *решения* или *оптимальные планы*, иначе говоря, те $\bar{x} \in X$, для которых $f(\bar{x}) = \inf f(X)$ (если они существуют).

Решить задачу «в явном виде», т. е. предъявить значение и решение, удается крайне редко. В этой связи возникает необходимость упрощения исходной задачи, ее сведения к более обозримым модификациям, формулируемым с учетом деталей строения целевой функции f. Обычная гипотеза, принимаемая при поиске теоретических подходов к искомой редукции, состоит в следующем. Вводя дополнительную функцию l, рассматривают задачу:

$$x \in X, \quad f(x) - l(x) \to \inf .$$

При этом новая задача считается столь же сложной, как и исходная, при условии, что l — линейный функционал на X, т. е. элемент *алгебраически сопряженного* пространства $X^{\#}$. Содержательная обоснованность этой естественно-научной гипотезы представляется весьма высокой.

Таким образом, исходная задача минимизации функции f включается, как это характерно для «социологического» подхода функционального анализа, в параметрическое семейство вариантов этой же задачи. Иначе говоря, теоретический анализ принято начинать, считая изначально известным отображение $f^* : X^{\#} \to \overline{\mathbb{R}}$, определенное соотношением

$$f^*(l) := \sup_{x \in X} (l(x) - f(x)).$$

Введенную функцию f^* называют *преобразованием Юнга — Фенхеля* функции f. Заметим, что величина $-f^*(0)$ представляет собой значение первоначальной экстремальной задачи.

Описанная процедура сводит интересующую нас проблему к задаче о замене переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля, т. е. о вычислении агрегата $(f \circ G)^*$, где $G : Y \to X$ — некоторый оператор, действующий из Y в X.

Подчеркнем, что f^* — это выпуклая функция переменной l. Уже это обстоятельство подсказывает, что наиболее полные результаты в избранном направлении следует ожидать в принципиальном случае выпуклости исходной функции f. В самом деле, в этой ситуации, определяя *субдифференциал f в точке $\bar{x}$* соотношением

$$\begin{aligned} \partial f(\bar{x}) := \{l \in X^{\#} : (\forall x \in X)\ l(x) - l(\bar{x}) \leqslant f(x) - f(\bar{x})\} = \\ = \{l \in X^{\#} : l(\bar{x}) = f(\bar{x}) + f^*(l)\}, \end{aligned}$$

мы видим следующее. Точка $\bar{x}$ — решение исходной задачи минимизации в том и только в том случае, если выполнен *критерий оптимальности Ферма*:

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Стоит отметить, что от приведенного критерия Ферма мало прока, если нет достаточно эффективных средств вычисления субдифференциала $\partial f(\bar{x})$. Иначе говоря, мы приходим к вопросу о нахождении правил для вычисления субдифференциалов сложных отображений $\partial(f \circ G)(\bar{y})$. При этом адекватное осмысление G как выпуклого отображения требует наличия в X структуры упорядоченного векторного пространства. Например, представление суммы выпуклых функций в виде композиции линейного и выпуклого операторов:

$$\begin{gathered} f_1 + f_2 = + \circ (f_1, f_2); \\ (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2, \quad (f_1, f_2)(x) := (f_1(x), f_2(x)), \end{gathered}$$

предполагает введение в $\mathbb{R}^2$ покоординатного сравнения векторов.

Таким образом, мы с необходимостью приходим к операторам, действующим в упорядоченные векторные пространства. Среди проблем, возникающих на указанном пути, центральные места занимают задачи обнаружения явных правил для вычисления преобразований Юнга — Фенхеля или субдифференциалов сложных отображений. Решение названных проблем и составляет основной предмет субдифференциального исчисления.

Важнейший случай выпуклых операторов представляется разработанным уже столь тщательно, что можно говорить о завершении определенного этапа теории субдифференциалов. Исследования настоящего времени ведутся главным образом в направлениях, связанных с поиском подходящих локальных аппроксимаций к произвольному не обязательно выпуклому оператору. Наиболее принципиальной представляется техника, основанная на концепции касательного конуса Ф. Кларка, которая была распространена Р. Т. Рокафелларом на случай общих отображений. Однако до состояния совершенства еще далеко. Все же стоит отметить, что основные технические приемы здесь также существенно опираются на субдифференциалы выпуклых операторов.

В этой связи основной объем мы отвели для выпуклого случая, оставив почти малоисследованной огромную территорию негладкого анализа. Повсюду остались зияющие пустоты. Слабым оправданием для нас может служить немалое количество прекрасных недавних книг, посвященных болевым точкам негладкого анализа. Запас технических приемов теории субдифференциалов весьма полон. Среди них принципы функционального анализа, методы теории упорядоченных векторных пространств, теория меры и тому подобное.

Многие задачи субдифференциального исчисления и негладкого анализа были решены в последние годы с помощью нестандартных методов математического анализа (в своих инфинитезимальной и булевозначной версиях). Работая над книгой, мы имели в виду намерение (и потребность) сделать новые идеи и методы доступными для широкого круга читателей. Рамки любой (в том числе и этой) книги слишком узки для свободного и независимого изложения всех необходимых фактов из перечисленных выше дисциплин. По этой причине мы выбрали компромиссный путь частичных пояснений. В их отборе мы руководствовались многолетним опытом, почерпнутым из лекционных курсов, прочитанных в Новосибирском и Владикавказском государственных университетах.

Еще одно обстоятельство требует явного разъяснения, именно, присутствие слова «приложения» в заголовке книги. Формально говоря, оно подразумевает многие применения теории субдифференцирования, получившие достаточное освещение в книге. В качестве таковых можно упомянуть вычисление составных преобразований Юнга — Фенхеля, обоснование принципа Лагранжа и вывод критериев оптимальности в задачах векторной оптимизации. Однако гораздо больше тем остались незатронутыми и заголовок отражает наши первоначальные намерения и фантазии, доставляя также известный вызов для будущих исследований.

Первый вариант этой книги появился в 1987 году под названием «Субдифференциальное исчисление». В 1992 году Сибирское отделение издательства «Наука» опубликовало переработанное издание, перевод которого на английский язык, осуществленный в 1995 году издательством Kluwer Academic Publishers, был в свою очередь модернизирован и значительно расширен по сравнению с русским оригиналом. Обновленный и дополненный вариант английского издания стал основой нынешней публикации.

При завершении работы над монографией по предложению издательства мы приняли решение о публикации книги в двух частях. Деление было осуществлено механически объявлением четвертой главы началом второй части книги. Каждая из частей снабжена собственными указателями и содержит общие для всего издания введение и список литературы, а также справочные материалы, делающие изложение менее зависимым от других источников.

В 1986 году один вслед за другим ушли из жизни Леонид Витальевич Канторович и Глеб Павлович Акилов, научившие нас функциональному анализу.

В 1999 году не стало Александра Даниловича Александрова, одного из основоположников геометрической теории выпуклых фигур и редактора первого варианта этой книги.

Памяти этих прекрасных людей и замечательных ученых мы посвящаем настоящую книгу с чувством безмерной признательности.

А. Г. Кусраев
С. С. Кутателадзе

Глава 1

Выпуклые соответствия и операторы

Понятие выпуклости принадлежит к числу важнейших в современном функциональном анализе. Это неудивительно, ибо основополагающее понятие названной дисциплины — понятие непрерывного линейного функционала — неразрывно связано с выпуклостью. В самом деле, наличие таких ненулевых функционалов обеспечено в том и только в том случае, если в пространстве имеются не совпадающие с ним непустые открытые выпуклые множества.

Выпуклые множества возникают многими способами и выдерживают разнообразные преобразования, не теряя своего определяющего свойства. К числу наиболее характерных следует отнести операции пересечения и различные формы трансформации множеств посредством применения к ним аффинных отображений.

Своеобразными свойствами обладают выпуклые множества, лежащие в произведении векторных пространств. Такие множества называют выпуклыми соответствиями. Их частными случаями служат линейные операторы. Последнее обстоятельство объясняет постановку многих задач, возникающих при изучении выпуклых соответствий. Значение выпуклых соответствий заметно возросло в последние десятилетия в связи с их интерпретацией в качестве моделей производства.

Среди выпуклых соответствий, расположенных в произведениях векторного и упорядоченного векторного пространств, особую роль играют надграфики отображений. Эти отображения — функции с выпуклыми надграфиками — называют выпуклыми операторами.

Среди них выделяются положительно однородные отображения — сублинейные операторы, представляющие собой, по сути дела, наименьший класс соответствий, содержащий в себе линейные операторы и выдерживающий операцию поточечного перехода к супремуму. Формальное обоснование и даже точная формулировка последнего утверждения требуют детализации требований к рассматриваемым упорядоченным векторным пространствам.

Следует подчеркнуть, что все понятия выпуклого анализа оказываются неразрывно связанными с теми или иными конструкциями теории упорядоченных векторных пространств.

Центральное место при этом занимают наиболее квалифицированные пространства — пространства Канторовича или K-пространства, т. е. векторные решетки, в которых каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу.

Имманентная связь K-пространств с выпуклостью — одна из важнейших тем настоящей главы. Помимо этого, значительное место отведено детальному описанию техники построения выпуклых операторов, соответствий и множеств из уже имеющихся. Привлекательной чертой теории выпуклости является наличие разнообразных удобных описаний для одного и того же класса объектов. Общее изучение выпуклых классов выпуклых объектов составляет специальное направление — глобальный выпуклый анализ, не входящий в предмет настоящей книги.

Здесь мы ограничиваемся лишь обсуждением простейших методов и необходимых нам конструкций, связанных с построением двойственности Минковского и соответствующих алгебраических систем выпуклых объектов.

При изучении выпуклых множеств операторов естественным образом возникают также векторные пространства, нормированные посредством элементов некоторой векторной решетки. В таких пространствах при необременительных предположениях разложимости возникает структура модуля над решеточно упорядоченным кольцом ортоморфизмов, что приводит к возможности характеризации модульно-дискретных элементов, что, в свою очередь, оказывается тесно связанным с экстремальной структурой многих выпуклых множеств операторов. Эта тема будет исследована и во второй главе.

На протяжении всего текста $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, а $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел.

1.1. Выпуклые множества

Этот параграф посвящен основным алгебраическим понятиям и конструкциям, связанным с выпуклостью в вещественных векторных пространствах.

1.1.1. Зафиксируем какое-нибудь множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Подмножество C векторного пространства X называют Γ-*множеством*, если вместе с любыми двумя своими элементами x и y множество C содержит всякую линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$, чьи коэффициенты α, β таковы, что $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Совокупность всех Γ-множеств в векторном пространстве X обозначим символом $\mathscr{P}_\Gamma(X)$. Таким образом, $C \in \mathscr{P}_\Gamma(X)$ тогда и только тогда, когда для любых $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ выполнено $\alpha C + \beta C \subset C$ (здесь и в дальнейшем $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ и $C + D := \{x + y : x \in C, y \in D\}$). Отметим некоторые общие свойства Γ-множеств.

(1) *Пересечение любого семейства* Γ-*множеств в векторном пространстве само есть* Γ-*множество.*

$\triangleleft$ Очевидно. $\triangleright$

Говорят, что семейство множеств $\mathscr{E}$ *фильтровано вверх по включению,* если для любых $A, B \in \mathscr{E}$ найдется $C \in \mathscr{E}$ такое, что $A \subset C$ и $B \subset C$.

(2) *Объединение любого фильтрованного вверх по включению семейства* Γ-*множеств в векторном пространстве само является* Γ-*множеством.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}_\Gamma(X)$ — рассматриваемое семейство. Положим $D := \bigcup \mathscr{E}$. Возьмем $x, y \in D$ и $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. По определению D для подходящих A и B из $\mathscr{E}$ будет $x \in A$ и $y \in B$. Тогда в силу условия фильтрованности вверх найдется $C \in \mathscr{E}$ такое, что $A \subset C$ и $B \subset C$. Стало быть, элементы x и y содержатся в некотором C из $\mathscr{E}$. Так как C — это Γ-множество, то $\alpha x + \beta y \in C \subset D$, что и требовалось. $\triangleright$

(3) *Пусть для каждого индекса* $\xi \in \Xi$ *заданы векторное пространство* X_ξ *и множество* $C_\xi \subset X_\xi$. *Положим* $C := \prod_{\xi \in \Xi} C_\xi$ *и* $X := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$. *Тогда* $C \in \mathscr{P}_\Gamma(X)$ *в том и только в том случае, если* $C_\xi \in \mathscr{P}_\Gamma(X_\xi)$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

$\triangleleft$ Возьмем $x = (x_\xi)$, $y = (y_\xi) \in C$ и $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Как видно, $\alpha x + \beta y \in C$ означает, что $\alpha x_\xi + \beta y_\xi \in C_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. Отсюда немедленно вытекает требуемое. $\triangleright$

(4) *Если C и D — это Γ-множества в векторном пространстве, а $\lambda \in \mathbb{R}$, то множества λC и $C+D$ также будут Γ-множествами.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

1.1.2. Перечислим основные типы Γ-множеств, используемых в дальнейшем.

(1) Если $\Gamma := \mathbb{R}^2$, то непустые Γ-множества в пространстве X суть (*векторные*) *подпространства* в X.

(2) Пусть $\Gamma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta = 1\}$. Тогда непустые Γ-множества называют *аффинными многообразиями* или *аффинными множествами.* Если X_0 — подпространство в X и $x \in X$, то сдвиг $x + X_0 := \{x\} + X_0$ — аффинное многообразие, *параллельное* к X_0. Наоборот, всякое аффинное многообразие L определяет единственное подпространство $L - x := L + (-x)$, где x — произвольный элемент из L, из которого само L получается посредством сдвига.

(3) Если $\Gamma := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то непустые Γ-множества называют *конусами* или, более полно, *выпуклыми конусами.* Иными словами, непустое подмножество $K \subset X$ объявляют конусом, если $K + K \subset K$ и $\alpha K \subset K$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^+$. (Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$.)

(4) Возьмем $\Gamma := \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha| \leqslant 1\}$. Соответствующие Γ-множества называют *уравновешенными.* Как видно, уравновешенность множества $C \subset X$ означает, что $\alpha C \subset C$ при $|\alpha| \leqslant 1$.

(5) Пусть $\Gamma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1\}$. В этой ситуации Γ-множества называют *выпуклыми.* Ясно, что подпространства и аффинные многообразия суть выпуклые множества. Как и следовало ожидать, (выпуклые) конусы входят в класс выпуклых множеств.

(6) Если $\Gamma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta \leqslant 1\}$, то непустые Γ-множества называют *коническими отрезками.* Множество является коническим отрезком в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нуль.

(7) Пусть $\Gamma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha| + |\beta| \leqslant 1\}$. Возникающие при этом непустые Γ-множества называют *абсолютно выпуклыми.* Абсолютно выпуклое множество выпукло и уравновешено.

(8) Если $\Gamma := \{(-1, 0)\}$, то Γ-множества называют *симметричными.* Как видно, симметричность множества C означает, что $C = -C$. Подпространства и уравновешенные множества симметричны. Можно показать, что выпуклое симметричное множество абсолютно выпукло.

1.1.3. Пусть $\mathscr{P}(X) := \mathscr{P}_{\varnothing}(X)$ — множество всех подмножеств пространства X. Для каждого $M \in \mathscr{P}(X)$ положим

$$H_\Gamma(M) := \bigcap \bigl\{ C \in \mathscr{P}_\Gamma(X) : C \supset M \bigr\}.$$

В силу 1.1.1 (1) $H_\Gamma(M)$ — это Г-множество. Его называют Г-*оболочкой* множества M. Таким образом, Г-оболочка произвольного множества M представляет собой наименьшее (по включению) Г-множество, содержащее M. Обозначим символом H_Γ отображение $M \mapsto H_\Gamma(M)$, где $M \in \mathscr{P}(X)$. Указанное отображение обладает рядом используемых в дальнейшем свойств.

(1) *Отображение H_Γ изотонно, т. е. для любых $A, B \in \mathscr{P}(X)$ включение $A \subset B$ влечет $H_\Gamma(A) \subset H_\Gamma(B)$.*

$\lhd$ Очевидно из определений. $\rhd$

(2) *Отображение H_Γ идемпотентно, т. е. $H_\Gamma \circ H_\Gamma = H_\Gamma$.*

$\lhd$ Следует из того, что $H_\Gamma(M)$ будет Г-множеством для любого непустого множества M. $\rhd$

(3) *Множество $\mathscr{P}_\Gamma(X)$ является одновременно областью значений и множеством неподвижных точек отображения H_Γ, т. е.*

$$C \in \mathscr{P}_\Gamma(X) \leftrightarrow H_\Gamma(C) = C \leftrightarrow (\exists M \in \mathscr{P}(X)) C = H_\Gamma(M).$$

$\lhd$ Первая эквивалентность следует из определения Г-множества, а вторая — общее свойство всех идемпотентных отображений. $\rhd$

(4) *Для любого $M \in \mathscr{P}(X)$ выполнена формула Моцкина*

$$H_\Gamma(M) = \bigcup \bigl\{ H_\Gamma(M_0) : M_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(M) \bigr\},$$

где $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(M)$ — множество всех конечных подмножеств M.

$\lhd$ Обозначим через A множество, стоящее в правой части формулы Моцкина. Включение $H_\Gamma(M) \supset A$ вытекает прямо из (1). Для доказательства обратного включения нужно лишь показать, что A есть Г-множество, ибо включение $M \subset A$ бесспорно. Однако из соотношения $H_\Gamma(M_1) \cup H_\Gamma(M_2) \subset H_\Gamma(M_1 \cup M_2)$ видно, что семейство $\{H_\Gamma(M_0) : M_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(M)\}$ фильтровано вверх по включению. В силу 1.1.1 (2) $A \in \mathscr{P}_\Gamma(X)$. $\rhd$

(5) *Множество $\mathscr{P}_\Gamma(X)$, упорядоченное по включению, является* (порядково) *полной решеткой. При этом точная нижняя граница произвольного семейства Γ-множеств в X есть его пересечение, а точная верхняя граница совпадает с Γ-оболочкой объединения множеств рассматриваемого семейства.*

Следует иметь в виду, что при разных Γ и Γ' точные верхние границы в решетках $\mathscr{P}_\Gamma(X)$ и $\mathscr{P}_{\Gamma'}(X)$ могут существенно отличаться.

1.1.4. Для конкретных классов Γ-множеств, как отмечалось, приняты подходящие названия и обозначения. При этом, что гораздо более важно, существуют специальные формулы для вычисления соответствующих Γ-оболочек. Как видно из формулы Моцкина, для описания произвольных Γ-оболочек достаточно найти явные выражения лишь для Γ-оболочек конечных множеств. Посмотрим, как решается последняя задача для конкретных Γ из 1.1.2. Не выписывая каждый раз Γ, условимся, что в 1.1.4 **(k)** речь идет о том же самом Γ, что и в 1.1.2 **(k)**. Ниже $M \subset X$ и $x_1, \dots, x_n \in X$.

(1) Множество $\operatorname{lin}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *линейной оболочкой* M. Справедлива формула

$$\operatorname{lin}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R},\, x_1, \dots, x_m \in M,\, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Отсюда видно, что линейная оболочка конечного множества имеет вид:

$$\operatorname{lin}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для удобства полагают $\operatorname{lin}(\varnothing) := \{0\}$. Аналогичные соглашения в дальнейшем часто не оговорены особо. Выражение $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ принято называть *линейной комбинацией* элементов $x_1, \dots, x_n$. Таким образом, *линейная оболочка множества M состоит из всех линейных комбинаций элементов M.*

(2) Множество $\operatorname{aff}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *аффинной оболочкой* M. Нетрудно видеть, что если $x \in M$, то $\operatorname{aff}(M) - x = \operatorname{lin}(M - x)$. В частности, если $0 \in M$, то $\operatorname{aff}(M) = \operatorname{lin}(M)$. Для вычисления аффинной оболочки справедлива формула

$$\operatorname{aff}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,\, x_1, \ldots, x_m \in M,\, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

В частности, аффинная оболочка конечного множества имеет вид:

$$\operatorname{aff}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_k \in \mathbb{R},\, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \right\}.$$

Множество $\operatorname{aff}(\{x, y\})$ при $x \neq y$ называют *прямой*, проходящей через точки x и y. Выражение $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ принято называть *аффинной комбинацией* элементов $x_1, \ldots, x_n$, если $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Таким образом, *аффинная оболочка множества M состоит из всех аффинных комбинаций элементов M.*

(3) Множество $\operatorname{cone}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *конической оболочкой* M. Заметим, что

$$\operatorname{aff}(\operatorname{cone}(M)) = \operatorname{lin}(\operatorname{cone}(M)) = \operatorname{cone}(M) - \operatorname{cone}(M).$$

Из этой формулы видно, что если K — конус, то $K - K$ — наименьшее подпространство, содержащее K. Для конуса K существует также наибольшее подпространство, содержащееся в K, а именно, $K \cap (-K)$. Для конической оболочки имеет место представление

$$\operatorname{cone}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+,\, x_1, \ldots, x_m \in M,\, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Как видно, для конечного множества будет

$$\operatorname{cone}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Коническую оболочку одноточечного множества $\{x\}$ при $x \neq 0$ называют *лучом* с вершиной в нуле, направленным в точку x (или лучом, исходящим из нуля вдоль вектора x). Если $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, то выражение $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ иногда называют *конической комбинацией* элементов $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, *коническая оболочка множества M состоит из всех конических комбинаций элементов M.*

(4) Множество $\mathrm{bal}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *уравновешенной оболочкой* M. Очевидно, что

$$\mathrm{bal}(M) = \bigcup\{\lambda M : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

(5) Множество $\mathrm{co}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *выпуклой оболочкой* M. Выпуклую оболочку двухточечного множества $\{x, y\}$ при $x \neq y$ называют *отрезком* с концами x и y или же отрезком, соединяющим точки x и y. (При $x = y$ говорят о вырожденном отрезке.) Тем самым *множество* M *выпукло в том и только в том случае, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, их соединяющий.* Для выпуклой оболочки справедливо представление

$$\mathrm{co}(M) = \Bigg\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+, \\ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, x_1, \dots, x_m \in M, \, m \in \mathbb{N} \Bigg\}.$$

Таким образом, выпуклая оболочка конечного множества описывается формулой

$$\mathrm{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_k \in \mathbb{R}^+, \, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \right\}.$$

Элемент $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ именуют *выпуклой комбинацией* элементов $x_1, \dots, x_n$, если $\lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Таким образом, *выпуклая оболочка множества* M *состоит из всех выпуклых комбинаций элементов* M.

(6) Множество $\mathrm{sco}(M) := H_\Gamma(M)$ не имеет специального названия. Операция sco может быть выражена через операцию co формулой $\mathrm{sco}(M) = \mathrm{co}(M \cup \{0\})$. В частности,

$$\mathrm{sco}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_k \in \mathbb{R}^+, \, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \leqslant 1 \right\}.$$

(7) Множество $\mathrm{aco}(M) := H_\Gamma(M)$ называют *абсолютно выпуклой оболочкой* M. Имеет место представление $\mathrm{aco} = \mathrm{co} \circ \mathrm{bal}$.

Отсюда вытекает, в частности, что *непустое множество в векторном пространстве абсолютно выпукло в том и только в том случае, если оно выпукло и уравновешено.* Справедлива формула

$$\operatorname{aco}(M) = \Bigg\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \\ \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leqslant 1, x_1, \dots, x_m \in M,\, m \in \mathbb{N} \Bigg\}.$$

В частности, для конечного множества будет

$$\operatorname{aco}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_k \in \mathbb{R},\, |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant 1 \right\}.$$

Элемент $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ — *абсолютно выпуклая комбинация* элементов $x_1, \dots, x_n$, если $\lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ и $|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant 1$. Итак, *абсолютно выпуклая оболочка множества M состоит из всех абсолютно выпуклых комбинаций элементов M.*

(8) Множество $\operatorname{sim}(M) := M \cup (-M)$ — *симметричная оболочка* M. Положим $\operatorname{simh} := \operatorname{co} \circ \operatorname{sim}$. Легко видеть, что $\operatorname{simh} = \operatorname{aco}$, т. е. абсолютно выпуклая оболочка произвольного множества M совпадает с наименьшим симметричным выпуклым множеством, содержащим M. Для выпуклого множества C существует также наибольшее симметричное выпуклое множество $\operatorname{sk}(C)$, содержащееся в C, а именно, $\operatorname{sk}(C) := C \cap (-C)$ (ср. (3)).

1.1.5. Пусть C — непустое выпуклое множество в векторном пространстве X. Говорят, что вектор $h \in X$ является *рецессивным* (или *асимптотическим*) *направлением* для C, если $x + th \in C$ при всех $x \in C$ и $t \geqslant 0$. *Рецессивный конус* или *асимптотический конус* множества C, обозначаемый символом $\operatorname{rec}(C)$ (или $a(C)$), — множество всех рецессивных направлений, так что

$$a(C) := \operatorname{rec}(C) := \bigcap \{\lambda(C - x) : x \in C,\, \lambda \in \mathbb{R},\, \lambda > 0\}.$$

(1) *Множество* $\operatorname{rec}(C)$ *состоит в точности из тех векторов $y \in X$, для которых $C + y \subset C$. Иными словами,* $\operatorname{rec}(C)$ — *наибольший конус в X, удовлетворяющий соотношению $C + \operatorname{rec}(C) \subset C$.*

$\lhd$ Допустим, что $C + y \subset C$. Тогда

$$C + ny = (C + y) + (n-1)y \subset C + (n-1)y \subset \ldots \subset C,$$

т. е. $x + ny \in C$ для всех $x \in C$ и $n \in \mathbb{N}$. В силу выпуклости C отрезки, соединяющие точки $x + (n-1)y$ и $x + ny$, содержатся в C. Но тогда в C лежат элементы $x+ty$ при любых $t \geqslant 0$, а это и означает, что $y \in \operatorname{rec}(C)$. Оставшаяся необоснованной часть рассматриваемого утверждения следует из определения. $\rhd$

(2) *Множество* $\operatorname{rec}(C)$ *представляет собой конус.*

$\lhd$ Для $t \geqslant 0$ очевидно равенство $t\operatorname{rec}(C) = \operatorname{rec}(C)$. В свою очередь, если $x, y \in \operatorname{rec}(C)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то в силу (1) можно написать

$$C + \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(C + x) + (1-\lambda)(C + y) \subset \lambda C + \\ +(1-\lambda)C \subset C,$$

что и требовалось. $\rhd$

(3) *Равенство* $\operatorname{rec}(C) = C$ *выполнено в том и только в том случае, если* C *— конус.*

$\lhd$ Допустим, что C — конус. Тогда $\lambda(C - x) \supset C$ для всех $x \in C$ и $\lambda \geqslant 0$. Следовательно,

$$C = C - 0 \supset \bigcap \{\lambda(C - x) : x \in C,\ \lambda \geqslant 0\} = \operatorname{rec}(C) \supset C.$$

Оставшаяся часть предложения установлена в (2). $\rhd$

(4) *Наибольшее подпространство, содержащееся в рецессивном конусе множества* C, *совпадает с каждым из множеств* $\{y \in X : C + y = C\}$ *и* $\{y \in X : x + ty \in C\ (x \in X, t \in \mathbb{R})\}$.

1.1.6. Основное внимание в дальнейшем мы сосредоточим на выпуклых множествах и конусах. Важные роли при их изучении будут играть некоторые алгебраические и теоретико-множественные операции. Перечислим основные из таких операций, допустив, удобства ради, некоторые формально излишние повторения. Обозначим через $\mathrm{CS}(X)$ множество всех выпуклых подмножеств векторного пространства X.

(1) *Пересечение любого семейства выпуклых множеств есть выпуклое множество* (см. 1.1.1 (1)).

Таким образом, множество $\mathrm{CS}(X)$, упорядоченное по включению, является порядково полной решеткой.

(2) *Декартово произведение любого семейства выпуклых множеств вновь выпуклое множество* (см. 1.1.1 (3)).

При этом отображение $\times : (C, D) \mapsto C \times D$ из $\mathrm{CS}(X) \times \mathrm{CS}(Y)$ в $\mathrm{CS}(X \times Y)$ является полным решеточным гомоморфизмом по каждой из переменных.

(3) *Пусть $L(X, Y)$ — векторное пространство всех линейных операторов между векторными пространствами X и Y. Образ $T(C)$ любого выпуклого множества $C \in \mathrm{CS}(X)$ относительно линейного оператора $T \in L(X, Y)$ является выпуклым множеством, элементом* $\mathrm{CS}(Y)$.

Отображение $\mathrm{CS}(T) : C \mapsto T(C)$ из $\mathrm{CS}(X)$ в $\mathrm{CS}(Y)$ сохраняет точные верхние границы любых семейств. (Точные нижние границы $\mathrm{CS}(T)$ обычно не сохраняет.)

(4) *Сумма $C_1 + \ldots + C_n := \{x_1 + \ldots + x_n : x_k \in C_k,\ k := 1, \ldots, n\}$ выпуклых множеств $C_1, \ldots, C_n$ есть выпуклое множество.*

$\triangleleft$ В самом деле, если

$$\Sigma_n : X^n \to X, \quad \Sigma_n(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то имеет место представление

$$C_1 + \ldots + C_n = \Sigma_n(C_1 \times \ldots \times C_n),$$

и наше утверждение вытекает из (2) и (3). $\triangleright$

Понятно, что сумма множеств пуста, если и только если пусто хотя бы одно из слагаемых. Бинарная операция $+$ в множестве $\mathrm{CS}(X)$, т. е. сложение пары множеств, коммутативна и ассоциативна, имеет нейтральный элемент $\{0\} \in \mathrm{CS}(X)$. Отображения $\times$ и $\mathrm{CS}(T)$ из (2) и (3) соответственно аддитивны (в $\mathrm{CS}(X) \times \mathrm{CS}(Y)$ сумма вводится покоординатно).

(5) Умножение на строго положительное число α (т. е. $0 < \alpha < \infty$) определяют формулой $\alpha C := \alpha \cdot C := \{\alpha x : x \in C\}$. Очевидно, что C выпукло лишь в том случае, когда выпукло αC. Введенное умножение можно распространить на все элементы из

$\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ двумя различными способами. Именно, полагают по определению

$$0 \cdot C := \operatorname{rec}(C), \quad \frac{1}{0} \cdot C := \infty \cdot C := \operatorname{cone} C,$$
$$0C := 0, \quad \frac{1}{0} C := \infty C := X \quad (C \in \mathrm{CS}(X)).$$

Таким образом, $\alpha C \neq \alpha \cdot C$ при $\alpha = 0$ или $\alpha = \infty$. В силу наших определений всегда будет $\alpha\varnothing = \alpha \cdot \varnothing = \varnothing$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$.

Справедливы следующие соотношения:

$$\alpha(C_1 + C_2) = \alpha C_1 + \alpha C_2,$$
$$(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C \quad (0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \infty).$$

$\triangleleft$ Первое равенство выполнено и без предположения о выпуклости C_1 и C_2. Для справедливости второго равенства выпуклость существенна (= необходима и достаточна). Если одна из величин α и β равна нулю или бесконечности, то получаем тривиально верное тождество. Допустим, что $0 < \alpha, \beta < \infty$. Тогда для положительных чисел $\lambda := \alpha/(\alpha+\beta)$ и $\mu := \beta/(\alpha+\beta)$ будет $\lambda+\mu = 1$. Значит, в силу выпуклости C выполнено:

$$C = \lambda C + \mu C = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha C + \beta C),$$

что равносильно требуемому. $\triangleright$

Подчеркнем, что для умножения $\alpha \cdot C$ указанные формулы могут нарушаться при $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$. Точнее, справедливы включения

$$\operatorname{rec}(C_1 + C_2) \subset \operatorname{rec}(C_1) + \operatorname{rec}(C_2),$$
$$\operatorname{rec}(C) + C \subset C, \quad \operatorname{cone}(C) \subset \operatorname{rec}(C) + \operatorname{cone}(C),$$
$$\operatorname{cone}(C_1 + C_2) \subset \operatorname{cone}(C_1) + \operatorname{cone}(C_2),$$

и все они могут оказаться строгими.

(6) Объединение семейства $(C_\xi)_{\xi\in\Xi}$ выпуклых множеств может, разумеется, быть невыпуклым. Однако если это семейство *фильтровано вверх* по включению, т. е. для любых $\xi, \eta \in \Xi$ найдется такой индекс $\zeta \in \Xi$, что $C_\xi \subset C_\zeta$ и $C_\eta \subset C_\zeta$, то множество $\bigcup_{\xi\in\Xi} C_\xi$ выпукло.

(7) Выпуклая оболочка объединения семейства $(C_\xi)_{\xi\in\Xi}$ выпуклых множеств совпадает в силу (6) с множеством

$$\bigcup\big\{D_\theta : \theta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)\big\},$$

где $D_\theta := \mathrm{co}(\bigcup\{C_\xi : \xi \in \theta\})$ и θ — произвольное конечное подмножество Ξ. Используя выпуклость C_ξ и привлекая формулу Моцкина, легко усмотреть, что D_θ состоит из выпуклых комбинаций вида $\sum_{\xi\in\theta}\lambda_\xi x_\xi$, где $x_\xi \in C_\xi$. Таким образом, приходим к формуле

$$\mathrm{co}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} C_\xi\bigg) = \bigcup_{\theta\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)} \bigg\{\sum_{\xi\in\theta}\lambda_\xi C_\xi : \lambda_\xi \geqslant 0,\ \sum_{\xi\in\theta}\lambda_\xi = 1\bigg\}.$$

В частности, для $\Xi := \{1,\dots,n\}$ получаем (см. (4)):

$$\begin{gathered}\mathrm{co}(C_1\cup\ldots\cup C_n) = \\ = \bigcup\bigg\{\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_n C_n : \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n = 1\bigg\} = \\ = \bigcup\bigg\{\Sigma_n\bigg(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k C_k\bigg) : \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n = 1\bigg\}.\end{gathered}$$

(8) *Инверсное сложение* $\#$ выпуклых множеств вводят соотношением

$$C_1\#\ldots\#C_n := \bigcup\big\{(\lambda_1\cdot C_1)\cap\ldots\cap(\lambda_n\cdot C_n) : \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n = 1\big\}.$$

Стоит обратить внимание на то, что в правой части последней формулы умножение на нуль следует понимать в соответствии с соглашениями из (5) (именно: $0\cdot C = \mathrm{rec}(C)$). Множество $C_1\#\ldots\#C_n$ называют *инверсной суммой* или *суммой Келли* выпуклых множеств $C_1,\dots,C_n$.

Попытаемся представить инверсную сумму выпуклых множеств в виде поэлементной операции. Предположим, что точки x и y в X лежат на одном и том же луче, выходящем из нуля. Последнее означает, что $x = \alpha e$ и $y = \beta e$ для некоторых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $e \in X$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то положим

$$z := \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^{-1} e.$$

Если же $\alpha\beta = 0$, то $z := 0$. Элемент z зависит только от x и y и не зависит от выбора ненулевой точки e на рассматриваемом луче. Этот элемент называют *инверсной суммой* x и y и обозначают символом $x\#y$. Итак, инверсное сложение векторов — это частичная бинарная операция в X, определенная лишь для векторов, лежащих на одном и том же луче с началом в нуле. Нетрудно видеть, что при $0 < \lambda < 1$ множество $\lambda C_1 \cap (1-\lambda)C_2$ состоит из элементов $x \in X$, представимых в виде $x = \lambda x_1 = (1-\lambda)x_2$ или, что то же, $x = x_1\#x_2$ $(x_k \in C_k, k := 1, 2)$. Следовательно, справедливы представления:

$$C_0 := \{x_1\#x_2 : x_k \in C_k,\ k := 1, 2\} = \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \lambda C_1 \cap (1-\lambda)C_2.$$

Ниже будет показано, что C_0 — выпуклое множество. Множество C_0 также часто называют *инверсной суммой* C_1 и C_2. Следует, однако, иметь в виду, что

$$C_1\#C_2 = C_0 \cup (\operatorname{rec}(C_1) \cap C_2) \cup (C_1 \cap \operatorname{rec}(C_2)).$$

Как видно, $C_1\#C_2 = C_0$, например, в случае, если множества C_1 и C_2 имеют нулевые рецессивные конусы.

1.1.7. *Инверсная сумма выпуклых множеств* (*конических отрезков*) *является выпуклым множеством* (*коническим отрезком*).

$\lhd$ Для простоты ограничимся случаем двух непустых выпуклых множеств C_1 и C_2. Пусть $C := C_1\#C_2$ и пусть C_0 то же, что и в 1.1.6 (8). Нужно доказать, что при $x, y \in C$ весь отрезок с концами x и y лежит в C. Возьмем произвольную точку этого отрезка $z := \alpha x + \beta y$, где $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Предположим сначала, что концы отрезка содержатся в C_0. Тогда найдутся положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ и элементы $x_k, y_k \in C_k$, для которых

$$x = \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2, \quad y = \beta_1 y_1 = \beta_2 y_2.$$

Положим $\gamma_k := \alpha\alpha_k + \beta\beta_k$ $(k := 1, 2)$ и заметим, что при $x \neq y$ будет: $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$. Если обозначить

$$z_1 := \frac{\alpha\alpha_1}{\gamma_1}x_1 + \frac{\beta\beta_1}{\gamma_1}y_1, \quad z_2 := \frac{\alpha\alpha_2}{\gamma_2}x_2 + \frac{\beta\beta_2}{\gamma_2}y_2,$$

то $z_k \in C_k$, стало быть,

$$z := \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 \in \gamma_1 C_1 \cap \gamma_2 C_2 \subset C_0.$$

Таким образом, C_0 — выпуклое множество.

Пусть теперь все тот же вектор x является одним из концов рассматриваемого отрезка, а второй конец y принадлежит $\operatorname{rec}(C_1) \cap C_2$. Исключая тривиальный случай $\alpha_1 = 0$, положим

$$\gamma_1 := \alpha\alpha_1, \quad \gamma_2 := 1 - \alpha\alpha_1,$$
$$z_1 := x_1 + \frac{\beta}{\gamma_1} y, \quad z_2 := \frac{\alpha\alpha_2}{\gamma_2} x_2 + \frac{\beta}{\gamma_2} y.$$

Тогда вновь выводим, что $z_k \in C_k$, откуда $z = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 \in \gamma_1 C_1 \cap \gamma_2 C_2$. Допустив, что y — прежний вектор, а x входит в $C_1 \cap \operatorname{rec}(C_2)$, можно написать:

$$z = \alpha(x + (\beta/\alpha)y) \in \alpha C_1, \quad z = \beta(y + (\alpha/\beta)x) \in \beta C_2.$$

Отсюда вновь получаем, что $z \in C_0$. Тем самым установлена выпуклость C. $\triangleright$

1.1.8. Все операции, перечисленные в 1.1.6, переводят класс конусов в себя. Точнее, *конусами служат пересечение, декартово произведение и выпуклая оболочка объединения любого непустого семейства конусов, а также объединение фильтрованного вверх по включению непустого семейства конусов.* Равным образом *конусами являются образы конусов при линейных соответствиях, произведение конуса на неотрицательное число, сумма и инверсная сумма конусов.*

Из определений 1.1.6 (7, 8) и из предложения 1.1.5 (3) видно, что для любых конусов $K_1, \dots, K_n$ имеют место равенства

$$K_1 + \ldots + K_n = \operatorname{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n);$$
$$K_1 \# \ldots \# K_n = K_1 \cap \ldots \cap K_n.$$

Для конуса K множество $K - K = \operatorname{lin}(K) = \operatorname{aff}(K)$ служит наименьшим подпространством, содержащим K, а множество $K \cap (-K)$ — наибольшим подпространством, содержащимся в K. Конус K называют *воспроизводящим*, если $X = K - K$, и *упорядочивающим, невыступающим* или, реже, *острым*, если $K \cap (-K) = \{0\}$.

1.1.9. В формулах из 1.1.4 (1–3, 5–7) для вычисления Γ-оболочки произвольного множества M ничего не сказано о числе m слагаемых в линейных комбинациях, которыми представляются элементы $H_\Gamma(M)$. В общем случае это число может быть любым, но в конечномерном пространстве X можно считать, не нарушая общности, что m не превосходит размерности $\dim(X)$ в 1.1.4 (1, 3) и не превосходит $\dim(X) + 1$ в 1.1.4 (5–7).

(1) *Пусть X — конечномерное векторное пространство размерности n. Каждая точка, принадлежащая линейной (конической) оболочке множества $M \subset X$, является линейной (конической) комбинацией не более чем n точек из M.*

◁ Убедимся в справедливости утверждения о конической оболочке. Возьмем $x \in \operatorname{cone}(M)$. Согласно 1.1.4 (3) имеет место представление $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ и $x_1, \ldots, x_m \in M$. Предположим, что $m > n$ и λ_k строго положительны. Тогда в силу линейной зависимости элементов $x_1, \ldots, x_m$ существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, для которых $\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_m x_m = 0$, причем не все μ_k равны нулю. Последнее позволяет предположить, не умаляя общности, что $\mu_k < 0$ хотя бы для одного номера k. Положим $\alpha := \min\{-\lambda_k/\mu_k : \mu_k < 0\}$ и $\lambda'_k := \lambda_k + \alpha\mu_k$. В силу выбора α будет $\lambda'_k \geqslant 0$, причем по меньшей мере одно из этих чисел равно нулю. Кроме того, имеет место представление

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k + \alpha \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k x_k.$$

Удалив из множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$ те x_k, для которых $\lambda'_k = 0$, получим представление в виде конической комбинации меньшего числа элементов. Доказательство завершается индукцией по числу элементов $x_1, \ldots, x_m$ из указанного представления x в виде конической комбинации. ▷

(2) ***Теорема Каратеодори.*** *Пусть X — конечномерное векторное пространство размерности n. Каждая точка, принадлежащая аффинной (выпуклой, абсолютно выпуклой) оболочке множества $M \subset X$, является аффинной (выпуклой, абсолютно выпуклой) комбинацией не более чем $n + 1$ точки из M.*

◁ Ограничимся обоснованием утверждения о выпуклой оболочке. Если $x \in \operatorname{co}(M)$, то согласно 1.1.4 (5) имеет место представление

$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Положим $y := (x, 1)$ и $y_k := (x_k, 1)$ $(k := 1, \ldots, m)$. Тогда в пространстве $Y := X \times \mathbb{R}$ справедливо представление $y = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m$, значит, $y \in \operatorname{co}(M')$, где $M' := \{(x, 1) : x \in M\} \subset X + \mathbb{R}$. Если $m > n + 1 = \dim(Y)$, то в соответствии с (1) существуют неотрицательные числа $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n+1}$ и отображение $\varphi : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, m\}$ такие, что $y = \lambda'_1 y_{\varphi(1)} + \ldots + \lambda'_{n+1} y_{\varphi(n+1)}$. Из последнего равенства следует, что $x = \lambda'_1 x_{\varphi(1)} + \ldots + \lambda'_{n+1} x_{\varphi(n+1)}$, причем $\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{n+1} = 1$. $\triangleright$

(3) Элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ некоторого векторного пространства X называют *аффинно независимыми*, если для любых элементов $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ из соотношений $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ и $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$ следует, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Легко видеть, что аффинная независимость $x_0, x_1, \ldots, x_n$ равносильна линейной независимости $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$. (Подразумевается при этом, что $x_{n+1} := x_0$.) В частности, элементы $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ линейно независимы в том и только в том случае, если для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ линейно независимы элементы $x_0 - x_k, \ldots, x_{k-1} - x_k, x_{k+1} - x_k, \ldots, x_n - x_k$. Выпуклую оболочку аффинно независимых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называют *n-мерным симплексом*, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *вершинами* симплекса. Если S — симплекс с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то любая точка $x \in S$ допускает единственное представление в виде $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_0 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ и $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Однозначно определяемые числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ называют *симплициальными* или *барицентрическими координатами* точки x.

(4) *Выпуклая оболочка множества M в n-мерном векторном пространстве совпадает с объединением всех m-мерных симплексов, $m \leqslant n$, с вершинами из M.*

$\triangleleft$ Непосредственно следует из (2) ввиду определения симплекса из (3). $\triangleright$

1.2. Выпуклые соответствия

Текущий параграф посвящен удобному языку соответствий, который систематически использован в дальнейшем. Рассмотрим отображение $\widetilde{\Phi}$, сопоставляющее каждому элементу x из некоторого множества X подмножество $\widetilde{\Phi}(x)$ другого множества Y. Такое отображение из X в $\mathscr{P}(Y)$ часто называют *многозначным* или, реже, *точечно-множественным* из X в Y. При этом $F := \{(x,y) : (x,y) \in \widetilde{\Phi}\}$, лежащее в $X \times Y$, именуют *графиком* отображения $\widetilde{\Phi}$. Как видно, отображение $\widetilde{\Phi}$ однозначно восстанавливается, если задана тройка $\Phi := (X, Y, F)$ и известно, что $F \subset X \times Y$ — график $\widetilde{\Phi}$. Таким образом, объекты $\widetilde{\Phi}$ и Φ могут быть естественным образом отождествлены. Кроме того, вместо отображения $\widetilde{\Phi}$ или тройки Φ часто рассматривают лишь график F, подразумевая пропущенные параметры X и Y. В дальнейшем, как правило, не уточняется, какой из трех объектов F, Φ или $\widetilde{\Phi}$ имеется в виду, причем для их обозначения использован один и тот же общий символ и нейтральный термин *соответствие*. Эта удобная вольность не должна приводить к недоразумениям, ибо точный смысл всегда полностью легко восстановить из контекста.

1.2.1. Приступим к формальным определениям.

(1) Пусть X и Y — произвольные непустые множества, F — подмножество декартова произведения $X \times Y$. Тогда тройку $\Phi := (X, Y, F)$ (или просто F, опуская подразумеваемые параметры) называют *соответствием* из X в Y. *Область определения* или *эффективное множество* $\operatorname{dom}(\Phi)$ и *область значений* $\operatorname{im}(\Phi)$ соответствия Φ вводятся формулами

$$\operatorname{dom}(\Phi) := \{x \in X : (\exists y \in Y)(x,y) \in \Phi\};$$
$$\operatorname{im}(\Phi) := \{y \in Y : (\exists x \in X)(x,y) \in \Phi\}.$$

Если $U \subset X$, то соответствие $\Phi \cap (U \times Y) \subset U \times Y$ называют *сужением* или *ограничением* Φ на U и обозначают $\Phi|_U$ или $\Phi \restriction U$.

Образом U при соответствии Φ называют множество $\Phi(U) := \operatorname{im}(\Phi \restriction U)$. Принято также сокращение $\Phi(x) := \Phi(\{x\})$, используя которое, можно написать:

$$\Phi(x) = \{y \in Y : (x,y) \in \Phi\}; \quad \operatorname{dom}(\Phi) = \{x \in X : \Phi(x) \neq \varnothing\};$$
$$\Phi(U) = \bigcup\{\Phi(x) : x \in U\} = \{y \in Y : (\exists x \in U)\, y \in \Phi(x)\}.$$

(2) Рассмотрим еще одно множество Z и соответствие $\Psi \subset Y \times Z$. Положим

$$\Phi^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in \Phi\};$$
$$\Psi \circ \Phi := \{(x,z) \in X \times Z : (\exists y \in Y)(x,y) \in \Phi \wedge (y,z) \in \Psi\}.$$

Соответствие Φ^{-1} из Y в X называют *обратным* к Φ, а соответствие $\Psi \circ \Phi$ из X в Z — *композицией* или *суперпозицией* соответствий Ψ и Φ (порядок существен; точнее говорить Ψ от Φ). Пусть $\Lambda : X \times Y \times Z \to X \times Z$ — каноническая проекция $(x, y, z) \mapsto (x, z)$. Тогда композицию $\Psi \circ \Phi$ можно представить в виде

$$\Psi \circ \Phi = \Lambda((\Phi \times Z) \cap (X \times \Psi)).$$

Отметим следующие полезные соотношения:

$$(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1};$$
$$(\Psi \circ \Phi)(M) = \Psi(\Phi(M)) \quad (M \subset X).$$

Композиция соответствий — ассоциативная операция:

$$(\Omega \circ \Psi) \circ \Phi = \bigcup_{(b,c) \in \Psi} \Phi^{-1}(b) \times \Omega(c) = \Omega \circ (\Psi \circ \Phi).$$

Соответствие $\Phi : X \to Y$ будет отображением из X в Y, если $\mathrm{dom}(\Phi) = X$ и

$$(x, y_1) \in \Phi \wedge (x, y_2) \in \Phi \to y_1 = y_2.$$

Если f и g — отображения, то их суперпозицию $g \circ f$ иногда обозначают более коротким символом gf.

(3) Зафиксируем соответствие Φ из X и Y. *Полярой* множества $A \subset X$ (относительно соответствия Φ) называют множество

$$\pi_\Phi(A) := \{y \in Y : A \times Y \subset \Phi\} = \{y \in Y : \Phi^{-1}(y) \supset A\}.$$

Таким образом, поляра $\pi_\Phi(A)$ — это множество всех таких $y \in Y$, что для каждого $x \in A$ будет $(x, y) \in \Phi$. Значит, учитывая очевидное равенство $\pi_\Phi(x) = \Phi(x)$ $(x \in X)$, можно написать

$$\pi_\Phi(A) = \bigcap_{x \in A} \pi_\Phi(x) = \bigcap_{x \in A} \Phi(x) (A \subset X).$$

Перечислим несколько свойств поляры, которые вытекают непосредственно из определений. При этом для фиксированного соответствия Φ символ $\pi_\Phi(A)$ мы заменим более простым $\pi(A)$. Кроме того, для $A = \{x\}$ вместо $\pi(A)$ напишем $\pi(x)$. Поляру относительно обратного соответствия Φ^{-1} мы будем обозначать символом $\pi^{-1}(B) := \pi_{\Phi^{-1}}(B)$ $(B \subset Y)$.

Имеют место следующие простые свойства поляры:

(a) Если $A_1 \subset A_2 \subset X$, то $\pi(A_1) \supset \pi(A_2)$.

(b) Если $A \times B \subset \Phi$, то $B \subset \pi(A)$ и $A \subset \pi^{-1}(B)$.

(c) Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $A \subset \pi^{-1}(\pi(A))$ и $B \subset \pi(\pi^{-1}(B))$.

(d) Если $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — непустое семейство множеств в X, то $\pi(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi) = \bigcap_{\xi\in\Xi} \pi(A_\xi)$;

(e) Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $\pi(A) = \pi(\pi^{-1}(\pi(A)))$ и $\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))$.

(4) *Критерий Акилова.* *Пусть A — подмножество множества X. Тогда $A = \pi^{-1}(B)$ для некоторого $B \subset Y$ в том и только в том случае, когда для каждого элемента $x \in X$, не принадлежащего множеству A, можно указать такой элемент $y_0 \in Y$, что выполнены соотношения $\pi^{-1}(y_0) \supset A$ и $x \notin \pi^{-1}(y_0)$. Если эти соотношения выполнены, то $A = \pi^{-1}(\pi(A))$.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Предположим, что множество B с указанными свойствами существует. Возьмем $x \in X \backslash A$. Так как $x \notin A = \pi^{-1}(B)$, то $(\{x\} \times B)\backslash\Phi \neq \varnothing$, так что найдется $y_0 \in B$ такой, что $(x, y_0) \notin \Phi$. Ясно, что $x \notin \Phi^{-1}[y_0] = \pi^{-1}[y_0]$. Вместе с тем условие $y_0 \in B$ в силу свойства (a) из (3) влечет включение $\pi^{-1}(y_0) \supset \pi^{-1}(B) = A$. Таким образом, элемент y_0 удовлетворяет обоим требуемым соотношениям.

$\leftarrow$: Допустим теперь, что соблюдено условие теоремы. Докажем, что тогда $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ и, следовательно, можно принять $B = \pi(A)$. Согласно предложению (b) из (3) $A \subset \pi^{-1}(\pi(A))$. Пусть $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$. Если бы оказалось, что $x \notin A$, то по условию мы нашли бы $y_0 \in Y$ так, что выполнены указанные в формулировке соотношения. В частности, привлекая предложения (a) и (b) из (3), мы имели бы $y_0 \in \pi(\pi^{-1}(y_0)) \subset \pi(A)$, так что можно было написать $\pi^{-1}(y_0) \supset \pi^{-1}(\pi(A))$, а это противоречит соотношению $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$. $\triangleright$

1.2.2. Пусть теперь X и Y — векторные пространства и Φ — соответствие из X в Y. Говорят, что Φ есть Γ-*соответствие*, если $\Phi \in \mathscr{P}_\Gamma(X \times Y)$. Если Γ-множества для конкретного Γ носят специальное название (см. 1.1.2), то это название сохраняют и для Γ-соответствий. В этом смысле говорят о *линейных, выпуклых, конических* и *аффинных соответствиях*, а также, в частности, о *линейных* и *аффинных операторах* (см. 1.3.5 (3)). Однако имеется важное исключение: выпуклый оператор не есть, вообще говоря, выпуклое соответствие (за исключением специальных случаев (см. 1.3.4)). Рассмотрим некоторые свойства Γ-соответствий, считая, что $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$ и $\Gamma := \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ в следующих ниже предположениях (2), (4) и (5).

(1) *Если* $\Phi \subset X \times Y$ — *это* Γ-*соответствие, то для любых* $A \subset X, B \subset X$ *и* $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ *выполнено*

$$\Phi(\alpha A + \beta B) \supset \alpha\Phi(A) + \beta\Phi(B).$$

Наоборот, если при всех $a, b \in X$ *и* $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ *верно*

$$\Phi(\alpha a + \beta b) \supset \alpha\Phi(a) + \beta\Phi(b),$$

то Φ *является* Γ-*соответствием.*

$\lhd$ Пусть $\Phi \in \mathscr{P}_\Gamma(X \times Y)$. Если $(\alpha, \beta) = (0, 0) \in \Gamma$ или же какое-нибудь из множеств A, B или Φ пусто, то доказывать нечего. В любой из оставшихся ситуаций возьмем $y \in \Phi(a)$ и $z \in \Phi(b)$, где $a \in A$ и $b \in B$ произвольны. Тогда $\alpha(a, y) + \beta(b, z) \in \Phi$. Значит,

$$\alpha y + \beta z \in \Phi(\alpha a + \beta b) \subset \Phi(\alpha A + \beta B).$$

Тем самым $\alpha\Phi(a) + \beta\Phi(b) \subset \Phi(\alpha A + \beta B)$ для всех $a \in A$ и $b \in B$, а это равносильно требуемому.

Предположим теперь, что $\alpha y + \beta z \in \Phi(\alpha a + \beta b)$, каковы бы ни были $y \in \Phi(a)$, $z \in \Phi(b)$ и $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Но тогда $\alpha(a, y) + \beta(b, z) \in \Phi$ при тех же (α, β), y и z, что и доказывает соотношение $\Phi \in \mathscr{P}_\Gamma(X \times Y)$. $\rhd$

(2) *Пусть* Φ — *некоторое* A-*соответствие, действующее из* X *в* Y, *и* $C \in \mathscr{P}_\mathrm{B}(X)$. *Тогда* $\Phi(C) \in \mathscr{P}_\Gamma(Y)$.

$\lhd$ При сформулированных условиях Φ будет Γ-соответствием и $C \in \mathscr{P}_\Gamma(X)$. Поэтому для $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ в силу (1) можно написать

$$\alpha\Phi(C) + \beta\Phi(C) \subset \Phi(\alpha C + \beta C) \subset \Phi(C). \ \rhd$$

(3) *Если* Φ *есть* Γ-*соответствие, то* Φ^{-1} *также* Γ-*соответствие.*

(4) *Пусть* $\Phi \subset X \times Y$ — *некоторое* A-*соответствие и* $\Psi \subset Y \times Z$ — *некоторое* B-*соответствие. Тогда* $\Psi \circ \Phi$ *является* Γ-*соответствием.*

$\triangleleft$ Если выполнены указанные условия, то $\Phi \in \mathscr{P}_\Gamma(X \times Y)$ и $\Psi \in \mathscr{P}_\Gamma(Y \times Z)$. Следовательно, для $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ и $u, v \in X$ в силу (1) справедливы соотношения

$$\Psi \circ \Phi(\alpha u + \beta v) \supset \Psi(\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)) \supset \alpha\Psi(\Phi(u)) + \beta\Psi(\Phi(v)),$$

доказывающие, что $\Psi \circ \Phi$ есть Γ-соответствие. $\triangleright$

(5) *Если $\Phi \subset X \times Y$ — это* A*-соответствие, а $M \in \mathscr{P}(X)$, то*

$$H_\Gamma(\Phi(M)) \subset \Phi(H_{\mathrm{B}}(M)).$$

1.2.3. Рассмотрим теперь некоторые операции над выпуклыми соответствиями, не выводящие за пределы класса выпуклых соответствий, т. е. *сохраняющие выпуклость*. Аналогичные операции для общих Γ-соответствий нам не потребуются, однако при желании легко сформулировать соответствующие определения и несложные факты. Само собой разумеется, что способы построения выпуклых множеств, рассмотренные в 1.1.6, применимы и в случае выпуклых соответствий. Опуская подробности, отметим лишь явные формулы, выражающие значение в точке x составного соответствия Φ через значения образовавших его соответствий.

Пересечение и выпуклая оболочка объединения, а также объединение фильтрованного вверх семейства выпуклых соответствий являются выпуклыми соответствиями.

При этом для любого семейства $(\Phi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ соответствий из X в Y имеют место формулы:

(1) $\left(\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi\right)(x) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi(x);$

(2) $\left(\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi\right)(x) = \bigcup_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi(x);$

(3) $\operatorname{co}\left(\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi\right)(x) = \bigcup\limits_{\theta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)} \bigcup \left\{ \sum\limits_{k \in \theta} \alpha_k \Phi_k(x_k) \right\},$

где внутреннее объединение распространено на все представления

$$x = \sum_{k \in \theta} \alpha_k x_k,\ x_k \in X,\ \alpha_k \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{k \in \theta} \alpha_k = 1.$$

(4) Пусть $\Phi_\xi \subset X_\xi \times Y_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$. Положим

$$X := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi, \quad Y := \prod_{\xi\in\Xi} Y_\xi,$$
$$\sigma : ((x_\xi, y_\xi)_{\xi\in\Xi}) \mapsto ((x_\xi)_{\xi\in\Xi}, (y_\xi)_{\xi\in\Xi}).$$

Тогда $\sigma(\prod_{\xi\in\Xi}\Phi_\xi)$ — соответствие из X в Y и

$$\sigma\biggl(\prod_{\xi\in\Xi}\Phi_\xi\biggr)(x) = \prod_{\xi\in\Xi}\Phi_\xi(x_\xi) \quad (x \in X).$$

(5) Если $T \in L(U, X)$, $S \in L(V, Y)$ и Φ — выпуклое соответствие из U в V, то $(S \times T)(\Phi)$ — выпуклое соответствие из X в Y, причем

$$(S \times T)(\Phi)(x) = S(\Phi(T^{-1}(x))) \quad (x \in X).$$

Здесь, как обычно, $L(U, X)$ и $L(V, Y)$ — пространства линейных операторов, действующих соответственно из U в X и из V в Y.

(6) Если α — строго положительное число, то

$$\alpha\Phi(x) = \alpha\Phi(x/\alpha) \quad (x \in X).$$

Кроме того, положим $0\Phi(x/0) := (0{\cdot}\Phi)(x)$ и $(\infty\Phi)(x/\infty) := (\infty{\cdot}\Phi)(x)$. Тогда на основании 1.1.6 (5) получим

$$0\Phi(x/0) = \bigcap\{\alpha\Phi(u + x/\alpha) - v\,\alpha \geqslant 0,\ (u, v) \in \Phi\};$$
$$\infty\Phi(x/\infty) = \bigcup\{\alpha\Phi(x/\alpha)\,\alpha > 0\}.$$

Сумма и инверсная сумма выпуклых соответствий являются выпуклыми соответствиями.

При этом выполнены формулы:

(7) $(\Phi_1 + \ldots + \Phi_n)(x) =$
$= \bigcup\{\Phi_1(x_1) + \ldots + \Phi_n(x_n) : x = x_1 + \ldots + x_n\};$

(8) $(\Phi_1 \# \ldots \# \Phi_n)(x) =$
$= \bigcup\{\alpha_1\Phi_1(x/\alpha_1) \cap \ldots \cap \alpha_n\Phi_n(x/\alpha_n)\},$

где объединение взято по всем $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ таким, что имеет место равенство $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

1.2.4. Для соответствий выделено также несколько специфических операций. К ним относятся композиция соответствий и переход к обратному соответствию (см. 1.2.1). Другие операции будут введены ниже.

Итак, пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — соответствия из X в Y. *Правая частичная сумма* $\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_n$ определена следующим образом. Пара (x, y) входит в $\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_n$ в том и только в том случае, если имеет место разложение $y = y_1 + \dots + y_n$, где $y_1, \dots, y_n \in Y$ таковы, что $(x, y_k) \in \Phi$ для всех $k := 1, \dots, n$. Понятно, что выполнено равенство

$$(\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_n)(x) = \Phi_1(x) + \dots + \Phi_n(x) \quad (x \in X).$$

Эффективное множество соответствия $\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_n$ совпадает с пересечением $\operatorname{dom}(\Phi_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(\Phi_n)$.

Аналогично определяют *левую частичную сумму* $\Phi_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n$. Пара (x, y) входит в $\Phi_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n$ в том и только в том случае, если имеет место разложение $x = x_1 + \dots + x_n$, где $x_k \in X$ и $(x_k, y) \in \Phi_k$ при $k := 1, \dots, n$. При этом выполнено соотношение

$$(\Phi_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n)(x) =$$
$$= \bigcup \left\{ \Phi_1(x_1) \cap \dots \cap \Phi_n(x_n) : \, x_k \in X, \, \sum_{k=1}^{n} x_k = x \right\}.$$

Эффективное множество соответствия $\Phi_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n$ совпадает с суммой $\operatorname{dom}(\Phi_1) + \dots + \operatorname{dom}(\Phi_n)$. Существует очевидная связь между обеими частичными суммами:

$$(\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_n)^{-1} = \Phi_1^{-1} \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n^{-1};$$
$$(\Phi_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Phi_n)^{-1} = \Phi_1^{-1} \dotplus \dots \dotplus \Phi_n^{-1}.$$

Выясним, как получаются частичные суммы из простейших операций 1.1.6 (1)–(3). Пусть σ_n — отображение перестановки координат, осуществляющее линейную биекцию между пространствами $(X \times Y)^n$ и $X^n \times Y^n$. Точнее,

$$\sigma_n((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Пусть $\Lambda : X^n \times Y^n \to X \times Y$ действует по правилу

$$\Lambda : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,\, \sum_{k=1}^{n} y_k \right).$$

Тогда имеет место представление

$$(\Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \Phi_n)(x) = \Lambda\left(\sigma_n \left(\prod_{k=1}^{n} \Phi_k \right) \cap (\Delta_n(X) \times Y^n) \right).$$

Здесь, как обычно, $\Delta_n : x \mapsto (x, \ldots, x)$ — *вложение* X в *диагональ* $\Delta_n(X) := \{(x, \ldots, x) \in X^n : x \in X\}$ пространства X^n. Аналогично обстоит дело с левой частичной суммой. Из 1.1.7 следует (впрочем, это видно и непосредственно), что справедливо следующее предложение.

Левая и правая частичные суммы выпуклых (*конических*) *соответствий являются выпуклыми* (*коническими*) *соответствиями. Обе частичные суммы служат ассоциативными и коммутативными операциями в классе выпуклых соответствий.*

1.2.5. Рассмотрим выпуклые соответствия $\Phi \subset X \times Y$ и $\Psi \subset Y \times Z$. Соответствие

$$\Psi \odot \Phi := \bigcup_{\substack{\alpha+\beta=1 \\ \alpha\geqslant 0,\, \beta\geqslant 0}} (\beta \cdot \Psi) \circ (\alpha \cdot \Phi)$$

называют *инверсной композицией* Ψ и Φ. Понятно, что $\Psi \odot \Phi$ — соответствие из X в Z. В более подробной записи пара $(x, z) \in X \times Z$ входит в $\Psi \odot \Phi$ в том и только в том случае, если существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta = 1$, и элемент $y \in Y$ такие, что $(x, y) \in \alpha \cdot \Phi$ и $(y, z) \in \beta \cdot \Psi$. При этом следует иметь в виду, что $0 \cdot \Psi = \operatorname{rec}(\Psi)$ и $0 \cdot \Phi = \operatorname{rec}(\Phi)$. Придадим смысл выражениям вида $\alpha\Phi(1/\alpha M)$ при $\alpha = 0$, полагая $0\Phi(1/0M) := \operatorname{rec}(\Phi)(M)$ (ср. 1.2.3 (6)). Тогда имеют место следующие формулы:

$$\Psi \odot \Phi = \bigcup_{\substack{\alpha+\beta=1 \\ \alpha\geqslant 0,\, \beta\geqslant 0 \\ y\in \operatorname{im}(\Phi)}} (\alpha\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha} y\right) \times \beta\Psi\left(\frac{1}{\beta} y\right);$$

$$\Psi \odot \Phi(x) = \bigcup_{\substack{\alpha+\beta=1 \\ \alpha\geqslant 0,\, \beta\geqslant 0}} \beta\Psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right).$$

Так же, как и для случая композиции, верно соотношение $(\Psi \odot \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \odot \Psi^{-1}$. Если Φ и Ψ — конические соответствия, то $\Psi \odot \Phi = \Psi \circ \Phi$.

Инверсная композиция выпуклых соответствий есть выпуклое соответствие.

$\lhd$ Возьмем $x_1, x_2 \in X$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Будем использовать выпуклость Φ и Ψ, а также приведенную выше формулу для вычисления $\Psi \odot \Phi(x)$. Пусть элементы $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ таковы, что $\alpha + \beta = 1 = \delta + \varepsilon$. Положим $\lambda_1 := \gamma_1\alpha + \gamma_2\delta$ и $\lambda_2 := \gamma_1\beta + \gamma_2\varepsilon$. Допустим, что $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Тогда с учетом равенства $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ можно написать:

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon) := \gamma_1\beta\Psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right) + \gamma_2\varepsilon\Psi\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\Phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right) \subset \\ \subset \lambda_2\Psi\left(\frac{\gamma_1\alpha}{\lambda_2}\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + \frac{\gamma_2\delta}{\lambda_2}\Phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right) \subset \\ \subset \lambda_2\Psi\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Phi\left(\frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\lambda_1}\right)\right) \subset \Psi \odot \Phi(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2). \end{aligned}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\alpha = \delta = 0$. Отсюда

$$\begin{gathered} A(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon) = \gamma_1\Psi(\operatorname{rec}(\Phi)(x_1)) + \gamma_2\Psi(\operatorname{rec}(\Phi)(x_2)) \subset \\ \subset \Psi(\gamma_1 \operatorname{rec}(\Phi)(x_1) + \gamma_2 \operatorname{rec}(\Phi)(x_2)) \subset \\ \subset \Psi(\operatorname{rec}(\Phi)(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)) \subset \Psi \odot \Phi(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2). \end{gathered}$$

Аналогично обстоит дело и при $\beta = \varepsilon = 0$. Итак, для любых указанных $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ выполнено $A(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon) \subset \Psi \odot \Phi(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)$. Следующее очевидное соотношение

$$\bigcup A(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon) = \gamma_1\Psi(\Phi(x_1)) + \gamma_2\Psi(\Phi(x_2))$$

завершает доказательство. $\rhd$

1.2.6. С каждым выпуклым множеством $C \subset X$ можно связать специальное соответствие $H(C)$ из X в $\mathbb{R}$, называемое *преобразованием Хёрмандера* множества C, именно:

$$H(C) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : x \in tC\}.$$

(1) *Множество выпукло в том и только в том случае, если преобразование Хёрмандера — коническое соответствие.*

$\triangleleft$ Заметим, что $(X \times \{1\}) \cap H(C) = C \times \{1\}$. Тем самым выпуклость $H(C)$ обеспечивает выпуклость C. Допустим, в свою очередь, что C — выпуклое множество. Возьмем произвольные $x, y \in X$. Пусть $s \in H(C)(x)$ и $t \in H(C)(y)$. В силу 1.1.6 (5) выполнено $sC + tC = (s+t)C$, следовательно, $x + y \in (s+t)C$ или $s + t \in H(C)(x+y)$. Стало быть, $H(C)(x+y) \supset H(C)(x) + H(C)(y)$. Положительная однородность $H(C)$ очевидна. На основании 1.2.2 (1) заключаем, что $H(C)$ — коническое соответствие. $\triangleright$

(2) *Для произвольного множества C верна формула:*

$$\operatorname{co}(H(C)) = \operatorname{cone}(H(C)) = H(\operatorname{co}(C)).$$

$\triangleleft$ Очевидно, что $C_1 \subset C_2$ влечет $H(C_1) \subset H(C_2)$. Отсюда и из (1) немедленно вытекает, что среди исследуемых множеств $\operatorname{co}(H(C))$ — наименьший, а $H(\operatorname{co}(C))$ — наибольший по включению элементы. Поэтому нужно лишь показать, что $\operatorname{co}(H(C)) \supset H(\operatorname{co}(C))$. Если $x \in \lambda \operatorname{co}(C)$, $\lambda > 0$, то $x = \lambda(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in C$ и положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таких, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Так как $\lambda x_k \in \lambda C$, то $(\lambda x_k, \lambda) \in H(C)$. Поэтому

$$(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\lambda x_k, \lambda) \in \operatorname{co}(H(C)),$$

что и требовалось. $\triangleright$

В дальнейшем, как правило, мы будем рассматривать преобразование Хёрмандера лишь для конических отрезков.

1.2.7. Пусть $\operatorname{CSeg}(X)$ и $\operatorname{Cone}(X)$ — соответственно множества всех конических отрезков и множество всех конусов в пространстве X. Тогда $H : C \mapsto H(C)$ — это отображение из $\operatorname{CSeg}(X)$ в

$\mathrm{Cone}(X \times \mathbb{R})$. Операции в $\mathrm{CSeg}(X)$ преобразуются при отображении H по довольно простым правилам. Отметим для полноты следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
H(C_1 \cap \ldots \cap C_n) = H(C_1) \cap \ldots \cap H(C_n);\\
H(\mathrm{co}(C_1 \cup \ldots \cup C_n)) = H(C_1) + \ldots + H(C_n);\\
H(C_1 + \ldots + C_n) = H(C_1) \underset{\cdot}{+} \ldots \underset{\cdot}{+} H(C_n);\\
H(C_1 \# \ldots \# C_n) = H(C_1) \dot{+} \ldots \dot{+} H(C_n).
\end{gathered}
$$

1.2.8. При изучении выпуклых соответствий нам часто придется встречать конструкции, связанные с анализом взаимного расположения пары множеств векторов, при котором одно из них покрывается или, как говорят, «поглощается» скалярным кратным, т. е. подходящей гомотетией другого. Напомним некоторые определения.

Пусть A и B — непустые подмножества векторного пространства X. Элемент $a \in A$ называют *алгебраически внутренней точкой A относительно B*, если для каждого $b \in B \setminus \{a\}$ можно найти такое число $\varepsilon > 0$, что $a + t(b - a) \in A$ при $0 < t < \varepsilon$. Множество всех точек с названным свойством обозначают символом $\mathrm{core}_B(A)$ и называют *алгебраической внутренностью A относительно B*. Геометрически включение $a \in \mathrm{core}_B(A)$ означает, что вдоль отрезка, соединяющего a с любой точкой $b \in B$, можно хоть немножко отойти от точки a, оставаясь в пределах A. Множество $\mathrm{core}(A) := \mathrm{core}_X(A)$ сокращенно называют *алгебраической внутренностью* A или, короче, *ядром* A. Говорят, что A — *поглощающее множество*, если $0 \in \mathrm{core}(A)$. *Относительной внутренностью* A называют множество $\mathrm{ri}(A) := \mathrm{core}_{\mathrm{aff}(A)}(A)$. Заметим, что A будет поглощающим в том и только в том случае, если $X = \bigcup\{nA : n := 1, 2, \ldots\}$; т. е., образно говоря, если A поглощает каждую точку пространства X.

(1) *Пусть Φ — выпуклое соответствие из X в векторное пространство Y. Возьмем некоторые множества $A \subset X$ и $B \subset Y$. Тогда для любого $V \subset X$ выполнено включение*

$$\mathrm{core}_B(\Phi(A)) \cap \Phi(\mathrm{core}_A(V)) \subset \mathrm{core}_B(\Phi(V)).$$

$\lhd$ Если y входит в левую часть исследуемого соотношения, то $y \in \Phi(x)$ для некоторого $x \in \mathrm{core}_A(V)$. Положим

$$\Phi_0 := \Phi - (x, y), \quad A_0 := A - x, \quad V_0 := V - x, \quad B_0 := B - y.$$

Тогда, как нетрудно видеть, $\Phi_0(V_0) = \Phi(V) - y$ и $\Phi_0(A_0) = \Phi(A) - y$, поэтому

$$0 \in \mathrm{core}_{A_0}(V_0), \quad 0 \in \mathrm{core}_{B_0}(\Phi_0(A_0)).$$

Таким образом, достаточно установить, что $\Phi_0(V_0)$ поглощает любой элемент из B_0. Допустим, что $b \in B_0$, и подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon b \in \Phi_0(A_0)$. Тогда $(a, \varepsilon b) \in \Phi_0$ для некоторого $a \in A_0$. Поскольку V_0 поглощает любой элемент из A_0, существует число $0 < \beta < 1$, для которого $\beta a \in V_0$. Отсюда выводим:

$$\beta(a, \varepsilon b) = \beta(a, \varepsilon b) + (1 - \beta)(0, 0) \in \Phi_0.$$

Последнее обеспечивает соотношения $\beta\varepsilon b \in \Phi_0(\beta x) \subset \Phi_0(V_0)$, завершающие доказательство. $\triangleright$

(2) *Если* $0 \in \Phi(0)$ *и* $\mathrm{im}(\Phi)$ — *поглощающее множество, то образ любого поглощающего множества относительно* Φ *есть поглощающее множество.*

(3) Множество $C \subset X$ называют *алгебраически открытым*, если $\mathrm{core}(C) = C$. *Алгебраически замкнутыми* называют множества $C \subset X$, для которых дополнение $X \setminus C$ алгебраически открыто. Таким образом, алгебраическая замкнутость C означает, что $\mathrm{core}(X \setminus C) = X \setminus C$.

(4) *Если конический отрезок* $C \subset X$ *алгебраически замкнут, то* $\mathrm{rec}(C) = \bigcap\{\varepsilon C : \varepsilon > 0\}$. *В частности, рецессивный конус алгебраически замкнутого конического отрезка алгебраически замкнут.*

$\triangleleft$ Допустим, что $C \neq X$, так как иначе доказывать нечего. Положим $K := \bigcap\{\varepsilon C : \varepsilon > 0\}$. Тогда $K \supset \mathrm{rec}(C)$ по очевидным соображениям. Возьмем $k \in K$ и заметим, что $k + C \subset \varepsilon C + C \subset (1+\varepsilon)C$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $x \in X \setminus C$, то по условию $x \in \mathrm{core}(X \setminus C)$. Значит, существует $0 < \delta < 1$, для которого $(1 - \delta)x = x + \delta(-x + 0) \in X \setminus C$. Выберем ε так, чтобы $(1+\varepsilon)(1-\delta) < 1$. Тогда $x \in (1+\varepsilon)C$, ибо если $x = (1+\varepsilon)c$, $c \in C$, то $(1-\delta)x = (1+\varepsilon)(1-\delta)c \in C \cap (X \setminus C)$, чего не может быть. Итак, $C = \bigcap\{(1+\varepsilon)C : \varepsilon > 0\}$ и $C + k \subset C$. Это означает, что $k \in \mathrm{rec}(C)$. $\triangleright$

1.3. Выпуклые операторы

В текущем параграфе мы рассмотрим основные приемы построения выпуклых операторов при помощи элементарных алгебраических и решеточных операций. Главные роли при этом играют специальные выпуклые соответствия — надграфики выпуклых операторов.

1.3.1. Выпуклые операторы будут всегда принимать свои значения из некоторого упорядоченного векторного пространства E, к которому присоединены два несобственных элемента $+\infty := \infty$ и $-\infty$. Поэтому прежде всего необходимо разумно распространить алгебраические операции и порядок из E на множество $\overline{E} := E \cup \{-\infty, +\infty\}$. Принято считать, что $+\infty$ — наибольший элемент, а $-\infty$ — наименьший элемент упорядоченного множества $\overline{E}$, причем порядок, индуцированный в E из $\overline{E}$, совпадает с исходным порядком в E. Кроме того, в соответствии с общими определениями $+\infty := \inf \varnothing$ и $-\infty := \sup \varnothing$. Распространим операции сложения и умножения на вещественные числа, имеющиеся в E, на множество $\overline{E}$. Для этого примем следующие соглашения:

$$\alpha x + y := x\alpha + y := \inf\{\alpha x' + y' : x' \geqslant x,\, y' \geqslant y;\, (x', y' \in E\} \ (\alpha \geqslant 0);$$
$$(-\alpha)\infty := \infty(-\alpha) := -\infty; \quad (-\alpha)(-\infty) := (-\infty)(-\alpha) := +\infty \ (\alpha > 0).$$

Таким образом, мы полагаем $x - \infty := -\infty + x := -\infty$ для любых $x \in E \cup \{-\infty\}$; $0(-\infty) := (-\infty)0 := 0$, а всем оставшимся выражениям (0∞, $\infty 0$, $x + \infty$, $\infty + x$, где $x \in \overline{E}$) приписываем значение $+\infty$. Подчеркнем, что эти правила не являются традиционными. Однако они соответствуют духу «одностороннего анализа» и в дальнейшем читателю не раз предоставится возможность убедиться в их естественности и полезности.

Легко видеть, что в $\overline{E}$ выполнены законы коммутативности и ассоциативности сложения, а также дистрибутивности умножения относительно сложения. Ассоциативность умножения на скаляр, т. е. свойство $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, может нарушаться.

1.3.2. *Для произвольного отображения $f : X \to \overline{E}$ равносильны условия:*

(1) *надграфик* $\operatorname{epi}(f) := \{(x, e) \in X \times E : e \geqslant f(x)\}$ *— выпуклое множество;*

(2) *для любых $x_1, x_2 \in X$; $y_1, y_2 \in E$ и $\lambda \in [0,1]$ таких, что $f(x_k) \leqslant y_k$ $(k := 1, 2)$, выполнено неравенство*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant y_1 + (1-\lambda)y_2;$$

(3) *для любых* $x_1, \dots, x_n \in X$ *и чисел* $\lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ *таких, что* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, *выполнено неравенство Йенсена*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

$\lhd$ (1) $\to$ (3): Предположим, что $\mathrm{epi}(f)$ — выпуклое множество. Если $f(x_k) = \infty$ при некотором $k \in \{1, \dots, n\}$, то неравенство Йенсена выполнено тривиально. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$. Пусть $f(x_k) \leqslant y_k$ при $k := 1, \dots, n$. В силу нашего допущения

$$\lambda_1(x_1, y_1) + \ldots + \lambda_n(x_n, y_n) \in \mathrm{epi}(f)$$

для всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Стало быть,

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n.$$

Если f принимает конечные значения в точках $x_1, \dots, x_n$, то достаточно положить в последнем неравенстве $y_k := f(x_k)$ для всех k. В противном случае правая часть этого неравенства не ограничена снизу. Поэтому $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = -\infty$ и неравенство Йенсена также имеет место.

(3) $\to$ (2): Очевидно.

(2) $\to$ (1): Допустим теперь, что выполнено (3), и пусть точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат $\mathrm{epi}(f)$. Тогда, согласно определению, $f(x_k) \leqslant y_k < \infty$ $(k := 1, 2)$. Следовательно, для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ из неравенство Йенсена при $n = 2$ получаем

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \leqslant \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2,$$

что и требовалось. $\rhd$

1.3.3. Отображение, удовлетворяющее одному (а тогда и любому) из эквивалентных условий 1.3.2 (1–3), называют *выпуклым оператором.* Таким образом, отображение f выпукло в том и только в том случае, если $\mathrm{epi}(f)$ — выпуклое соответствие.

Особый интерес представляют выпуклые операторы, не принимающие нигде значения $-\infty$, так как остальные выпуклые операторы имеют весьма специальный вид. В самом деле, нетрудно проверить, привлекая предложение 1.3.2, что если f принимает значение

$-\infty$ хотя бы в одной точке, то $f(x) = -\infty$ для всех $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Значит, такой оператор может принимать конечные значения лишь в точках относительной границы эффективной области $\mathrm{dom}(f)$.

Выпуклый оператор называют *собственным*, если он не равен тождественно $+\infty$ и не принимает значения $-\infty$ ни в одной точке своей эффективной области. Часто для исключения из рассмотрения несобственных выпуклых операторов выделяют операторы со значениями в множестве $E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$. Порядковые и алгебраические операции в *«полурасширенном»* пространстве $E^{\bullet}$ считают индуцированными из $\overline{E}$. Собственный выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ с областью $\mathrm{dom}(f) = X$ называют иногда *всюду определенным.*

Здесь уместно подчеркнуть еще раз следующую особенность нашей терминологии (см. 1.2.2): выпуклый оператор не является, вообще говоря, выпуклым соответствием. В самом деле, отображение $f : X \to E^{\bullet}$, суженное на $\mathrm{dom}(f)$, будет выпуклым соответствием в том и только в том случае, если $\mathrm{dom}(f)$ — выпуклое множество и $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для всех $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ и $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Если f удовлетворяет указанному условию, то f, конечно же, выпуклый оператор. В то же время произвольный выпуклый оператор не таков, если только положительный конус E^{+} пространства E отличен от тривиального конуса $\{0\}$.

1.3.4. Укажем несколько важных классов выпуклых операторов.

(1) Оператор называют *индикаторным*, если он принимает только два значения: 0 и $+\infty$. Ясно, что всякий индикаторный оператор f имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C, \\ +\infty, & \text{если } x \notin C, \end{cases}$$

где $C := \mathrm{dom}(f)$. Этот оператор обозначают символом $\delta_E(C)$ и называют индикаторным оператором множества C.

Как видно, $\mathrm{epi}(\delta_E(C)) = C \times E^{+}$, следовательно, индикаторный оператор $\delta_E(C)$ является выпуклым в том и только в том случае, когда C — выпуклое множество. (Здесь и дальше $E^{+}:=\{e \in E : e \geqslant 0\}$ — *положительный конус* (пред)упорядоченного векторного пространства E.) Итак, индикаторные операторы выпуклых множеств составляют простейший класс выпуклых положительных операторов, т. е. выпуклых операторов с положительными значениями.

(2) Следующий класс выпуклых операторов образован сублинейными операторами, чрезвычайно важная роль которых обнаружится уже в следующем параграфе. Выпуклый оператор $p : X \to E^{\bullet}$ называют *сублинейным*, если $\mathrm{epi}(p)$ — коническое соответствие. Говорят, что p *субаддитивен*, если $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in X$. Если $0 \in \mathrm{dom}(p)$ и $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \geqslant 0$, то p называют *положительно однородным*. Заметим, что для положительно однородного оператора всегда будет $p(0) = 0$, так как $p(0) < +\infty$ и $0 = 0p(0) = p(0)$. Если не требовать вхождения $0 \in \mathrm{dom}(p)$, то может оказаться, что $p(0) = +\infty$.

Для оператора $p : X \to E^{\bullet}$ равносильны следующие утверждения:

(a) *p — сублинейный оператор;*

(b) *p — выпуклый и положительно однородный оператор;*

(c) *p — субаддитивный и положительно однородный оператор;*

(d) *$0 \in \mathrm{dom}(p)$ и $p(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha p(x) + \beta p(y)$ для всех $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$.*

$\lhd$ (a) $\to$ (b): Если $\Phi := \mathrm{epi}(p)$, то для $x \in X$ и $\lambda > 0$ в силу 1.2.3 (5) $(\lambda^{-1}\Phi)(x) = \lambda^{-1}\Phi(\lambda x)$. С другой стороны, по условию (a) должно быть $\lambda^{-1}\Phi = \Phi$, значит, $\Phi(x) = \lambda^{-1}\Phi(\lambda x)$ или $\lambda\Phi(x) = \Phi(\lambda x)$. Это равносильно равенству $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Положив в последнем соотношении $x := 0$ и $\lambda := 2$, получим $p(0) = 2p(0)$. Кроме того, из включения $(0,0) \in \mathrm{epi}(p)$ видно, что $0 \in \mathrm{dom}(p)$, поэтому должно быть $p(0) = 0$. Выпуклость p вытекает из 1.3.2.

(b) $\to$ (c): Привлекая вначале выпуклость, а затем положительную однородность p, можно написать

$$p(x+y) = p\left(\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y)\right) \leqslant \frac{1}{2}p(2x) + \frac{1}{2}p(2y) = p(x) + p(y).$$

(c) $\to$ (d): Очевидно.

(d) $\to$ (a): В силу 1.3.2 из (c) вытекает выпуклость $\mathrm{epi}(p)$. Если $(x, y) \in \mathrm{epi}(p)$ и $\lambda > 0$, то $p(\lambda x) \leqslant \lambda p(x) \leqslant y$. Стало быть, $\lambda(x, y) \in \mathrm{epi}(p)$. Кроме того, при $x = y = 0$ и $\alpha = \beta = 0$ получаем $p(0) \leqslant 0$, т. е. $(0,0) \in \mathrm{epi}(p)$. $\rhd$

(3) Пусть X и Y — векторные пространства. Оператор $A : X \to Y$ называют *аффинным* (*линейным*), если A — аффинное многообразие (линейное подпространство) в $X \times Y$ (ср. 1.2.2).

Оператор $A : X \to Y$ является аффинным (линейным), если и только если

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (соответственно для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$).

Множество линейных операторов из X в Y мы, как всегда, будем обозначать символом $L(X, Y)$ (ср. 1.1.6 (3)). Ввиду 1.1.4 (2) между аффинными и линейными операторами имеются простые связи. Если $T \in L(X, Y)$ и $y \in Y$, то оператор $T^y : x \mapsto Tx + y$ $(x \in X)$ является аффинным. Наоборот, если $A : X \to Y$ — произвольный аффинный оператор, то существует единственная пара (T, y), где $T \in L(X, Y)$ и $y \in Y$, такая, что $A = T^y$. Подчеркнем здесь же, что при рассмотрении суперпозиции линейных или аффинных операторов знак $\circ$ всегда принято опускать. При этом вместо $A(x)$, как правило, пишут короче Ax.

Опишем теперь простой, но достаточно общий способ конструирования выпуклых операторов.

1.3.5. *Пусть X — векторное пространство, E — некоторое K-пространство и Φ — выпуклое соответствие из X в E. Тогда отображение $f := \inf \circ \Phi$, определяемое соотношением*

$$f(x) := \inf \Phi(x) := \inf\{e \in E : \, e \in \Phi(x)\} \quad (x \in X),$$

является выпуклым оператором, причем наибольшим среди выпуклых операторов $g : X \to \overline{E}$, удовлетворяющих соотношению $\operatorname{epi}(g) \supset \Phi$. В частности, $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(\Phi)$. Если Φ — конус и множество $\Phi(0)$ ограничено снизу, то оператор f сублинеен.

$\lhd$ Пусть $x, y \in X$, а скаляры $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ таковы, что $\alpha + \beta = 1$. Если $\Phi(x) = \varnothing$ или $\Phi(y) = \varnothing$, то для f при указанных параметрах выполнено неравенство Йенсена. Допустим, что множества $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ непусты и ограничены снизу. Тогда, используя выпуклость Φ и свойства точных нижних границ (см. 1.2.2 (1) и 1.3.1), можно написать

$$\begin{gathered}\alpha f(x) + \beta f(y) = \inf(\alpha\Phi(x)) + \inf(\beta\Phi(y)) \geqslant \\ \geqslant \inf(\alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)) \geqslant \inf \Phi(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y).\end{gathered}$$

Предположим, наконец, что хотя бы одно из множеств $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ не ограничено снизу. Тогда множество $\alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$, а вместе с ним и более широкое множество $\Phi(\alpha x + \beta y)$ не ограничены снизу, следовательно, $f(\alpha x + \beta y) = -\infty \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Допустим, что Φ — конус и $\Phi(0)$ ограничено снизу. Тогда будет $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ для $x \in X$ и $\lambda > 0$ (см. 1.3.4 (2)). Стало быть,

$$f(\lambda x) = \inf \Phi(\lambda x) = \inf \lambda\Phi(x) = \lambda \inf \Phi(x) = \lambda f(x).$$

Кроме того, $(0, 0) \in \Phi$, поэтому $f(0) \leqslant 0$ и $0 \in \operatorname{dom}(f)$. С другой стороны, $f(0) = f(2\cdot 0) = 2f(0)$, а так как $f(0) \in E$, то будет $f(0) = 0$. Итак, выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ положительно однороден, а по предложению 1.3.4 (2) f будет сублинейным. $\triangleright$

1.3.6. Указанный в 1.3.5 прием построения выпуклых операторов приводит к многочисленным конкретным конструкциям. Перечислим некоторые операции с надграфиками и выясним, что при этом получается из соответствующих выпуклых операторов. Начнем с простейших теоретико-множественных операций.

(1) Пересечение надграфиков. Для подмножеств $A \subset \overline{E}$ и $B \subset \overline{E}$ будет $\inf(A \cap B) \geqslant \inf A \vee \inf B$, причем неравенство может оказаться строгим. Однако если $A := [a, +\infty) := \{e : e \geqslant a\}$ и $B := [b, +\infty)$, то $\inf(A \cap B) = a \vee b$. Учитывая эти простые соображения и 1.2.3 (1), мы без труда приходим к следующему утверждению.

Для любого семейства выпуклых операторов $f_\xi : X \to \overline{E}$ $(\xi \in \Xi)$ *точная верхняя граница* $f := \sup\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$, *вычисляемая по формуле*

$$f(x) = \sup\{f_\xi(x) : \xi \in \Xi\} \quad (x \in X),$$

есть выпуклый оператор, причем $\operatorname{epi}(f) = \bigcap\{\operatorname{epi}(f_\xi) : \xi \in \Xi\}$.

Отсюда вытекает, в частности, что $\operatorname{dom}(f) = \bigcap\{\operatorname{dom}(f_\xi) : \xi \in \Xi\}$. Для конечного $\Xi := \{1, \ldots, n\}$ приняты обозначения

$$f_1 \vee \ldots \vee f_n := \sup\{f_1, \ldots, f_n\} = \sup\{f_k : k := 1, \ldots, n\}.$$

(2) Объединение надграфиков. Очевидно, что множество $\Phi := \bigcup\{\operatorname{epi}(f_\xi) : \xi \in \Xi\}$ не является, вообще говоря, выпуклым и процедура $\Phi \mapsto \inf \circ \Phi$ не приводит к выпуклому оператору.

Однако независимо от выпуклости Φ оператор $f := \inf \circ \Phi$ совпадает с поточечной точной нижней границей семейства (f_ξ) в силу формулы 1.2.3 (6) и ассоциативности точных нижних границ:

$$f(x) = \inf\{f_\xi(x) : \xi \in \Xi\} \quad (x \in X).$$

Если некоторое семейство выпуклых (сублинейных) операторов $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ фильтровано вниз, т. е. если для любых $\xi, \eta \in \Xi$ существует такой индекс $\zeta \in \Xi$, что $f_\xi, f_\eta \geqslant f_\zeta$, то поточечный инфимум этого семейства есть выпуклый (сублинейный) оператор.

В этой ситуации семейство $(\mathrm{dom}(f_\xi))_{\xi\in\Xi}$ фильтровано вверх по включению и

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{\xi\in\Xi} \mathrm{dom}(f_\xi).$$

(3) Произведение надграфиков. Пусть оператор f_ξ действует из X_ξ в $\overline{E}_\xi$. Положим $X := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ и $E := \prod_{\xi\in\Xi} E_\xi$. Пусть $\sigma\colon \prod_{\xi\in\Xi}(X_\xi \times E_\xi) \to X \times E$ — вновь подходящая перестановка координат (см. 1.2.3 (4)). Положим $\Phi := \sigma\bigl(\prod_{\xi\in\Xi} \mathrm{epi}(f_\xi)\bigr)$. Тогда Φ — выпуклое соответствие, причем для выпуклого оператора

$$f := \prod_{\xi\in\Xi} f_\xi := \inf \circ \Phi : X \to \overline{E}$$

имеем $\mathrm{epi}(f) = \Phi$ и $\mathrm{dom}(f) = \prod_{\xi\in\Xi} \mathrm{dom}(f_\xi)$ (см. 1.2.3 (2)). Таким образом,

$$f(x) \in \overline{E}, \quad f(x) : \xi \mapsto f_\xi(x_\xi) \quad (\xi \in \Xi)$$

для всех $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x : \xi \mapsto x_\xi$, $\xi \in \Xi$, причем $f(x) = +\infty$ в том и только в том случае, если $f_\xi(x_\xi) = +\infty$ хотя бы для одного индекса ξ и $f(x) = -\infty$ в том и только в том случае, если $x_\xi \in \mathrm{dom}(f_\xi)$ для всех индексов ξ и $f_\xi(x_\xi) = -\infty$ хотя бы для одного индекса ξ. Для конечного $\Xi := \{1, \dots, n\}$ принято обозначение $f_1 \times \dots \times f_n := \prod_{k=1}^n f_k$.

1.3.7. Обратимся теперь к алгебраическим операциям с выпуклыми множествами.

(1) Сумма надграфиков. Возьмем выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{E}$ и положим $\Phi := \mathrm{epi}(f_1) + \dots + \mathrm{epi}(f_n)$. В этой ситуации оператор $\inf \circ \Phi$ называют *инфимальной конволюцией* (реже $\inf$-*конволюцией* или $+$-*конволюцией* (ср. 1.3.10)) $f_1, \dots, f_n$. При этом полагают

$$\bigoplus_{k=1}^{n} f_k := f_1 \oplus \ldots \oplus f_n := \inf \circ \Phi.$$

Как видно из 1.2.3 (4), инфимальная конволюция вычисляется по формуле

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{n} f_k\right)(x) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) :\, x_1, \ldots, x_n \in X, \sum_{k=1}^{n} x_k = x\right\}.$$

Операция $\oplus$ коммутативна и ассоциативна. Если $\delta := \delta_{\mathbb{R}}(\{0\})$, то $f \oplus \delta = \delta \oplus f = f$, т. е. δ играет роль нейтрального элемента для операции $\oplus$. (Здесь легко усмотреть некоторую аналогию с операцией интегральной свертки, для которой дираковская δ-функция также играет роль нейтрального элемента.) Стоит подчеркнуть, что $\mathrm{dom}(f_1 \oplus \ldots \oplus f_n) = \mathrm{dom}(f_1) + \ldots + \mathrm{dom}(f_n)$.

Инфимальная конволюция конечного числа выпуклых (*сублинейных*) *операторов есть выпуклый* (*сублинейный*) *оператор.*

(2) Произведение надграфика на положительное число. Пусть $f := X \to \overline{E}$ — выпуклый оператор, $\alpha \geqslant 0$ и $\Phi := \alpha \cdot \mathrm{epi}(f)$. Положим $f\alpha := \inf \circ \Phi$ и заметим, что $\mathrm{epi}(f\alpha) = \alpha \cdot \mathrm{epi}(f)$ при $\alpha \geqslant 0$. Имеют место следующие формулы:

$$f\alpha : x \mapsto \alpha f(x/\alpha) \quad (x \in X,\, \alpha > 0);$$
$$0f(x/0) := f0(x) = \sup_{u \in \mathrm{dom}(f)} (f(u + x) - f(u)) \quad (x \in X).$$

Если f сублинеен, то $f\alpha = f$ для всех $\alpha \geqslant 0$.

1.3.8. Комбинируя теоретико-множественные и алгебраические операции, можно получить следующие четыре приема построения выпуклых операторов.

(1) Выпуклая оболочка объединения надграфиков. Положим

$$\Phi := \mathrm{co}\left(\bigcup\{\mathrm{epi}(f_\xi) :\, \xi \in \Xi\}\right).$$

Выпуклый оператор $f := \operatorname{co}((f_\xi)_{\xi\in\Xi}) := \inf\circ\Phi$ назовем *выпуклой оболочкой семейства* (f_ξ). Вначале рассмотрим случай конечного множества индексов $\Xi := \{1,\dots,n\}$ и положим $f = \operatorname{co}(f_1,\dots,f_n)$. Как видно из 1.2.3 (3), пара (x,e) входит в Φ тогда и только тогда, когда существуют элементы $x_k \in X$ и числа $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$, для которых

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \quad e \geqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x_k), \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

Таким образом,

$$f(x) =$$
$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x_k) : x_k \in X,\ \lambda_k \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1,\ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = x\right\}.$$

Возьмем теперь произвольное семейство выпуклых операторов $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Для конечного множества $\theta \subset \Xi$ оператор $\operatorname{co}(\theta)$ определен указанной выше формулой. При этом из $\theta_1 \subset \theta_2$ следует, что $\operatorname{co}(\theta_1) \leqslant \operatorname{co}(\theta_2)$. Тем самым семейство $(\operatorname{co}(\theta))$, где θ пробегает множество $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ конечных подмножеств Ξ, фильтровано вверх. Поэтому в соответствии с 1.3.6 (2) $\inf\{\operatorname{co}(\theta)\} = \inf\circ\Psi$, где $\Psi := \bigcup\{\operatorname{epi}(\operatorname{co}(\theta))\}$. Но очевидно, что $\inf\circ\Psi = \inf\circ\Phi$, и мы приходим к формуле

$$f(x) = \inf_{\theta\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)} \inf\left\{\sum_{k\in\theta} \lambda_k f_k(x_k)\right\},$$

где внутренняя нижняя граница взята по множеству

$$\left\{(x_k,\lambda_k)_{k\in\theta} : x_k \in X,\ \lambda_k \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{k\in\theta}\lambda_k = 1,\ \sum_{k\in\theta}\lambda_k x_k = x\right\}.$$

Эффективная область f есть $\operatorname{co}\big(\bigcup_{\xi\in\Xi}\operatorname{dom}(f_\xi)\big)$.

Заметим, что если $f_1,\dots,f_n$ сублинейны, то

$$\operatorname{co}\left(\bigcup_{k=1}^n \operatorname{epi}(f_k)\right) = \operatorname{epi}(f_1) + \ldots + \operatorname{epi}(f_n),$$

следовательно,

$$\operatorname{co}(f_1, \dots, f_n) := \operatorname{co}(\{f_1, \dots, f_n\}) = f_1 \oplus \dots \oplus f_n.$$

Отсюда для семейства сублинейных операторов $p_\xi : X \to E^\bullet$ $(\xi \in \Xi)$ получаем

$$\bigoplus_{\xi \in \Xi} p_\xi := \inf\left\{ \bigoplus_{\xi \in \theta} p_\xi : \theta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi) \right\} = \operatorname{co}(\{p_\xi : \xi \in \Xi\}).$$

(2) Инверсная сумма надграфиков. Здесь следует принять

$$\Phi := \operatorname{epi}(f_1) \# \dots \# \operatorname{epi}(f_n).$$

Привлекая 1.2.3 (8), 1.3.6 и 1.3.7 (2), можно для $f := \inf \circ \Phi$ написать

$$f(x) = \inf\left\{ (f_1\alpha_1)(x) \vee \dots \vee (f_n\alpha_n)(x) : \alpha_k \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\} =$$

$$= \inf\left\{ \alpha_1 f_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right) \vee \dots \vee \alpha_n f_n\left(\frac{x}{\alpha_n}\right) : \alpha_k \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}.$$

(3) Правая частичная сумма надграфиков. Пусть $\Phi := \operatorname{epi}(f_1) \dotplus \dots \dotplus \operatorname{epi}(f_n)$. Согласно 1.2.4 $\Phi(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \in E^+$, если $x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(f_n)$ и $\Phi(x) = \varnothing$ в противном случае. Отсюда вытекает, что

$$f_1 + \dots + f_n := \inf \circ \Phi : x \mapsto f_1(x) + \dots + f_n(x) \quad (x \in X).$$

Таким образом, *сумма $f_1 + \dots + f_n$ конечного числа выпуклых операторов есть выпуклый оператор*, причем

$$\operatorname{epi}(f_1 + \dots + f_n) = \operatorname{epi}(f_1) \dotplus \dots \dotplus \operatorname{epi}(f_n),$$
$$\operatorname{dom}(f_1 + \dots + f_n) = \operatorname{dom}(f_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(f_n).$$

(4) Левая частичная сумма надграфиков. Следует взять $\Phi := \operatorname{epi}(f_1) \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \operatorname{epi}(f_n)$. Заметим, что

$$\inf\left(\bigcap_{k=1}^{n} [f_k(x_k), +\infty) \right) = f_1(x_1) \vee \dots \vee f_n(x_n).$$

С другой стороны, по определению левой частичной суммы (см. 1.2.4) выполнено

$$\Phi(x) = \bigcup \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} [f_k(x_k),\, +\infty) :\, x_1 + \ldots + x_n = x \right\}.$$

На этом пути для вычисления выпуклого оператора $f := \inf \circ \Phi$ мы приходим к следующей формуле:

$$f(x) = \inf \left\{ f_1(x_1) \vee \ldots \vee f_n(x_n) :\, x_k \in X,\, \sum_{k=1}^{n} x_k = x \right\}.$$

Возникший оператор f называют *инверсной суммой* (реже *суммой Келли*) операторов $f_1, \ldots, f_n$ и обозначают символом $f_1 \# \ldots \# f_n$. Как видно,

$$\mathrm{dom}(f_1 \# \ldots \# f_n) = \mathrm{dom}(f_1) + \ldots + \mathrm{dom}(f_n).$$

Инверсная сумма конечного числа выпуклых операторов есть выпуклый оператор.

1.3.9. (1) Суперпозиция надграфиков. Пусть Ψ — выпуклое соответствие из X в Y, а $h : Y \to \overline{E}$ — выпуклый оператор. Если $\Phi := \mathrm{epi}(h) \circ \Psi$, то $\Psi h := \inf \circ \Phi$ — выпуклый оператор из X в $\overline{E}$ и имеет место формула

$$\Psi h : x \mapsto \inf\{h(y) :\, y \in \Psi(x)\} \quad (x \in X).$$

Ясно, что $\mathrm{dom}(\Psi h) = \Psi^{-1}(\mathrm{dom}(h))$. Если Ψ — отображение (например, аффинный оператор), то $\Psi h = h \circ \Psi$. Если же отображением является $A := \Psi^{-1}$, то

$$\Psi h : x \mapsto \inf\{h(y) :\, Ay = x\} \quad (x \in X).$$

Предположим, что Y — упорядоченное векторное пространство и $\Psi = \mathrm{epi}(f)$ для некоторого выпуклого оператора $f : X \to \overline{Y}$. Тогда оператор $(hf) := \mathrm{epi}(f)h := \Psi h$ называют *выпуклой композицией* f и h, причем

$$(hf)(x) = \inf\{h(y) :\, y \in Y,\, y \geqslant f(x)\} \quad (x \in X).$$

Заметим, что выпуклая композиция не совпадает с обычной. Более того, даже если обычная композиция и определена, то она не обязательно совпадает с выпуклой. Тем не менее если f действует в $Y^\bullet$, а h возрастает и считается, что $h(+\infty) := +\infty$, то

$$(hf)(x) = h(f(x)) \quad (x \in X).$$

В этой связи всюду в дальнейшем возрастающий оператор $h := Y \to \overline{E}$ распространяют на $\overline{Y}$ по правилам $h(+\infty) := +\infty$ и $h(-\infty) := -\infty$.

(2) Инверсная композиция надграфиков. Для тех же h и Ψ, что и в (1), положим $\Phi := \operatorname{epi}(h) \odot \Psi$. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta = 1$, то

$$\inf\{((\beta \operatorname{epi}(h)) \circ (\alpha\Psi))(x)\} = \inf\left\{\beta h\left(\frac{y}{\beta}\right) : \, y \in \alpha\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}.$$

Отсюда по определению инверсной композиции на основе соображений, высказанных в 1.3.8 (4), получаем

$$(\inf \circ \Phi)(x) = \inf_{\substack{\alpha+\beta=1 \\ \alpha,\,\beta \geqslant 0}} \inf\left\{\beta h\left(\frac{y}{\beta}\right) : \, y \in \alpha\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\} =$$
$$= \inf\{(h\beta)(y) : \, y \in \alpha\Psi(x/\alpha), \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Предположим, что $\Psi = \operatorname{epi}(f)$ для некоторого выпуклого оператора $f := X \to Y^\bullet$, а отображение h возрастает. Тогда

$$(\inf \circ \Phi)(x) = \inf\{(h\beta) \circ (f\alpha)(x) : \, \alpha, \beta \geqslant 0, \, \alpha + \beta = 1\} =$$
$$= \inf\left\{\beta h\left(\frac{\alpha}{\beta} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) : \, \alpha, \beta \geqslant 0, \, \alpha + \beta = 1\right\}.$$

1.3.10. Имеются еще две важные операции над выпуклыми операторами, а именно, $+$-*конволюция* и $\vee$-*конволюция*. Рассмотрим выпуклые операторы $f_1 : X_1 \times X \to \overline{E}$ и $f_2 : X \times X_2 \to \overline{E}$.

Обозначим

$$\operatorname{epi}(f_1, X_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W : \, f_1(x_1, x) \leqslant e\},$$
$$\operatorname{epi}(X_1, f_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W : \, f_2(x, x_2) \leqslant e\},$$

где $W := X_1 \times X \times X_2 \times E$. Введем соответствия Φ и Ψ из $X_1 \times X_2$ в E по формулам

$$\Phi(x_1, x_2) := \bigcup_{x \in X} (\mathrm{epi}(f_1, X_2) \dotplus \mathrm{epi}(X_1, f_2))(x_1, x, x_2);$$
$$\Psi(x_1, x_2) := \bigcup_{x \in X} (\mathrm{epi}(f_1, X_2) \cap \mathrm{epi}(X_1, f_2))(x_1, x, x_2).$$

Положим теперь по определению

$$f_2 \vartriangle f_1 := \inf \circ \Phi, \quad f_2 \odot f_1 := \inf \circ \Psi.$$

Сразу же заметим, что

$$\mathrm{dom}(f_2 \vartriangle f_1) = \mathrm{dom}(f_2 \odot f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \circ \mathrm{dom}(f_1).$$

Оператор $f_2 \vartriangle f_1$, т. е. $+$-конволюция f_2 и f_1, называют также *сверткой Рокафеллара* f_2 и f_1.

Справедливы следующие утверждения:

(1) *$+$-конволюция и $\vee$-конволюция вычисляются по формулам*

$$(f_2 \vartriangle f_1)(x_1, x_2) = \inf_{x \in X} (f_1(x_1, x) + f_2(x, x_2));$$
$$(f_2 \odot f_1)(x_1, x_2) = \inf_{x \in X} (f_1(x_1, x) \vee f_2(x, x_2));$$

(2) *если f_1 и f_2 — выпуклые операторы, то $f_2 \vartriangle f_1$ и $f_2 \odot f_1$ также выпуклые операторы;*

(3) *операции $\vartriangle$ и $\odot$ антикоммутативны и ассоциативны, т. е.*

$$f_2 \vartriangle f_1 = (f_1 \vartriangle f_2) \circ \iota,$$
$$f_2 \odot f_1 = (f_1 \odot f_2) \circ \iota,$$
$$(f_1 \vartriangle f_2) \vartriangle f_3 = f_1 \vartriangle (f_2 \vartriangle f_3),$$
$$(f_1 \odot f_2) \odot f_3 = f_1 \odot (f_2 \odot f_3),$$

где $\iota : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ для $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ (в последней формуле необходимо предполагать, что $f_1 \odot f_2$ и $f_2 \odot f_3$ — собственные операторы);

(4) *если h — порядково непрерывный (= o-непрерывный) решеточный гомоморфизм из E в K-пространство F, а операторы f_1, f_2, $f_2 \vartriangle f_1$ и $f_2 \odot f_1$ собственные, то*

$$h \circ (f_2 \vartriangle f_1) = (h \circ f_2) \vartriangle (h \circ f_1),$$
$$h \circ (f_2 \odot f_1) = (h \circ f_2) \odot (h \circ f_1);$$

(5) *$\vee$-конволюция выражается через $+$-конволюцию по формуле*

$$f_2 \odot f_1 = \sup\{(\alpha \circ f_2) \vartriangle (\beta \circ f_1) :\ \alpha, \beta \in L^+(E),\ \alpha + \beta = I_E\},$$

где, как обычно, $L^+(E)$ — конус положительных операторов в E, а I_E — тождественный оператор в E.

$\lhd$ (1): Требуемые формулы выводятся непосредственно из определений Φ и Ψ по уже высказанным соображениям.

(2): Достаточно показать выпуклость соответствий Φ и Ψ и сослаться на 1.3.5. Для проведения необходимой проверки достаточно заметить следующее. Если Θ — выпуклое соответствие из $X \times Y$ в Z и $\Omega(x) := \bigcup\{\Theta(x, y) :\ y \in Y\}$, то Ω — выпуклое соответствие из X в Z. Действительно, для любых $x, y \in X$ и $0 < \alpha < 1$ будет

$$\begin{aligned}\alpha\Omega(x) + (1 - \alpha)\Omega(y) &= \bigcup_{u \in Y} \alpha\Theta(x, u) + \bigcup_{v \in Y} (1 - \alpha)\Theta(y, v) = \\ &= \bigcup_{u,v \in Y} (\alpha\Theta(x, u) + (1 - \alpha)\Theta(y, v)) \subset \\ &\subset \bigcup_{u,v \in Y} \Theta(\alpha x + (1 - \alpha)y,\ \alpha u + (1 - \alpha)v) \subset \\ &\subset \Omega(\alpha x + (1 - \alpha)y).\end{aligned}$$

(3): Утверждение об антикоммутативности тривиально. Ассоциативность операций $\vartriangle$ и $\odot$ устанавливается путем прямого подсчета с использованием дистрибутивных законов из 1.3.1, а также ассоциативности точных нижних границ.

(4): Если h удовлетворяет указанному условию, то

$$h(f_1(x_1, x) + f_2(x, x_2)) = h \circ f_1(x_1, x) + h \circ f_2(x, x_2);$$
$$h(f_1(x_1, x) \vee f_2(x, x_2)) = h \circ f_1(x_1, x) \vee h \circ f_2(x, x_2).$$

Кроме того, $h(\inf A) = \inf h(A)$ для любого непустого $A \subset E$. Остается перейти к инфимумам в указанных равенствах.

(5): Требуемое является прямым следствием важного утверждения, чью формулировку мы вынесли в 1.3.11. $\triangleright$

1.3.11. *Теорема о векторном минимаксе.* *Пусть $f : X \to E$ — выпуклый оператор, а $g : E \to F^{\bullet}$ — возрастающий сублинейный оператор со значениями в K-пространстве F и такой, что* $\mathrm{dom}(g) = E$. *Тогда*

$$\inf_{x \in \mathrm{dom}(f)} \sup_{\alpha \in \partial g} \alpha \circ f(x) = \sup_{\alpha \in \partial g} \inf_{x \in \mathrm{dom}(f)} \alpha \circ f(x).$$

$\triangleleft$ Доказательство этого факта мы отложим до главы 4 (см. 4.1.10 (2)). Напомним только, что здесь, как обычно, $\partial g = \{A \in L(E, F) : (\forall e \in E)\ Ae \leqslant g(e)\}$ — *субдифференциал в нуле* или *опорное множество* сублинейного оператора g (см. 1.4.11). $\triangleright$

1.4. Вееры и линейные операторы

В этом параграфе изучается фундаментальный вопрос о мажорированном продолжении линейных операторов. Средства такого изучения представляет специальный класс соответствий — вееры.

1.4.1. Рассмотрим векторные пространства X и Y. Соответствие Φ из X в Y назовем *веером*, если для любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, выполнены следующие условия:

(1) $\Phi(x)$ — выпуклое множество в Y;

(2) $0 \in \Phi(0)$;

(3) $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$;

(4) $\Phi(x_1 + x_2) \subset \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$.

Веер называют *нечетным*, если $\mathrm{dom}(\Phi) = X$ и $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ для всех $x \in X$.

1.4.2. Приведем несколько примеров.

(1) Пусть Φ — веер из X в Y, а Θ — веер из Y в Z. Тогда соответствие $\Theta \circ \Phi$ является веером. При этом если вееры Θ и Φ нечетны, то $\Theta \circ \Phi$ также нечетный веер. В частности, для (нечетных) вееров Φ и Ψ из X в Y и числа λ соответствия $\lambda\Phi$ и $\Phi \dotplus \Psi$ являются (нечетными) веерами.

(2) Пусть Ω — выпуклое множество линейных операторов из X в Y. Тогда соответствие $\Phi \subset X \times Y$, определяемое равенством $\Phi(x) := \{Tx : T \in \Omega\}$, является нечетным веером.

(3) Пусть C — выпуклое подмножество Y, T — линейный оператор из X в Y и p — числовая функция на X. Рассмотрим соответствие

$$\Phi(x) := p(x)C + Tx \quad (x \in X).$$

Имеют место следующие утверждения:

(a) если p — линейный функционал, то соответствие Φ является нечетным веером;

(b) если p — положительный сублинейный функционал и $0 \in C$, то Φ — веер, являющийся нечетным при том условии, что множество C симметрично и $p(x) = p(-x)$ для всех $x \in X$.

(4) Для произвольных (нечетных) вееров Φ и Ψ из X в Y соответствие

$$\Phi \vee \Psi : x \mapsto \mathrm{co}(\Phi(x) \cup \Psi(x)) \quad (x \in X)$$

является (нечетным) веером.

(5) Если $\Phi \subset X \times Y$ — веер, а K — конус в X, то ограничение $\Phi \restriction K$ также является веером.

1.4.3. Прежде чем переходить к следующему примеру, необходимо ввести еще одно понятие. Говорят, что предупорядоченное векторное пространство F имеет *декомпозиционное свойство Рисса*, если $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ для всех $a, b, c, d \in F$ при $a \leqslant b$, $c \leqslant d$. Здесь, как обычно, $[a, b] := \{y \in F : a \leqslant y \leqslant b\}$ — *порядковый отрезок* или *порядковый интервал* в F. Нетрудно заметить, что декомпозиционное свойство Рисса равносильно выполнению равенства $[0, a + b] = [0, a] + [0, b]$ для любых $a, b \in F^+$.

Пусть X — векторное пространство, F — предупорядоченное векторное пространство с декомпозиционным свойством Рисса. Если $p, q : X \to F$ — сублинейные операторы такие, что $(p + q)(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, то соответствия

$$\Phi := \{(x, f) \in X \times F : -q(x) \leqslant f \leqslant p(x)\},$$
$$\Psi := \{(x, f) \in X \times F : f \leqslant p(x)\}$$

являются веерами. Веер Φ нечетен в том и только в том случае, если $q(x) = p(-x)$ для всех $x \in X$.

$\lhd$ В самом деле, поскольку порядковый отрезок есть выпуклое множество, то выполнено (1) из определения 1.4.1. Условия (2) и (3) тривиально вытекают из положительной однородности операторов p и q. Если теперь $u, v \in X$, то в силу субаддитивности операторов p и q будет

$$\Phi(u+v) = [-q(u+v),\, p(u+v)] \subset [-q(u) - q(v),\, p(u) + p(v)].$$

Далее, согласно декомпозиционному свойству Рисса

$$\Phi(u+v) \subset [-q(u),\, p(u)] + [-q(v),\, p(v)] = \Phi(u) + \Phi(v),$$

т. е. выполнено (4). Итак, Φ — веер. Нечетность Φ означает совпадение порядковых интервалов $[-q(x),\, p(x)]$ и $[-p(-x),\, q(-x)]$, а это равносильно равенству $q(x) = p(-x)$. Аналогично рассматривается соответствие Ψ. $\rhd$

1.4.4. Пусть $\mathscr{E}$ — заданное семейство выпуклых подмножеств Y. Веер $\Phi \subset X \times Y$ называют *$\mathscr{E}$-значным*, если $\Phi(x) \in \mathscr{E}$ для любого $x \in X$.

Введем теперь следующие обозначения. Для семейства $\mathscr{E}$ подмножеств Y положим

$$\mathscr{T}(\mathscr{E}) := \{y + \lambda C : \, y \in Y,\, \lambda \in \mathbb{R},\, C \in \mathscr{E}\}.$$

Если $\mathscr{E}$ состоит из единственного элемента $C \subset Y$, то вместо $\mathscr{T}(\{C\})$ мы будем писать $\mathscr{T}(C)$. Если F — предупорядоченное векторное пространство, то символом $\mathscr{I}(F)$ мы будем обозначать совокупность всех порядковых отрезков, т. е. $\mathscr{I}(F) := \{[a,b] \, : \, a, b \in F, a \leqslant b\}$. Таким образом, вееры Φ из 1.4.2 (3) и 1.4.3 являются $\mathscr{T}(C)$-значным и $\mathscr{I}(F)$-значным соответственно.

1.4.5. (1) *Пусть F — предупорядоченное векторное пространство с положительным конусом F^+. Предположим, что F обладает декомпозиционным свойством Рисса. Тогда для всякого $\mathscr{I}(F)$-значного веера $\Phi \subset X \times F$ при $\operatorname{dom}(\Phi) = X$ существуют сублинейные операторы $p, q : X \to F$ такие, что $\Phi(x) = [-q(x), p(x)]$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ Пусть $F_0 := F^+ \cap (-F^+)$ и F_1 — какое-либо алгебраическое дополнение подпространства F_0. Тогда всякий непустой порядковый отрезок в F имеет единственное представление вида $[a, b]$, где $a, b \in F_1$. В самом деле, если $[a, b] = [a', b']$ для некоторых $a', b' \in F_1$, то $a \leqslant a'$ и $a' \leqslant a$, поэтому $a - a' \in F_0 \cap F_1 = \{0\}$, так что $a = a'$. По тем же самым соображениям $b = b'$. Следовательно, для любого $x \in X$ однозначно определены элементы a и b из F_1 такие, что $\Phi(x) = [a, b]$. Положим $p(x) := b$ и $q(x) := -a$. Так как $2\Phi(0) = \Phi(2 \cdot 0) = \Phi(0)$, то порядковые отрезки $[-q(0), p(0)]$ и $[-2q(0), 2p(0)]$ совпадают, стало быть, $p(0) \leqslant 0$ и $q(0) \leqslant 0$. Включение $0 \in \Phi(0)$ влечет противоположные неравенства $p(x) \geqslant 0$ и $q(x) \geqslant 0$. Таким образом, $[-q(0), p(0)] \subset F_0$, стало быть, $p(0) = q(0) = 0$. Положительная однородность p и q немедленно следует из требования 1.4.1 (3) определения веера. Наконец, если $u, v \in X$, то, на основании 1.4.1 (4) и декомпозиционного свойства Рисса, можно написать

$$
\begin{aligned}
[-q(u+v),\, p(u+v)] &= \Phi(u+v) \subset \Phi(u) + \Phi(v) = \\
&= [-q(u),\, p(u)] + [-q(v),\, p(v)] = \\
&= [-q(u) - q(v),\, p(u) + p(v)],
\end{aligned}
$$

что и устанавливает субаддитивность p и q. $\rhd$

(2) *Если предупорядоченное векторное пространство F обладает декомпозиционным свойством Рисса, то эквивалентны утверждения:*

(a) Φ *— нечетный $\mathscr{I}(F)$-значный веер из X в F;*

(b) *существует сублинейный оператор $p : X \to F$ такой, что $\Phi(x) = [-p(-x),\, p(x)]$ для всех $x \in X$.*

1.4.6. Семейство множеств $\mathscr{E}$ называют *сцепленным*, если пересечение любых двух элементов из $\mathscr{E}$ непусто. Говорят, что семейство множеств $\mathscr{E}$ обладает *свойством бинарного пересечения*, если всякое (непустое) сцепленное подсемейство $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ имеет непустое пересечение. Если свойство бинарного пересечения имеется у совокупности $\mathscr{T}(C)$ (или $\mathscr{T}^+(C) := \{y + \lambda C : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$) для некоторого $C \subset Y$, то говорят также, что множество C обладает *свойством бинарного пересечения* (или соответственно *свойством положительного бинарного пересечения*).

1.4.7. *Пусть выпуклое множество $C \subset Y$ обладает свойством положительного бинарного пересечения. Тогда C имеет центр симметрии, т. е. существует точка $y_0 \in C$ такая, что множество $C - y_0$ симметрично. При этом C обладает свойством бинарного пересечения. Если, кроме того, рецессивный конус C нулевой, т. е.* $\operatorname{rec}(C) = \{0\}$, *то такая точка y_0 единственна.*

$\lhd$ Семейство выпуклых множеств $\{y + C : y \in C\}$ является сцепленным, поскольку $y_1 + y_2 \in (y_1 + C) \cap (y_2 + C)$ для любых $y_1, y_2 \in C$. По условию это семейство имеет непустое пересечение. Следовательно, существует элемент y_0 такой, что при всех $y \in C$ будет $y_0 \in 2^{-1}(C + y)$. Переписав последнее включение в виде $y_0 - y \in C - y_0$, мы приходим к соотношению $y_0 - C \subset C - y_0$, обеспечивающему равенство $C - y_0 = -(C - y_0)$. Итак, y_0 — центр симметрии множества C. Остается заметить, что для центрально-симметричного выпуклого множества свойства бинарного пересечения и положительного бинарного пересечения равносильны.

Предположим теперь, что $\operatorname{rec}(C) = \{0\}$, и пусть y_1 и y_2 — центры симметрии множества C. Тогда $y_k - C = C - y_k$ $(k := 1, 2)$. Пользуясь этими двумя соотношениями, можно получить и равенство $2(y_1 - y_2) + C = C$. Последнее в силу 1.1.5 (4) означает, что $y_1 - y_2 \in \operatorname{rec}(C) = \{0\}$. Окончательно $y_1 = y_2$. $\rhd$

1.4.8. Выясним, в каких предупорядоченных векторных пространствах F множество порядковых отрезков $\mathscr{I}(F)$ обладает свойством бинарного пересечения. С этой целью введем следующее определение. Скажем, что предупорядоченное векторное пространство F обладает *интерполяционным свойством Рисса*, если для любых элементов a_1, a_2, b_1 и b_2 из F, удовлетворяющих неравенствам $a_k \leqslant b_l$ $(k, l := 1, 2)$, существует такой элемент $c \in F$, что $a_k \leqslant c \leqslant b_l$ $(k, l := 1, 2)$.

(1) *Предупорядоченное векторное пространство обладает интерполяционным свойством Рисса в том и только в том случае, если оно имеет декомпозиционное свойство Рисса.*

$\lhd$ Пусть F — предупорядоченное векторное пространство с интерполяционным свойством Рисса, а элементы $z, u, v \in F^+$ таковы, что $z \leqslant u + v$. Полагая $a_1 := 0$, $a_2 := z - v$, $b_1 := u$, $b_2 := z$, мы видим, что $a_k \leqslant b_l$, где $k, l := 1, 2$. Следовательно, для некоторого $c \in F$ будет $a_k \leqslant c \leqslant b_l$ при $k, l := 1, 2$. Элементы $z_1 := c$

и $z_2 := z - c$ составляют искомое разложение z, т. е. $z_1 \in [0, u]$, $z_2 \in [0, v]$ и $z = z_1 + z_2$. Для завершения доказательства допустим, что F обладает декомпозиционным свойством Рисса, и рассмотрим элементы $a_k, b_l \in F$, для которых $a_k \leqslant b_l$ при $k, l := 1, 2$. Положим $u_1 := b_1 - a_1$, $u_2 := b_2 - a_2$, $v_1 := b_1 - a_2$ и $v_2 := b_2 - a_1$. Тогда $u_k, v_k \geqslant 0$ $(k := 1, 2)$ и $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$. В силу декомпозиционного свойства Рисса $u_1 = t_{11} + t_{12}$ для некоторых $t_{1k} \in [0, v_k]$ $(k := 1, 2)$. Если $t_{2k} := v_k - t_{1k}$, то $t_{2k} \in [0, v_k]$ и $t_{21} + t_{22} = u_2$, а кроме того, $t_{1k} + t_{2k} = v_k$ $(k := 1, 2)$. Теперь легко проверяется, что $b_2 - t_{22} = b_1 - t_{11} = a_1 + t_{12} = a_2 + t_{21}$, а элемент c — «общее значение этих четырех выражений» — удовлетворяет неравенствам $a_k \leqslant c \leqslant b_l$ при $k, l := 1, 2$. $\triangleright$

(2) *Пусть предупорядоченное векторное пространство F обладает интерполяционным свойством Рисса. Семейство $\mathscr{I}(F)$ обладает свойством бинарного пересечения в том и только в том случае, если у всякого непустого ограниченного сверху подмножества F существует точная верхняя граница.*

$\triangleleft$ В самом деле, пусть $\mathscr{I}(F)$ имеет свойство бинарного пересечения. Возьмем ограниченное сверху подмножество $A \subset F$ и рассмотрим совокупность порядковых отрезков $\mathscr{E} := \{[a, b] : a \in A, b \in F, b \geqslant A\}$. В силу интерполяционного свойства Рисса $\mathscr{E}$ — сцепленное семейство. На основании нашего предположения $\mathscr{E}$ имеет непустое пересечение. Если c — некоторая точка из такого пересечения, то очевидно, что $c = \sup A$. Наоборот, если семейство отрезков $([a_\xi, b_\xi])_{\xi \in \Xi}$ является сцепленным, то бесспорно, что $a_\xi \leqslant b_\eta$ для любых $\xi, \eta \in \Xi$. Положим $a := \sup\{a_\xi : \xi \in \Xi\}$ и $b := \inf\{b_\xi : \xi \in \Xi\}$. Несомненно, что $a \leqslant b$ и непустое множество $[a, b]$ содержится в пересечении $\bigcap\{[a_\xi, b_\xi] : \xi \in \Xi\}$. $\triangleright$

1.4.9. Перейдем к вопросу о продолжении линейных операторов. Пусть, как и раньше, X и Y — некоторые (вещественные) векторные пространства и $\mathscr{E}$ — некоторое семейство выпуклых множеств в Y. Будем говорить, что $\mathscr{E}$ *насыщенно* или, полнее, $+$-*насыщенно*, если $\mathscr{T}(\mathscr{E})$ замкнуто относительно алгебраической суммы, т. е. если $C_1, C_2 \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$, то $C_1 + C_2 \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$. Рассмотрим веер Φ из X в Y. Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *линейным селектором* Φ, если $Tx \in \Phi(x)$ для всех $x \in X$. Совокупность всех линейных селекторов веера Φ обозначают символом $\partial\Phi$. Пусть T_0 — линейный оператор со значениями в Y, определенный на некотором подпространстве $X_0 \subset X$. Если T_0 является селектором ограничения $\Phi|_{X_0}$ веера Φ на подпространство X_0, т. е. $T_0 \in \partial(\Phi|_{X_0})$, то естественно поставить вопрос о существовании линейного продолжения T оператора T_0 на все пространство X, для которого $T \in \partial\Phi$. Предположим, что такое продолжение существует при любом выборе векторного пространства X, подпространства $X_0 \subset X$, нечетного $\mathscr{T}(\mathscr{E})$-значного веера Φ и оператора $T_0 \in \partial(\Phi|_{X_0})$. В этой ситуации говорят, что пара $(Y, \mathscr{E})$ *допускает продолжение линейных операторов* или обладает *свойством продолжения линейных операторов.*

1.4.10. *Теорема Иоффе.* *Пусть Y — векторное пространство и $\mathscr{E}$ — насыщенное семейство выпуклых подмножеств Y. Пара $(Y, \mathscr{E})$ допускает продолжение линейных операторов в том и только в том случае, если $\mathscr{E}$ обладает свойством бинарного пересечения.*

$\triangleleft$ $\leftarrow$: Предположим, не ограничивая общности, что $\mathscr{T}(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$. Рассмотрим произвольный нечетный веер $\Phi \subset X \times Y$. Возьмем $x_1 \in X \setminus X_0$ и обозначим через X_1 подпространство в X, состоящее из всех элементов x' вида $x' := x + \lambda x_1$, где $x \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Выясним, когда всякий линейный оператор T_0 из X_0 в Y, являющийся селектором веера $\Phi \restriction X_0$, допускает линейное продолжение T_1 на X_1, для которого $T_1 \in \partial(\Phi \restriction X_1)$. Предположим сначала, что такое продолжение существует, и обозначим $y_1 := T_1 x_1$. Тогда для любого $x \in X$ будет $y_1 + T_0 x = T_1 x_1 + T_1 x \in \Phi(x_1 + x)$ или $y_1 \in -T_0 x + \Phi(x_1 + x)$. Итак, для существования продолжения с указанными свойствами необходимо, чтобы все множества вида $-T_0 x + \Phi(x_1 + x)$, где $x \in X_0$, имели общую точку y_1. Сформулированное условие является также и достаточным. В самом деле, возьмем какой-либо элемент y_1 из пересечения указанного семейства

$$y_1 \in \bigcap \{-T_0 x + \Phi(x_1 + x) :\, x \in X_0\}$$

и положим $T_1 x_1 := y_1$. Очевидно, что оператор $T_1 : X_1 \to Y$, определенный для каждого $x' := \lambda x_1 + x$, где $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, равенством $T_1 x' := \lambda y_1 + T_0 x$, линеен. Кроме того, на основании как простейших свойств веера, так и способа выбора y_1, при $\lambda \neq 0$ выводим

$$\begin{aligned} T_1 x' &= \lambda(y_1 + T_0(x/\lambda)) \in \\ &\in \lambda(-T_0(x/\lambda) + \Phi(x_1 + x/\lambda) + T_0(x/\lambda)) = \\ &= \Phi(\lambda x_1 + x) = \Phi(x'). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $T_1 \in \partial(\Phi \restriction X_1)$.

Заметим теперь, что указанное выше пересечение непусто при наличии у $\mathscr{E}$ свойства бинарного пересечения. Действительно, с учетом того, что множество $C_x := -T_0 x + \Phi(x_1 + x)$ входит в $\mathscr{E}$ для любого $x \in X_0$, требуется установить только, что названные множества C_x образуют сцепленное семейство. Для проверки возьмем $u, v \in X_0$. Вновь привлекая определение веера, получим

$$
\begin{aligned}
0 \in & -T_0(u-v) + \Phi(u-v) = \\
& = -T_0(u-v) + \Phi(u + x_1 - (x_1 + v)) \subset \\
& \subset -T_0 u + \Phi(x_1 + u) + T_0 v - \Phi(x_1 + v) = \\
& = C_u - C_v.
\end{aligned}
$$

Стало быть, можно утверждать, что $C_u \cap C_v \neq \varnothing$. Ввиду произвольности u и v, мы приходим к сцепленности семейства $(C_x)_{x \in X_0}$. Таким образом, возможность распространения оператора T_0 на одномерное расширение подпространства X_0 с сохранением нужных свойств обоснована.

Приводимое доказательство достаточности завершается следующим стандартным применением леммы Куратовского — Цорна. Обозначим буквой $\mathfrak{A}$ множество всех пар (X', T') таких, что X' — подпространство X, содержащее X_0, а $T' \in L(X', Y)$ — продолжение T_0, причем $T' \in \partial(\Phi \restriction X')$. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\prec$, полагая $(X', T') \prec (X'', T'')$ при условии $X' \subset X''$ и $T' = T'' \restriction X'$. Без труда проверяется, что отношение $\prec$ — это порядок, а упорядоченное множество $(\mathfrak{A}, \prec)$ *индуктивно* (= удовлетворяет условиям леммы Куратовского — Цорна), т. е. $\mathfrak{A}$ непусто и всякая цепь в $(\mathfrak{A}, \prec)$ ограничена сверху. Таким образом, в $(\mathfrak{A}, \prec)$ имеется максимальный элемент (X^*, T^*). Несомненно, что $X^* = X$, ибо в противном случае в силу уже предъявленного рассуждения оператор T^* можно распространить на одномерное расширение подпространства X^* с соблюдением нужных свойств вопреки максимальности (X^*, T^*). Итак, оператор T^* искомый.

$\rightarrow$: Предположим, что $(Y, \mathscr{E})$ допускает продолжение линейных операторов. Пусть $(C_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — сцепленное подсемейство $\mathscr{E}$. В качестве пространства X возьмем прямую сумму Ξ экземпляров числовой прямой $\mathbb{R}$, т. е. $x \in X$ в том и только в том случае, если $x : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$

и множество $\{\xi \in \Xi : \ x_\xi := x(\xi) \neq 0\}$ конечно. Положим

$$X_0 := \left\{ x \in X : \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi = 0 \right\}.$$

Определим теперь соответствие $\Phi \subset X \times Y$ соотношением

$$\Phi : x \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi C_\xi \quad (x \in X).$$

Очевидно, что Φ — нечетный веер.

Предположим, что $x \in X_0$. Тогда по условию для положительных и отрицательных частей выполнено равенство $\sum_{\xi \in \Xi} x_\xi^+ = \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi^-$. Следовательно, существует семейство $(x_{\xi\eta})_{\xi,\eta \in \Xi}$ положительных чисел такое, что

$$\sum_{\xi \in \Xi} x_{\xi\eta} = x_\eta^+, \quad \sum_{\eta \in \Xi} x_{\xi\eta} = x_\xi^- \quad (\xi, \eta \in \Xi).$$

(Это скалярный вариант классической леммы «*о двойном разбиении*» или, иначе, — утверждение о наличии допустимого плана в сбалансированной транспортной задаче линейного программирования.) Поскольку

$$\Phi(x) = \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi^+ C_\xi - \sum_{\eta \in \Xi} x_\eta^- C_\eta \quad (x \in X),$$

можно написать

$$\Phi(x) = \sum_{\eta \in \Xi} \sum_{\xi \in \Xi} x_{\xi\eta} C_\eta - \sum_{\xi \in \Xi} \sum_{\eta \in \Xi} x_{\xi\eta} C_\xi =$$
$$= \sum_{\xi,\eta \in \Xi} x_{\xi\eta} (C_\xi - C_\eta) \quad (x \in X_0).$$

В силу сцепленности семейства (C_ξ) будет $C_\xi \cap C_\eta \neq \varnothing$ для всех $\xi, \eta \in \Xi$, поэтому $0 \in \Phi(x)$ при $x \in X_0$. Таким образом, нулевой оператор является селектором сужения веера Φ на подпространство X_0. По условию этот селектор допускает распространение до линейного селектора T, заданного на всем X. Иными словами, существует линейный оператор $T \in L(X, Y)$, для которого $Tx \in \Phi(x)$ при каждом $x \in X$.

Пусть элемент $e_\xi \in X$ таков, что $e_\xi(\eta) = 0$ для всех $\eta \neq \xi$ и $e_\xi(\xi) = 1$. Тогда $Te_\xi = Te_\eta$ при любых $\xi, \eta \in \Xi$. Заметим, наконец, что $\Phi(e_\xi) = C_\xi$ для любого $\xi \in \Xi$. Стало быть, пересечение семейства $(C_\xi)_{\xi \in \Xi}$ содержит элемент Te_ξ, что и завершает проверку наличия свойства бинарного пересечения у семейства $\mathscr{E}$. $\triangleright$

1.4.11. Из теоремы Иоффе можно извлечь, в частности, полное решение проблемы мажорированного продолжения линейных операторов со значениями в предупорядоченном векторном пространстве.

Пусть p — сублинейный оператор, действующий из векторного пространства X в предупорядоченное векторное пространство E, т. е. $\operatorname{dom}(p) = X$. *Опорным множеством* или *субдифференциалом* (*в нуле*) ∂p оператора p называют совокупность всех линейных операторов из X в E, мажорируемых p, т. е.

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X)\ Tx \leqslant p(x)\},$$

где $L(X, E)$ — пространство линейных операторов из X в E. Операторы из ∂p называют *опорными* к p. Допустим, что X_0 — подпространство в X, а $T_0 : X_0 \to E$ — такой линейный оператор, что $T_0 x \leqslant p(x)$ при всех $x \in X_0$. Если для любых таких X, X_0, T_0 и p, существует оператор $T \in \partial p$, являющийся продолжением T_0 с X_0 на все X, то говорят, что E *допускает мажорированное продолжение линейных операторов.* Из теоремы 1.4.10 мы выведем теорему Хана — Банаха — Канторовича, утверждающую, что если в предупорядоченном векторном пространстве всякое непустое ограниченное множество имеет точную верхнюю границу, то рассматриваемое пространство допускает мажорированное продолжение линейных операторов. Мы также получим обращение этой теоремы, принадлежащее Боннайсу, Сильверману и Ту.

1.4.12. Сначала мы приведем еще два вспомогательных факта.

(1) *Если предупорядоченное векторное пространство E допускает мажорированное продолжение линейных операторов, то для любых сублинейных операторов $p_1, \ldots, p_n$, действующих из произвольного векторного пространства X в E, справедливо представление*

$$\partial(p_1 + \ldots + p_n) = \partial p_1 + \ldots + \partial p_n.$$

◁ Включение $\supset$ очевидно. Для доказательства противоположного включения определим отображения $\mathscr{P}$ и $\mathscr{T}_0$, действующие из пространства X^n и диагонали $\Delta_n(X)$ соответственно, формулами

$$\mathscr{P}(x_1,\dots,x_n) := p_1(x_1)+\ldots+p_n(x_n);$$
$$\mathscr{T}_0(x,\dots,x) := Tx \quad (x,x_1,\dots,x_n\in X).$$

Тогда оператор $\mathscr{P}$ сублинеен, $\mathscr{T}_0$ линеен и $\mathscr{T}_0 z \leqslant \mathscr{P}(z)$ для всех $z\in\Delta_n(X)$. По условию существует линейный оператор $\mathscr{T}: X^n\to E$ такой, что $\mathscr{T}\in\partial\mathscr{P}$ и сужение $\mathscr{T}\restriction\Delta_n(X)$ совпадает с $\mathscr{T}_0$. Положим $T_k x := \mathscr{T}(0,\dots,0,x,0,\dots,0)$, где элемент x стоит на месте с номером k. Тогда T_k — линейный оператор из X в E и $T=T_1+\ldots+T_n$. Кроме того,

$$\begin{aligned}T_k x &\leqslant \mathscr{P}(0,\dots,0,x,0,\dots,0) = \\ &= p_1(0)+\ldots+p_k(x)+\ldots+p_n(0) = \\ &= p_k(x);\end{aligned}$$

т. е. $T_k\in\partial p_k$. ▷

(2) *Пусть предупорядоченное векторное пространство E допускает мажорированное продолжение линейных операторов или всякое ограниченное сверху подмножество в нем имеет точную верхнюю границу. Тогда E обладает декомпозиционным свойством Рисса* (*а значит, и интерполяционным свойством Рисса*).

◁ Пусть сначала E допускает мажорированное продолжение линейных операторов. Рассмотрим сублинейные операторы $p_k:\mathbb{R}\to E$, действующие по формулам

$$p_k : t\mapsto t^+ y_k \quad (t\in\mathbb{R},\ k:=0,1,2),$$

где $y_0,y_1,y_2\in E^+$ и $y_0=y_1+y_2$. Тогда $p_0=p_1+p_2$ и декомпозиционное свойство Рисса следует из 1.4.12 (1), ибо ∂p_k состоит из линейных операторов $t\mapsto ty$ $(t\in\mathbb{R})$, где $y\in[0,y_k]$.

Пусть теперь всякое непустое ограниченное сверху подмножество в E имеет точную верхнюю границу. Возьмем $z\in[0,y_1+y_2]$, где $y_1,\ y_2\in E^+$. Положим $U:=\{u\in E: u\leqslant z, u\leqslant y_1\}$. Так как множество U ограничено сверху, существует элемент $z_1\in E^+$, для которого $z_1=\sup U$. Далее, поскольку $z-y_2\in U$, имеем $z-y_2\leqslant z_1$. Стало быть, для $z_2:=z-z_1$ будет $z=z_1+z_2$ и $z_k\in[0,y_k]$ $(k:=1,2)$. ▷

Из теоремы Иоффе 1.4.10 и предложений 1.4.5, 1.4.8 и 1.4.12 мгновенно вытекает следующий результат.

1.4.13. *Теорема.* *Предупорядоченное векторное пространство допускает мажорированное продолжение линейных операторов в том и только в том случае, если в нем всякое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю границу.*

Исторически указанная теорема была установлена в два этапа.

(1) *Теорема Хана — Банаха — Канторовича.* *Пространство Канторовича допускает мажорированное продолжение линейных операторов.*

Эту теорему доказал Л. В. Канторович. Ее можно считать первой теоремой теории K-пространств.

(2) *Теорема Боннайса — Сильвермана — Ту.* *Каждое упорядоченное векторное пространство, допускающее мажорированное продолжение линейных операторов, представляет собой пространство Канторовича.*

1.4.14. В следующих следствиях p — всюду определенный сублинейный оператор, действующий из векторного пространства X в K-пространство E.

(1) *Для каждой точки $x_0 \in X$ существует линейный оператор T из X в E, опорный к p в точке x_0, т. е. такой, что $Tx_0 = p(x_0)$ и $T \in \partial p$.*

$\lhd$ Положим $X_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ и определим линейный оператор $T_0 : X_0 \to E$ по формуле $T(\lambda x_0) := \lambda p(x_0)$. Для $\lambda \geqslant 0$ имеем $T(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0)$. Если же $\lambda < 0$, то

$$T_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = -|\lambda| p(x_0) \leqslant p(-|\lambda| x_0) = p(\lambda x_0).$$

Итак, T_0 опорен к сужению $p \restriction X_0$. По теореме Хана — Банаха — Канторовича существует продолжение T оператора T_0 на X, мажорируемое p. Тем самым $T \in \partial p$ и $Tx_0 = T_0 x_0 = p(x_0)$, что и требовалось. $\rhd$

(2) *Каждый всюду определенный сублинейный оператор является верхней огибающей своего опорного множества, т. е. имеет место следующее представление:*

$$p(x) = \sup\{Tx : T \in \partial p\} \quad (x \in X).$$

$\lhd$ Очевидное следствие (1). $\rhd$

(3) *Для любого $x \in X$ множество $(\partial p)(x) := \{Tx : T \in \partial p\}$ совпадает с порядковым отрезком $[-p(-x), p(x)]$.*

$\lhd$ Доказательство получается простой модификацией рассуждения в (1). $\rhd$

(4) *Пусть Y — еще одно векторное пространство и T — линейный оператор из Y в X. Тогда*

$$\partial(p \circ T) = \partial p \circ T.$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент S из $\partial(p \circ T)$. Ясно, что $-p(T(-y)) \leqslant Sy \leqslant p(Ty)$, поэтому $Ty = 0$ влечет $Sy = 0$. Это означает, что $\ker(T) \subset \ker(S)$, где $\ker(R) := R^{-1}(0)$ — ядро оператора R. Следовательно, операторное уравнение $\mathscr{X} \circ T = S$ разрешимо относительно неизвестного линейного оператора $\mathscr{X} : T(Y) \to E$. Решение U_0 этого уравнения по условию удовлетворяет неравенству $U_0 x_0 \leqslant p(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0 := T(Y)$. Стало быть, по теореме Хана — Банаха — Канторовича существует продолжение $U \in L(X, E)$ оператора U_0, опорное к сублинейному оператору p. Таким образом, $U \in \partial p$ и $U \circ T = S$, т. е. $S \in \partial p \circ T$. Противоположное включение проверяется непосредственно. $\rhd$

Стоит подчеркнуть, что в случае, когда T — вложение подпространства X_0 в пространство X, доказанное предложение в точности выражает наличие свойства мажорированного продолжения. В этой связи предложение 1.4.14 (5) часто называют *формулой Хана — Банаха* или *теоремой Хана — Банаха — Канторовича в субдифференциальной форме.*

(5) *Пусть α — мультипликатор в E, т. е. положительный оператор из E в E, удовлетворяющий условию $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$. Тогда*

$$\partial(\alpha \circ p) = \alpha \circ \partial p.$$

$\lhd$ Включение $\alpha \circ \partial p \subset \partial(\alpha \circ p)$ очевидно. Если оператор T лежит в $\partial(\alpha \circ p)$, то при каждом $x \in X$ будет $-\alpha p(-x) \leqslant Tx \leqslant \alpha p(x)$, т. е. образ T содержится в области значений $\operatorname{im}(\alpha)$ оператора α. Ясно, что $\ker(\alpha) = \{e \in E : \alpha|e| = 0\}$, т. е. $\ker(\alpha)$ — полоса в E. При этом α осуществляет порядковый изоморфизм дизъюнктного дополнения $\ker(\alpha)$ и своего образа $\operatorname{im}(\alpha)$ (ср. 2.1.7 (3)). Полагая $S := \alpha^{-1} \circ \alpha \circ T$, мы видим, что S — линейный оператор. Более того, $S \in \partial p$ и $\alpha S = T$. Окончательно $T \in \alpha \circ \partial p$. $\rhd$

1.4.15. Приведем два следствия о продолжении положительных операторов.

(1) ***Теорема Канторовича.*** *Пусть X — предупорядоченное векторное пространство, а X_0 — массивное подпространство в нем, т. е. $X_0 + X^+ = X$. Тогда всякий положительный оператор T_0 из X_0 в произвольное K-пространство E допускает продолжение до положительного оператора T из X в E.*

$\triangleleft$ Пусть

$$p(x) := \inf\{T_0 x_0 : x_0 \in X_0,\, x_0 \geqslant x\} \quad (x \in X).$$

Тогда $p : X \to E$ — сублинейный оператор. Прямое вычисление показывает, что

$$\partial p = \{T \in L^+(X, E) : T \restriction X_0 = T_0\},$$

что и требуется. $\triangleright$

(2) *Пусть T — положительный оператор из векторной решетки X в K-пространство E. Допустим, что на массивной подрешетке $X_0 \subset X$ задан положительный оператор $S_0 : X_0 \to E$, удовлетворяющий неравенству $S_0 x_0 \leqslant T x_0$ $(x_0 \in X_0^+)$. Тогда существует положительное продолжение $S : X \to E$ оператора S_0 такое, что $S \leqslant T$.*

$\triangleleft$ Положим $p(x) := T(x^+)$ $(x \in X)$. Тогда $\partial p = [0, T]$ и $S_0 x_0 \leqslant S_0(x_0^+) \leqslant T(x_0^+) = p(x_0^+)$ для всех $x_0 \in X_0$. По теореме Хана — Банаха — Канторовича существует продолжение S оператора S_0, причем $S \in \partial p$. $\triangleright$

1.4.16. Рассмотрим теперь коротко случай нормированного пространства Y. Принято считать, что такое Y *допускает продолжение линейных операторов с сохранением нормы*, если для всякого нормированного пространства X любой линейный ограниченный оператор $T_0 : X_0 \to Y$, отображающий произвольное подпространство $X_0 \subset X$ в Y, допускает линейное ограниченное продолжение T на все X, причем такое, что $\|T\| = \|T_0\|$. Легко понять, что продолжение с сохранением нормы охватывается ситуацией пункта 1.4.9. Действительно, пусть C — единичный замкнутый шар пространства Y, и рассмотрим соответствие

$$\Phi \subset X \times Y, \quad \Phi : x \mapsto k\|x\|C,$$

где $k > 0$. Как видно, линейный оператор $T : X \to Y$ входит в $\partial\Phi$ тогда и только тогда, когда $\|T\| \leqslant k$. Если взять $k := \|T_0\|$, то $T_0 \in \partial(\Phi \restriction X_0)$, и для продолжения $T \in \partial\Phi$ оператора T_0 будет $\|T\| = \|T_0\|$. Таким образом, из теоремы 1.4.10 вытекает, что если единичный шар нормированного пространства Y обладает свойством бинарного пересечения, то Y допускает продолжение линейных операторов с сохранением нормы. Несмотря на то, что за продолжение с сохранением нормы отвечают вееры весьма специального вида, верно все же и обратное утверждение.

1.4.17. *Для того чтобы нормированное пространство допускало продолжение линейных операторов с сохранением нормы, необходимо и достаточно наличие свойства бинарного пересечения у замкнутого единичного шара рассматриваемого пространства.*

$\triangleleft$ Достаточность уже отмечена в 1.4.16. Докажем необходимость. Пусть A — замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве Y', а π — каноническое вложение Y во второе сопряженное пространство Y''. Положим $\varphi(y) := \pi y \restriction A$. Тогда отображение $y \mapsto \varphi(y)$ является изометрическим изоморфизмом Y на подпространство $Z := \varphi(Y)$ банахова пространства $l_\infty(A)$ ограниченных числовых функций на A. Последнее является K-пространством при поточечном упорядочении, причем замкнутый единичный шар совпадает с порядковым отрезком $D := [-e, e]$, где $e : A \to \mathbb{R}$ — функция, равная единице тождественно. По условию оператор $z \mapsto \varphi^{-1}(z)$ $(z \in Z)$ можно продолжить до линейного оператора $P' : l_\infty(A) \to Y$, так что $\|P'\| = 1$. Ясно, что $P := P' \circ \varphi$ — проектор в $l_\infty(A)$ на Z и $\|P\| = 1$. Далее, $P(D) \subset D$, поэтому, в силу предложений 1.4.7 и 1.4.8 (2), $P(D)$ обладает свойством бинарного пересечения. Но $P(D)$ — это замкнутый единичный шар пространства Z, значит, шар изометричного ему пространства Y также обладает требуемым свойством. $\triangleright$

В связи с установленной теоремой понятен интерес к выпуклым множествам, имеющим свойство бинарного пересечения. Такие множества полностью описаны следующим утверждением.

1.4.18. ***Теорема Нахбина.*** *Пусть C — выпуклое множество в векторном пространстве Y. Тогда C обладает свойством (положительного) бинарного пересечения в том и только в том случае, если в Y можно ввести предпорядок так, что выполнены условия:*

(1) *Y — предупорядоченное векторное пространство;*

(2) *существуют элементы $e \in Y^+$ и $y \in Y$ такие, что порядковый интервал $[-e, e]+y$ совпадает с C и $\operatorname{rec}(C) = Y^+ \cap (-Y^+)$;*

(3) *всякое ограниченное множество в Y имеет точную верхнюю границу.*

Используя теорию K-пространств, в частности, теорему Крейнов — Какутани об абстрактной характеризации решеток непрерывных функций $C(Q)$ на компактах Q и теорему Вулиха — Огасавары об условиях порядковой полноты пространства $C(Q)$, можно дать полную характеризацию нормированных пространств, допускающих продолжение линейных операторов с сохранением нормы.

1.4.19. *Теорема Акилова — Гуднера — Келли — Нахбина.* *Нормированное пространство допускает продолжение линейных операторов с сохранением нормы в том и только в том случае, если оно линейно изометрично пространству непрерывных функций $C(Q)$ на экстремально несвязном компакте Q.*

1.5. Системы выпуклых объектов

Как видно из предыдущих рассмотрений, в различные классы выпуклых множеств и выпуклых операторов можно вводить алгебраические операции и порядок, достаточно хорошо согласованные друг с другом. Из алгебраических систем, возникающих на этом пути, выделяются, прежде всего, конические решетки и связанные с ними пространства, являющиеся предметом изучения текущего параграфа.

1.5.1. Рассмотрим коммутативную полугруппу V, обладающую нейтральным элементом 0. Этот элемент мы будем называть *нулем*, а закон композиции в V, обозначаемый символом $+$, — *сложением*. Допустим, что V — одновременно упорядоченное множество, причем порядок $\leqslant$ согласован с операцией сложения в общепринятом смысле: если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$, каковы бы ни были $x, y, z \in V$. Обозначим символом $\operatorname{Isa}(V)$ множество всех изотонных супераддитивных отображений полугруппы V в себя, для которых нуль служит неподвижной точкой. Иными словами, $h \in \operatorname{Isa}(V)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$h : V \to V, \quad h(0) = 0, \quad h(x + y) \geqslant h(x) + h(y);$$
$$x \leqslant y \to h(x) \leqslant h(y) \quad (x, y \in V).$$

На множестве $\mathrm{Isa}(V)$ имеются две естественные бинарные операции: сложение $(h_1, h_2) \mapsto h_1 + h_2$ и умножение $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \circ h_2$, где $(h_1 + h_2)(v) := h_1(v) + h_2(v)$ и $h_2 \circ h_1(v) := h_2(h_1(v))$. При этом $(\mathrm{Isa}(V), +)$ — коммутативная полугруппа с нулем. Более того, умножение биаддитивно, т. е. выполнены соотношения дистрибутивности:

$$h \circ (h_1 + h_2) = h \circ h_1 + h \circ h_2, \quad (h_1 + h_2) \circ h = h_1 \circ h + h_2 \circ h.$$

Положим по определению $h_1 \leqslant h_2$ в том и только в том случае, если $h_1(v) \leqslant h_2(v)$ для всех $v \in V$. Тогда $\leqslant$ — порядок в $\mathrm{Isa}(V)$, согласованный с операцией $+$ в упомянутом выше смысле. Более того, для любых $g, h_1, h_2 \in \mathrm{Isa}(V)$ из $h_1 \leqslant h_2$ следует, что $h_1 \circ g \leqslant h_2 \circ g$ и $g \circ h_1 \leqslant g \circ h_2$. Выражаясь короче, скажем, что $\mathrm{Isa}(V)$ — *упорядоченное полукольцо.* Часть $\mathrm{Isa}(V)$, состоящую из аддитивных отображений, обозначим символом $\mathrm{Hom}^+(V)$. Ясно, что $\mathrm{Hom}^+(V)$ — упорядоченное подполукольцо в $\mathrm{Isa}(V)$. Понятие изотонного полукольцевого гомоморфизма не нуждается в пояснении.

Рассмотрим теперь K-пространство E. Пусть $L^r(E)$ — пространство *регулярных* (= представимых в виде разности положительных) операторов (эндоморфизмов) E. Хорошо известно, что с естественными алгебраическими операциями и упорядочением $L^r(E)$ является K-пространством. Это утверждение, — один из самых первых фактов теории K-пространств, — носит название *теоремы Рисса — Канторовича.* Относительно суперпозиции операторов $L^r(E)$ является алгеброй. Символом $\mathrm{Orth}(E)$ обозначена наименьшая полоса в $L^r(E)$, содержащая тождественный оператор I_E, т. е. $\mathrm{Orth}(E) := \{I_E\}^{dd}$, где $A^d := \{b : (\forall a \in A) |b| \wedge |a| = 0\}$ — *дизъюнктное дополнение* A. Напомним, что *полоса* или *компонента* N в K-пространстве F — это *нормальное* ($z \in F$, $y \in N$, $|z| \leqslant |y| \to z \in N$) и *правильное* (любое непустое подмножество $U \subset N$, ограниченное сверху в F, имеет точную верхнюю границу в N, т. е. $\sup_F U \in N$) подпространство в F. Относительно операций, индуцированных из кольца $L^r(E)$, множество $\mathrm{Orth}(E)$ становится коммутативной решеточно упорядоченной алгеброй (f-алгеброй). Более подробно свойства ортоморфизмов можно найти в курсах по теории векторных решеток и положительных операторов.

Итак, пусть $A := \mathrm{Orth}(E)$ — алгебра ортоморфизмов E. Обозначим через $\mathrm{Inv}^+(A)$ множество положительных обратимых элементов кольца A. Понятно, что если $\alpha \in \mathrm{Inv}^+(A)$, то $\alpha^{-1} \geqslant 0$. Предположим, что упорядоченная полугруппа V является верхней полурешеткой. Будем говорить, что V — это *A-коническая полурешетка*, если существует изотонный полукольцевой гомоморфизм $\pi : A^+ \to \mathrm{Isa}(V)$ такой, что $\pi(\mathrm{Inv}^+(A)) \subset \mathrm{Hom}^+(V)$; отображение $\pi(\mathbb{1})$ совпадает с тождественным эндоморфизмом I_V и, кроме того, выполнены условия:

(1) $\pi(\alpha)(u \vee v) = \pi(\alpha)(u) \vee \pi(\alpha)(v)$ $(\alpha \in \mathrm{Inv}^+(A);\ u, v \in V)$,

(2) $u + v \vee w = (u + v) \vee (u + w)$ $(u, v, w \in V)$.

В дальнейшем использовано удобное сокращение $\alpha u := \pi(\alpha)(u)$. Если, сверх сказанного, V является (условно полной) решеткой, то V называют (*условно полной*) *A-конической решеткой.* Иногда при необходимости уточнений говорят об условной порядковой полноте. Отображение h из V в некоторую A-коническую полурешетку называют *полулинейным*, если $h(\alpha u + \beta v) = \alpha h(u) + \beta h(v)$ для всех $\alpha, \beta \in A^+$ и $u, v \in V$.

1.5.2. Сублинейные операторы. Пусть X — векторное пространство, а E — это K-пространство. Обозначим через $\mathrm{Sbl}(X, E^\bullet)$ множество всех сублинейных операторов, действующих из X в $E^\bullet$. Сложение сублинейных операторов определяют в соответствии с правилами из 1.3.8 (3). Положим $A := \mathrm{Orth}(E)$. Тогда E является A-модулем и можно определить умножение $(\alpha, p) \mapsto \alpha p$ $(\alpha \in A^+,\ p \in \mathrm{Sbl}(X, E^\bullet))$ по формуле $\alpha p : x \mapsto \alpha(p(x))$ $(x \in X)$, где $\alpha(+\infty) := +\infty$ по определению.

Введем в $\mathrm{Sbl}(X, E^\bullet)$ отношение порядка, полагая $p \leqslant q$ в том и только в том случае, если $p(x) \leqslant q(x)$ для всех $x \in X$. Пусть $\mathrm{Sbl}(X, E)$ обозначает подмножество всюду определенных сублинейных операторов и мы будем рассматривать $\mathrm{Sbl}(X, E)$ с индуцированными алгебраическими операциями и порядком.

Множества $\mathrm{Sbl}(X, E^\bullet)$ *и* $\mathrm{Sbl}(X, E)$ *являются условно порядково полными A-коническими решетками. При этом для любого непустого ограниченного семейства сублинейных операторов точная верхняя* *граница вычисляется поточечно, а точная нижняя граница совпадает с инфимальной конволюцией этого семейства.*

1.5.3. Операторно-выпуклые множества. Множество $\mathscr{U} \subset L(X, E)$ называют *операторно-выпуклым*, если для любых элементов $S, T \in \mathscr{U}$ и таких ортоморфизмов $\alpha, \beta \in A^+$, что $\alpha + \beta = I_E$, выполнено соотношение $\alpha \circ S + \beta \circ T \in \mathscr{U}$. Ясно, что пересечение любого семейства операторно-выпуклых множеств операторно-выпукло. Поэтому для любого множества $\mathscr{U} \subset L(X, E)$ существует наименьшее операторно-выпуклое множество $\mathrm{op}(\mathscr{U})$, содержащее $\mathscr{U}$. Множество $\mathrm{op}(\mathscr{U})$ называют *операторно-выпуклой оболочкой* $\mathscr{U}$.

(1) *Операторно-выпуклая оболочка* $\mathrm{op}(\mathscr{U})$ *любого множества* $\mathscr{U} \subset L(X, E)$ *вычисляется по формуле:*

$$\mathrm{op}(\mathscr{U}) = \Biggl\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ T_k : T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{U}, \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A^+,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E,\ n \in \mathbb{N} \Biggr\}.$$

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{U}_0$ правую часть требуемого равенства. Понятно, что $\mathscr{U}_0$ — операторно-выпуклое множество, содержащее $\mathscr{U}$, поэтому $\mathrm{op}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}_0$. Для доказательства противоположного включения нужно показать, что если $\mathscr{U}'$ — какое-либо операторно-выпуклое множество, то для любых наборов $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{U}'$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A^+$ из условия $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E$ вытекает включение $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ T_k \in \mathscr{U}'$. Предположим, что последнее утверждение установлено для какого-нибудь $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $S := \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \circ T_k$, где $T_1, \ldots, T_{n+1} \in \mathscr{U}'$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in A^+$, причем $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = I_E$. Положим $\alpha := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ и заметим, что в каждой точке $x \in X$ справедлива оценка

$$Sx \leqslant \alpha(T_1 x \vee \ldots \vee T_n x) + \alpha_{n+1} \circ T_{n+1}.$$

Это означает, что

$$S - \alpha_{n+1} \circ T_{n+1} \in \partial(\alpha \circ (T_1 \vee \ldots \vee T_n)).$$

Привлекая предложения 1.4.12 (1) и 1.4.14 (5), найдем ортоморфизмы $\beta_1, \dots, \beta_n \in A^+$ такие, что

$$\beta_1 + \dots + \beta_n = I_E;$$
$$S - \alpha_{n+1} \circ T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \circ \alpha \circ T_k.$$

Таким образом, $S = \alpha \circ T + \alpha_{n+1} \circ T_{n+1}$, где $T = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \circ T_k$ и $T \in \mathscr{U}'$ в силу индукционного предположения. Так как $\alpha + \alpha_{n+1} = I_E$, то благодаря операторной выпуклости $\mathscr{U}'$ получаем $S \in \mathscr{U}'$. $\rhd$

Обозначим символом $\mathrm{CS}(X, E)$ множество всех непустых операторно-выпуклых подмножеств пространства $L(X, E)$. Множество $\mathscr{U} \subset L(X, E)$ назовем *слабо ограниченным*, если для каждого $x \in X$ в E ограничено множество $\{Tx : T \in \mathscr{U}\}$. Пусть $\mathrm{CS}_b(X, E)$ — множество всех слабо ограниченных множеств, являющихся элементами $\mathrm{CS}(X, E)$. Упорядочим $\mathrm{CS}(X, E)$ по включению и введем операции суммы и произведения на элементы $\mathrm{Inv}^+(A)$ по формулам

$$\mathscr{U}' + \mathscr{U}'' := \{T' + T'' : T' \in \mathscr{U}', T'' \in \mathscr{U}''\} \quad (\mathscr{U}', \mathscr{U}'' \in \mathrm{CS}(X, E));$$
$$\beta \mathscr{U} := \{\beta \circ T : T \in \mathscr{U}\} \quad (\beta \in \mathrm{Inv}^+(A),\ \mathscr{U} \in \mathrm{CS}(X, E)).$$

Доопределим теперь умножение на произвольное $\alpha \in A^+$ по формуле

$$\alpha \mathscr{U} := \bigcap_{T \in \mathscr{U}} \Big(\alpha T + \bigcap \{\beta(\mathscr{U} - T) : \beta \in \mathrm{Inv}^+(A),\ \beta \geqslant \alpha\} \Big).$$

Снабдим $\mathrm{CS}_b(X, E)$ индуцированными алгебраическими операциями и порядком.

(2) *Множества* $\mathrm{CS}(X, E)$ *и* $\mathrm{CS}_b(X, E)$ *являются условно порядково полными A-коническими решетками. При этом для любого ограниченного семейства операторно-выпуклых множеств точная верхняя граница вычисляется как операторно-выпуклая оболочка их объединения, а точная нижняя граница совпадает с пересечением рассматриваемого семейства.*

1.5.4. Бисублинейные операторы. Отображение $p : X \times Y \to E$ называют *бисублинейным*, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ сублинейными являются частичные отображения

$$p(x, \cdot) : v \mapsto p(x, v),\ \ p(\cdot, y) : u \mapsto p(u, y) \quad (u \in X, v \in Y).$$

Обозначим через $\mathrm{BSbl}(X,Y,E^\bullet)$ множество всех бисублинейных операторов, действующих из $X\times Y$ в E. Введем в $\mathrm{BSbl}(X,Y,E^\bullet)$ порядок и алгебраические операции. Положим $p\leqslant q$, если $p(x,y)\leqslant q(x,y)$ для всех $x\in X$ и $y\in Y$. Предположим, что p есть поточечный супремум семейства бисублинейных операторов $(p_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Тогда операторы $p(x,\cdot)$ и $p(\cdot,y)$ являются поточечными супремумами сублинейных операторов $(p_\xi(x,\cdot))_{\xi\in\Xi}$ и $(p_\xi(\cdot,y))_{\xi\in\Xi}$ соответственно. Отсюда в силу 1.3.7 (1) заключаем, что p — бисублинейный оператор. Умножение на элементы A^+ определим так же, как и в 1.5.2, т. е. $\alpha p(x,y):=\alpha\circ p(x,y)$ при $p(x,y)<+\infty$ и $\alpha p(x,y):=+\infty$ в противном случае. Тогда произведение αp бисублинейного оператора p на $\alpha\in A^+$, а также поточечная сумма p_1+p_2 бисублинейных операторов p_1 и p_2 являются бисублинейными операторами.

Пусть $\mathrm{BSbl}(X,Y,E)$ — множество бисублинейных операторов, принимающих конечные значения; порядок и операции мы считаем индуцированными из $\mathrm{BSbl}(X,Y,E^\bullet)$.

Множество $\mathrm{BSbl}(X,Y,E^\bullet)$ *с указанными алгебраическими операциями и порядком является условно полной A-конической решеткой. При этом A-коническое подпространство* $\mathrm{BSbl}(X,Y,E)$ *представляет собой условно полную A-коническую полурешетку с сокращением.*

1.5.5. Вееры. Пусть $\mathrm{Fan}(X,Y)$ — множество всех вееров из X в Y, упорядоченное по включению. Это означает, что для вееров Φ и Ψ выполнено $\Phi\leqslant\Psi$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x)\subset\Psi(x)$ при всех $x\in X$. Под суммой вееров Φ и Ψ мы будем понимать правую частичную сумму соответствий Φ и Ψ (см. 1.2.4). Произведение веера Φ на положительное число λ мы определим формулой

$$(\lambda\Phi)(x)=\lambda\Phi(x)\quad(x\in X,\ \lambda\geqslant 0).$$

Если $(\Phi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — непустое семейство вееров из X в Y, то оно имеет точную верхнюю границу $\Phi\in\mathrm{Fan}(X,Y)$, причем

$$\Phi(x)=\mathrm{co}\left(\bigcup\{\Phi_\xi(x):\xi\in\Xi\}\right)\quad(x\in X).$$

Предположим, что Y есть унитарный A-модуль. Для веера Φ и элемента $\alpha\in A^+$ положим

$$(\alpha\Phi)(x):=\alpha\Phi(x)\quad(x\in X),$$

где $\alpha\Phi(x)$ мы понимаем в соответствии с 1.5.3 (1). С указанными операциями и порядком множество $\mathrm{Fan}(X, Y)$ становится условно полной конической решеткой.

1.5.6. *Теорема.* *Пусть V — это A-коническая полурешетка с сокращением. Тогда существуют единственный с точностью до изоморфизма унитарный решеточно упорядоченный A-модуль $[V]$ и A-полулинейное вложение $\iota : V \to [V]$ такие, что $\iota[V]$ — воспроизводящий конус в $[V]$, причем ι сохраняет точные верхние границы непустых конечных множеств. Если h — это A-полулинейное отображение из V в A-коническую полурешетку W с сокращением, то существует единственное распространение h до A-линейного отображения $[h] : [V] \to [W]$. Отображение h сохраняет точные верхние границы непустых конечных множеств в том и только в том случае, когда $[h]$ — решеточный гомоморфизм.*

$\triangleleft$ Прежде всего заметим, что в условиях теоремы $0v = 0$ для всех $v \in V$ и, кроме того, умножение $v \mapsto \alpha v$ $(v \in V)$ — аддитивная операция для всех $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in A$. Действительно, $0+v = v = (0+\mathbb{1})v = 0v+v$ и сокращение на v дает $0v = 0$. Далее, если $\alpha \in A^+$, то $\alpha+\mathbb{1}$ — обратимый элемент, т. е. $\alpha + \mathbb{1} \in \mathrm{Inv}^+(A)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha(v_1 + v_2) + (v_1 + v_2) = (\alpha + \mathbb{1})(v_1 + v_2) &= \\ = (\alpha + \mathbb{1})v_1 + (\alpha + \mathbb{1})v_2 &= \\ = \alpha v_1 + \alpha v_2 + (v_1 + v_2).&\end{aligned}$$

После сокращения на $v_1 + v_2$ получаем $\alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha(v_1 + v_2)$.

В декартово произведение $V \times V$ можно ввести алгебраические операции и отношение предпорядка, полагая

$$\begin{gathered}(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2);\\ \alpha(v_1, v_2) := (\alpha^+ v_1, \alpha^+ v_2) + (\alpha^- v_2, \alpha^- v_1);\\ (v_1, v_2) \geqslant (w_1, w_2) \leftrightarrow v_1 + w_2 \geqslant v_2 + w_1,\end{gathered}$$

где $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ и $\alpha \in A$. Определим также отношение эквивалентности $\sim$ по формуле

$$(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2) \leftrightarrow v_1 + w_2 = v_2 + w_1.$$

Как видно, пары $v := (v_1, v_2)$ и $w := (w_1, w_2)$ эквивалентны в том и только в том случае, если $v \geqslant w$ и $w \geqslant v$. Положим $[V] := V \times V/\sim$, и пусть $\varphi := \varphi_V : V \times V \to [V]$ — *каноническая проекция*, т. е. соответствующее фактор-отображение. Обычным способом перенесем операции и предпорядок с $V \times V$ на $[V]$ так, чтобы

$$\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v + w), \quad \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v),$$
$$\varphi(v) \leqslant \varphi(w) \leftrightarrow v \leqslant w \quad (v, w \in V \times V,\ \alpha \in A).$$

Понятно, что при этом на $[V]$ возникает структура унитарного упорядоченного A-модуля. Пусть $\iota(v) := \iota_V(v) := \varphi(v, 0)$ $(v \in V)$. Тогда ι — это A-полулинейная биекция V на $\iota(V)$, причем для любых $v, w \in V$ будет

$$\varphi(v, w) = \varphi((v, 0) - (w, 0)) = \varphi(v, 0) - \varphi(w, 0) = \iota(v) - \iota(w).$$

Таким образом, $\iota(V)$ — это воспроизводящий конус в $[V]$. Заметим также, что $\iota(v) \geqslant \iota(w)$ в том и только в том случае, если $v \geqslant w$. Отсюда видно, что элемент $\iota(v_1 \vee v_2)$ служит точной верхней границей для $\iota(v_1)$ и $\iota(v_2)$. В самом деле, если для некоторых $u, w \in V$ выполнено $\varphi(u, w) \geqslant \iota(v_1), \iota(v_2)$, то должно быть $u \geqslant v_1 + w$ и $u \geqslant v_2 + w$. Отсюда получаем $u \geqslant v_1 \vee v_2 + w$ или $\varphi(u, w) \geqslant \iota(v_1 \vee v_2)$. Это и означает, что $\iota(v_1 \vee v_2) = \iota(v_1) \vee \iota(v_2)$. В частности, любые два элемента воспроизводящего конуса $\iota(V)$ имеют точную верхнюю границу. Но тогда у каждой пары $v, w \in [V]$ существует точная верхняя граница. Действительно, имеют место представления $v = v_1 - v_2$ и $w = w_1 - w_2$, где $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \iota(V)$. При этом, как нетрудно проверить,

$$v \vee w = (v_1 + w_2) \vee (v_2 + w_1) - v_2 - w_2.$$

Ясно, что $[V]$ — решеточно упорядоченный A-модуль, а $\iota(V)$ — это A^+-устойчивый (т. е. выдерживающий умножение на элементы A^+) воспроизводящий конус, содержащий точные верхние границы своих непустых конечных подмножеств.

Возьмем полулинейное отображение $h : V \to W$. Для произвольных $v_1, v_2 \in V$ положим

$$[h](\varphi_V(v_1, v_2)) := \varphi_W(h(v_1), h(v_2)).$$

Если $\varphi_V(v_1, v_2) = \varphi_V(u_1, u_2)$, то $v_1 + u_2 = u_1 + v_2$, значит, $h(v_1) + h(u_2) = h(u_1) + h(v_2)$, а потому $\varphi_W(h(v_1), h(v_2)) = \varphi_W(h(u_1), h(u_2))$. Тем самым показана корректность определения отображения $[h] : [V] \to [W]$. Используя полулинейность h, без труда установим A-линейность $[h]$. Заметим далее, что для всех $v \in V$ будет

$$[h] \circ \iota_V(v) = [h](\varphi_V(v, 0)) = \varphi_W(h(v), 0) = \iota_W(h(v)).$$

Значит, $[h] \circ \iota_V = \iota_W \circ h$. Отсюда вытекает единственность $[h]$. $\triangleright$

1.5.7. Мы применим сейчас теорему 1.5.6 к A-полулинейной решетке $\mathrm{Sbl}(X, E)$, в которой очевидным образом выполнен закон сокращения. Решеточно упорядоченный модуль $[\mathrm{Sbl}(X, E)]$ назовем *пространством сублинейных операторов* из X в E. Из построения пространства $[V]$, проведенного в 1.5.6, видно, что $[\mathrm{Sbl}(X, E)]$ можно отождествить с подпространством $\mathrm{Sbl}(X, E) - \mathrm{Sbl}(X, E)$ в E^X, состоящим из всех отображений из X в E, представимых в виде разности двух сублинейных операторов. Элемент $\varphi(p, q)$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$, отождествляют с разностью $x \mapsto p(x) - q(x)$ $(x \in X)$. Порядок в $[\mathrm{Sbl}(X, E)]$ совпадает с порядком, индуцированным из E^X, так что конус положительных элементов имеет вид $\{p \in [\mathrm{Sbl}(X, E)] : p(x) \geqslant 0 \ (x \in X)\}$.

Рассмотрим отображение $\partial : \mathrm{Sbl}(X, E) \to \mathrm{CS}(X, E)$, сопоставляющее сублинейному оператору p его субдифференциал в нуле ∂p. Это отображение часто называют *двойственностью Минковского*. Пусть, далее, отображение $\sup : \mathrm{CS}(X, E) \to \mathrm{Sbl}(X, E)$ действует по правилу

$$\sup(\mathscr{U}) : x \mapsto \sup\{Tx : T \in \mathscr{U}\} \quad (x \in X).$$

Как видно из 1.4.14 (2), суперпозиция $\sup \circ \partial$ есть тождественное отображение на $\mathrm{Sbl}(X, E)$. Положим $\mathrm{cop} := \partial \circ \sup$. Тогда отображение cop обладает следующими свойствами:

(a) $\mathrm{cop} \circ \mathrm{cop} = \mathrm{cop}$;

(b) $\mathrm{cop}(\mathscr{U}) \geqslant \mathscr{U}$ $(\mathscr{U} \in \mathrm{CS}(X, E))$;

(c) cop — это A-полулинейное отображение, сохраняющее точные верхние границы непустых конечных множеств.

Отображения с такими свойствами называют *абстрактными оболочками* или *оболочечными проекторами* (с соответствующими областями значений). Область значений отображения сор обозначим через $\mathrm{CS}_c(X,E)$. Благодаря свойству (a), будет

$$\mathrm{CS}_c(X,E) = \{\mathscr{U} \in \mathrm{CS}(X,E) : \mathrm{cop}(\mathscr{U}) = \mathscr{U}\}.$$

Отображения ∂ и $\sup$ взаимно обратны и устанавливают изоморфизм A-конических решеток $\mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\mathrm{CS}_c(X,E)$. Применив теорему 1.5.6 к $\mathrm{CS}_c(X,E)$, получим решеточно упорядоченный модуль $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ — *пространство опорных множеств.* Подводя итоги сказанному, можно сформулировать следующий результат.

Теорема. *Отображения ∂ и* сор *допускают, и притом единственное, распространение до A-линейных решеточных изоморфизмов $[\partial]$ и* [сор] *решеточно упорядоченных A-модулей* $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ *и* $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$, *причем* $[\partial]^{-1} = [\sup]$.

1.5.8. Обозначим через $\mathrm{Fan}_b(X, L(Y,E))$ множество всех вееров Φ из X в $L(Y,E)$ таких, что $\mathrm{dom}(\Phi) = X$ и $\Phi(x)$ — слабо ограниченное (т. е. поточечно порядково ограниченное) множество операторов при любом $x \in X$. Каждому вееру $\Phi \in \mathrm{Fan}_b(X, L(Y,E))$ поставим в соответствие отображение $s(\Phi) : X \times Y \to E$, действующее по правилу

$$s(\Phi) : (x,y) \mapsto \sup\{Ty : y \in \Phi(x)\}.$$

Легко проверить, что $s(\Phi)$ — бисублинейный оператор.

Возьмем теперь произвольный бисублинейный оператор $p : X \times Y \to E$. Определим соответствие $\partial p \subset X \times L(Y,E)$ формулой

$$\partial p : x \mapsto \partial p(x, \cdot).$$

Так как $p(x_1,\cdot) + p(x_2,\cdot) \geqslant p(x_1 + x_2,\cdot)$, то с учетом 1.4.12 (1) выводим: $\partial p(x_1 + x_2) \subset \partial p(x_1) + \partial p(x_2)$. Очевидно также, что $\partial p(\lambda x) = \partial(\lambda p)(x) = \lambda \partial p(x)$ при $\lambda > 0$. Иными словами, соответствие ∂p представляет собой веер. Пусть $\mathrm{Fan}_c(X, L(Y,E))$ обозначает множество всех вееров $\Phi \in \mathrm{Fan}_b(X, L(Y,E))$ таких, что $\Phi(x) \in \mathrm{CS}_c(X,E)$ для всех $x \in X$.

Справедливы следующие утверждения:

(1) *отображения*

$$\partial : \mathrm{BSbl}(X,Y,E) \to \mathrm{Fan}_b(X, L(Y,E)),$$
$$s : \mathrm{Fan}_b(X, L(Y,E)) \to \mathrm{BSbl}(X,Y,E)$$

являются полулинейными и при этом сохраняют точные верхние границы непустых конечных множеств;

(2) *отображение* $\mathrm{cop} := \partial \circ s$ *является полулинейным оболочечным проектором в* $\mathrm{Fan}_b(X, L(Y, E))$*, действующим на подпространство* $\mathrm{Fan}_c(X, L(Y, E))$*;*

(3) $s \circ \partial$ *— тождественное отображение в* $\mathrm{BSbl}(X, Y, E)$*;*

(4) *отображения* ∂ *и* s *осуществляют изоморфизм* A*-конических пространств* $\mathrm{BSbl}(X, Y, E)$ *и* $\mathrm{Fan}_c(X, L(Y, E))$*;*

(5) *отображения* ∂ *и* s *допускают, и притом единственные, распространения до соответствующих* A*-линейных решеточных гомоморфизмов* $[\partial]$ *и* $[s]$ *между решеточно упорядоченными* A*-модулями* $[\mathrm{BSbl}(X, Y, E)]$ *и* $[\mathrm{Fan}_c(X, L(Y, E))]$*, причем* $[\partial] = [s]^{-1}$.

1.5.9. Рассмотрим еще несколько примеров конических решеток, предполагая, что $E := \mathbb{R}$ — поле действительных чисел. В этой ситуации вместо $\mathbb{R}$-полулинейности и т. п. мы будем, как это принято, говорить просто о *полулинейности*. Пусть $\mathrm{CSeg}(X)$ — множество всех конических отрезков в векторном пространстве X. Сумма конических отрезков и произведение конического отрезка на неотрицательное число определены в 1.1.6. Кроме того, положим $C \leqslant D \leftrightarrow C \subset D$. Введем обозначение

$$\mathrm{CS}^{+}(X) := (\mathrm{CSeg}(X),\, +,\, \cdot,\, \leqslant).$$

Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и $C \in \mathrm{CSeg}(X)$ положим $\alpha * C := \alpha^{-1} C$.

Пусть, кроме того, $0 * C$ — коническая оболочка $\mathrm{cone}(C)$ конического отрезка C. Обозначим через $\prec$ отношение порядка, противоположное включению, т. е. $C \prec D \leftrightarrow C \supset D$. Положим по определению

$$\mathrm{CS}^{\#}(X) := (\mathrm{CSeg}(X),\, \#,\, *,\, \prec).$$

Введем соответствующие множества сублинейных функционалов. Пусть $\mathrm{Sbl}^{+}(X)$ — подмножество $\mathrm{Sbl}(X, \mathbb{R}^{\bullet})$, состоящее из положительных сублинейных функционалов с индуцированными операциями и порядком. Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, и $p \in \mathrm{Sbl}(X, \mathbb{R})$, $p \geqslant 0$, положим $\alpha * p := \alpha^{-1} p$. Пусть, кроме того, $0 * p := \delta_{\mathbb{R}}(\ker(p))$, т. е. $(0 * p)(x) = 0$, если $p(x) = 0$, и $(0 * p)(x) = +\infty$ в противном случае.

Напомним (ср. 1.3.8 (4)), что *инверсная сумма* $p\#q$ сублинейных функционалов $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, \mathbb{R}^\bullet)$ имеет вид

$$(p\#q)(x) = \inf\{p(x_1) \vee q(x_2) : x = x_1 + x_2\} \quad (x \in X).$$

Обозначим через $\prec$ порядок в $\mathrm{Sbl}^+(X)$, противоположный к $\leqslant$, т. е. $p \prec q \leftrightarrow p \geqslant q$. Положим теперь

$$\mathrm{Sbl}^\#(X) := (\mathrm{Sbl}^+(X, \mathbb{R}),\ \#,\ *,\ \prec).$$

1.5.10. *Теорема.* *Алгебраические системы* $\mathrm{CS}^+(X)$, $\mathrm{CS}^\#(X)$, $\mathrm{Sbl}^+(X)$ *и* $\mathrm{Sbl}^\#(X)$ *являются порядково полными коническими решетками.*

$\triangleleft$ Прежде всего ясно, что множества $\mathrm{CSeg}(X)$ и $\mathrm{Sbl}^+(X)$ со своими естественными порядками являются полными решетками. Значит, то же самое верно и для противоположных порядков.

По совершенно очевидным соображениям алгебраические операции в $\mathrm{CS}^+(X)$ и $\mathrm{Sbl}^+(X)$ удовлетворяют всем требуемым условиям. Подробнее стоит рассмотреть лишь необычные операции $\#$ и $*$. Однако и здесь коммутативность и ассоциативность этих операций и их согласованность с порядком вытекают непосредственно из определений $\prec$. Ограничимся проверкой дистрибутивности умножения относительно сложения чисел, а также условия 1.5.1 (2).

(1) $(\alpha+\beta)*C = (\alpha*C)\#(\beta*C)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$. Если $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$, то

$$(\alpha+\beta)*C = \alpha^{-1}C = \bigcup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1} \frac{\varepsilon}{\alpha}C =$$
$$= \bigcup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1} \left\{\frac{\varepsilon}{\alpha}C \cap \mathrm{cone}(C)\right\} = (\alpha*C)\#(0*C).$$

То же самое верно, если $\beta \neq 0$ и $\alpha = 0$. Случай $\alpha = \beta = 0$ тривиален. Предположим, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Для любого $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ верно

$$\gamma_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\alpha} \wedge \frac{1-\varepsilon}{\beta} \leqslant \frac{1}{\alpha+\beta};$$
$$\alpha*C\#\beta*C = \bigcup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1} \frac{\varepsilon}{\alpha}C \cap \frac{1-\varepsilon}{\beta}C =$$
$$= \bigcup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1} \gamma_\varepsilon C \subset \frac{1}{\alpha+\beta}C = (\alpha+\beta)*C.$$

С другой стороны, при $\varepsilon := \alpha/(\alpha+\beta)$ будет

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}C \cap \frac{1-\varepsilon}{\beta}C = \frac{1}{\alpha+\beta}C = (\alpha+\beta) * C.$$

Следовательно, $(\alpha * C)\#(\beta * C) \supset (\alpha+\beta) * C$.

(2) $(C_1\#D) \vee (C_2\#D) = (C_1 \vee C_2)\#D$. Поскольку порядок в множестве $\mathrm{CS}^{\#}(X)$ противоположен порядку по включению, нужно показать, что

$$(C_1\#D) \cap (C_2\#D) = (C_1 \cap C_2)\#D.$$

Включение $\supset$ очевидно, ибо $C_k\#D \supset (C_1 \cap C_2)\#D$ $(k := 1, 2)$. Для доказательства обратного включения возьмем $x \in (C_1\#D)\cap(C_2\#D)$. По определению найдутся $0 \leqslant \varepsilon, \delta \leqslant 1$ такие, что $x \in \varepsilon C_1 \cap (1-\varepsilon)D$ и $x \in \delta C_2 \cap (1-\delta)D$. Если $\varepsilon \leqslant \delta$, то $x \in (\varepsilon C_1) \cap (\delta C_2) \subset \delta(C_1 \cap C_2)$, значит,

$$x \in \delta(C_1 \cap C_2) \cap (1-\delta)D \subset (C_1 \cap C_2)\#D.$$

Аналогично обстоит дело, если $\delta \leqslant \varepsilon$. Здесь использовано соотношение $\alpha C_1 \cap \alpha C_2 = \alpha(C_1 \cap C_2)$, справедливое для всех $\alpha \geqslant 0$. $\triangleright$

1.6. Решеточно нормированные пространства

Как видно из предыдущего параграфа, некоторые системы выпуклых объектов допускают вполне естественную модульную структуру. Однако модульная структура возникает и в том случае, когда пространство является специальным выпуклым множеством линейных операторов или же векторной нормой — важной представительницей класса сублинейных операторов. В этом параграфе мы даем основные определения и анализируем простейшие свойства пространств с векторной нормой.

1.6.1. Рассмотрим вещественное векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. (Все встречающиеся нам векторные решетки мы считаем архимедовыми.) Отображение $[\![\cdot]\!] : X \to E^+$ именуют *векторной* (E-*значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\lvert x \rvert = 0 \leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$;

(2) $\lvert \lambda x \rvert = |\lambda| \lvert x \rvert \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in X)$;

(3) $\lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму называют *разложимой* или *нормой Канторовича*, если

(4) для любых $e_1, e_2 \in E^+$ и $x \in X$, удовлетворяющих соотношению $\lvert x \rvert = e_1 + e_2$, существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\lvert x_k \rvert = e_k$ $(k := 1, 2)$.

В том случае, когда условие (4) выполнено лишь для дизъюнктных $e_1, e_2 \in E^+$, норму называют *дизъюнктно разложимой* или, короче, *d-разложимой*.

Тройку $(X, \lvert\cdot\rvert, E)$ (а также (X, E), $(X, \lvert\cdot\rvert)$ или X, опуская подразумеваемые параметры) назовем *решеточно нормированным пространством* (*над* E), если $\lvert\cdot\rvert$ — это E-значная норма на векторном пространстве X. При этом E мы будем называть *нормирующей решеткой* пространства X. Если норма $\lvert\cdot\rvert$ разложима (d-разложима), то и само пространство $\big(X, \lvert\cdot\rvert\big)$ мы будем называть разложимым (d-разложимым). Иногда используют аббревиатуру РНП вместо (дериватов) термина «решеточно нормированное пространство».

1.6.2. Если $\lvert x \rvert \wedge \lvert y \rvert = 0$, то элементы $x, y \in X$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$. Как и в случае векторной решетки, множество вида $M^\perp := \{x \in X : (\forall y \in M)\ x \perp y\}$, где $\varnothing \neq M \subset X$, именуют *полосой* или *компонентой* пространства X. Символ $\mathscr{B}(X)$ обозначает множество всех полос в X, упорядоченное по включению. Скажем, что $K \in \mathscr{B}(X)$ допускает проектор, если $K \oplus K^\perp = X$. Проектор $h(\pi)$ на полосу K параллельно полосе $K^\perp$ называют *порядковым.* Говорят, что X — решеточно нормированное пространство *с проекциями*, если всякая полоса X допускает порядковый проектор. Для единообразия мы часто пишем $\mathfrak{B}(X)$ вместо $\mathscr{B}(X)$ и, допуская вольность, используем терминологию из теории векторных решеток. Такое обращение допустимо до тех пор, пока X рассматривается только как РНП. Однако если X одновременно является векторной решеткой, то следует быть более аккуратным, чтобы избежать путаницы, см. ниже 1.6.4 и 1.6.9. Для множеств $L \subset E$ и $M \subset X$ положим по определению $h(L) := \big\{x \in X : \lvert x \rvert \in L\big\}$ и $\lvert M \rvert := \{\lvert x \rvert : x \in M\}$. Ясно, что $\big\lvert h(L) \big\rvert \subset L \cap \lvert X \rvert$.

(1) *Пусть всякая полоса векторной решетки* $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ *содержит норму некоторого ненулевого элемента. Тогда* $\mathfrak{B}(X)$ *— полная булева алгебра и отображение* $L \mapsto h(L)$ *осуществляет изоморфизм булевых алгебр* $\mathfrak{B}\big(|X|^{\perp\perp}\big)$ *и* $\mathfrak{B}(X)$.

$\lhd$ Понятно, что отображение h сохраняет пересечение любого непустого семейства полос. Поэтому h сохраняет точные нижние границы, так как в рассматриваемой алгебре они совпадают с пересечениями. Более того, $h\big(\{0\}\big) = \{0\}$ и $h\big(|X|^{\perp\perp}\big) = X$. Следовательно, достаточно показать, что $h(L^{\perp}) = h(L)^{\perp}$ для произвольного $L \in \mathfrak{B}\big(|X|^{\perp\perp}\big)$. Включение $h(L^{\perp}) \subset h(L)^{\perp}$ очевидно из определений. Если $0 \neq x \in h(L)^{\perp}$, то $|x|$ дизъюнктен всем элементам из L вида $|y|$. В то же время соотношение $x \notin h(L^{\perp})$ влечет, что $e \leqslant |x|$ для подходящего $0 < e \in L^{+}$. Но тогда в полосе $\{e\}^{\perp\perp}$ нет ненулевых элементов вида $|y|$, что противоречит допущению $x \notin h(L^{\perp})$. $\rhd$

(2) *Если элементы* $x, y \in X$ *дизъюнктны, то* $|x + y| = |x| + |y|$.

$\lhd$ В самом деле, из соотношений $|x| \wedge |y| = 0$ и $|x| \leqslant |x + y| + |y|$ выводим

$$|x| \leqslant \big(|x+y| + |y|\big) \wedge |x| \leqslant |x+y| \wedge |x| \leqslant |x+y|\,.$$

Аналогично $|y| \leqslant |x + y|$, поэтому

$$|x| + |y| = |x| \vee |y| \leqslant |x+y|\,,$$

что и требовалось. $\rhd$

(3) *Для любой пары дизъюнктных элементов* $e_1, e_2 \in E$ *существует единственное разложение* $x = x_1 + x_2$ *со свойствами* $|x_1| = e_1$ *и* $|x_2| = e_2$.

$\lhd$ Допустим, что $|x_1| = |y_1| = e_1$, $|x_2| = |y_2| = e_2$ и $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Тогда $x_1 - y_1 \perp y_2 - x_2$, так как $|x_1 - y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| = 2e_1$ и $|x_2 - y_2| \leqslant 2e_2$. В силу (2) $0 = \big|(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\big| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, следовательно, $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. $\rhd$

(4) *Пусть в условиях предложения (1)* X *является* d*-разложимым и существует порядковый проектор* π *на полосу* $L \in \mathfrak{B}(E_0)$. *Тогда на полосу* $K := h(L)$ *существует проектор* $h(\pi)$ *параллельно полосе* $K^{\perp}$, *причем* $\pi\,|x| = \big|h(\pi)x\big|$ *для всех* $x \in X$.

$\triangleleft$ В силу условия d-разложимости для произвольного $x \in X$, найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = \pi\,|x|$ и $|x_2| = \pi^\perp\,|x|$. Это означает, что X есть прямая сумма полос K и $K^\perp$. Пусть $h(\pi)$ — проектор на полосу K параллельно $K^\perp$. По определению изоморфизма h имеем $h(\pi)x \in K = h(\pi E_0)$, т. е. $\big|h(\pi)x\big| \in \pi E_0$. Тем самым $\pi^\perp\,\big|h(\pi)x\big| = 0$ или $\pi\,\big|h(\pi)x\big| = \big|h(\pi)x\big|$. Элементы $h(\pi)x$ и $h(\pi^\perp)x$ дизъюнктны, поэтому, используя (2), можно написать

$$\pi\,|x| = \pi\big(\big|h(\pi)x\big| + \big|h(\pi^\perp)x\big|\big) = \pi\,\big|h(\pi)x\big|.$$

Следовательно, $\pi\,|x| = \pi\,\big|h(\pi)x\big| = \big|h(\pi)x\big|$. $\triangleright$

1.6.3. Всюду в дальнейшем под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X понимают множество $\mathscr{B}$ коммутирующих идемпотентных линейных операторов, действующих в X, в котором роли нуля и единицы играют соответственно нулевое и тождественное отображения, а булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_X - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathscr{B}).$$

Пусть $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — решетка с проекциями, а пространство X является d-разложимым. Тогда X — пространство с проекциями. Более того, существуют полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов в X и изоморфизм h из $\mathfrak{P}(E_0)$ на $\mathscr{B}$ такой, что

$$b\,|x| = \big|h(b)x\big| \quad \big(b \in \mathfrak{P}(E_0),\ x \in X\big).$$

$\triangleleft$ Ненулевая полоса $L \in \mathfrak{B}(E_0)$ не может быть дизъюнктной к множеству $|X|$. Значит, $|x| \notin L^\perp$ для некоторого $x \in X$. Если π — порядковый проектор на L, то элемент $\pi\,|x|$ отличен от нуля. Ввиду d-разложимости X, для некоторого $x_0 \in X$ выполнено $|x_0| = \pi\,|x| \in L$. Следовательно, можно применить 1.6.2 (1, 4). Каждая полоса $K \in \mathfrak{B}(X)$ допускает проектор π_K параллельно $K^\perp$. Положим $\mathscr{P} := \{\pi_K : K \in \mathfrak{B}(X)\}$. Ясно, что $\mathscr{P}$ — полная булева алгебра проекторов. Порядковому проектору $\rho \in \mathfrak{P}(E_0)$, поставим в соответствие проектор π_K, где $K := h(\rho E_0)$. Полученное таким образом отображение обозначим той же буквой h. Тогда h — изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathscr{P}$. Требуемые свойства изоморфизма h следуют из 1.6.2 (4). $\triangleright$

В дальнейшем булевы алгебры $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathscr{P}(X) := \mathscr{P}$ отождествлены и мы пишем $\pi\,|x| = |\pi x|$ ($x \in X$, $\pi \in \mathfrak{P}(E_0)$).

1.6.4. Предположим, что X — векторная решетка. Норму $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$ именуют *монотонной*, если $|x| \leqslant |y|$ влечет $\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \leqslant \lvert\!\lvert y\rvert\!\rvert$ $(x, y \in X)$.

(1) *Пусть X — разложимое решеточно нормированное пространство над векторной решеткой E. Если X — векторная решетка, а векторная норма монотонна, то $\mathscr{B}(X)$ является правильной подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$. В частности, всякая полоса решеточно нормированного пространства X будет полосой векторной решетки X.*

$\lhd$ Заметим, что в силу монотонности векторной нормы множество $h(L)$ будет порядковым идеалом в X для любой полосы $L \in \mathfrak{B}(E)$. Если $0 \leqslant x \in h(L)$ и $0 \leqslant y \in h(L^\perp)$, то $0 \leqslant x \wedge y \in h(L) \cap h(L^\perp) = \{0\}$, так как монотонность нормы влечет $\lvert\!\lvert x \wedge y\rvert\!\rvert \leqslant \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \wedge \lvert\!\lvert y\rvert\!\rvert$. Итак, $x \wedge y = 0$ и, стало быть, элементы x и y дизъюнктны не только в смысле 1.6.2, но и в смысле порядка в X.

Обозначим буквой d отношение дизъюнктности в векторной решетке X, т. е. $u\, d\, v \leftrightarrow |u| \wedge |v| = 0$. Тогда доказанное можно записать в виде $h(L)\, d\, h(L^\perp)$, откуда вытекает включение $h(L^\perp) \subset h(L)^d$, где $A^d := \{x \in X : (\forall a \in A)\, x\, d\, a\}$. В действительности имеет место равенство $h(L^\perp) = h(L)^d$ для любой полосы $L \in \mathfrak{B}(E)$.

В самом деле, предположим, что $x\, d\, h(L)$ и $x \notin h(L^\perp)$. Тогда $\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \notin L^\perp$, поэтому существует $0 < e \in L$, для которого $e \leqslant \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert$. Воспользовавшись разложимостью X, подберем такие u, $v \in X$, что $x = u + v$, $\lvert\!\lvert u\rvert\!\rvert = e$ и $\lvert\!\lvert v\rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert - e$. Так как $u \in h(L)$, то $x\, d\, u$, поэтому $|x| \leqslant |v|$. Но тогда $\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \leqslant \lvert\!\lvert v\rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert - e$ и приходим к противоречивому соотношению $0 < e \leqslant 0$. Таким образом, $x\, d\, h(L)$ влечет $x \in h(L^\perp)$, следовательно, $h(L^\perp) = h(L)^d$. Заменив L на $L^\perp$, получим $h(L) = h(L^\perp)^d$. Отсюда $h(L) \in \mathfrak{B}(X)$, т. е. $\mathscr{B}(X) \subset \mathfrak{B}(X)$. В то же время, учитывая 1.6.2 (1), можно написать $h(L)^\perp = h(L^\perp) = h(L)^d$, поэтому булево дополнение в алгебре $\mathscr{B}(X)$ индуцировано из $\mathfrak{B}(X)$. Так как точные нижние границы в обеих алгебрах $\mathfrak{B}(X)$ и $\mathscr{B}(X)$ совпадают с теоретико-множественным пересечением, то теперь можно заключить, что $\mathscr{B}(X)$ — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$. $\rhd$

(2) *Пусть X то же, что и в (1), а E — векторная решетка с проекциями. Тогда $\mathscr{P}(X)$ будет правильной подалгеброй полной булевой алгебры $\mathfrak{P}(X)$. В частности, каждый проектор на полосу решеточно нормированного пространства X является порядковым проектором векторной решетки X.*

$\lhd$ Следует из (1) и 1.6.3. $\rhd$

1.6.5. Говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *bo-сходится* к элементу $x\in X$ и пишут $x = bo\text{-}\lim x_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в E такая, что $\inf_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma = 0$ и для любого $\gamma\in\Gamma$ найдется индекс $\alpha(\gamma)\in\mathrm{A}$, для которого $|x-x_\alpha| \leqslant e_\gamma$ при всех $\alpha\geqslant\alpha(\gamma)$. Пусть для некоторого $e\in E^+$ выполнено условие: для любого числа $\varepsilon>0$ существует индекс $\alpha(\varepsilon)\in\mathrm{A}$ такой, что $|x-x_\alpha|\leqslant\varepsilon e$ при всех $\alpha\geqslant\alpha(\varepsilon)$. Тогда говорят, что (x_α) *br-сходится* (или *сходится с регулятором* e) к элементу x и пишут $x = br\text{-}\lim x_\alpha$. Сеть (x_α) называют *bo-фундаментальной* (*br-фундаментальной*), если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ bo-сходится (br-сходится) к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *bo-полным* (*br-полным*), если всякая bo-фундаментальная (br-фундаментальная) сеть в нем bo-сходится (br-сходится) к элементу этого пространства.

Возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и свяжем с ним сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, где $\mathrm{A} := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств множества Ξ и $y_\alpha := \sum_{\xi\in\alpha} x_\xi$. Если существует $x := bo\text{-}\lim y_\alpha$, то говорят, что семейство (x_ξ) является *bo-суммируемым* и элемент x — его *суммой*. При этом принято писать $x = bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Иногда, если само пространство X не векторная решетка и путаница невозможна, то в терминах типа bo-полнота мы будем писать o и r вместо bo и br.

Множество $M\subset X$ называют *ограниченным по норме*, если множество $|M|$ ограничено в E, т. е. если существует такой элемент $e\in E^+$, что $|x|\leqslant e$ для всех $x\in M$. Пространство X называют *дизъюнктно полным* или *d-полным*, если в нем bo-суммируемо всякое ограниченное по норме множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов.

Теорема. *Разложимое решеточно нормированное пространство bo-полно в том и только в том случае, если оно дизъюнктно полно и полно относительно сходимости с регулятором.*

$\lhd$ Доказательство можно найти в [108, 367]. $\rhd$

Разложимое bo-полное решеточно нормированное пространство принято называть *пространством Банаха — Канторовича* (или, коротко, ПБК). Если пространство Банаха — Канторовича одновременно является векторной решеткой и векторная норма монотонна, то используют термин *решетка Банаха — Канторовича.* Пространство Банаха — Канторовича называют *расширенным*, если нормирующая решетка является расширенным K-пространством. Нетрудно видеть, что ПБК будет расширенным в том и только в том случае, когда каждое множество попарно дизъюнктных элементов в нем bo-суммируемо.

1.6.6. Под *максимальным расширением* (*bo-пополнением*) решеточно нормированного пространства (X, E) понимают расширенное пространство Банаха — Канторовича (Y, mE) (соответственно пространство Банаха — Канторовича (Y, oE)) вместе с линейным изометрическим вложением $\imath : X \to Y$ таким, что любое расширенное bo-полное подпространство (Y, mE) (соответственно любое разложимое bo-полное подпространство (Y, oE)), содержащее $\imath X$, совпадает с Y. Здесь oE обозначает порядковое пополнение векторной решетки E, а mE — максимальное расширение K-пространства oE. Более того, мы предполагаем, что $E \subset oE \subset mE$, см. [108, 367].

(1) *Теорема.* *Каждое решеточно нормированное пространство имеет единственное с точностью до линейной изометрии максимальное расширение. Пространство (mX, mE) служит максимальным расширением для (X, E).*

(2) *Теорема.* *Каждое решеточно нормированное пространство X обладает, и притом единственным с точностью до линейной изометрии, bo-пополнением.*

(3) *Для bo-пополнения $\widehat{X}$ пространства X имеет место представление $\widehat{X} = rdX$. Если X разложимо и $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — решетка с главными проекциями, то справедливо также представление $\widehat{X} = oX$.*

$\triangleleft$ Доказательства для (1)–(3) см. в [108, 367]. $\triangleright$

1.6.7. Предполагая, что (X, E) — разложимое РНП, установим три вспомогательных факта.

(1) *Пусть даны произвольный элемент $x \in X$ и возрастающая последовательность $(a_n) \subset E^+$, причем выполнено $(a_n) \leqslant |x|$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда существует последовательность $(x_n) \subset X$ такая, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $n < m \in \mathbb{N}$ выполнены равенства*

$$|x_n| = a_n, \quad |x - x_n| = |x| - a_n, \quad |x_m - x_n| = a_m - a_n.$$

$\lhd$ Обозначим $b_n := |x| - a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $b_0 := |x|$. В силу разложимости X можно подобрать последовательности $(u_n) \subset X$ и $(v_n) \subset X$ так, что

$$\begin{aligned} &x = u_1 + v_1, && |u_1| = a_1, && |v_1| = b_1, \\ &u_{n+1} + v_{n+1} = v_n, && |v_{n+1}| = b_{n+1}, && |u_{n+1}| = b_n - b_{n+1}. \end{aligned}$$

Положим $x_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Тогда $x = x_n + v_n$ и выполнены соотношения:

$$|x_n| \leqslant \sum_{k=1}^n |u_k| = \sum_{k=1}^n (b_{k-1} - b_k) = b_0 - b_n = a_n.$$

В то же время $|x| \leqslant |x_n| + |v_n| \leqslant a_n + b_n = |x|$, следовательно, $|x_n| = a_n$. Тем самым для $m > n$ будет

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^m |u_k| = a_m - a_n \leqslant |x_m - x_n|,$$

откуда и вытекает требуемое равенство $|x_m - x_n| = a_m - a_n$. $\rhd$

(2) *Если РНП (X, E) является d-полным, то (X, E) — пространство с проекциями. В частности, каждая d-полная архимедова векторная решетка есть решетка с проекциями.*

$\lhd$ Докажем лишь первое утверждение. Второе доказано, например, в [107]. Для фиксированного $y \in X$ обозначим символом $E(y)$ o-идеал в E, порожденный элементом $|y|$, и положим $X(y) := \{x \in X : |x| \in E(y)\}$. Легко видеть, что $(X(y), E(y))$ — разложимое РНП. Если K — полоса в X и $K(y) := K \cap X(y)$, то проекции y на K и $K(y)$ существуют одновременно и они равны. В то же время решетка $E(y)$ дизъюнктно полна. В самом деле, для произвольного дизъюнктного семейства (e_ξ), ограниченного в $E(y)$, существует семейство $(x_\xi) \subset X$ такое, что $|x_\xi| = e_\xi$. Поэтому для $x = bo\text{-}\sum x_\xi$ будет $|x| = o\text{-}\sum |x_\xi| = \sup e_\xi \in E(y)$. Следовательно, ввиду 1.6.2 (4) остается лишь применить вторую часть сформулированного предложения. $\rhd$

(3) *Если (X, E) является одновременно d-полным и br-полным, то $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — это K-пространство и $|X| = E_0^+$.*

$\lhd$ Согласно (2) X — пространство с проекциями. Пусть $\widehat{E}$ — порядковое пополнение векторной решетки E. Как видно из доказательства (2), $E(y)$ — решетка с проекциями. Следовательно, для любого $e \in \widehat{E}(y)^+$ можно подобрать возрастающую последовательность $e_n \in E(y)^+$, сходящуюся с регулятором к e. Используя (1), выберем последовательность $(x_n) \subset X$ такую, что $\lvert x_n \rvert = e_n$ и $\lvert x_m - x_n \rvert \leqslant e_m - e_n$ $(m > n)$. Ясно, что последовательность (x_n) будет r-фундаментальной и, ввиду br-полноты пространства X, существует $x := br\text{-}\lim x_n \in X$. Более того, $\lvert x \rvert = r\text{-}\lim e_n = e$, следовательно, $E(y) = \widehat{E}(y)$. Пусть теперь e — произвольный положительный элемент из порядкового пополнения решетки $\lvert X \rvert^{\perp\perp}$. Тогда для произвольного максимального дизъюнктного семейства $(e_\xi) \subset \lvert X \rvert$ можно выбрать такое разбиение (π_n^ξ) единичного проектора в $\widehat{E}$, что $\pi_n^\xi e \leqslant n e_\xi$, т. е. $\pi_n^\xi e \in \lvert X \rvert$. Поэтому найдутся семейство $(x_n^\xi) \subset X$ и элемент $x \in X$ такие, что $\lvert x_n^\xi \rvert = \pi_n^\xi e \leqslant e$ и $\lvert x \rvert = e$. Следовательно, $E_0 = \lvert X \rvert^{\perp\perp}$ — это K-пространство и $\lvert X \rvert = E_0^+$. $\triangleright$

1.6.8. Пусть A — подрешетка и подкольцо решеточно упорядоченного кольца $\mathrm{Orth}(E)$, причем A содержит булеву алгебру $\mathfrak{P}(E)$. Говорят, что решеточно нормированное пространство X над E *допускает согласованную модульную структуру над* A, если X можно снабдить структурой точного унитарного A-модуля так, что выполнены условия:

(a) естественное представление A в X определяет тот же изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{P}(X)$, что и в 1.6.3;

(b) $\lvert ax \rvert = |a| \, \lvert x \rvert$ $(a \in A,\ x \in X)$.

В том случае, когда X — векторная решетка, предположим дополнительно к (a) и (b), что имеет место следующее:

(c) $\mathscr{B}(X)$ — правильная подалгебра полной булевой алгебры полос $\mathfrak{B}(X)$.

Пусть X — некоторое d-разложимое решеточно нормированное пространство с нормирующей решеткой E, причем $E = \lvert X \rvert^{\perp\perp}$. Пусть A — подрешетка и подкольцо с единицей в $\mathrm{Orth}(E)$, *содержащее* $\mathfrak{P}(E)$. *Каждое из следующих утверждений влечет, что X допускает согласованную модульную структуру над A:*

(1) *A — алгебра конечнозначных элементов, т. е. элементов вида $\alpha_1\pi_1 + \ldots + \alpha_k\pi_k$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные скаляры, а $\pi_1, \ldots, \pi_2$ — попарно дизъюнктные проекторы из $\mathfrak{P}(E)$;*

(2) *E обладает сильным свойством Фрейденталя, X является br-полным и $A := \mathscr{Z}(E)$;*

(3) *E порядково σ-полна, X секвенциально bo-полно и $A = \mathrm{Orth}(E)$;*

(4) *E порядково σ-полна, X — векторная решетка с монотонной векторной нормой и $A = \mathrm{Orth}(E)$.*

$\triangleleft$ Пусть конечнозначный элемент $a \in A$ имеет представление $a = \sum \lambda_k \pi_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n$ — конечное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$. Положим $ax := \sum \lambda_k \pi_k x$. Принимая в расчет 1.6.2 (2) и 1.6.3, а также обычное отождествление булевых алгебр $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{P}(X)$, можно написать

$$\lvert ax \rvert = \Bigl\lvert \sum \lambda_k \pi_k x \Bigr\rvert = \sum |\lambda_k| \pi_k \lvert x \rvert = a \lvert x \rvert .$$

Далее, если выполнено (2) (соответственно (3)), то произвольный элемент $a \in A$ является пределом относительно сходимости с регулятором (порядковым пределом) возрастающей последовательности конечнозначных элементов $(a_n) \subset A$. Последовательность $(a_n x) \subset X$ будет br-фундаментальной (bo-фундаментальной), так как

$$\lvert a_n x - a_m x \rvert = |a_n - a_m| \lvert x \rvert \xrightarrow{(r)} 0 \ \ (\xrightarrow{(o)} 0).$$

Таким образом, можно положить по определению $ax := br\text{-}\lim a_n x$ (соответственно $ax := bo\text{-}\lim\, a_n x$). При этом имеют место равенства:

$$\lvert ax \rvert = \lvert br\text{-}\lim a_n x \rvert = r\text{-}\lim |a_n| \lvert x \rvert = a \lvert x \rvert ,$$
$$\lvert ax \rvert = \lvert\, bo\text{-}\lim\, a_n x \rvert = o\text{-}\lim\, |a_n| \lvert x \rvert = a \lvert x \rvert .$$

Оставшаяся часть доказательства очевидна. При рассмотрении (4) следует использовать 1.6.4. $\triangleright$

1.6.9. Будем говорить, что (X, E) — решеточно нормированная решетка, если X — решеточно нормированное пространство с нормирующей решеткой E и одновременно векторная решетка, причем векторная норма монотонна. В этом случае в пространстве X имеется два различных отношения дизъюнктности: одно индуцировано векторной нормой как в 1.6.2, а второе определено отношением порядка в X. В тех случаях, когда возможна путаница, мы будем называть их по-разному, а именно *метрической дизъюнктностью* и *порядковой дизъюнктностью* соответственно.

Пусть (X, E) — решеточно нормированная решетка. Элемент $x \in X$ назовем *метрически n-разложимым*, если $\bigwedge_{k=0}^{n} |x_k| = 0$ для любых попарно порядково дизъюнктных элементов $x_0, x_1, \dots, x_n$ в X^+ таких, что $|x| = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Метрически 1-разложимый элемент называют *метрически неразложимым*. Как видно из определений, метрическая неразложимость элемента означает, что если он представим в виде суммы двух порядково дизъюнктных элементов, то эти элементы также и метрически дизъюнктны. В следующих двух предложениях E — векторная решетка с проекциями на главные полосы.

(1) *Пусть X — разложимая решеточно нормированная решетка. Элемент $x \in X$ метрически n-разложим в том и только в том случае, если для любого набора попарно порядково дизъюнктных элементов $x_0, x_1, \dots, x_n \in X^+$ с суммой $x = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ существует разбиение единицы $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$ такое, что $\pi_k x_k = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$.*

$\lhd$ В самом деле, равенство $e_0 \wedge \dots \wedge e_n = 0$ равносильно тому, что $\pi_k e_k = 0$ $(k := 0, 1, \dots, n)$ для подходящего разбиения единицы $\pi_0, \dots, \pi_n$ в $\mathfrak{P}(E)$. Если применить это утверждение к $e_k := |x_k|$ и воспользоваться предложением 1.6.2 (4), то $\pi_k |x_k| = |\pi_k x_k| = 0$ или $\pi_k x_k = 0$. $\rhd$

(2) *Пусть X обладает согласованной модульной структурой над кольцом $\mathrm{Orth}(E)$. Тогда элемент $x \in X$ метрически n-разложим в том и только в том случае, если для любого набора попарно порядково дизъюнктных элементов $x_0, x_1, \dots, x_n \in X^+$ с суммой $x = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ существуют положительные ортоморфизмы $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ такие, что $\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n = I_F$ и $\sigma_k x_k = 0$ при $k := 0, 1, \dots, n$.*

$\lhd$ Необходимость вытекает из (1). Докажем достаточность.

Пусть ортоморфизмы $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ удовлетворяют указанным в формулировке условиям. Обозначим символом ρ_k проектор на полосу $\ker(\sigma_k)^\perp$ и заметим, что $\rho_k x_k = 0$ $(k := 0, 1, \dots, n)$. Из равенства $\sum_{k=0}^{n} \sigma_k = I_E$ следует, что $\bigcap_{k=1}^{n} \ker(\sigma_k) = \{0\}$ и, так как ядро ортоморфизма является полосой, приходим к соотношению $\bigwedge_{k=1}^{n} \ker(\sigma_k) = 0$. Следовательно, $\bigvee_{k=1}^{n} \ker(\sigma_k)^\perp = E$. Отсюда вытекает, что $\bigvee_{k=1}^{n} \rho_k = I_E$. Используя принцип исчерпывания, можно подобрать дизъюнктный набор $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ в $\mathfrak{P}(E)$ так, что

$\bigvee_{k=1}^{n} \pi_k = I_E$ и $\pi_k \leqslant \rho_k$ $(k := 0, 1, \dots, n)$. Ясно, что $\pi_k x_k = 0$ для всех $k := 0, 1, \dots, n$. Остается сослаться на (1). $\triangleright$

1.6.10. (1) *Пусть X — решеточно нормированная решетка. Тогда сумма n метрически неразложимых элементов в X является метрически n-разложимым элементом.*

$\triangleleft$ Пусть $x = u_1 + \ldots + u_n$, где $u_1, \dots, u_n$ — метрически неразложимые элементы в X. Можно считать без ограничения общности, что $u_k \geqslant 0$ $(k := 1, \dots, n)$. Возьмем попарно порядково дизъюнктные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$, для которых $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = u_1 + \ldots + u_n$. Используя лемму о двойном разбиении, выберем $u_{k,l} \in X^+$ так, чтобы

$$u_k = \sum_{l=1}^{n} u_{k,l} \ (k := 1, \dots, n); \quad x_l = \sum_{k=0}^{n} u_{k,l} \ (l := 0, 1, \dots, n).$$

Если $v_{k,l} \in E^+$ при $k := 1, \dots, n$ и $l := 1, \dots, m$, то n-кратное применение леммы о двойном разбиении приводит к формуле

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} v_{k,l} \leqslant \sum_{j \in J} x_{1,j(1)} \wedge \ldots \wedge v_{n,j(n)},$$

где J — множество всех функций $j : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$. Отсюда при $v_{k,l} := \left|u_{k,l}\right|$ выводим

$$0 \leqslant \bigwedge_{l=0}^{n} |x_l| = \bigwedge_{l=0}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_{k,l} \right| \leqslant \bigwedge_{l=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left|u_{k,l}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j \in J} \left|u_{j(0),0}\right| \wedge \left|u_{j(1),1}\right| \wedge \ldots \wedge \left|u_{j(n),n}\right|,$$

где J — множество всех функций $j : \{0, 1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$. Ясно, что по меньшей мере два индекса в множестве $\{j(0), \dots, j(n)\}$ совпадают, скажем, $j(r) = j(s) = m$, $0 \leqslant r, s \leqslant n$, $r \neq s$. Поэтому

$$\left|u_{j(0),0}\right| \wedge \left|u_{j(1),1}\right| \wedge \ldots \wedge \left|u_{j(n),n}\right| \leqslant \left|u_{m,r}\right| \wedge \left|u_{m,s}\right| = 0.$$

Последнее следует из соотношений $0 \leqslant u_{m,r} \leqslant x_r$, $0 \leqslant u_{m,s} \leqslant x_s$, $u_m = u_{m,0} + \ldots + u_{m,n}$, так как x_r и x_s порядково дизъюнктны, а элемент u_m метрически неразложим. $\triangleright$

(2) *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные полосы, а X — некоторая d-разложимая решеточно нормированная решетка над E. Пусть $x \in X$ — положительный метрически n-разложимый элемент и $x = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$ для некоторого набора попарно порядково дизъюнктных $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Если π — порядковый проектор в E, для которого $\pi(E) \subset \left\{ |x_0| \wedge |x_1| \wedge \ldots \wedge |x_{n-1}| \right\}^{\perp\perp}$, то элемент $y := \pi(x_0)$ метрически неразложим, а элемент $z := \pi(x - x_0)$ метрически $(n-1)$-разложим. Более того, y и z являются дизъюнктными осколками элемента x.*

$\triangleleft$ Пусть $0 \leqslant y_1 \leqslant y$, $0 \leqslant y_2 \leqslant y$, $y_1 \wedge y_2 = 0$ и $y_1 + y_2 = y$. Докажем, что $|y_1| \wedge |y_2| = 0$. Пусть π_k — порядковый проектор на полосу на $\{|x_k|\}^{\perp\perp}$ и положим $\pi := \pi_0 \pi_1 \ldots \pi_{n-1}$. Тогда $n+1$ элементы $\pi x_1, \ldots, \pi x_{n-1}, y_1, y_2$ попарно порядково дизъюнктны, причем их точная верхняя граница равна

$$\pi x_1 + \pi x_2 + \ldots + \pi x_{n-1} + y_1 + y_2 = \pi(x - x_0) + \pi(x_0) = \pi x.$$

Так как всякий осколок метрически n-разложимого элемента также метрически n-разложим, то $|\pi x_1| \wedge \ldots \wedge |\pi x_{n-1}| \wedge |y_1| \wedge |y_2| = 0$, откуда следует, что $\pi e = 0$, где $e := \pi(|x_1| \wedge \ldots \wedge |x_{n-1}| \wedge |y_1| \wedge |y_2|)$. В то же время $\pi^\perp e = 0$, поскольку $\pi^\perp e \leqslant \pi^\perp |y_1| \leqslant \pi^\perp |\pi x_0| = 0$, а значит, $e = 0$. Отсюда вытекает, что $\pi(|y_1| \wedge |y_2|) = 0$, так как π — порядковый проектор на $(|x_0| \wedge \ldots \wedge |x_{n-1}|)^{\perp\perp}$. Тем самым $|y_1| \wedge |y_2| = \pi^\perp(|y_1| \wedge |y_2|) \leqslant \pi^\perp |\pi x_0| = 0$. Ясно, что y — осколок элемента x.

Допустим теперь, что $z = z_1 + \ldots + z_n$ и $z_k \perp z_l$ $(k \neq l)$. Тогда πx есть сумма порядково дизъюнктного набора $\pi x_0, z_1, \ldots, z_n$ из $n+1$ элемента и, поскольку элемент πx метрически n-разложим, то $|\pi x_0| \wedge |z_1| \wedge \ldots \wedge |z_n| = 0$. Отсюда выводим $\pi e = 0$ и $\pi(|x_0| \wedge |z_1| \wedge \ldots \wedge |z_n|) = 0$. В то же время $\pi^\perp e = 0$, стало быть, $e = 0$. Следовательно, $\pi(|z_1| \wedge \ldots \wedge |z_n|) = 0$ и $|z_1| \wedge \ldots \wedge |z_n| = 0$. $\triangleright$

(3) *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные полосы, X — некоторая d-разложимая решеточно нормированная решетка над E. Предположим, что метрически n-разложимый элемент $x \in X$ допускает представления $x = x_1 + \ldots + x_n$ и $x = y_1 + \ldots + y_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — попарно порядково дизъюнктные наборы метрически неразложимых элементов. Тогда для каждого $l := 1, \ldots, m$ найдется разбиение единицы $\pi_{1,l}, \ldots, \pi_{n,l}$ в $\mathfrak{P}(|y_l|^{\perp\perp})$ такое, что $y_l = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l} x_k$ $(l := 1, \ldots, m)$.*

$\lhd$ Пусть вначале $x \geqslant 0$. Привлекая декомпозиционное свойство Рисса, подберем такие положительные элементы $x_{k,l} \in X$ ($k := 1,\dots,n; l := 1,\dots,m$), что $x_k = \sum_{l=1}^m x_{k,l}$ ($k := 1,\dots,n$) и $y_l = \sum_{k=1}^n x_{k,l}$ ($l := 1,\dots,m$). Элементы $x_{k,l}$ попарно дизъюнктны в силу неравенства $0 \leqslant x_{k,l} \leqslant x_k \wedge y_l$. По условию y_l — метрический неразложимый элемент, поэтому $\left|x_{k,l}\right| \wedge \left|x_{j,l}\right| = 0$ ($j \neq l$). Пусть $\pi_{k,l}$ — порядковый проектор на полосу $\left|x_{k,l}\right|^{\perp\perp}$. Ясно, что проекторы $\pi_{1,l},\dots,\pi_{n,l}$ попарно дизъюнктны. Согласно 1.6.2 (2) будет

$$\left|\pi_{k,l}x_k - x_{k,l}\right| = \pi_{k,l}\left|x_k - x_{k,l}\right| =$$
$$= \pi_{k,l}(\left|x_{k,1}\right| + \ldots + \left|x_{k,l-1}\right| + \left|x_{k,l+1}\right| + \ldots + \left|x_{k,m}\right|) = 0,$$

значит, $\pi_{k,l}x_l = x_{k,l}$. Отсюда видна справедливость представления $y_l = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k$. Так как $\left|y_l\right| = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}\left|x_k\right|$, то $\sum_{k=1}^n \pi_{k,l}\left|y_l\right| = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}\left|x_l\right| = \left|y_l\right|$. Тем самым $(\pi_{k,l})_{k=1}^n$ — разбиение проектора на полосу $\left|y_l\right|^{\perp\perp}$ для каждого $l := 1,\dots,m$.

В случае произвольного $x \in X$ верно $|x| = |x_1| + \ldots + |x_n| = |y_1| + \ldots + |y_m|$, поэтому в силу доказанного имеет место представление $|y_l| = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}|x_k|$ ($l := 1,\dots,m$). Последнее можно переписать в виде

$$y_l^+ - \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^- = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^+ - y_l^-.$$

Отсюда в силу очевидных соотношений $y_l^+ \perp \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^-$ и $y_l^- \perp \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^+$ выводим $y_l^+ = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^+$ и $y_l^- = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k^-$, следовательно, $y_l = \sum_{k=1}^n \pi_{k,l}x_k$. $\rhd$

1.6.11. *Теорема.* *Пусть E — векторная решетка с главными проекциями и X — разложимая d-полная решеточно нормированная решетка над E. Тогда всякий метрически n-разложимый элемент $x \in X$ представляется в виде дизъюнктной суммы n метрически неразложимых элементов, т. е. $x = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_1,\dots,x_n$ — попарно дизъюнктные метрически неразложимые элементы из X. Указанное представление единственно в смысле 1.6.10 (3).*

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 1$ имеем очевидно верное утверждение. Предположим, что требуемое имеет место для $n - 1$. В силу леммы Куратовского — Цорна существует максимальное множество $\mathscr{P}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в E, удовлетворяющее условию: для каждого $\pi \in \mathscr{P}$ найдется n попарно дизъюнктных элементов $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in X$, для которых $\sum_{i=0}^{n-1} x_i = x$ и $\pi(E) \subset (\lvert x_0\rvert \wedge \lvert x_1\rvert \wedge \ldots \wedge \lvert x_{n-1}\rvert)^{\perp\perp}$.

Привлекая 1.6.10 (2), можно построить функцию $\pi \mapsto x_\pi$, где $\pi \in \mathscr{P}$, такую, что элемент x_π положителен и метрически неразложим, $y_\pi := \pi x - x_\pi$ положителен и метрически $(n-1)$-разложим, $x_\pi = \pi x_\pi$, причем x_π и y_π — дизъюнктные осколки элемента x. Так как семейство $(x_\pi)_{\pi\in\mathscr{P}}$ дизъюнктно, а пространство X d-полно, то можно определить $y := \bigvee\{x_\pi : \pi \in \mathscr{P}\}$ и $z := x - y$. Заметим, что при этом y и z — дизъюнктные осколки элемента x.

По определению $\pi y = x_\pi$ для каждого $\pi \in \mathscr{P}$, так что, полагая $\rho := \sup \mathscr{P}$, получим $\rho y = y$ и $\rho^\perp y = 0$. Если $y = y_1 + y_2$, причем $y_1 \wedge y_2 = 0$, то $\pi y_1 + \pi y_2 = x_\pi$ для всех $\pi \in \mathscr{P}$ и $\pi(\lvert y_1\rvert \wedge \lvert y_2\rvert) = 0$, поскольку x_π — метрически неразложимый элемент. Тем самым $\rho(\lvert y_1\rvert \wedge \lvert y_2\rvert) = 0$, но в то же время $\rho^\perp(\lvert y_1\rvert \wedge \lvert y_2\rvert) \leqslant \rho\,\lvert y\rvert = 0$, откуда вытекает $\lvert y_1\rvert \wedge \lvert y_2\rvert = 0$. Предположим теперь, что $z = z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}$ для дизъюнктного набора $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in X^+$, и положим $e := \lvert z_0\rvert \wedge \ldots \wedge \lvert z_{n-1}\rvert$. Тогда для каждого $\pi \in \mathscr{P}$ выполнено $\pi z = y_\pi$, следовательно, πz — это $(n-1)$-разложимый элемент и $\pi e = 0$. В то же время $x = (z_0 + y) + z_1 + \ldots + z_{n-1}$ и, принимая во внимание определение множества $\mathscr{P}$, выводим

$$\pi^\perp(\lvert z_0\rvert \wedge \ldots \wedge \lvert z_{n-1}\rvert) \leqslant \pi^\perp(\lvert z_0 + y\rvert \wedge \lvert z_1\rvert \wedge \ldots \wedge \lvert z_{n-1}\rvert) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\bigwedge_{i=0}^{n-1} \lvert z_i\rvert = 0$. Итак, мы доказали, что y метрически неразложим, z метрически $(n-1)$-разложим и $x = y + z$, так что требуемое установлено для положительного x. Для произвольного метрически n-разложимого элемента x модуль $|x|$ будет также метрически n-разложимым и ввиду уже доказанного факта справедливо представление $|x| = y_1 + \ldots + y_n$, где все элементы y_k метрически неразложимы. В силу леммы о двойном разбиении $x^+ = u_1 + \ldots + u_n$, $x^- = v_1 + \ldots + v_n$, $u_k + v_k = y_k$ $(u_k, v_k \in X^+;\ k := 1, \dots, n)$. Элемент $x_k := u_k - v_k$ метрически неразложим, так как $y_k = |x_k|$. Кроме того, ясно, что $x = x_1 + \ldots + x_n$. $\triangleright$

1.6.12. В заключение этого параграфа рассмотрим один пример решеточно нормированного пространства. Пусть X — произвольное векторное пространство. Сублинейный оператор $p : X \to E$ именуют *полунормой*, если $p(x) = p(-x)$ для всех $x \in X$. Для данной полунормы p определим множество линейных операторов $\mathscr{L}(p) \subset L(X,E)$ и отображение $\lvert\!\cdot\!\rvert : \mathscr{L}(p) \to \operatorname{Orth}(E)$ следующими формулами:

$$\mathscr{L}(p) := \{T \in L(X,E) : (\exists \gamma \in \operatorname{Orth}(E))\, T \in \partial(\gamma \circ p)\},$$
$$\lvert T \rvert := \inf\{\gamma \in \operatorname{Orth}(E)^+ : T \in \partial(\gamma \circ p)\} \quad (T \in \mathscr{L}(p)).$$

Теорема. *Тройка* $(\mathscr{L}(p), \lvert\!\cdot\!\rvert, \operatorname{Orth}(E))$ *служит пространством Банаха — Канторовича, если только полунорма p отделима, т. е. $p(x) = 0$ влечет $x = 0$.*

$\lhd$ Очевидно, что оператор $\lvert\!\cdot\!\rvert$ принимает положительные значения и удовлетворяет 1.6.1 (2, 3). Если $\lvert T \rvert = 0$, то для каждого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$ и семейство $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\operatorname{Orth}(E)$ такие, что $\pi_\xi\rho_\xi \leqslant \varepsilon I_E$ и $T \in \partial(\rho_\xi p)$ для всех $\xi \in \Xi$. Таким образом, $\pi_\xi|Tx| \leqslant \pi_\xi\rho_\xi p(x) \leqslant \varepsilon p(x)$, откуда следует, что $|Tx| \leqslant \varepsilon p(x)$. Ввиду отделимости p мы видим, что $T = 0$.

Рассмотрим порядковый проектор π и ортоморфизм γ в E и заметим, что $\pi \circ T \in \partial(\gamma p)$ тогда и только тогда, когда $\pi \circ T \in \partial(\pi \circ \gamma \circ p)$. Более того, поскольку $T \in \partial(\alpha \circ p)$ для некоторого $0 \leqslant \alpha \in \operatorname{Orth}(E)$, то для каждого $\gamma \in \operatorname{Orth}(E)$, удовлетворяющего соотношению $\pi \circ T \in \partial(\gamma \circ p)$, существует $\gamma' := \pi\gamma + \pi^\perp\alpha$ такой, что $T \in \partial(\gamma' \circ p)$ и $\pi\gamma = \pi\gamma'$. Учитывая эти свойства, выводим:

$$\begin{aligned}\lvert \pi \circ T \rvert &= \inf\{0 \leqslant \gamma \in \operatorname{Orth}(E) : \pi \circ T \in \partial(\gamma \circ p)\} = \\ &= \inf\{\pi \circ \gamma \in \operatorname{Orth}(E)^+,\ \pi \circ T \in \partial(\gamma \circ p)\} = \\ &= \inf\{\pi \circ \gamma \in \operatorname{Orth}(E)^+,\ T \in \partial(\gamma \circ p)\} = \pi \circ \lvert T \rvert.\end{aligned}$$

Итак, отождествив π с проектором на полосу $\overline{\pi}$ в $\operatorname{Orth}(E)$, определяемую соотношением $\rho \mapsto \pi \circ \rho$, заключаем, что $\lvert \pi T \rvert = \pi \lvert T \rvert$ и, в частности, норма $\lvert\!\cdot\!\rvert$ будет d-разложимой. Пусть последовательности $(T_n) \subset \mathscr{L}(p)$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ и ортоморфизм $\rho \in \operatorname{Orth}(E)$ удовлетворяют условиям $\lim_n \lambda_n = 0$ и $\lvert T_n - T_m \rvert \leqslant \lambda_k\rho$ для всех $m, n \geqslant k$. Тогда $|T_n x - T_m x| \leqslant \lambda_k \rho p(x)$ и последовательность $(T_n x)$ — r-фундаментальна в E. Таким образом, можно определить линейный оператор $Tx := r\text{-}\lim_n T_n x$ $(x \in X)$. Так как $\lvert T - T_n \rvert \leqslant \lambda_k\rho$ для $n \geqslant k$, заключаем, что $T \in \mathscr{L}(p)$ и $r\text{-}\lim \lvert T - T_n \rvert = 0$. Следовательно, пространство $\mathscr{L}(p)$ br-полно и разложимо в силу 1.6.8 (2). Дизъюнктная полнота $\mathscr{L}(p)$ проверяется без труда. Остается применить 1.6.5. $\rhd$

1.7. Комментарии

1.7.1. (1) Выпуклые множества как самостоятельный объект исследования появились на рубеже XIX и XX вв. Практически в то же время были обнаружены и различные связи между выпуклыми функциями и выпуклыми множествами — объектами, известными задолго до выделения понятия выпуклой функции. Начальное изучение этих объектов в основном проводилось в связи с конечномерной геометрией, см. [14, 147], а также цитируемую в них литературу. В 30-е годы интерес к выпуклости связан с развитием функционального анализа [290]. Становление современного выпуклого анализа началось в 1960-е годы, прежде всего под воздействием теории экстремальных задач, развития методов оптимизации и математической экономики. Основные понятия и результаты, а также важнейшие приложения выпуклого анализа и изложены в обзоре В. М. Тихомирова [200]. Там же имеется исторический комментарий.

(2) Термин «выпуклый анализ» получил распространение, в основном, в связи с монографией Р. Т. Рокафеллара [188], где в качестве его автора назван профессор Принстонского университета А. У. Таккер. Выпуклый анализ как самостоятельное направление сформировался во многом благодаря вкладу В. Фенхеля [304], Ж.-Ж. Моро [397] и Р. Т. Рокафеллара [188]. Элементы выпуклого анализа излагаются в большинстве современных курсов функционального анализа, см., например, [42, 67, 74, 146, 187, 210, 225, 325].

(3) Основы теории выпуклых множеств были заложены в конце XIX века Г. Минковским. Бурное развитие теории выпуклых множеств приходится на двадцатые и тридцатые годы XX столетия. Итоги начального периода становления теории выпуклых множеств подведены в монографии Т. Боннезена и В. Фенхеля [248]. Различные аспекты теории выпуклых множеств представлены в монографиях А. Д. Александрова [2], Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллера [14], М. Берже [10], Г. Буземана [13], Б. Грюнбаума [316], К. Лейхтвейса [160], Р. Т. Рокафеллара [188], Ф. Валентайна [481], Г. Эглстона [296], Л. Хёрмандера [326], см. также справочник [318]. Концепция Г-множества и Г-оболочек восходит к Т. С. Моцкину [398]. Инверсную сумму множеств впервые рассмотрел, по всей видимости, Дж. Келли [71].

(4) Теорему 1.1.9 (2) принято связывать с именем К. Каратеодори [269], см. [43] и [160]. Конечномерные выпуклые множества обладают рядом замечательных свойств [160, 188]. Приведем формулировки двух известных результатов из этой области.

Теорема Радона. *Всякое конечное множество в n-мерном векторном пространстве, содержащее не менее $n+2$ точек, можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых имеют хотя бы одну общую точку.*

Из этого факта и компактности замкнутого ограниченного множества конечномерного пространства легко выводится знаменитая теорема Хелли [319], имеющая много полезных приложений, см., например, книгу Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли [43]. Теорему Хелли можно вывести и из теоремы Каратеодори, см. [160].

Теорема Хелли. *Пусть в n-мерном векторном пространстве задано семейство замкнутых выпуклых множеств, из которых, по крайней мере, одно ограничено. Если каждое $n+1$ множество из этого семейства имеет общую точку, то и все множества из этого семейства имеют общую точку.*

(5) Семейство множеств $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X)$ называют *выпуклостью* в X, если $X \in \mathscr{G}$ и пересечение любой совокупности множеств из $\mathscr{G}$ также принадлежит $\mathscr{G}$. При этом пару $(X, \mathscr{G})$ именуют *пространством выпуклости*, а элементы — выпуклыми множествами. Исследование пространств выпуклости получило название аксиоматической теории выпуклости, с некоторыми результатами которой можно познакомиться в книге В. П. Солтана [197]. Пространства выпуклости впервые рассмотрел, по всей видимости, Ф. В. Леви [372]. Ш. Долецки предложил назвать пространства выпуклости *киртологическими*, но этот выразительный термин не получил широкого распространения (см. [292–294]).

(6) Согласно 1.1.3 (1, 2) отображение $H_\Gamma : M \mapsto H_\Gamma(M)$ является *оператором замыкания*, т. е. оно удовлетворяет следующим соотношениям: (1) $M \subset H_\Gamma(M)$, (2) $L \subset M \to H_\Gamma(L) \subset H_\Gamma(M)$, (3) $H_\Gamma(H_\Gamma(M)) = H_\Gamma(M)$. Всякое отображение $\mathscr{H}_\Gamma : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее условиям (1)–(3), называют (абстрактной) *выпуклой оболочкой* в X. Выпуклая оболочка не удовлетворяет, вообще говоря, условию $\mathscr{H}(A \cup B) = \mathscr{H}(A) \cup \mathscr{H}(B)$, справедливому для топологического замыкания. В то же время выполнено более слабое условие: $\mathscr{H}(A \cup B) = \mathscr{H}(A \cup \mathscr{H}(B)) = \mathscr{H}(\mathscr{H}(A) \cup \mathscr{H}(B))$. Выпуклости и выпуклые оболочки находятся во взаимнооднозначном соответствии: всякая выпуклость $\mathscr{G}$ определяет выпуклую оболочку $\mathscr{H} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ по формуле

$$\mathscr{H}(M) := \bigcap \{G \in \mathscr{G} : \ M \subset G\},$$

и наоборот, выпуклая оболочка $\mathscr{H}$ задает выпуклость $\mathscr{G} := \{G \subset X : \mathscr{H}(G) = G\}$, см. [197].

1.7.2. (1) Соответствие часто встречается в литературе под названиями «многозначное отображение» или «точечно-множественное отображение». Общее понятие поляры из 1.2.1 и «теорему отделимости» 1.2.1 (4) предложил Г. П. Акилов, см. [1]. Поляра в смысле 1.2.1 унифицирует несколько разных объектов из разных разделов математики: сечения в упорядоченном множестве, полосы векторной решетки, аннуляторы в модулях, ортогональное дополнение, двойственный конус и т. п. Понятие поляры относительно фиксированной двойственности ввел Г. Минковский. Подробнее это понятие будет изучено в третьей главе.

(2) Изучение выпуклых соответствий, т. е. выпуклых подмножеств в произведении векторных пространств принято связывать с началом 1960-х годов. Интерес к ним в те годы определяли преимущественно исследования моделей экономической динамики в форме теории выпуклых процессов (Р. Т. Рокафеллар [441]) и суперлинейных точечно-множественных отображений (В. Л. Макаров и А. М. Рубинов [169], А. М. Рубинов [193], Б. Н. Пшеничный [180]). Различные аналитические свойства выпуклых соответствий изучены в книгах А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [58], Ч. Кастена и М. Валадье [270], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [370], А. Г. Кусраева [104], Ж.-Р. Обэна и И. Экланда [175], Ж.-Р. Обэна и Е. Франковской [231], Б. Н. Пшеничного [180]. (См. также библиографию, приведенную в этих книгах.)

1.7.3. (1) Первоначальные понятия и факты о выпуклых функциях были введены на рубеже XIX и XX веков. Основы же современной теории выпуклых функций были заложены в книге В. Фенхеля [304]. Детальное изложение теории выпуклых функций в конечномерном пространстве имеется в монографии Р. Т. Рокафеллара [188]. Первое сводное изложение важнейших свойств выпуклых функций в произвольных топологических векторных пространствах было дано, по-видимому, в лекциях Ж.-Ж. Моро [397], внесшего значительный вклад в становление теории. Современная теория выпуклых функций и ее приложения хорошо представлены в монографической литературе; укажем несколько популярных книг: [3, 57, 166, 213, 266, 310, 325].

(2) Концепция выпуклого оператора возникла наряду с общими представлениями об упорядоченных векторных пространствах, разрабатываемых с начала тридцатых годов прошлого века трудами Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. Впервые сублинейный оператор возник в одной из ранних работ Л. В. Канторовича [60] по теории K-пространств в связи с обобщением теоремы Хана — Банаха, см. также [61–64]. Различные операции над выпуклыми операторами, представленные в 1.3, соответствуют в основном аналогичным операциям над функциями из первой главы книги Р. Т. Рокафеллара [188].

(3) Интенсивное изучение выпуклых и сублинейных операторов датируется началом 1970-х годов. Итоги этого периода подведены в обзорах А. М. Рубинова [192] и С. С. Кутателадзе [132]. Первое монографическое изложение локальной теории выпуклых операторов имеется в книге Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [1].

1.7.4. (1) Проблема мажорированного продолжения линейных операторов тесно связана с теоремой Хана — Банаха (об истории этого вопроса см. [323]). Теорема 1.4.13 (1) в такой форме открыта в 1935 г. Л. В. Канторовичем и воспринималась как обобщение, служащее неясным целям. Теперь неразрывность связей выпуклого анализа и теории упорядоченных векторных пространств стала трюизмом. В случае $F = \mathbb{R}$ этот результат называют иногда теоремой Крейна — Рутмана (см. [76, 146]) из-за [80]. Теорема 1.4.15 также установлена Л. В. Канторовичем [63]. Правило вынесения линейного оператора справа из-под знака ∂ получил В. Л. Левин [156]. Дальнейшее развитие исчисления субдифференциалов будет представлено в следующих главах.

(2) Эквивалентность свойства мажорированного продолжения и порядковой полноты для предупорядоченного векторного пространства (теорема 1.4.13 (2)) была установлена впервые в работах В. Боннайса и Р. Сильвермана [249] и Т.-О. Ту [475]. Изящное доказательство, представленное в 1.4.10, принадлежит А. Д. Иоффе [330]. В основе доказательства лежит концепция веера (теперь говорят веера Иоффе), имеющая и другие применения. Прекрасный, но все же неполный обзор различных обобщений теоремы Хана — Банаха имеется в статье Г. Баскеса [267].

(3) История субдифференциальной формулировки теорем Хана — Банаха — Канторовича отражена в книге Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [1], а также в обзорах С. С. Кутателадзе [132], А. М. Рубинова [192], В. М. Тихомирова [200]. Пункты 1.4.16–1.4.19 представляют собой малый фрагмент из изометрической теории банаховых пространств, с которой можно ознакомиться по монографиям Э. Лэйси [371] и Й. Линденштраусса и Л. Цафрири [374]. Необходимые сведения из теории положительных операторов см. в [23, 109, 222, 367].

(4) Понятие веера имеет много интересных приложений в негладком анализе. В частности, вееры играют такую же роль при локальной аппроксимации негладких отображений, какая принадлежит линейным операторам в классическом дифференциальном исчислении, см. [204, 327, 331]. В качестве иллюстрации сформулируем негладкий вариант теоремы о неявной функции [327].

Пусть X и Y — банаховы пространства. Четный веер $\mathscr{A}$ из X в Y называют *регулярным*, если $\mathscr{A}(x)$ является непустым компактным множеством для любых $x \in X$ и

$$\inf\{\|y\| : y \in \mathscr{A}(x),\ \|x\| \geqslant 1\} > 0.$$

В том случае, когда существует положительное число k такое, что

$$\|\mathscr{A}(x)\| := \sup\{\|y\| : y \in \mathscr{A}(x)\} \leqslant k\|x\| \quad (x \in X),$$

веер $\mathscr{A}$ называют *ограниченным*.

Возьмем отображение $f : U \to Y$, где U — открытое множество в X и $x_0 \in U$. Ограниченный веер $\mathscr{A}$ называют *преддифференциалом функции* f *в точке* x_0 и пишут $Df(x_0) := \mathscr{A}$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ h\to 0}} \frac{1}{\|h\|} \inf\{\|f(x+h) - f(x) - y\| : y \in \mathscr{A}(x)\} = 0.$$

Определим функцию $f^\circ(x_0)(h, y') : X \times Y' \to \mathbb{R}$ формулой

$$f^\circ(x_0)(h, y') := \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{\|x+th-x_0\|\leqslant\varepsilon\\ \|x-x_0\|\leqslant\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{t}\langle f(x+th) - f(x), y'\rangle \right\}.$$

Если функция f липшицева в окрестности x_0, то $f^\circ(x_0)$ — бисублинейная функция. Согласно 1.5.8 (4) существует единственный веер $\mathscr{A}$ такой, что $s(\mathscr{A}) = f^\circ(x_0)$, и можно доказать $Df(x_0) = \mathscr{A}$. Важнейшие факты классического дифференциального исчисления имеют место и для преддифференциалов локально липшицевых отображений.

Теорема. *Предположим, что отображение $f : U \to Y$ является липшицевым в окрестности точки x_0 и имеет регулярный преддифференциал в точке x_0. Тогда существуют окрестность V точки $f(x_0)$ и липшицево отображение $g : V \to X$ такие, что $g \circ f(x) = x$ для всех $x \in X$, $\|x - x_0\| < \varepsilon$.*

(5) В конечномерном случае различные варианты теоремы об обратной функции и теоремы о неявной функции были получены ранее Ф. Кларком [274], Г. Г. Магарил-Ильяев [167], Б. Пурсё [427] и Дж. Варгой [20, 490].

1.7.5. (1) Конструкцию пространств выпуклых объектов связывают с известным построением Дж. фон Неймана и Г. Биркгофа из теории упорядоченных алгебраических систем, см. [147, 207]. Честь первого изучения свойств полугруппы выпуклых компактов принадлежит Г. Минковскому.

(2) Одними из первых работ, существенно использовавших концепцию пространства множеств, следует считать классический цикл работ А. Д. Александрова по теории смешанных объемов; дальнейшие содержательные продвижения принадлежат Л. Хёрмандеру, А. Г. Пинскеру и др. (см. [14, 147, 326]).

(3) Операторно-выпуклые множества введены в работе В. Л. Левина [156].

1.7.6 (1) Векторные пространства, нормированные элементами векторной решетки, были введены Л. В. Канторовичем в 1936 г. [62]. Несколько раньше Г. Курепа [365] рассматривал «espaces pseudodistanciés», т. е. пространства с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик были связаны с методом последовательных приближений в численном анализе, см. [61, 68, 351, 356, 454]. В дальнейшем появились и другие применения векторных норм, см., например, [1, 104, 175].

(2) Стоит подчеркнуть, что именно в статье Л. В. Канторовича [61] впервые появилась необычная аксиома разложимости для векторной нормы (см. 1.6.1 (4)). В последующих исследованиях других авторов эта аксиома часто опускалась как несущественная. Глубокий смысл аксиомы 1.6.1 (4) был обнаружен в связи с булевозначным анализом (см. [104, 105]).

(3) Связь между разложимостью векторной нормы и существованием полной булевой алгебры проекторов в решеточно нормированном пространстве была обнаружена А. Г. Кусраевым [104, 105]. Пространства с фиксированной булевой алгеброй линейных проекторов и координатным порядком (так называемые координатные пространства) изучались Дж. Купером [278, 279]. Утверждение, содержащееся в 1.6.7 $(1, 3)$, было получено в [73].

(4) Понятие дискретного элемента играет важную роль в структурной теории векторных решеток, см. [23, 68, 388]. Дискретные функционалы хорошо изучены и имеют довольно простую структуру [341]. Как показал Дж. Креншо в [281], при некоторых не очень обременительных предположениях дискретный элемент в решетке порядково ограниченных операторов может быть восстановлен по дискретному функционалу на области определения рассматриваемого оператора и дискретному элементу в области его значений. Тем самым дискретные операторы составляют также весьма бедный класс. В то же время имеется ряд интересных результатов, в которых важная роль принадлежит понятию модульно-дискретного элемента (см., например, [104, 127, 137, 208, 245, 296]). Это обстоятельство вызывает интерес к изучению родственных понятий модульной дискретности, модульной атомичности и модульной неразложимости в решеточно нормированных пространствах. Понятие метрической n-разложимости из 1.6.9 и теорема 1.6.11 принадлежат В. А. Раднаеву [183, 432].

(5) Критерий полноты из 1.6.5 был установлен А. Г. Кусраевым в [105] при том дополнительном предположении, что нормирующая решетка E порядково полна. В [104] такой критерий был доказан в более общей ситуации пространства с разложимой векторной мультинормой. Предположение о порядковой полноте E было снято в работе Е. В. Колесникова, А. Г. Кусраева, С. А. Малюгина [73]. Для архимедовой векторной решетки (случай, когда $X = E$) указанный факт был установлен ранее А. И. Векслером и В. А. Гейлером [22].

(6) Понятие максимального расширения произвольного K-пространства было введено и изучено А. Г. Пинскером, см. [252]. Он же установил, в частности, что всякое K-пространство имеет единственное с точностью до изоморфизма максимальное расширение. Утверждение 1.6.6 (1), обобщающее теорему Пинскера на случай решеточно нормированных пространств, получено, в основном, в [104]. Относительно теоремы 1.6.6 (2) о bo-пополнении решеточно нормированных пространств см. [104, 124]. Соотношение $\widehat{X} = oX$ из 1.6.6 (3) принадлежит А. Е. Гутману, см. [108].

К материалу главы 1 примыкают также монографии [23, 42, 76, 77, 104, 147, 156, 166, 173, 201, 220, 222, 226, 235, 252, 306, 325, 341, 350, 494].

Глава 2

Геометрия субдифференциалов

Между выпуклыми объектами существуют многие связи и взаимозависимости, делающие их удобным аппаратом исследования разнообразных проблем. Одной из наиболее общих форм таких соотношений является двойственность Минковского. Понятно, что подробно эту двойственность достаточно изучить для какого-нибудь класса рассматриваемых объектов — например, для сублинейных операторов. На основе информации об их опорных множествах сравнительно легко получить описание субдифференциалов произвольных выпуклых операторов, найти соответствующие преобразования Юнга — Фенхеля, исследовать связанные с ними экстремальные задачи и т. п.

Итак, основная тема текущей главы — анализ классической *двойственности Минковского*, т. е. отображения, сопоставляющего всюду определенному сублинейному оператору его опорное множество или, что то же самое, субдифференциал (в нуле). Возникающие при этом вопросы по форме относятся к различным разделам математики. В самом деле, необходимо выяснить, каков субдифференциал суперпозиции операторов, т. е. найти аналоги «ценного правила» для вычисления производных. Соответствующие задачи обычно относят к анализу. Возникает также потребность описания алгебраических систем, в которых справедливы законы субдифференциального исчисления. Подобные постановки входят в компетенцию алгебры.

Полезно выяснить, каково устройство субдифференциала с точки зрения классической теории, т. е. изучить способы его восстановления по крайним точкам. Последний вопрос лежит в традиционной области интересов геометрии.

Чрезвычайно важно подчеркнуть, что специфика задач субдифференциального исчисления состоит в их исключительной насыщенности синтетическими постановками и разнообразием аппарата решения, т. е. чертами, характерными для функционального анализа в целом. При этом основополагающую роль все же играют представления о геометрическом строении субдифференциала. Возникающие в этой связи задачи и, прежде всего, проблема описания субдифференциала во внутренних терминах, не использующих оператора, определяемого этим субдифференциалом, составляют центр дальнейшего изложения.

2.1. Метод канонического оператора

В классе сублинейных операторов можно выделить сравнительно просто устроенные канонические операторы, причем так, что с каждым K-пространством и с каждой мощностью связывается один единственный канонический оператор. Всякий другой всюду определенный сублинейный оператор получается суперпозицией канонического оператора с линейным. Таким образом, появляется возможность сведения общих вопросов теории сублинейных операторов к анализу канонического оператора и линейной замены переменной в нем. В этом состоит в общих чертах *метод канонического оператора.* Перейдем к точным формулировкам.

2.1.1. Начнем с двух простых вспомогательных утверждений. Пусть X — векторное пространство, а E — упорядоченное векторное пространство.

(1) *Для любого сублинейного оператора $P : X \to E$ имеют место неравенства:*

$$P(x) - P(y) \leqslant P(x - y),$$
$$|P(x) - P(y)| \leqslant P(x - y) \vee P(y - x),$$
$$-P(x) \leqslant P(-x) \quad (x, y \in X).$$

$\lhd$ В самом деле, субаддитивность оператора P влечет $P(x) = P((x - y) + y) \leqslant P(x - y) + P(y)$. Следовательно, верно неравенство

$P(x) - P(y) \leqslant P(x - y)$. Оценка для модуля разности $P(x) - P(y)$ вытекает из полученного неравенства и из аналогичного неравенства $P(y) - P(x) \leqslant P(y - x)$. Кроме того, положив в последнем неравенстве $y = 0$, получим $-P(x) \leqslant P(-x)$. $\triangleright$

Пусть X и Y — предупорядоченные векторные пространства. Оператор $P : X \to E$ называют *возрастающим* или *изотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует $P(x_1) \leqslant P(x_2)$. Напомним, что возрастающий линейный оператор называют также *положительным*, причем положительность линейного оператора T равносильна включению $T(X^+) \subset Y^+$, где $Z^+ := \{z \in Z : z \geqslant 0\}$ — положительный конус упорядоченного векторного пространства Z. Совокупность всех положительных линейных операторов, как и ранее, обозначают символом $L^+(X, Y)$.

(2) *Сублинейный оператор P из предупорядоченного векторного пространства X в K-пространство E является возрастающим в том и только в том случае, если его опорное множество ∂P состоит из положительных операторов, т. е. если $\partial P \subset L^+(X, Y)$.*

$\triangleleft$ Если P возрастает и $T \in \partial P$, то для любого $x \in X^+$ будет $-Tx \leqslant P(-x) \leqslant 0$. Следовательно, $T \in L^+(X, E)$. Наоборот, если $\partial P \subset L^+(X, E)$ и $x_1 \leqslant x_2$, то ввиду 1.4.14 (2)

$$P(x_1) = \sup\{Tx_1 : T \in \partial P\} \leqslant \sup\{Tx_2 : T \in \partial P\} = P(x_2),$$

что и требовалось. $\triangleright$

2.1.2. Рассмотрим векторную решетку E и произвольное непустое множество $\mathfrak{A}$. Обозначим символом $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ совокупность всех (порядково) ограниченных отображений из $\mathfrak{A}$ в E. Точнее говоря, множество $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, содержащееся в $E^{\mathfrak{A}}$, составлено из тех и только тех отображений $f : \mathfrak{A} \to E$, для которых множество значений $\{f(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ порядково ограничено в E. Множество $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ снабжается поточечными операциями сложения, умножения на скаляры и отношением порядка:

$$(f + g)(\alpha) := f(\alpha) + g(\alpha),\ (\lambda f)(\alpha) := \lambda f(\alpha) \quad (\alpha \in \mathfrak{A}),$$
$$f \leqslant g \leftrightarrow (\forall \alpha \in \mathfrak{A})\, f(\alpha) \leqslant g(\alpha).$$

Если E — это K-пространство, то в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ вводится также E-значная норма формулой

$$|\!|x|\!| := \sup\{|x(\alpha)| : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)).$$

Кроме того, $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ станет модулем над $\mathrm{Orth}(E)$, если считать, что для $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ и $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ выполнено $\rho f := \rho \circ f$.

(1) *Если E — это K-пространство, то $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ также будет K-пространством, причем точные границы произвольного непустого порядково ограниченного семейства (f_ξ) в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ вычисляются поточечно:*

$$(\sup_{\xi\in\Xi} f_\xi)(\alpha) := \sup\{f_\xi(\alpha) : \xi \in \Xi\},$$
$$(\inf_{\xi\in\Xi} f_\xi)(\alpha) := \inf\{f_\xi(\alpha) : \xi \in \Xi\}.$$

Более того, $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ — пространство Банаха — Канторовича.

$\triangleleft$ Первая часть утверждения проверяется непосредственно. Ясно также, что $|\!|\rho f|\!| = |\rho|\, |\!|f|\!|$ для $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ и $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Оставшаяся для проверки bo-полнота пространства $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ легко выводится из критерия 1.6.5. $\triangleright$

Оператор $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ в E, действующий по правилу

$$\varepsilon_{\mathfrak{A},E} : f \mapsto \sup\{f(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)),$$

называют *каноническим сублинейным оператором* или просто *каноническим оператором* (определяемым множеством $\mathfrak{A}$ и пространством E). Если ясно, о каком K-пространстве идет речь, то вместо $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ часто пишут $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$. Символ ε_n используют, когда мощность множества $\mathfrak{A}$ равна n. Сам оператор ε_n при этом называют *конечнопорожденным*.

(2) *Канонический оператор возрастает и сублинеен. Конечнопорожденный канонический оператор порядково непрерывен.*

$\triangleleft$ Очевидно. $\triangleright$

2.1.3. Рассмотрим некоторое множество $\mathfrak{A}$ линейных операторов, действующих из векторного пространства X в K-пространство E. Напомним (см. 1.5.3), что $\mathfrak{A}$ слабо порядково ограничено, если для всякого $x \in X$ множество $\{\alpha x : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ (порядково) ограничено. Обозначим символом $\langle\mathfrak{A}\rangle x$ отображение, сопоставляющее каждому $\alpha \in \mathfrak{A}$ элемент $\alpha x \in E$, т. е. $\langle\mathfrak{A}\rangle x : \alpha \mapsto \alpha x$. Если $\mathfrak{A}$ слабо порядково ограничено, то $\langle\mathfrak{A}\rangle x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ при каждом фиксированном $x \in X$. Следовательно, возникает линейный оператор $\langle\mathfrak{A}\rangle : X \to l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, действующий по правилу: $\langle\mathfrak{A}\rangle : x \mapsto \langle\mathfrak{A}\rangle x$. С множеством $\mathfrak{A}$ можно связать еще один оператор

$$P_{\mathfrak{A}} : x \mapsto \sup\{\alpha x : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (x \in X).$$

Оператор $P_{\mathfrak{A}}$ сублинеен. Опорное множество $\partial P_{\mathfrak{A}}$ в соответствии с 1.5.7 обозначают $\mathrm{cop}(\mathfrak{A})$ и называют *опорной оболочкой* $\mathfrak{A}$. Из введенных определений непосредственно вытекает следующий факт.

Если P — такой сублинейный оператор, что $\partial P = \mathrm{cop}(\mathfrak{A})$, то имеет место представление $P = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle$.

Ввиду 1.4.14 (2) $\partial P = \mathrm{cop}(\partial P)$. Следовательно, всякий сублинейный оператор $P : X \to E$ допускает представление в указанном виде при $\mathfrak{A} := \partial P$. Благодаря этому канонический сублинейный оператор оказывается весьма полезным при решении разных задач, связанных с сублинейными операторами и, в частности, при подсчете опорных множеств и опорных оболочек.

2.1.4. Пусть $\Delta_{\mathfrak{A}} := \Delta_{\mathfrak{A},E}$ — вложение E в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, сопоставляющее каждому элементу $e \in E$ постоянное отображение $\alpha \mapsto e$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$, так что $(\Delta_{\mathfrak{A}} e)(\alpha) = e$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

(1) *Справедливы соотношения*

$$\varepsilon_{\mathfrak{A},E} \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E, \quad \Delta_{\mathfrak{A},E} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}(f) \geqslant f \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)),$$

где I_E — тождественное отображение E на себя.

$\triangleleft$ Очевидно. $\triangleright$

(2) *Пусть F — еще одно K-пространство и $P : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$\partial\,(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}) = \bigl\{T \in L^+(l_\infty(\mathfrak{A}, E), F) : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial P\bigr\}.$$

$\triangleleft$ Оператор $P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ возрастает, поэтому согласно 2.1.1 (2) опорное множество $\partial(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E})$ состоит из положительных операторов. С другой стороны, если $T \in \partial(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E})$ и $y := \Delta_{\mathfrak{A}} x$, то с учетом уже отмеченного в (1) равенства получим

$$T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} x = Ty \leqslant P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(y) = (P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})\, \Delta_{\mathfrak{A}} x = Px,$$

так что $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial P$.

Наоборот, допустим, что $T : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to F$ — положительный оператор и $T \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} \in \partial P$. Тогда для $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ имеем

$$Tf \leqslant (T \circ \Delta_{\mathfrak{A}})(\varepsilon_{\mathfrak{A}}(f)) \leqslant P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f),$$

т. е. $T \in \partial(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E})$, что и требовалось. $\rhd$

(3) *Для опорного множества канонического сублинейного оператора справедливо следующее представление:*

$$\partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E} = \left\{\alpha \in L^+\left(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E\right) : \, \alpha \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E\right\}.$$

$\lhd$ Действительно, нужно применить (2), взяв в качестве P тождественный оператор I_E. $\rhd$

(4) *Для любого слабо порядково ограниченного множества $\mathfrak{A}$ линейных операторов выполнено:*

$$\mathrm{cop}(\mathfrak{A}) = \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle.$$

$\lhd$ В самом деле, на основании 1.4.14 (4) и (3):

$$\mathrm{cop}(\mathfrak{A}) = \partial P_{\mathfrak{A}} = \partial\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle\right) = \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle. \ \rhd$$

2.1.5. Пусть E — векторная решетка, а F — это K-пространство. Для $S_1, \ldots, S_n \in L(E, F)$ обозначим символом $(S_1, \ldots, S_n)$ линейный оператор $(e_1, \ldots, e_n) \mapsto S_1e_1 + \ldots + S_ne_n$ из E^n в F.

(1) *Пусть $P : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Для произвольных $e_1, \ldots, e_n \in E$ положим $Q(e_1, \ldots, e_n) := P(e_1 \vee \ldots \vee e_n)$. Тогда $Q : E^n \to F$ также сублинейный оператор и имеет место представление:*

$$\partial Q = \left\{(S_1, \ldots, S_n) : \, S_k \in L^+(E, F)\,(k := 1, \ldots, n), \sum_{k=1}^{n} S_k \in \partial P\right\}.$$

$\lhd$ Отождествим $l_\infty(n, E)$ с E^n. Тогда оператор $\mathscr{S} \in L^+(E^n, F)$ имеет представление $\mathscr{S} = (S_1, \ldots, S_n)$, где $S_1, \ldots, S_n \in L^+(E, F)$. Вхождение $\mathscr{S} \circ \Delta_{n,E} \in \partial P$ означает, что $S_1 + \ldots + S_n \in \partial P$. Следовательно, для K-пространства E требуемое вытекает из 2.1.4 (2). Однако в случае конечнопорожденного канонического оператора рассуждения из 2.1.4 (2) остаются в силе и для векторной решетки E, так как порядковая полнота нужна только для корректного определения канонического оператора. $\rhd$

(2) *Пусть $S : E \to F$ — положительный оператор, а сублинейный оператор $Q : E^n \to F$ определен формулой*

$$Q(e_1, \dots, e_n) := S(e_1 \vee \dots \vee e_n)\ (e_1, \dots, e_n \in E).$$

Тогда справедливо представление:

$$\partial Q = \left\{ (S_1, \dots, S_n) :\ S_k \in L^+(E, F)\,(k := 1, \dots, n),\ \sum_{k=1}^{n} S_k = S \right\}.$$

$\lhd$ Непосредственно следует из (1), так как $\partial S = \{S\}$. $\rhd$

Для дальнейших нужд нам потребуются некоторые сведения об ортоморфизмах (см. Приложение 2).

Рассмотрим K-пространство E. *Мультипликатором* в E мы будем называть такой ортоморфизм $\alpha : E \to E$, что $0 \leqslant \alpha e \leqslant e$ для всех $e \in E^+$, т. е. в другой записи $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$. Совокупность всех мультипликаторов в E обозначается $M(E)$, так что $M(E) = [0, I_E]$ — порядковый интервал в пространстве регулярных операторов $L^r(E)$. Названные операторы обладают всеми свойствами ортоморфизмов, см. Приложение 2.

(3) *Опорное множество конечнопорожденного канонического сублинейного оператора ε_n имеет представление:*

$$\partial \varepsilon_n = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) :\ \alpha_k \in M(E),\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E \right\}.$$

$\lhd$ Это частный случай формулы (2) при $T = I_E$. $\rhd$

Рассмотрим следующие сублинейные операторы из E в E: модуль $|\cdot| : e \mapsto |e|$, положительная часть $(\cdot)^+ : e \mapsto e^+$ и отрицательная часть $(\cdot)^- : e \mapsto e^-$.

(4) *Имеют место формулы:*

$$\partial T(|\cdot|) = [-T, T],\quad \partial T((\cdot)^+) = [0, T],\quad \partial T((\cdot)^-) = [-T, 0],$$
$$\partial(|\cdot|) = [-I_E, I_E],\quad \partial((\cdot)^+) = [0, I_E],\quad \partial((\cdot)^-) = [-I_E, 0].$$

$\lhd$ Эти формулы содержатся в (2) и (3) как частные случаи. Но истинность их можно легко проверить и непосредственно. $\rhd$

2.1.6. Обратимся к вопросу вычисления опорных множеств составных сублинейных операторов.

(1) *Теорема.* *Пусть $P_1 : X \to E$ — сублинейный оператор и $P_2 : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \big\{T \circ \langle \partial P_1 \rangle : T \in L^+(l_\infty(\partial P_1, E), F),\ T \circ \Delta_{\partial P_1} \in \partial P_2\big\}.$$

При этом если $\partial P_1 = \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_1)$ и $\partial P_2 = \operatorname{cop}(\mathfrak{A}_2)$, то

$$\begin{aligned}\partial(P_2 \circ P_1) = &\big\{T \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle : T \in L^+(l_\infty(\mathfrak{A}_1, E), F),\\ &\big(\exists \alpha \in \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}_2}\big) T \circ \Delta_{\mathfrak{A}_1} = \alpha \circ \langle \mathfrak{A}_2 \rangle\big\}.\end{aligned}$$

$\lhd$ Согласно 2.1.3, справедливо представление $P_2 \circ P_1 = P_2 \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}_1} \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle$. Привлекая 2.1.4 (2) и 1.4.14 (4), последовательно получаем

$$\begin{aligned}\partial(P_2 \circ P_1) &= \partial\left(P_2 \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}_1} \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle\right) =\\ &= \partial(P_2 \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}_1}) \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle =\\ &= \big\{T \in L^+(l_\infty(\mathfrak{A}_1, E), F) : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}_1} \in \partial P_2\big\} \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle =\\ &= \{T \circ \langle \mathfrak{A}_1 \rangle : T \geqslant 0,\ (\exists \alpha \in \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}_2})\, T \circ \Delta_{\mathfrak{A}_1} = \alpha \circ \langle \mathfrak{A}_2 \rangle\},\end{aligned}$$

что и требовалось установить. $\rhd$

(2) *Теорема.* *Для любого проектора π на какую-либо полосу в K-пространстве E (т. е. для элемента $\pi \in \mathfrak{P}(E)$) имеет место представление*

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \bigcup_{T \in \partial P_2} (\partial(T \circ \pi \circ P_1) + \partial(T \circ \pi^d \circ P_1)),$$

где $\pi^d := I_E - \pi$ — проектор, дополнительный к π.

$\lhd$ В силу теоремы (1) имеем

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \big\{S \circ \langle \partial P_1 \rangle : S \in L^+(l_\infty(\partial P_1, E), F),\ S \circ \Delta_{\partial P_1} \in \partial P_2\big\}.$$

Если $E_0 := \pi(E)$, то $l_\infty(\partial P_1, E_0)$ служит полосой в K-пространстве $l_\infty(\partial P_1, E)$. Пусть Π — проектор на эту полосу. Тогда, как несложно проверить, $\Pi \circ \Delta_{\partial P_1} = \Delta_{\partial P_1} \circ \pi$. Предположим, что для некоторого

$B \in L^+(l_\infty(\partial P_1, E), F)$ верно $B \circ \Delta_{\partial P_1} \in \partial P_2$, и положим $T := B \circ \Delta_{\partial P_1}$. Тогда

$$T \circ \pi = B \circ \Delta_{\partial P_1} \circ \pi = B \circ \Pi \circ \Delta_{\partial P_1}, \quad T \circ \pi^d = B \circ \Pi^d \Delta_{\partial P_1}.$$

Далее, по теореме (1), выполнены включения

$$S \circ \Pi \circ \langle \partial P_1 \rangle \in \partial(T \circ \pi \circ P_1), \quad S \circ \Pi^d \circ \langle \partial P_1 \rangle \in \partial(T \circ \pi^d \circ P_1)$$

и, кроме того, $S \circ \langle \partial P_1 \rangle = (S \circ \Pi + S \circ \Pi^d) \circ \langle \partial P_1 \rangle$. Из всего сказанного следует, что

$$S \circ \langle \partial P_1 \rangle \in \partial(T \circ \pi \circ P_1) + \partial(T \circ \pi^d \circ P_1).$$

Иначе говоря, включение $\subset$ установлено. Противоположное включение очевидно. $\triangleright$

(3) *Если $P_1 : X \to E$ — сублинейный оператор, а $P_2 : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор, то*

$$\partial(P_2 \circ P_1) = \bigcup_{T \in \partial P_2} \partial(T \circ P_1).$$

$\triangleleft$ Следует из (2) при $\pi = I_E$. $\triangleright$

2.1.7. Продолжим извлечение следствий из нашего основного результата — теоремы 2.1.6 (1).

(1) *Для произвольных сублинейных операторов*

$$P_1, \dots, P_n : X \to E$$

справедливо представление

$$\partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M(E) \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E}} (\alpha_1 \circ \partial P_1 + \ldots + \alpha_n \circ \partial P_n).$$

$\triangleleft$ Определим оператор $P : X \to E^n$ формулой:

$$P(x) := (P_1(x), \ldots, P_n(x)) \quad (x \in X).$$

Ясно, что P — сублинейный оператор и $\varepsilon_n \circ P = P_1 \vee \ldots \vee P_n$. Заметим далее, что

$$\partial P = \partial P_1 \times \ldots \times \partial P_n := \{(T_1, \ldots, T_n) : T_k \in \partial P_k \ (k := 1, \ldots, n)\}.$$

Отсюда последовательным применением 2.1.6 (2) и 2.1.5 (3) получим

$$\partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \bigcup_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M(E) \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E}} (\partial(\alpha_1 \circ P_1) + \ldots + \partial(\alpha_n \circ P_n)).$$

Для завершения доказательства следует сослаться на 1.4.14 (5). $\triangleright$

(2) *Пусть E — векторная решетка, а F — произвольное K-пространство. Для произвольных сублинейных операторов $P_1, \ldots, P_n : X \to E$ и положительного оператора $S : E \to F$ справедливо представление*

$$\partial(S(P_1 \vee \ldots \vee P_n)) = \bigcup_{\substack{S_1, \ldots, S_n \in L^+(E,F) \\ S_1 + \ldots + S_n = S}} (\partial(S_1 \circ P_1) + \ldots + \partial(S_n \circ P_n)).$$

$\triangleleft$ Определим оператор P так же, как и в (1), а Q — как в 2.1.5 (2). Тогда $Q \circ P = S(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$. Остается применить 2.1.6 (2) и 2.1.4 (3). $\triangleright$

Идеальный центр $\mathscr{Z}(E)$ пространства E определяют соотношением

$$\mathscr{Z}(E) := \{S \in L^r(E) : (\exists n \in \mathbb{N}) |S| \leqslant nI_E\}.$$

Ясно, что $\mathscr{Z}(E)$ — кольцо по отношению к обычной суперпозиции операторов (см. Приложение 2).

(3) *Пусть $T \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ и α — мультипликатор в E. Тогда для каждого $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ будет $T\alpha f = \alpha T f$, т. е. T — гомоморфизм модулей $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ и E, где модули рассматриваются над кольцом $\mathscr{Z}(E)$.*

$\triangleleft$ Пусть π — произвольный порядковый проектор в E. Для всех $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ справедливо

$$-\pi \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(-f) \leqslant T\pi f \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}}(\pi f) = \pi \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f).$$

Таким образом, для дополнительного проектора $\pi^d := I_E - \pi$ будет $\pi^d \circ T \circ \pi = 0$. Значит, $T \circ \pi = \pi \circ T \circ \pi$. Корме того, $\pi \circ T \circ \pi^d = 0$. Окончательно $T \circ \pi = \pi \circ T \circ \pi + \pi \circ T \circ \pi^d = \pi \circ T$. Из последнего соотношения очевидно, что T коммутирует с конечнозначными элементами, т. е. с элементами вида $\alpha := t_1\pi_1 + \ldots + t_n\pi_n$, где $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — порядковые проекторы и $t_1, \ldots, t_n$ — действительные числа. В самом деле,

$$T\alpha f = T\left(\sum_{k=1}^{n} t_k \pi_k f\right) = \sum_{k=1}^{n} t_k \pi_k T f = \alpha T f.$$

Для произвольного мультипликатора α и числа $\varepsilon > 0$ найдется конечнозначный элемент ρ_ε такой, что $|\rho_\varepsilon - \alpha| \leqslant \varepsilon I_E$. Отсюда, учитывая положительность оператора T, выводим

$$|T(\alpha f) - \alpha T f| = |T(\alpha - \rho_\varepsilon) f + T(\rho_\varepsilon f) - \alpha T f| \leqslant$$
$$\leqslant T(|(\alpha - \rho_\varepsilon) f|) + |\rho_\varepsilon - \alpha||Tf| \leqslant T(\varepsilon |f|) + \varepsilon T(|f|) = 2\varepsilon T(|f|).$$

Осталось ε устремить к нулю. $\triangleright$

2.1.8. Пусть X — упорядоченное векторное пространство, а F — некоторое K-пространство. Положительный оператор $T : X \to F$ именуют *дискретным*, если $[0, T] = [0, I_F] \circ T$. Здесь $[0, T] := \{S \in L^\sim(X, F) : 0 \leqslant S \leqslant T\}$ и $[0, I_F] := \{\alpha \in L^\sim(F) : 0 \leqslant \alpha \leqslant I_F\}$ — порядковые интервалы в $L^\sim(X, F)$ и $L^\sim(F)$ соответственно. Точнее было бы говорить о модульно-дискретных операторах, так как это определение использует модульную структуру пространства F над кольцом $\mathrm{Orth}(F)$. Тем не менее, допуская небольшую вольность, мы применяем термин дискретный оператор, не путая его с понятием дискретного элемента из П.1.6 (4). Оператор $T : X \to F$ мы назовем *слабым решеточным гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in E$ выполнено

$$Tx \vee Ty = \inf\{Tu : u \in X,\ u \geqslant x,\ u \geqslant y\}.$$

Как видно, это условие равносильно каждому из следующих:

$$Tx \wedge Ty = \sup\{Tu : u \in X,\ u \leqslant x,\ u \leqslant y\} \quad (x, y \in X),$$

$$|Tx| = \inf\{Tu : u \in X,\ u \geqslant x,\ u \geqslant -x\} \quad (x \in X),$$

$$(Tx)^+ = \inf\{Tu : u \in X,\ u \geqslant x,\ u \geqslant 0\} \quad (x \in X).$$

Нулевой оператор мы будем считать слабым решеточным гомоморфизмом. Слабый решеточный гомоморфизм является положительным оператором. Если X — векторная решетка, то слабый решеточный гомоморфизм — в точности решеточный гомоморфизм. В следующем пункте будет показано, что классы дискретных операторов и слабых решеточных гомоморфизмов совпадают. Положительный конус X^+ упорядоченного векторного пространства X именуют *воспроизводящим*, если $X = X^+ - X^+$. Положительный конус X^+ будет воспроизводящим в том и только в том случае, если упорядоченное векторное пространство X *направленно* или *фильтровано вверх*, т. е. для любых $x, y \in X$ существует такой $u \in X$, что $u \geqslant x$ и $u \geqslant y$.

(1) *Пусть X — упорядоченное векторное пространство и T — дискретный оператор из X в F. Тогда либо $F = \{0\}$, либо X^+ — воспроизводящий конус.*

$\vartriangleleft$ Пусть $\mathfrak{X} := X^+ - X^+$ и $x_0 \in X \setminus \mathfrak{X}$. Пусть f — линейный функционал на X такой, что $\ker(f) \supset \mathfrak{X}$ и $f(x_0) = 1$. Обозначим через $f \otimes e$ оператор $x \mapsto f(x)e$ $(x \in X)$. Ясно, что $T + f \otimes Tx_0 \in [0, T]$, а потому $Tx_0 + Tx_0 = \alpha Tx_0$ для некоторого $\alpha \in [0, I_E]$. Отсюда следует $Tx_0 = 0$. Итак, мы получаем, что при $X \neq \mathfrak{X}$ будет $T = 0$. Если $F \neq \{0\}$ и $e \in F \setminus \{0\}$, то $T + f \otimes e \in [0, T]$ и, стало быть, мы приходим к противоречивому равенству $f = 0$. $\vartriangleright$

(2) *Пусть $T : X \to F$ — дискретный оператор или слабый решеточный гомоморфизм. Тогда либо конус X^+ воспроизводящий, либо оператор T нулевой.*

$\vartriangleleft$ Утверждение о дискретном операторе следует из (1). Если T — ненулевой слабый решеточный гомоморфизм и $x \notin X^+ - X^+$, то в X нет таких элементов u, чтобы $u \geqslant \pm x$, поэтому множество $\{Tu : u \geqslant \pm x\}$ пусто и не может иметь $|Tx|$ в качестве инфимума. $\vartriangleright$

2.1.9. (1) ***Теорема.*** *Пусть X — векторная решетка, а E — некоторое K-пространство. Положительный оператор $T : X \to E$ является решеточным гомоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого $S : X \to E$, удовлетворяющего $0 \leqslant S \leqslant T$, существует ортоморфизм $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ такой, что $0 \leqslant \rho \leqslant I_E$ и $S = \rho \circ T$. Другими словами, T — решеточный гомоморфизм тогда и только тогда, когда T — дискретный оператор.*

$\lhd$ Рассмотрим сублинейные операторы $P_1, P_2 : X^2 \to E$, где

$$P_1(x_1, x_2) := T(x_1 \vee x_2) \quad (x_1, x_2 \in X),$$
$$P_2(x_1, x_2) := Tx_1 \vee Tx_2 \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Как видно, T будет решеточным гомоморфизмом в том и только в том случае, если $P_1 = P_2$. Согласно 1.4.14 (2) последнее равносильно равенству $\partial P_1 = \partial P_2$. Из 2.1.5 (2) выводим

$$\partial P_1 = \{(x_1, x_2) \mapsto T_1x_1 + T_2x_2 : T_1, T_2 \in L^+(X, E), T_1 + T_2 = T\}.$$

Остается заметить, что согласно 2.1.7 (1)

$$\partial P_2 = \{(x_1, x_2) \mapsto \alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in M(E),\ \alpha_1 + \alpha_2 = I_E\}.$$

Отсюда легко вытекает требуемое. $\rhd$

Докажем теперь несколько более общий факт другим способом.

(2) *Пусть X — упорядоченное векторное пространство, а F — некоторое K-пространство. Положительный оператор $T : X \to F$ дискретен в том и только в том случае, когда T является слабым решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ Если T — нулевой оператор, то доказывать нечего. Если же $T \neq 0$, то X^+ — воспроизводящий конус согласно 2.1.8 (2).

$\leftarrow$: Пусть T — слабый решеточный гомоморфизм, а $S : X \to F$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant S \leqslant T$. Возьмем $x \in \ker(T)$ и такой $u \in X$, что $u \geqslant x$, $u \geqslant -x$. Тогда $\pm Sx \leqslant Su \leqslant Tu$, что после перехода к инфимуму по u дает $|Sx| \leqslant |Tx| = 0$. Как видно, $\ker(T) \subset \ker(S)$, поэтому существует линейный оператор $\rho_0 : F_0 \to F$, где $F_0 := T(X)$, такой, что $S = \rho \circ T$. Из последнего равенства видно, что ρ_0 положителен. Если $f = Tx$ для некоторого $x \in X$, то $\rho_0(f) \leqslant Tu$ при $u \geqslant x$, значит, $\rho_0(f) \leqslant \inf\{Tu : u \in X^+, u \geqslant x\} = f^+$. На основании 1.4.15 (2) ρ_0 допускает продолжение до линейного оператора $\rho : F \to F$, удовлетворяющего оценке $\rho(f) \leqslant f^+$ $(f \in F)$. Отсюда вытекают неравенства $0 \leqslant \rho \leqslant I_F$. Кроме того, $S = \rho \circ T$, так как $\rho \circ T = \rho_0 \circ T$.

$\rightarrow$: Предположим, что $[0, T] = [0, I_F] \circ T$. Рассмотрим сублинейный оператор $p : X \to F$, определяемый формулой

$$p(x) := \inf\{Tu : u \in X^+,\ u \geqslant x\} \quad (x \in X).$$

Нужно доказать, что $p(x) = (Tx)^+$ для всех $x \in X$. При этом достаточно обосновать неравенство $p(x) \leqslant (Tx)^+$, так как противоположное неравенство очевидно. Для фиксированного $u \in X$ в соответствии с 1.4.14 (1) подберем такой оператор $S \in L(X, F)$, что $Su = p(u)$ и $Sx \leqslant p(x)$ $(x \in X)$. Из последнего неравенства при $x \leqslant 0$ получаем $Sx \leqslant p(x) = 0$, а при $x \geqslant 0$ выводим $Sx \leqslant p(x) = Tx$. Итак, $0 \leqslant S \leqslant T$, поэтому в силу нашего предположения будет $S = \rho \circ T$ для некоторого ортоморфизма $\rho \in \mathrm{Orth}(F)^+$. Учитывая сказанное относительно ρ и S, выводим

$$p(u) = Su = \rho(Tu) \leqslant \rho((Tu)^+) \leqslant (Tu)^+,$$

что и требовалось. $\rhd$

2.1.10. *Теорема Канторовича для дискретного оператора.* *Пусть X — упорядоченное векторное пространство, E — некоторое K-пространство. Пусть, далее, X_0 — массивное подпространство в X и $T_0 \in L^+(X_0, E)$ — дискретный оператор на X_0. Тогда существует дискретное продолжение T оператора T_0 на пространство X. Эквивалентным образом: если T_0 — слабый решеточный гомоморфизм, то существует его продолжение T на все X, являющееся слабым решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ Проведем для разнообразия доказательство, следуя классическому образцу.

Пусть сначала $X = \{x_0 + tx_1 : x_0 \in X_0,\, t \in \mathbb{R}\}$ для некоторого $x_1 \in X \setminus X_0$. Положим $Tx_1 := \inf\{T_0x_0 : x_0 \in X_0,\, x_1 \leqslant x_0\}$ и $T_0 := T \restriction X_0$. Ясно, что T — положительный оператор (в силу массивности X_0). Если $T' \in [0, T]$, то $T' \restriction X_0 = \alpha T \restriction X_0$ для всех $x_0 \in X_0$ и некоторого мультипликатора $\alpha \in M(E)$ по условию, т. е. $T'x_0 = \alpha Tx_0$. Поскольку выполнено

$$\begin{gathered} T'x_1 = \inf\{T'x_0 : x_0 \in X_0,\, x_1 \leqslant x_0\} = \alpha Tx_1; \\ (T - T')x_1 = \inf\{(T - T')x_0 : x_0 \in X_0,\, x_1 \leqslant x_0\} = (I_E - \alpha) \circ Tx_1, \end{gathered}$$

то $T' = \alpha \circ T$.

Пусть теперь $X = \bigcup_t X_t$, где (X_t) — фильтрованное вверх (по включению) семейство подпространств, содержащих X_0. Пусть, далее, положительные операторы $T_t : X_t \to E$ дискретны и T_s есть ограничение T_t на X_s, как только $X_s \subset X_t$. Рассмотрим продолжение T оператора T_0 на X, определяемое соотношениями $Tx := T_t x$ $(x \in X_t)$. Введем также сублинейные операторы $P, P_t : X \to E$ формулами

$$P(x) := \inf\{Tx' : x' \in X,\, 0 \leqslant x',\, x \leqslant x'\},$$
$$P_t(x) := \inf\{Tx' : x' \in X_t,\, 0 \leqslant x',\, x \leqslant x'\}.$$

В силу предложения (1) P и P_t всюду определены и, кроме того,

$$\partial P = [0, T], \quad \partial P_t = [0, T_t].$$

Из-за дискретности оператора T выполнено $(T_t x)^+ = P_t(x)$ для таких x и t, что $x \in X_t$. Отсюда выводим $(Tx)^+ = (T_t x)^+ = P_t(x) \geqslant P(x) \geqslant (Tx)^+$. Следовательно, $(Tx)^+ = P(x)$ для всех $x \in X$. Переходя к субдифференциалам, получаем $[0, I_E] \circ T = \partial(x \mapsto (Tx)^+) = \partial P = [0, T]$, т. е. T — дискретный оператор. По построению $T \restriction X_0 = T_0$. $\triangleright$

2.1.11. Уже из 2.1.4, 2.1.6 и 2.1.7 видно, насколько важно иметь детальное аналитическое описание опорного множества канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$. В текущем разделе мы приводим результаты об интегральном представлении этих опорных множеств в различных ситуациях. Рассмотрим сначала скалярный случай $E := \mathbb{R}$.

Будем писать $l_\infty(\mathfrak{A})$ вместо $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$ и, как обычно, $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ вместо $\varepsilon_{\mathfrak{A},\mathbb{R}}$. Пусть $\mathscr{P}(\mathfrak{A})$ — булева алгебра всех подмножеств множества $\mathfrak{A}$, $X^\# := L(X, \mathbb{R})$ и $\mathrm{ba}(\mathfrak{A})$ — множество всех ограниченных конечно аддитивных мер $\mu : \mathscr{P}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$. Меру μ называют *вероятностной*, если $\mu(A) \geqslant 0$ $(A \subset \mathfrak{A})$ и $\mu(\mathfrak{A}) = 1$. Хорошо известно, что пространство $l_\infty(\mathfrak{A})'$, сопряженное к $l_\infty(\mathfrak{A})$, линейно изометрично и решеточно изоморфно пространству $\mathrm{ba}(\mathfrak{A})$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением мере μ соответствующего *интеграла* $I_\mu : l_\infty(\mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$, т. е.

$$I_\mu(f) := \int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)\, d\mu(\alpha) \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A})).$$

Отсюда вытекают следующие два факта.

(1) *Опорное множество $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ биективно множеству всех конечно аддитивных вероятностных мер на $\mathfrak{A}$.*

(2) *Если $\mathfrak{A}$ — слабо ограниченное подмножество $X^{\#}$, то $\varphi \in \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$ в том и только в том случае, если существует конечно аддитивная вероятностная мера μ на $\mathfrak{A}$ такая, что*

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathfrak{A}} \langle x \mid \alpha \rangle \, d\mu(\alpha) \quad (x \in X).$$

Как обычно, здесь $\langle x \mid \alpha \rangle := \alpha(x)$ $(\alpha \in X^{\#}, x \in X)$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство. Обозначим символом $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{c}$ ограничение $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ на подпространство $C(\mathfrak{A})$ вещественнозначных непрерывных функций на $\mathfrak{A}$. Пусть $\operatorname{rca}(\mathfrak{A})$ — пространство всех регулярных борелевских мер на компакте $\mathfrak{A}$. В силу теоремы Рисса — Маркова пространства $C(\mathfrak{A})'$ и $\operatorname{rca}(\mathfrak{A})$ линейно изометричны и решеточно изоморфны. Изоморфизм опять задается сопоставлением мере μ интеграла I_{μ} по этой мере. Отсюда непосредственно вытекают следующие утверждения.

(3) *Опорное множество $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{c}$ можно отождествить с множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на $\mathfrak{A}$.*

(4) *Пусть $\mathfrak{A}$ — слабо компактное* (т. е. *$\sigma(X^{\#}, X)$-компактное*) *множество функционалов на X. Для $\varphi \in X^{\#}$ выполнено $\varphi \in \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$ в том и только в том случае, если существует регулярная борелевская вероятностная мера μ на $\mathfrak{A}$ такая, что*

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathfrak{A}} \langle x \mid \alpha \rangle \, d\mu(\alpha) \quad (x \in X).$$

Получение аналогичных результатов для произвольного канонического оператора связано с теорией меры и интеграла в K-пространствах. Детальное изложение такой теории выходит за рамки этой книги. Мы ограничимся здесь эскизным и фрагментарным описанием результатов о строении канонического оператора и элементов его субдифференциала, соответствующих сформулированным выше утверждениям (3) и (4). Векторнозначные варианты утверждений (1) и (2) мы отложим до 2.4 (см. 2.4.4).

2.1.12. Рассмотрим классы мер и пространств, которые необходимы для описания опорного множества канонического сублинейного оператора.

(1) Определим теперь *интеграл по векторной мере* $\mu \in \mathrm{ba}(A, \mathscr{A}, E)$, где $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств множества $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathrm{St}(\mathfrak{A}, \mathscr{A})$ множество всех функций $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ вида $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, где χ_A — характеристическая функция множества A, причем $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Построим оператор $I_\mu : \mathrm{St}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}) \to E$, полагая

$$I_\mu\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}\right) := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

Как видно, I_μ — линейный оператор, причем имеет место нормативное неравенство

$$|I_\mu(f)| \leqslant \|f\|_\infty |\mu|(\mathfrak{A}) \quad (f \in \mathrm{St}(\mathfrak{A}, \mathscr{A})),$$

где $\|f\|_\infty := \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} |f(\mathfrak{A})|$. Подпространство $\mathrm{St}(\mathfrak{A}, \mathscr{A})$ плотно по норме в пространстве $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{A})$ всех ограниченных измеримых функций. Значит, I_μ допускает единственное распространение (по непрерывности) на все $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{A})$ с сохранением линейности и указанного нормативного неравенства.

(2) В этом параграфе мы будем рассматривать случай, когда $\mathfrak{A}$ — компакт и $\mathscr{A}$ — борелевская σ-алгебра. Тогда $I_\mu(f)$ определен для каждой непрерывной функции $f \in C(\mathfrak{A})$. Заметим также, что $I_\mu \geqslant 0$ в том и только в том случае, если $\mu \geqslant 0$.

Выделим нужные в дальнейшем специальные E-значные меры. Положительную меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *регулярной*, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ будет $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U \in \mathrm{Op}(\mathfrak{A})\}$, где $\mathrm{Op}(\mathfrak{A})$ — совокупность всех открытых подмножеств $\mathfrak{A}$. В случае, когда последнее условие выполнено только для замкнутых $A \in \mathscr{A}$, меру μ называют *квазирегулярной.* Наконец, произвольную меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *регулярной* (*квазирегулярной*), если положительные меры μ^+ и μ^- регулярны (квазирегулярны). Пусть $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ — соответственно множества регулярных и квазирегулярных E-значных борелевских мер. Из определения видно, что $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ являются векторными подрешетками в $\mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$. Легко проверить, что супремум (инфимум) ограниченного в $\mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$ возрастающего (убывающего) семейства квазирегулярных мер также будет квазирегулярным. То же самое верно и для регулярных мер. Таким образом, $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ и $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ служат K-пространствами.

(3) Пусть, как и выше, $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство и E — некоторое K-пространство. Отождествим алгебраическое тензорное произведение $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ с подпространством $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, сопоставив элементу $\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes e_k$, где $e_k \in E$ и $\varphi_k \in C(\mathfrak{A})$, отображение $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi_k(\alpha) e_k$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$. Обозначим символами $C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ соответственно br-замыкание и bo-замыкание множества $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ в решеточно нормированном пространстве $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, т. е. $C_r(\mathfrak{A}, E) := r(C(\mathfrak{A}) \otimes E)$ и $C_\pi(\mathfrak{A}, E) := rd(C(\mathfrak{A}) \otimes E)$. Как видно, $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ — это bo-пополнение решеточно нормированного пространства $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ (с индуцированной из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ векторной нормой), см. 1.6.6 (3).

(4) Если $\mu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{A}, L^r(E, F))$, то существует единственный оператор $I_\mu \in L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ такой, что $I_\mu(\varphi \otimes e) = (\int_{\mathfrak{A}} \varphi \, d\mu) e$ для всех $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ и $e \in E$. Будем писать при этом $I_\mu(f) = \int_{\mathfrak{A}} f \, d\mu$. Общий вид линейного оператора T класса $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ дается формулой

$$Tf = \int_{\mathfrak{A}} f(\alpha) \, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_r(\mathfrak{A}, E)),$$

где $\mu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{A}, L^r(E, F))$.

(5) Обозначим через $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ множество всех регулярных операторов $T : C_\pi(\mathfrak{A}, E) \to F$, удовлетворяющих следующему дополнительному условию: для любого разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{P}(E)$ и произвольного $f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ выполнено $Tf = \sum_{\xi \in \Xi} T(\pi_\xi f)$. Если $\mu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$, то существует единственный $I_\mu \in L^n(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ такой, что $I_\mu(\varphi \otimes e) = (\int_{\mathfrak{A}} \varphi \, d\mu) e$ для всех $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ и $e \in E$. Будем писать при этом $I_\mu(f) = \int_{\mathfrak{A}} f \, d\mu$. Общий вид линейного оператора T класса $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ дается формулой

$$Tf = \int_{\mathfrak{A}} f(\alpha) \, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)),$$

где $\mu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$. Подробнее см. Приложение 3.

2.1.13. Обозначим через $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^r := \varepsilon_{\mathfrak{A},E}^r$ и $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^\pi := \varepsilon_{\mathfrak{A},E}^\pi$ ограничения канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ на $C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ соответственно.

(1) *Для возрастающего сублинейного оператора* $P : E \to F$ *имеет место представление*

$$\partial\,(P \circ \varepsilon^r_{\mathfrak{A}}) = \left\{ I_\mu(\cdot) :\ \mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^r(E,F))^+,\ \mu(\mathfrak{A}) \in \partial P \right\}.$$

$\lhd$ Если ι_r — тождественное вложение $C_r(\mathfrak{A}, E)$ в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, то в силу 1.4.14 (4) будет

$$\partial\,(P \circ \varepsilon^r_{\mathfrak{A}}) = \partial\,(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \iota_r) = \partial\,(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \iota_r.$$

Остается применить 2.1.4 (2) и 2.1.12 (3). $\rhd$

(2) *Для каждого возрастающего o-непрерывного сублинейного оператора* $P : E \to F$ *выполнено представление*

$$\partial\,(P \circ \varepsilon^\pi_{\mathfrak{A}}) = \{ I_\mu(\cdot) :\ \mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E,F)),\ \mu(\mathfrak{A}) \in \partial P \}.$$

$\lhd$ Пусть ι_π — тождественное вложение $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Тогда вновь по 1.4.14 (4) будет

$$\partial\,(P \circ \varepsilon^\pi_{\mathfrak{A}}) = \partial\,(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \iota_\pi) = \partial\,(P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \iota_\pi.$$

Привлечение 2.1.4 (2) и 2.1.12 (4) завершает доказательство. $\rhd$

(3) *Справедливо интегральное представление:*

$$\partial \varepsilon^\pi_{\mathfrak{A},E} = \left\{ I_\mu(\cdot) :\ \mu \in \mathrm{qca}\,(\mathfrak{A}, \mathrm{Orth}(E))^+,\ \mu(\mathfrak{A}) = I_E \right\}.$$

$\lhd$ Нужно положить в (2) $P := I_E$ и заметить, что если $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E,E))^+$, то из $\mu(\mathfrak{A}) = I_E$ вытекает: $\mu(A) \in \mathrm{Orth}(E)$ для всех $A \in \mathscr{A}$. $\rhd$

(4) *Если K-пространство E является (σ, ∞)-дистрибутивным, то*

$$\partial \varepsilon^\pi_{\mathfrak{A},E} = \left\{ I_\mu(\cdot) :\ \mu \in \mathrm{rca}(\mathfrak{A}, \mathrm{Orth}(E))^+,\ \mu(\mathfrak{A}) = I_E \right\}.$$

2.1.14. *Теорема.* *Пусть отображение $p : X \times \mathfrak{A} \to E$ таково, что оператор $x \mapsto p(x, \alpha)$ $(x \in X)$ сублинеен при всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, а отображение $\alpha \mapsto p(x, \alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ кусочно r-непрерывно при всех $x \in X$. Положим*

$$q(x) := \sup\{ p(x, \alpha) :\ \alpha \in \mathfrak{A} \}.$$

Тогда оператор $q : X \to E$ *сублинеен и имеет место представление*

$$\partial q = \bigcup \left\{ \partial \left(\int\limits_{\mathfrak{A}} p(\cdot, \alpha)\, d\mu(\alpha) \right) :\, \mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{A}, \mathrm{Orth}(E))^{+},\ \mu(\mathfrak{A}) = I_E \right\}.$$

Если K*-пространство* E *является* (σ, ∞)*-дистрибутивным, то в этой формуле можно вместо* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ *написать* $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$.

$\lhd$ Введем оператор $P : X \to C_{\pi}(\mathfrak{A}, E)$ формулой

$$P(x) : \alpha \mapsto p(x, \alpha) \quad (\alpha \in \mathfrak{A}).$$

Тогда $q = \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\pi} \circ P$ и в силу 2.1.6 (3) будет

$$\partial q = \bigcup \{ \partial (T \circ P) :\, T \in \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\pi} \} .$$

Остается применить 2.1.13 (3). Вторая часть устанавливается теми же рассуждениями с привлечением 2.1.13 (4). $\rhd$

2.2. Экстремальная структура субдифференциалов

Изучим внутреннее устройство опорных множеств с геометрической точки зрения. Скалярная теория подсказывает, что между дискретными функционалами и крайними точками имеется естественная взаимосвязь, приводящая к классической теореме Крейна — Мильмана. С другой стороны, справедливость теоремы Канторовича о продолжении дискретного оператора наводит на мысль, что опорные множества общих операторов аналогичны обычным субдифференциалам выпуклых функций. И действительно, такая аналогия может быть проведена весьма далеко и полно. Позже мы обсудим эту аналогию детальнее, а пока отметим, что в операторном случае справедливо существенно более тонкое утверждение, чем констатация возможности восстановления опорных множеств по их крайним точкам. С этого и начнем.

2.2.1. Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор. Символом $\mathrm{ext}(P)$ обозначим совокупность всех *крайних точек* (или *экстремальных точек*) опорного множества ∂P. Возьмем еще одно K-пространство F, и пусть $T \in L^{+}(E, F)$. Оператор $S \in \partial P$ называют

T-крайней точкой множества ∂P (или T-крайней точкой оператора P) и пишут $S \in \mathscr{E}(T, P)$, если $T \circ S \in \operatorname{ext}(T \circ P)$. Если $\mathfrak{L}$ — некоторое семейство положительных операторов, то полагают

$$\mathscr{E}(\mathfrak{L}, P) := \bigcap_{T \in \mathfrak{L}} \mathscr{E}(T, P).$$

Напомним, что оператор T называют *порядково-непрерывным* или *o-непрерывным*, если для любого фильтрованного по убыванию ограниченного снизу множества U в E выполнено $T(\inf U) = \inf T(U)$. Пусть $\mathfrak{L}_0$ — класс всех o-непрерывных операторов, определенных в K-пространстве E и со значениями в произвольных K-пространствах. Множество $\mathscr{E}(\mathfrak{L}_0, P)$ обозначают символом $\mathscr{E}_0(P)$, а его элементы называют *o-крайними точками* ∂P (или P).

2.2.2. *Теорема Крейна — Мильмана для o-крайних точек.* *Каждое опорное множество является опорной оболочкой множества своих o-крайних точек. Символически:*

$$\partial P = \partial(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)}) \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим множество $\mathscr{F}$ всех таких сублинейных операторов $P' : X \to E$, что $\partial P' \subset \partial P$ и, кроме того, $\partial(T \circ P')$ является крайним подмножеством $\partial(T \circ P)$ для любого o-непрерывного оператора T, определенного на E. Ясно, что $P \in \mathscr{F}$. Упорядочим $\mathscr{F}$ естественным способом, полагая $P_1 \leqslant P_2 \leftrightarrow \partial P_1 \subset \partial P_2$, и проверим, что $\mathscr{F}$ индуктивно.

Рассмотрим произвольную цепь $\mathfrak{C}$ в $\mathscr{F}$. Заметим, прежде всего, что для всякого $x \in X$ семейство $\{P'(x) : P' \in \mathfrak{C}\}$ фильтруется по убыванию. При этом $0 \leqslant P'(x) + P'(-x) \leqslant P'(x) + P(-x)$, так что определен элемент $P_0(x) := \inf\{P'(x) : P' \in \mathfrak{C}\}$. Очевидно, что возникающий оператор $P_0 : X \to E$ сублинеен. Проверим, что $P_0 \in \mathfrak{C}$. Для этого возьмем o-непрерывный оператор T, числа $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и операторы $S_1, S_2 \in \partial(T \circ P)$, удовлетворяющие условию $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 \in \partial(T \circ P_0)$. Поскольку для всякого $P' \in \mathfrak{C}$ множество $\partial(T \circ P')$ является крайним и содержит $\partial(T \circ P_0)$, то $S_1 \in \partial(T \circ P')$ и $S_2 \in \partial(T \circ P')$. В силу o-непрерывности оператора T получаем

$$S_1 x \leqslant \inf\{T \circ P'(x) :\, P' \in \mathfrak{C}\} = T \inf\{P'(x) :\, P' \in \mathfrak{C}\} = T \circ P_0(x).$$

Следовательно, $S_1 \in \partial(T \circ P_0)$. Аналогично $S_2 \in \partial(T \circ P_0)$.

По лемме Куратовского — Цорна существует минимальный элемент Q в $\mathscr{F}$. Обозначим

$$Q_x : h \mapsto \inf_{\alpha > 0} \alpha^{-1}(Q(x + \alpha h) - Q(x)).$$

Ясно, что $Q_x \leqslant Q$ и $\partial Q(x) = \partial Q_x = \{S \in \partial Q : Sx = Q(x)\}$. Помимо этого, для любого o-непрерывного оператора T выполнено

$$\partial(T \circ Q_x) = \partial(T \circ Q)_x = \partial(T \circ Q)(x) = \\ = \{S \in \partial(T \circ Q) : Sx = T \circ Q(x)\}.$$

Пусть для некоторых $S_1, S_2 \in \partial(T \circ P)$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 \in \partial(T \circ Q_x)$. Тогда $S_1, S_2 \in \partial(T \circ Q)$ в силу свойства множества $\partial(T \circ Q)$ быть крайним и включения $\partial(T \circ Q_x) \subset \partial(T \circ Q)$. Кроме того, ввиду уже доказанного будет $\alpha_1 S_1 x + \alpha_2 S_2 x = T \circ Q(x)$. Значит,

$$0 \geqslant \alpha_1(S_1 x - T \circ Q(x)) + \alpha_2(S_2 x - T \circ Q(x)) = 0.$$

Таким образом, S_1, $S_2 \in \partial(T \circ Q)(x) = \partial(T \circ Q_x)$. Окончательно получаем, что Q входит в $\mathscr{F}$. Ввиду минимальности Q отсюда следует, что $Q_x = Q$. В силу произвольности $x \in X$ получаем, что Q — линейный оператор. Тем самым $Q \in \mathscr{E}_0(P)$.

Итак, установлено, что в любом опорном множестве имеются o-крайние точки. Поэтому для завершения доказательства достаточно заметить, что $\mathscr{E}_0(P) \subset \mathscr{E}_0(P_x)$ для всякого $x \in X$. Последнее справедливо ввиду того уже отмеченного обстоятельства, что $\partial(T \circ Q_x)$ является крайним подмножеством $\partial(T \circ Q)$ для любого o-непрерывного оператора T и произвольного сублинейного оператора Q. Таким образом, для всякого $x \in X$ выполнены оценки

$$P(x) \geqslant \sup\{Sx : S \in \mathscr{E}_0(P)\} \geqslant \sup\{Sx : S \in \mathscr{E}_0(P_x)\} = P(x),$$

завершающие доказательство. $\triangleright$

Теорема 2.2.2, как видно из приведенного доказательства, остается справедливой и при более слабых предположениях (ср. 2.3.7). Например, достаточно требовать, чтобы пространство E и области значений рассматриваемых порядково-непрерывных операторов обладали лишь свойством цепной полноты, а не обязательно являлись K-пространствами. Напомним, что *цепная полнота* упорядоченного множества — это наличие точных границ у ограниченных фильтрованных (соответствующим образом) множеств. Здесь же уместно отметить и следующее обстоятельство. Поскольку $\operatorname{ext}(P) = \mathscr{E}(I_E, P)$, то теорема Крейна — Мильмана в приведенной формулировке, в частности, означает, что субдифференциал восстанавливается и по множеству своих крайних точек.

Изучим более подробно признаки крайних и o-крайних точек, необходимые нам для дальнейшего.

2.2.3. *Для оператора S из ∂P эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *оператор $T \circ S$ входит в $\mathscr{E}(T \circ P)$;*

(2) *если для операторов T_1, T_2, S_1, S_2 выполнено*

$$\begin{gathered} T_1, T_2 \in L^+(E, F), \quad S_1, S_2 \in L(X, F), \\ T_1 + T_2 = T, \quad T \circ S = S_1 + S_2, \\ S_1 \in \partial(T_1 \circ P), \quad S_2 \in \partial(T_2 \circ P), \end{gathered}$$

то справедливы равенства $T_1 \circ S = S_1$ и $T_2 \circ S = S_2$;

(3) *для оператора $\mathscr{A} : (x, y) \mapsto y - Sx$, определенного на пространстве $X \times E$, упорядоченном конусом* $\operatorname{epi}(P)$, *имеет место равенство порядковых отрезков*

$$[0, T] \circ \mathscr{A} = [0, T \circ \mathscr{A}].$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если операторы T_1, T_2, S_1, S_2 удовлетворяют условиям (2), то справедливы соотношения

$$\begin{gathered} 2T \circ S = (T_1 \circ S + S_2) + (S_1 + T_2 \circ S); \\ T_1 \circ S + S_2 \in \partial(T \circ P), \\ S_1 + T_2 \circ S \in \partial(T \circ P). \end{gathered}$$

Таким образом, в силу (1) выполнено $T \circ S = T_1 \circ S + S_2 = S_1 + T_2 \circ S$. Отсюда вытекает, что $T_1 \circ S = S_1$ и $T_2 \circ S = S_2$.

(2) $\to$ (3): Заметим, что оператор $\mathscr{B} : (x,y) \mapsto Uy - Vx$, где $U \in L(E,F)$ и $V \in L(X,F)$, положителен на пространстве $X \times E$, наделенном указанным порядком, в том и только в том случае, если $U \in L^+(E,F)$ и $V \in \partial(U \circ P)$. Отсюда следует, что оператор $\mathscr{A}$ положителен, ибо $S \in \partial P$, и, значит, $[0,T] \circ \mathscr{A} \subset [0, T \circ \mathscr{A}]$. Если для S выполнено (2) и оператор $\mathscr{B}$ положителен и мажорируется оператором $T \circ \mathscr{A}$, то $U, T-U \in L^+(E,F)$. При этом выполнено $V \in \partial(U \circ P)$ и $T \circ S - V \in \partial((T-U)\circ P)$. Применяя (2) к операторам $T_1 := U$, $T_2 := T - U$, $S_1 := V$ и $S_2 := T \circ S - V$, получаем $V = S_1 = T_1 \circ S = U \circ S$, так что $\mathscr{B} = U \circ \mathscr{A}$, где $U \in [0,T]$.

(3) $\to$ (1): Пусть S удовлетворяет (3) и $T \circ S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2$, где $S_1, S_2 \in \partial(T \circ P)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Рассмотрим оператор $\mathscr{B}(x,y) := \alpha_1 Ty - \alpha_1 S_1 x$. Тогда $\mathscr{B} \in [0, T \circ \mathscr{A}]$ ввиду соотношений

$$(T \circ \mathscr{A} - \mathscr{B})(\cdot, 0) = -\alpha_2 S_2, \quad (T \circ \mathscr{A} - \mathscr{B})(0, \cdot) = \alpha_1 T.$$

Таким образом, для некоторого $T_1 \in [0,T]$ выполнено равенство $T_1 \circ \mathscr{A} = \mathscr{B}$. Иными словами, $T_1 = \alpha_1 T$ и $T_1 \circ S = \alpha_1 S_1$. Последнее означает, что $S_1 = T \circ S$. $\triangleright$

2.2.4. Для удобства вспомним некоторые понятия из теории K-пространств, используемые в дальнейшем изложении.

Для положительного оператора T, действующего из K-пространства E в K-пространство F, множество $N(T) := \{e \in E : T|e| = 0\}$ называют *нулевым идеалом* T. Если T — это o-непрерывный оператор, то $N(T)$ является полосой (= компонентой) в E (см. Приложение 1). Дизъюнктное дополнение $N(T)^d := \{e \in E : (\forall z \in N(T)) |e| \wedge |z| = 0\}$ также является полосой. Ее называют *полосой существенной положительности* T или *носителем* T. Это название вызвано тем, что элемент $z \in N(T)^d$ строго положителен, т. е. $z \geqslant 0$ и $z \neq 0$, в том и только в том случае, если строго положителен Tz.

Для любой полосы N в K-пространстве E определен порядковый проектор Pr_N на N. Оператор Pr_N действует на $e \in E^+$ по формуле

$$\mathrm{Pr}_N\, e := \sup [0,e] \cap N.$$

Порядковый проектор $\mathrm{Pr}_{N(T)^d}$, определенный носителем T, обозначается символом Pr_T.

2.2.5. *Теорема.* *Оператор $S \in \partial P$ входит в $\mathscr{E}(T, P)$ в том и только в том случае, если для любых $x \in X$ и $y \in E$ выполнено:*

$$Ty^+ = \inf_{u \in X} (T((P(u) - Su) \vee (P(u-x) - S(u-x) + y))).$$

$\triangleleft$ Для всякого элемента $(x, y) \in X \times E$ верно

$$(x, y \vee Px) \in \operatorname{epi}(P), \quad (0, y \vee P(x) - y) \in \operatorname{epi}(P).$$

Тем самым непустым является следующее множество:

$$U_{(x,y)} := \{(u, v) \in X \times E : P(u) \leqslant v,\ P(u-x) \leqslant v - y\}.$$

Таким образом, корректно определен оператор

$$P_1 : (x, y) \mapsto \inf\{T \circ \mathscr{A}(u, v) :\ (u, v) \in U_{(x,y)}\},$$

где, как и выше, $\mathscr{A}(u, v) := v - Su$. Ясно, что оператор $P_1 : X \times E \to F$ сублинеен, причем $\partial P_1 = [0, T \circ \mathscr{A}]$. Хорошо известно (и легко проверяется), что для сублинейного оператора $P_2 := (y \mapsto Ty^+) \circ \mathscr{A}$ будет $\partial P_2 = [0, T] \circ \mathscr{A}$. Тем самым на основании 1.4.14 (2) указанное в 2.2.3 (3) равенство порядковых отрезков имеет место в том и только в том случае, если $P_1 = P_2$. Последнее означает, что для всех $x \in X$ и $y \in E$ выполнено

$$\begin{aligned}
T(y - Sx)^+ &= \inf_{u \in X,\, v \in E} \{Tv - T \circ Su : P(u) \vee (y + P(u-x)) \leqslant v\} = \\
&= \inf_{u \in X} (T(P(u) \vee (y + P(u-x)) - T \circ Su) = \\
&= \inf_{u \in X} (T(P(u) \vee (y + P(u-x)) - Su)) = \\
&= \inf_{u \in X} (T((P(u) - Su) \vee (P(u-x) - S(u-x) + y - Sx))).
\end{aligned}$$

В силу произвольности $x \in X$ и $y \in E$ приведенное равенство равносильно исследуемому. $\triangleright$

2.2.6. Отметим полезные следствия теоремы 2.2.5.

(1) *Пусть T — некоторый положительный o-непрерывный оператор и $S \in \mathscr{E}(T, P)$. Для проектора Pr_T на носитель T выполнено $\mathrm{Pr}_T \circ S \in \operatorname{ext}(\mathrm{Pr}_T \circ P)$.*

(2) *Если* $\mathfrak{L}$ *— множество o-непрерывных решеточных гомоморфизмов, определенных на области значений* P*, то* $\mathscr{E}(\mathfrak{L}, P) = \operatorname{ext}(P)$.

(3) *Если конус* $\operatorname{epi}(P)$ *миниэдрален* (*т. е. предупорядоченное векторное пространство* $(X \times E, \operatorname{epi}(P))$ *является векторной решеткой*)*, то* $\mathscr{E}(T, P) \supset \operatorname{ext}(P)$ *для всякого* T*. При этом* $\mathscr{E}_0(P) = \operatorname{ext}(P)$.

$\lhd$ В указанном случае для множества $U_{(x,y)}$, фигурирующего в доказательстве теоремы 2.2.5, верно $U_{(x,y)} = \{(u, v) : (x, y)^+ \leqslant (u, v)\}$ и, стало быть, равенство $[0, T \circ \mathscr{A}] = [0, T] \circ \mathscr{A}$ переписывается в виде $T(\mathscr{A}(x, y)^+) = T \circ \mathscr{A}((x, y)^+)$ для всех $(x, y) \in X \times E$ и исследуемого $S \in \partial P$ в обозначениях 2.2.5. Из допущения $S \in \operatorname{ext}(P)$ следует, что $\mathscr{A}(x, y)^+ = (\mathscr{A}(x, y))^+$, поэтому интервалы $[0, T \circ \mathscr{A}]$ и $[0, T] \circ \mathscr{A}$ совпадают, что и означает T-крайность S. $\rhd$

(4) *Если* $\mathfrak{L}$ *— порядковый отрезок* $[0, T]$*, то* $\mathscr{E}(\mathfrak{L}, P) = \mathscr{E}(T, P)$.

(5) *Пусть* Γ *— ограниченное сверху фильтрованное по возрастанию множество o-непрерывных решеточных гомоморфизмов из* F *в* K*-пространство* W*. Для любого* $\mathfrak{L} \subset L^+(E, F)$ *выполнено* $\mathscr{E}(\sup \Gamma \circ \mathfrak{L}, P) = \mathscr{E}(\Gamma \circ \mathfrak{L}, P)$.

(6) *Если* $F = W$ *и* Γ *— произвольное семейство проекторов, то* $\mathscr{E}(\sup \Gamma \circ \mathfrak{L}, P) = \mathscr{E}(\Gamma \circ \mathfrak{L}, P)$.

Из изложенного, в частности, вытекает, что при нахождении o-крайних точек достаточно рассматривать только «большие» операторы с «малыми» областями значений. Так, если E является пространством типа (L) и $\mathfrak{L}$ — семейство всех операторов на E со значениями в регулярно упорядоченных пространствах, то $\mathscr{E}(\mathfrak{L}, P) = \mathscr{E}(\mathbb{1}, P)$, где $\mathbb{1}$ — сильная порядковая единица в сопряженной банаховой решетке E'.

Пусть теперь $Q_1, Q_2 : X \to E$ — два (для простоты положительных) сублинейных оператора и $T \in L^+(E, F)$, где, как обычно, F — еще одно K-пространство. По аналогии с инверсной суммой (см. 1.3.8 (4)) положим

$$(Q_1 \#_T Q_2)(x) := \inf_{x_1 + x_2 = x} T(Q_1(x_1) \vee Q_2(x_2)).$$

Привлекая теорему о векторном минимаксе 1.3.11, легко видеть (ср. 1.3.10 (5)), что справедливо следующее sup-представление:

$$Q_1 \#_T Q_2 = \sup_{\substack{T_1 \geqslant 0,\, T_2 \geqslant 0 \\ T_1 + T_2 = T}} (T_1 \circ Q_1 \oplus T_2 \circ Q_2),$$

где выписанная точная верхняя граница вычисляется поточечно.

(7) *Для оператора S из ∂P обозначим*

$$Q_1 := P - S, \quad Q_2(x) := Q_1(-x) \quad (x \in X).$$

Тогда справедливы эквивалентности

$$S \in \mathscr{E}(T, P) \leftrightarrow Q_1 \#_T Q_2 = 0 \leftrightarrow T \circ Q_1 \oplus T \circ Q_2 = 0.$$

$\lhd$ Импликация $S \in \mathscr{E}(T, P) \to Q_1 \#_T Q_2 = 0$ обеспечена теоремой 2.2.5. Для доказательства обратной импликации заметим, что если $Q_1 \#_T Q_2 = 0$, то $T' \circ Q_1 \oplus (T - T') \circ Q_2 = 0$ для каждого $0 \leqslant T' \leqslant T$. В частности, при $T' := \frac{1}{2} T$ получаем $T \circ Q_1 \oplus T \circ Q_2 = 0$ и, сверх того,

$$0 = \inf_{u \in X} (T((P(u) - Su) \vee (P(u - x) - S(u - x)))).$$

Вновь используя теорему о векторном минимаксе (см. 1.3.10 (5) и 4.1.10 (2)), последовательно выводим

$$\inf_{u \in X} (T((P(u) - Su) \vee (P(u - x) - S(u - x) + y))) =$$

$$= \sup_{\substack{T_1, T_2 \geqslant 0 \\ T_1 + T_2 = T}} \left(\inf_{u \in X} (T_1(P(u) - Su) + T_2(P(u - x) - S(u - x))) + T_2 y \right) =$$

$$= \sup\{T_2 y : T_1 \geqslant 0,\, T_2 \geqslant 0,\, T_1 + T_2 = T\} =$$

$$= \sup\{T' y : T' \in [0, T]\} = T y^+,$$

откуда $S \in \mathscr{E}(T, P)$ согласно 2.2.5. Вторая эквивалентность вытекает из sup-представления $Q_1 \#_T Q_2$. $\rhd$

(8) *Пусть оператор P задан в виде $P := \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle$. Оператор $S \in \partial P$ является крайней точкой ∂P в том и только в том случае, если для всякого $\beta \in L(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E)$ из условий*

$$\beta \geqslant 0,\ \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_E,\ \beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle = S$$

вытекает соотношение

$$\beta|\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx| = 0 \quad (x \in X).$$

$\lhd$ На основании (7) $S \in \operatorname{ext}(P)$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in X$ выполнено

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{u \in X} \big(&\varepsilon_{\mathfrak{A}} \left(\langle\mathfrak{A}\rangle(x+u) - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ S(u+x)\right) \vee \\ &\vee \varepsilon_{\mathfrak{A}} \left(\langle\mathfrak{A}\rangle(u-x) - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ S(u-x)\right)\big) = \\ = \inf_{u \in X} &\varepsilon_{\mathfrak{A}} \left(\langle\mathfrak{A}\rangle u - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Su + |\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx|\right). \end{aligned}$$

Таким образом, привлекая 2.1.4 (2) и теорему о векторном минимаксе, в продолжение начатой выкладки получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\beta \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}} \inf_{u \in X} \beta \circ \big(\langle\mathfrak{A}\rangle u - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Su) + |\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx|\big) = \\ &= \sup_{\beta \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}} \inf_{u \in X} (\beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle u - \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Su + \beta|\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx|) = \\ &= \sup_{\beta \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}} (\beta|\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx|) + \inf_{u \in X} (\beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle u - Su) = \\ &= \sup_{\substack{\beta \geqslant 0,\, \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_E \\ \beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle = S}} \beta|\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sx|, \end{aligned}$$

что и требовалось. $\rhd$

(9) *Оператор $S \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ является T-крайним в том и только в том случае, если*

$$T|Sf| = TS|f| \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)).$$

$\lhd$ Прежде всего, с учетом (7) по аналогии с (8) получаем, что T-крайность S равносильна равенству

$$0 = \inf_{u \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)} T\big(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \left(u - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Su\right) + |f - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Sf|\big).$$

Учитывая теорему о векторном минимаксе, выводим

$$
\begin{aligned}
S \in \mathscr{E}(T,P) \leftrightarrow (\forall R \in \partial\,(T\circ\varepsilon_{\mathfrak{A}}))\\
&0 \geqslant \inf_u\,(R\,(u-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Su) + |f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf|) =\\
&\quad = R|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| + \inf_u\,(Ru - R\circ\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Su) =\\
&\quad = R|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Su)| + \inf_u(Ru - T\circ Su) \leftrightarrow\\
&\leftrightarrow (R = T\circ S \to R|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| = 0) \leftrightarrow\\
&\leftrightarrow T\circ S|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| = 0.
\end{aligned}
$$

Осталось заметить, что

$$
\begin{aligned}
0 = T\circ S|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| \geqslant T\,(S|f| - \Delta_{\mathfrak{A}}|Sf|) =\\
= TS|f| - T|Sf| \geqslant 0 \to TS|f| = T|Sf|,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
TS|f-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| = T|Sf - S\circ\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Sf| = 0,
$$

что и требовалось. $\triangleright$

2.2.7. *Теорема.* *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор S входит в $\operatorname{ext}(P)$;*

(2) *для любых операторов $S_1, S_2 \in \partial P$ и мультипликаторов $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, I_E]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$ и $\alpha_1\circ S_1 + \alpha_2\circ S_2 = S$, найдется порядковый проектор π в E, для которого $\pi\circ S = \pi\circ S_1$ и $\pi^d\circ S = \pi^d\circ S_2$, где $\pi^d := I_E - \pi$;*

(3) *если для операторов $S_1, \dots, S_n \in \partial P$ и мультипликаторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, I_E]$ выполнено*

$$
\sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k\circ S_k = S_1,
$$

то $\alpha_k\circ S = \alpha_k\circ S_k$ для каждого $k := 1, \dots, n$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Если $\alpha_1, \alpha_2, S_1, S_2$ удовлетворяют условиям из (2), то ввиду равенства $\operatorname{ext}(P) = \mathscr{E}(I_E, P)$ и предложения 2.2.3 выполнено $\alpha_1\circ S = \alpha_1\circ S_1$. Пусть π — порядковый проектор на полосу существенной положительности α_1. Из свойств мультипликаторов ясно, что $\pi \circ S_1 = \pi \circ S$. Кроме того, замечая, что $\alpha_1 \circ \pi^d = 0$, имеем

$$\begin{aligned}\pi^d \circ S &= \pi^d \circ (\alpha_1 \circ S_1 + \alpha_2 \circ S_2) = \\ &= \alpha_1 \circ \pi^d \circ S_1 + \alpha_2 \circ \pi^d \circ S_2 = \\ &= \alpha_2 \circ \pi^d \circ S_2 = (I_E - \alpha_1) \circ \pi^d \circ S_2 = \\ &= \pi^d \circ S_2.\end{aligned}$$

(2) $\to$ (3): Проверим для определенности, что в условиях (3) выполнено $\alpha_n \circ S = \alpha_n \circ S_n$. Для этого заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \circ S_k \in \partial \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \circ (x \mapsto S_1 x \vee \ldots \vee S_{n-1} x) \right).$$

Применяя правило 2.1.5 (2) для вычисления субдифференциалов, получаем, что совместна следующая система условий:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \circ S_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \right) \circ \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l \circ S_l, \\ \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l = I_E, \quad \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in [0, I_E].\end{gathered}$$

Поскольку оператор $S' := \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l \circ S_l$ входит в ∂P и, кроме того, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = I_E - \alpha_n$, из равенства $S = (I_E - \alpha_n) \circ S' + \alpha_n \circ S_n$ получаем, что для некоторого порядкового проектора π в E выполнено $\pi \circ S_n = \pi \circ S$ и $\pi^d \circ S' = \pi^d \circ S$. Так как мультипликаторы коммутируют друг с другом, имеем

$$\begin{aligned}\pi^d \circ S &= \pi^d \circ (I_E - \alpha_n) \circ S' + \pi^d \circ \alpha_n \circ S_n = \\ &= (I_E - \alpha_n) \circ \pi^d \circ S' + \alpha_n \circ \pi^d \circ S_n = \\ &= (I_E - \alpha_n) \circ \pi^d \circ S + \alpha_n \circ \pi^d \circ S_n.\end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha_n \circ \pi^d \circ S = \alpha_n \circ \pi^d \circ S_n$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\alpha_n \circ S &= \pi^d \circ \alpha_n \circ S + \pi \circ \alpha_n \circ S_n = \\ &= \alpha_n \circ \pi^d \circ S_n + \pi \circ \alpha_n \circ S_n = \\ &= \alpha_n \circ S_n.\end{aligned}$$

(3) $\to$ (1): Следует из 2.2.3. $\triangleright$

2.2.8. Установленный факт позволяет выявить важнейшую особенность множества крайних точек субдифференциалов — возможность их «перемешивания», т. е. *цикличность* $\mathrm{ext}(P)$.

(1) *Пусть $S_1, S_2 \in \mathrm{ext}(P)$ и π — произвольный порядковый проектор в E. Тогда*

$$S := \pi \circ S_1 + \pi^d \circ S_2 \in \mathrm{ext}(P).$$

$\lhd$ Пусть $S := \alpha U + \beta V$, где $U, V \in \partial P$ и $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\pi \circ S =& \alpha\pi \circ U + \beta\pi \circ V = \pi \circ S_1,\\ \pi^d \circ S =& \alpha\pi^d \circ U + \beta\pi^d \circ V = \pi^d \circ S_2.\end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned}S_1 &= \alpha\pi \circ U + \beta\pi \circ V + \pi^d \circ S_1,\\ S_2 &= \alpha\pi^d \circ U + \beta\pi^d \circ V + \pi \circ S_2.\end{aligned}$$

Взяв оператор S_1, применим 2.2.3 (2) с параметрами: $S := 1$, $T_1 := \alpha\pi$, $T_2 := \beta\pi + \pi^d$, $S_1 := \alpha\pi \circ U$, $S_2 := \beta\pi \circ V$. Тогда выполнены условия 2.2.3 (2), следовательно, $\alpha\pi \circ U = \alpha\pi \circ S_1$. Аналогичные рассуждения для S_2 дают $\alpha\pi^d \circ U = \alpha\pi^d \circ S_2$. Стало быть, приходим к равенствам $\alpha S = \alpha\pi \circ S_1 + \alpha\pi^d \circ S_2 = \alpha\pi \circ U + \alpha\pi^d \circ U = \alpha U$. По сходным соображениям $\beta S = \beta V$. $\rhd$

Заметим, что для любого семейства $(S_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов ∂P и любого семейства мультипликаторов $(\alpha_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такого, что $\sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi = I_E$, выполнено $\sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \circ S_\xi \in \partial P$. Здесь суммирование операторов ведется относительно поточечной o-сходимости. Иными словами,

$$S = \sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \circ S_\xi \leftrightarrow (\forall x \in X)\, Sx = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \circ S_\xi x,$$

где, в свою очередь,

$$y = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi \leftrightarrow y = o\text{-}\lim_{\theta\in\Theta} s_\theta, \quad s_\theta := \sum_{\xi\in\theta} x_\xi$$

(символом θ обозначено конечное подмножество Ξ). Отметим, наконец, что $y = o\text{-}\lim x_\xi$ означает, что имеются возрастающее семейство (a_ξ) и убывающее семейство (b_ξ) такие, что $a_\xi \leqslant x_\xi \leqslant b_\xi$ и $\sup(a_\xi) = \inf(b_\xi) = y$.

Сформулированное свойство ∂P называют *сильной операторной выпуклостью* опорного множества. В связи с этим свойством, очевидно, можно вывести следующие утверждения.

(2) *Пусть* $(S_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— семейство элементов* $\operatorname{ext}(P)$ *и пусть* $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— семейство порядковых проекторов, составляющих разбиение единицы, т. е. таких, что*

$$\xi_1 \neq \xi_2 \to \pi_{\xi_1} \circ \pi_{\xi_2} = 0; \quad \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = I_E.$$

Оператор $\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \circ S_\xi$ *также входит в* $\operatorname{ext}(P)$.

Последний факт дает повод назвать (слабо порядково ограниченное) множество $\mathfrak{A}$ в $L(X,E)$ *сильно циклическим*, если для любых семейства $(S_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{A}$ и произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ будет $\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \circ S_\xi \in \mathfrak{A}$. Наименьшее сильно циклическое множество, содержащее данное множество $\mathfrak{A}$, называют *сильно циклической оболочкой* $\mathfrak{A}$ и обозначают $\operatorname{scyc}(\mathfrak{A})$ или $\mathfrak{A}{\uparrow\downarrow}$ (ср. 2.4.2 (4)).

(3) Имеет место включение $\operatorname{scyc}(\mathscr{E}_0(P)) \subset \operatorname{ext}(P)$.

Изучим теперь связь o-крайних и крайних точек более полно.

2.2.9. ***Теорема.*** *Множество крайних точек опорного множества канонического оператора* $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ *состоит из решеточных гомоморфизмов пространства* $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ *в* E*, лежащих в* $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$*. При этом имеет место равенство* $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы можно извлечь из 2.2.6 (8, 9). Полноты ради дадим иное обоснование, не использующее теорему о векторном минимаксе.

Докажем, прежде всего, первую часть требуемого утверждения. Пусть сначала $\mu \in \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$ и $\mu' \in [0, \mu]$. Ясно, что оператор $\alpha' := \mu' \circ \Delta_{\mathfrak{A}}$ лежит в порядковом отрезке $[0, I_E]$. При этом $\mu' \in \partial\,(\alpha' \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Таким образом, по правилу субдифференцирования 1.4.14 (5) для некоторого $\mu_1 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ имеем $\mu' = \alpha' \circ \mu_1$. Аналогично $\mu - \mu' = (I_E - \alpha') \circ \mu_2$ для некоторого $\mu_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$. Итак, справедливо представление $\mu = \alpha' \circ \mu_1 + (I_E - \alpha') \circ \mu_2$. Значит, по теореме 2.2.7

$\alpha' \circ \mu = \alpha' \circ \mu_1 = \mu'$ и $[0, \mu] = [0, I_E] \circ \mu$. Тем самым на основании 2.1.9 (1) μ — решеточный гомоморфизм.

Пусть теперь $\mu \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ и μ — решеточный гомоморфизм. Если $\mu = \alpha_1 \circ \mu_1 + \alpha_2 \circ \mu_2$, где $\mu_1, \mu_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$, то, в силу 2.1.9 (1), $\alpha_1 \circ \mu_1 = \alpha \circ \mu$ для некоторого $\alpha \in [0, I_E]$. Так как выполнено $\mu_1 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = \mu \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_E$ (см. 2.1.4 (2)), то $\alpha = \alpha_1 I_E$, так что $\mu_1 = \mu$.

Для доказательства второй части теоремы достаточно установить, что конус

$$\operatorname{epi}\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right) = \left\{(f, y) \in l_\infty(\mathfrak{A}, E) \times E : \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}(f) \leqslant y\right\}$$

миниэдрален. Здесь $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}(f) := (\varepsilon_{\mathfrak{A}}(f))^{+}$. В самом деле, по 2.2.6 (3) выполнено $\mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}) = \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+})$. Кроме того, если $\alpha_1 \circ \mu_1 + \alpha_2 \circ \mu_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ и $\mu_1, \mu_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}$, то ввиду соотношения $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+} = [0, I_E] \circ \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, вытекающего из правил субдифференцирования 1.4.14 (5) и 2.1.5 (3), получается, что $\mu_1 \circ \Delta_{\mathfrak{A}}, \mu_2 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in [0, I_E]$, причем $\alpha_1\mu_1 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} + \alpha_2\mu_2 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_E$. Отсюда $\mu_1 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = \mu_2 \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_E$. Значит, $\mu_1, \mu_2 \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ является крайним подмножеством в $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}$. Следовательно, $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \subset \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right) = \mathscr{E}_0\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right)$. Если $\mu \in \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$, то $T \circ \mu \in \operatorname{ext}\left(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right)$ для любого оператора T. Тем самым выполнено $T \circ \mu \in \operatorname{ext}(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})$, ибо $\partial(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}) \subset \partial\left(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right)$, так что $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \subset \mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Обратное включение очевидно.

Итак, следует установить только, что конус

$$\operatorname{epi}\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\right) = \{(f, y) \in l_\infty(\mathfrak{A}, E) \times E : y \geqslant 0,\ f \leqslant \Delta_{\mathfrak{A}} y\}$$

миниэдрален. Для этого покажем, что для любых двух элементов (f, y) и (g, z) из $l_\infty(\mathfrak{A}, E) \times E$ выполнено

$$(f, y) \wedge (g, z) = \left(\left(f - \Delta_{\mathfrak{A}}(y - z)^{+}\right) \vee \left(g - \Delta_{\mathfrak{A}}(z - y)^{+}\right),\ y \wedge z\right).$$

Обозначим через h первую проекцию правой части последнего соотношения. Заметим, что элемент $(h, y \wedge z)$ является нижней границей элемента (f, y). В самом деле,

$$\begin{aligned} f - h &= f + \left(\Delta_{\mathfrak{A}}(y - z)^{+} - f\right) \wedge \left(\Delta_{\mathfrak{A}}(z - y)^{+} - g\right) = \\ &= \Delta_{\mathfrak{A}}(y - z)^{+} \wedge \left(\Delta_{\mathfrak{A}}(z - y)^{+} + f - g\right) \leqslant \\ &\leqslant \Delta_{\mathfrak{A}}(y - z)^{+}, \end{aligned}$$

т. е. $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}(f-h) \leqslant (y-z)^{+} = y - y \wedge z$. Аналогично проверяется, что (g,z) мажорирует $(h, y \wedge z)$.

Пусть теперь (h', p) — произвольная нижняя граница элементов (f,y) и (g,z). Тогда $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}(f-h') \leqslant y-p$ и $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}(g-h') \leqslant z-p$. Таким образом,

$$
\begin{gathered}
y-p \geqslant 0,\ z-p \geqslant 0; \\
f-h' \leqslant \Delta_{\mathfrak{A}}(y-p), \\
g-h' \leqslant \Delta_{\mathfrak{A}}(z-p).
\end{gathered}
$$

Следовательно, $p \leqslant y \wedge z$, причем

$$
\begin{aligned}
h-h' \leqslant {} & \bigl(f-\Delta_{\mathfrak{A}}(y-z)^{+}\bigr) \vee \bigl(g-\Delta_{\mathfrak{A}}(z-y)^{+}\bigr) - \\
& - (f-\Delta_{\mathfrak{A}}(y-p)) \vee (g-\Delta_{\mathfrak{A}}(z-p)) = \\
= {} & (f-\Delta_{\mathfrak{A}}(y-y\wedge z)) \vee (g-\Delta_{\mathfrak{A}}(z-y\wedge z)) - \\
& - (f-\Delta_{\mathfrak{A}}y) \vee (g-\Delta_{\mathfrak{A}}z) + \Delta_{\mathfrak{A}}p = \\
= {} & \Delta_{\mathfrak{A}}(y\wedge z - p),
\end{aligned}
$$

т. е. (h', p) меньше или равно $(h, y \wedge z)$ в смысле порядка, индуцированного конусом $\operatorname{epi}\bigl(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{+}\bigr)$. Тем самым установлено равенство $(f,y) \wedge (g,z) = (h, y \wedge z)$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

2.2.10. *Теорема Мильмана.* *Пусть $P : Y \to E$ — сублинейный оператор, действующий из векторного пространства Y в K-пространство E. Пусть, далее, $T \in L(X,Y)$. Тогда справедливо включение*

$$\operatorname{ext}(P \circ T) \subset \operatorname{ext}(P) \circ T.$$

$\triangleleft$ Пусть $U \in \operatorname{ext}(P \circ T)$. Ясно, что для некоторого $V \in \partial P$ будет $U = V \circ T$ в силу 1.4.14 (4). Пусть V_0 — сужение V на $\operatorname{im}(T)$. Ясно, что V_0 лежит в $\operatorname{ext}(P \circ \iota)$, где ι — тождественное вложение $\operatorname{im}(T)$ в Y. Значит, в силу 2.2.3, в упорядоченном пространстве $Y \times E$ с положительным конусом $\operatorname{epi}(P)$ оператор $\mathscr{V}_0 : \operatorname{im}(T) \times E \to E$, действующий по правилу

$$\mathscr{V}_0 : (y,e) \mapsto e - V_0 e \quad (y \in \operatorname{im}(T),\, e \in E),$$

будет дискретным. Подпространство $\operatorname{im}(T) \times E$, очевидно, массивно в $Y \times E$. Таким образом, по теореме Канторовича для дискретного оператора 2.1.10 существует дискретное продолжение $\mathscr{V}$ оператора $\mathscr{V}_0$. Нет сомнений, что оператор $Sy := \mathscr{V}(y, 0)$ лежит в ∂P, крайний там и, кроме того, совпадает с V на образе $\operatorname{im}(T)$. Иными словами, $U = V \circ T = S \circ T$ и $S \in \operatorname{ext}(P)$. $\triangleright$

2.2.11. Отметим важные следствия теоремы Мильмана.

(1) *Если субдифференциал ∂P является опорной оболочкой множества $\mathfrak{A}$, то выполнено*

$$\operatorname{ext}(P) \subset \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

$\triangleleft$ По условию и теореме Мильмана

$$\operatorname{ext}(P) = \operatorname{ext}(\operatorname{cop}(\mathfrak{A})) = \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle\right) \subset \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathfrak{A}}\right) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle,$$

что и требовалось. $\triangleright$

(2) *Для любого сублинейного оператора P выполнено*

$$\operatorname{ext}(P) \subset \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)}\right) \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle.$$

Теорема Мильмана и ее следствия дают весьма полную характеризацию внутреннего строения опорного множества «по модулю» того, как устроены крайние точки субдифференциала канонического оператора и его элементы. Устройство указанных элементов описывается в параграфе 2.4.

2.3. Субдифференциалы операторов, действующих в модулях

При изучении субдифференциалов мы сталкиваемся с более богатыми алгебраическими структурами, чем первоначально заданные векторные пространства. С этим обстоятельством мы столкнулись, в частности, в параграфе 1.5.

Специально подчеркнем, что опорное множество сублинейного оператора не просто выпуклое, но операторно-выпуклое множество, т. е. удовлетворяет аналогу обычного определения, в котором в роли скаляров выступают мультипликаторы. Иначе говоря, изучая обычные выпуклые объекты в векторных пространствах, мы с необходимостью сталкиваемся с более общими аналогами выпуклости —

с выпуклостью в модулях над кольцами (в частности, над кольцом умножений на элементы какого-нибудь K-пространства ограниченных элементов).

Есть и еще одна значительно более важная причина, вызывающая интерес к выпуклым объектам в модулях. В приложениях часто приходится сталкиваться с задачами, в которых гипотеза «делимости» элементов неприемлема. Таковы, конечно же, все задачи целочисленного программирования. В каком объеме можно сохранить развитый выше аппарат субдифференцирования для случая общих систем — этот вопрос и будет сейчас в центре нашего внимания. Прежде всего мы остановимся на общих свойствах субдифференциалов в модулях над кольцами.

2.3.1. Итак, пусть A — произвольное решеточно упорядоченное кольцо с положительной единицей $\mathbb{1}_A$. Тем самым A не только кольцо, но в A имеется также отношение порядка $\leqslant$, относительно которого A является решеткой. При этом выполнены естественные условия согласования сложения и умножения с порядком. В частности, положительные элементы A^+ кольца A составляют полугруппу относительно имеющегося в A сложения.

Рассмотрим теперь *модуль X над кольцом A* или, короче, *A-модуль X*. Этот модуль (как и последующие) всегда считается унитарным, т. е. $\mathbb{1}_A x = x$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим оператор $p : X \to E^\bullet$, где, как и выше, $E := E^\bullet \cup \{+\infty\}$ и E — некоторый упорядоченный A-модуль (читатель восстановит для себя естественное определение этого понятия). Оператор называют *A-сублинейным* или *модульно-сублинейным*, когда ссылка на кольцо A подразумевается, если для любых $x, y \in X$ и $\pi, \rho \in A^+$ справедливо неравенство

$$p(\pi x + \rho y) \leqslant \pi p(x) + \rho p(y).$$

Как правило, в дальнейшем мы ограничиваемся изучением всюду определенных A-сублинейных операторов $p : X \to E$. Стоит подчеркнуть, что $p(0) = 0$. В самом деле, $p(0) \leqslant 0p(0) = 0$ и, кроме того, $p(0) = p(0 + 0) \leqslant 2p(0)$. В то же время легко видеть, что совсем не всегда $p(\pi x) = \pi p(x)$ для любого $x \in X$ при $\pi \in A^+$ и $\pi \neq 0$ (в этом проявляется существенное отличие от $\mathbb{R}$-сублинейных операторов — обычных сублинейных операторов, которые рассматривались нами ранее). Если $p(\pi x) = \pi p(x)$ при всех $x \in X$ и $\pi \in A^+$, то p называют A^+-*однородным оператором.* Рассмотрим теперь множество $\mathrm{Hom}_A(X, E)$, обозначаемое также $L_A(X, E)$ или даже $L(X, E)$, в случае, если это не вызывает разночтений. Это множество состоит из всех A-*линейных операторов*, действующих из X в E, или, как их еще называют, A-гомоморфизмов. Таким образом,

$$T \in \mathrm{Hom}_A(X, E) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall x, y \in X)(\forall \pi, \rho \in A) T(\pi x + \rho y) = \pi T x + \rho T y.$$

Для A-сублинейного оператора $p : X \to E$ определяют *субдифференциал в нуле* (= *опорное множество*) и *субдифференциал в точке* $x \in X$ соотношениями

$$\partial^A p := \{T \in \mathrm{Hom}_A(X, E) : \ (\forall x \in X)\, T x \leqslant p(x)\};$$
$$\partial^A p(x) := \{T \in \partial^A p : \ T x = p(x)\}.$$

Следовательно, имеет место представление

$$\partial^A p(x) = \{T \in \mathrm{Hom}_A(X, E) : \ (\forall y \in X)\, T(y - x) \leqslant p(y) - p(x)\}.$$

Если $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, то в связи с тем, что X и E являются $\mathbb{Z}$-модулями (= абелевыми группами), определены субдифференциалы $\partial^{\mathbb{Z}} p$ и $\partial^{\mathbb{Z}} p(x)$, которые обозначают просто символами ∂p и $\partial p(x)$. Как мы увидим ниже, это соглашение не вызывает коллизии обозначений.

Говорят, что A-модуль E обладает *свойством A-продолжения*, если для любых A-модулей X, Y, а также A-сублинейного оператора $p : Y \to E$ и гомоморфизма $T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ справедлива *формула Хана — Банаха*

$$\partial^A (p \circ T) = \partial^A p \circ T.$$

Если, помимо этого, для всякого $y \in Y$ субдифференциал $\partial p(y)$ непуст, то говорят, что E *допускает выпуклый анализ.*

2.3.2. *Пусть A-модуль E обладает свойством A-продолжения и $p : X \to E$ — некоторый A-сублинейный оператор. Справедливы утверждения:*

(1) *существует $T \in \partial^A p$ такой, что $Tx = y$ в том и только в том случае, если $\pi y \leqslant p(\pi x)$ для всех $\pi \in A$;*

(2) *оператор p является A^+-однородным в том и только в том случае, если непуст его субдифференциал в каждой точке, т. е. $\partial^A p(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ (1): Если $T \in \partial^A p$ и $Tx = y$, то $\pi y = \pi Tx = T\pi x \leqslant p(\pi x)$. Если же, в свою очередь, известно, что $\pi y \leqslant p(\pi x)$ при всех $\pi \in A$, то при $\pi_1 x = \pi_2 x$ будет $(\pi_1 - \pi_2)y \leqslant p((\pi_1 - \pi_2)x) = 0$, т. е. $\pi_1 y = \pi_2 y$. Значит, на A-модуле $\{\pi x : \pi \in A\}$ корректно определен A-гомоморфизм $\pi x \mapsto \pi y$ при $\pi \in A$. Привлекая свойство продолжения, мы обнаруживаем искомый оператор T.

(2): Если $T \in \partial^A p(x)$ и $\pi \in A^+$, то $\pi p(x) = \pi Tx = T\pi x \leqslant p(\pi x) \leqslant \pi p(x)$, откуда и вытекает A^+-однородность p. Если же заранее известно, что p — это A-сублинейный A^+-однородный оператор, то для всякого $\pi \in A$ выполнено

$$\begin{aligned} \pi p(x) = \pi^+ p(x) - \pi^- p(x) = p(\pi^+ x) - p(\pi^- x) \leqslant \\ \leqslant p(\pi^+ x - \pi^- x) = p(\pi x). \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial^A p(x) \neq \varnothing$ в силу (1). $\rhd$

2.3.3. Пусть E — упорядоченная абелева группа (т. е. упорядоченный $\mathbb{Z}$-модуль). Положим $E_b := E^+ - E^+$ и допустим, что E_b является стертым K-пространством. Напомним, что *стертым K-пространством* называют группы, получающиеся из K-пространств при игнорировании умножения на действительные числа, т. е. «стирании» в памяти части информации о пространстве.

2.3.4. *Теорема Бигарда.* *Упорядоченный $\mathbb{Z}$-модуль E обладает свойством $\mathbb{Z}$-продолжения в том и только в том случае, если E_b является стертым K-пространством.*

$\lhd$ Установим только более простую и необходимую нам с самого начала часть теоремы о том, что приведенное условие достаточно. Теорема Бигарда в полном объеме содержится в излагаемых ниже результатах (см. 2.3.17).

Итак, пусть E_b — стертое K-пространство, $p : X \to E$ — субаддитивный ($= \mathbb{Z}$-сублинейный) оператор и $T_0 : X_0 \to E$ — групповой гомоморфизм такой, что $T_0 \in \partial(p \circ \iota)$, где $\iota : X_0 \to X$ — вложение.

Нужно построить продолжение T_0 на X или, что то же самое, проверить вхождение T_0 в $(\partial p) \circ \iota$. Учитывая, что E_b — инъективный модуль (= полная группа), мы видим, что E_b вкладывается в E как прямое слагаемое (по хорошо известному и легко проверяемому факту из теории групп). Тем самым можно считать, что $E = E_b$ (продолжением в дополнение E_b в E «служит» p). Рассматривая $X \times E$ с полугруппой положительных элементов $\operatorname{epi}(p) := \{(x, e) : e \geqslant p(x)\}$, мы сводим дело к «групповому» аналогу теоремы Канторовича 1.4.15. Итак, можно считать, что X_0 — массивная подгруппа группы X (т. е. $X_0 + X^+ = X$) и $T_0 : X_0 \to E$ — положительный групповой гомоморфизм. Необходимо построить его положительное продолжение. Стандартное применение леммы Куратовского — Цорна сводит дело к случаю, когда $X = \{m\bar{x} + x_0 : m \in \mathbb{Z}, x_0 \in X_0\}$. Положим

$$U := \{e \in E : (\exists x_0 \in X_0)(\exists m \geqslant 1)\, m\bar{x} \geqslant x_0 \wedge e = T_0x_0/m\},$$
$$V := \{f \in E : (\exists x_{00} \in X_0)(\exists n \geqslant 1)\, n\bar{x} \leqslant x_{00} \wedge f = T_0x_{00}/n\}.$$

Понятно, что U и V непусты в силу массивности X_0. При этом выполнено $U \leqslant V$. В самом деле, при $e \in U$ и $f \in V$ будет $e = T_0x_0/m$, $f = T_0x_{00}/n$ и $x_0 \leqslant m\bar{x}$, $n\bar{x} \leqslant x_{00}$. Значит, $nx_0 \leqslant nm\bar{x} \leqslant mx_{00}$ и $nT_0x_0 \leqslant mT_0x_{00}$. Поэтому $e \leqslant f$. Выбираем теперь $\bar{e} \in E$ так, чтобы было $U \leqslant \bar{e} \leqslant V$ (например, $\bar{e} := \inf V$). Положим $T(m\bar{x} + x_0) := m\bar{e} + T_0x_0$. Проверим корректность такого определения. В самом деле, пусть $m\bar{x} + x_0 = n\bar{x} + x_{00}$. Надо показать, что $m\bar{e} + T_0x_0 = n\bar{e} + T_0x_{00}$. Будем для определенности считать, что $n > m$ (в случае $n = m$ нечего доказывать). Тогда $(n - m)\bar{x} = x_0 - x_{00}$ и, значит, $\bar{e} \geqslant T_0(x_0 - x_{00})/(n - m)$ и $\bar{e} \leqslant T_0(x_0 - x_{00})/(n - m)$ по определению $\bar{e}$. Итак, T — корректно заданное продолжение T_0. Не вызывает сомнений, что T — это групповой гомоморфизм. Проверим корректность T. Если $m\bar{x} + x_0 \geqslant n\bar{x} + x_{00}$ и для определенности $n > m$, то $(n - m)\bar{x} \leqslant x_0 - x_{00}$ и $\bar{e} = (T_0x_0 - T_0x_{00})/(n - m)$. Тем самым $T(m\bar{x} + x_0) = m\bar{e} + T_0x_0 \geqslant n\bar{e} + T_0x_{00} = T(n\bar{x} + x_{00})$, что и завершает доказательство. ▷

2.3.5. Нам понадобятся также некоторые свойства $\mathbb{Z}$-сублинейных операторов, вытекающие из теоремы Бигарда (точнее, из уже доказанной тривиальной части).

(1) *Пусть $p : X \to E$ — некоторый $\mathbb{Z}$-сублинейный оператор. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\partial(np) = n\partial p$.*

$\lhd$ Включение $n\partial p \subset \partial(np)$ очевидно. Допустим теперь, что $T \in \partial(np)$. Привлекая 2.3.4, возьмем какой-либо гомоморфизм $T_0 \in \partial p$. Тогда $T - nT_0 \in \partial(n(p - T_0))$. Так как $p(x) - T_0 x \geqslant 0$, то образ $\operatorname{im}(T - nT_0)$ лежит в E_b. Значит, корректно определен оператор $S := n^{-1}(T - nT_0)$. При этом $S \in \partial(p - T_0)$. Положим теперь $Q := S + T_0$. Ясно, что $Q \in \partial p$, причем $nQ = n(n^{-1}(T - nT_0)) + nT_0 = T$. Окончательно заключаем: $T \in n\partial p$. $\rhd$

(2) *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно*

$$\sum_{k=1}^{n} \partial p = n\partial p.$$

$\lhd$ Достаточно заметить, что множество, стоящее в левой части доказываемого соотношения, очевидным образом содержится в $\partial(np)$, и применить (1). $\rhd$

(3) *Пусть T_1, $T_2 \in \partial p$, причем для некоторого $n \in \mathbb{N}$ верно $nT_1 = nT_2$. Тогда $T_1 = T_2$.*

$\lhd$ Поскольку $T_1 - T_2 \in \partial(p - T_2)$ и $T_2 \in \partial p$, то $\operatorname{im}(T_1 - T_2) \subset E_b$. В самом деле,

$$p(x) - T_2 x - (T_1 x - T_2 x) \geqslant 0, \quad p(x) - T_2 x \geqslant 0,$$
$$T_1 x - T_2 x = -(p(x) - T_2 x) + (T_1 x - T_2 x) + p(x) - T_2 x,$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

(4) *Пусть $p : X \to E$ — некоторый $\mathbb{Z}$-сублинейный $\mathbb{Z}^+$-однородный оператор и $x \in X$. Тогда для всякого $h \in X$ существует o-предел*

$$p'(x)(h) := o\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}} (p(nx + h) - p(nx)) =$$
$$= \inf\{p(nx + h) - p(nx) : n \in \mathbb{N}\}.$$

При этом $\partial(p'(x)) = \partial p(x)$.

$\lhd$ Положим $z_n := p(nx + h) - p(nx)$. Как видно, $p(nx) = p(nx + h - h) \leqslant p(nx + h) + p(-h)$, т. е. $z_n \geqslant -p(-h)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, в силу предположения о субаддитивности и $\mathbb{Z}^+$-однородности для $m \geqslant n$ можно написать

$$
\begin{aligned}
z_n &= p(nx+h) - p(nx) = \\
&= p(nx+h) + p((m-n)x) - (m-n)p(x) - np(x) \geqslant \\
&\geqslant p(nx+h+(m-n)x) - mp(x) = \\
&= z_m.
\end{aligned}
$$

При этом $p(nx+h) - p(nx) \leqslant p(h)$, откуда $\partial p'(x) \subset \partial p$. Кроме того,

$$p'(x)(x) = o\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}}(p(nx+x) - p(nx)) = p(x),$$

что и завершает доказательство. $\triangleright$

(5) *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(np)'(x) = np'(x)$.*

(6) *Для $\mathbb{Z}$-сублинейного $p : X \to E$ обозначим $h_p(x) := \sup\{Tx : T \in \partial p\}$. Тогда h_p — наибольший $\mathbb{Z}$-сублинейный $\mathbb{Z}^+$-однородный оператор, мажорируемый p. При этом $\partial h_p = \partial p$.*

2.3.6. Перейдем теперь к теореме Крейна — Мильмана для групп. Прежде всего условимся называть оператор $T \in \partial p$ *крайним*, если из включений $T_1, T_2 \in \partial p$ и $T_1 + T_2 = 2T$ вытекает $T = T_1 = T_2$. Множество всех крайних операторов в субдифференциале ∂p обозначено символом $\operatorname{ext}(p)$. Как видно, это обозначение согласовано с общепринятым.

Распространим теперь понятие канонического оператора и соответствующий формализм на случай групп. Именно, для непустого множества $\mathfrak{A}$ символом $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ обозначим $\mathbb{Z}$-модуль порядково ограниченных E-значных отображений на $\mathfrak{A}$. Это множество наделяют естественной структурой упорядоченного $\mathbb{Z}$-модуля (подмодуля обычной декартовой степени $E^{\mathfrak{A}}$ с покоординатными операциями). Символом $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ обозначим *канонический $\mathbb{Z}$-сублинейный оператор*, определяемый формулой

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{\mathfrak{A}} : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E, \\
\varepsilon_{\mathfrak{A}}(f) := \sup f(\mathfrak{A}) \ (f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)).
\end{gathered}
$$

Если при этом $\mathfrak{A}$ — некоторое поточечно порядково ограниченное множество гомоморфизмов из X в E, то определяем гомоморфизм $\langle\mathfrak{A}\rangle : X \to l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ как в 2.1.1: $\langle\mathfrak{A}\rangle : x \mapsto (Tx)_{T\in\mathfrak{A}}$, т. е. $\langle\mathfrak{A}\rangle x : \mathfrak{A} \ni T \mapsto Tx \in E$.

2.3.7. *Теорема Крейна — Мильмана для групп.* *Для каждого $\mathbb{Z}$-сублинейного оператора p справедливо представление*

$$\partial p = \partial\varepsilon_{\mathrm{ext}(p)} \circ \langle \mathrm{ext}(p) \rangle.$$

$\lhd$ Доказательство этого утверждения проводится по образцу соответствующей теоремы 2.2.2 об o-крайних точках, однако содержит небольшие тонкости.

Итак, рассмотрим множество $\mathscr{F}$ всех таких $\mathbb{Z}$-сублинейных операторов $q : X \to E$, что $q(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$ и, кроме того, q экстремален для p. Последнее означает, что для $T_1, T_2 \in \partial p$ таких, что $T_1 + T_2 \in 2\partial q$, будет $T_1, T_2 \in \partial q$. Ясно, что $p \in \mathscr{F}$. Снабдим $\mathscr{F}$ естественным порядком и рассмотрим произвольную цепь $\mathfrak{C}$ в $\mathscr{F}$. Заметим, что $p(-x) + q(x) \geqslant q(x) + q(-x) \geqslant 0$. Таким образом, определен элемент $p_0(x) := \inf\{q(x) : q \in \mathfrak{C}\}$. В силу o-непрерывности сложения возникающий оператор p_0, очевидно, $\mathbb{Z}$-сублинеен. Непосредственно проверяется, что $p_0 \in \mathscr{F}$. Следовательно, на основании леммы Куратовского — Цорна в $\mathscr{F}$ имеется минимальный элемент q. В силу упомянутой минимальности и 2.3.5 (6) верно, что $q = h_q$. Значит, согласно 2.3.5 (4) определен оператор $q'(x)$. При этом если $T_1, T_2 \in \partial p$ и $T_1 + T_2 \in 2\partial(q'(x))$, то $T_1, T_2 \in \partial p$ ввиду экстремальности q. В силу 2.3.5 (5) будет $T_1x + T_2x = 2q(x)$. Учитывая неравенства $T_1x \leqslant q'(x)$ и $T_2x \leqslant q'(x)$, заключаем, что $T_1, T_2 \in \partial q(x) = \partial(q'(x))$. Итак, $q'(x)$ экстремален для p, поэтому $q = q'(x)$ для всех $x \in X$. Последнее, как легко видеть, означает, что q является гомоморфизмом, т. е. $q \in \mathrm{ext}(p)$. Тем самым можно сделать вывод о непустоте $\mathrm{ext}(p)$ для каждого p.

Для завершения доказательства достаточно рассмотреть случай, когда p — это $\mathbb{Z}^+$-однородный оператор. В этом случае, как фактически уже отмечено, при каждом $x \in X$ оператор $p'(x)$ является экстремальным для p, т. е. $\mathrm{ext}(p'(x)) \subset \mathrm{ext}(p)$. Привлекая 2.3.2 и 2.3.4, мы получаем требуемое представление. $\rhd$

Ниже нам понадобится еще одно свойство крайних точек.

2.3.8. *Для любого $\mathbb{Z}$-сублинейного оператора $p : X \to E$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство*

$$\mathrm{ext}(np) = n\,\mathrm{ext}(p).$$

$\lhd$ Пусть сначала $T \in \mathrm{ext}(np)$. Тогда на основании 2.3.5 (1) $T = nS$, где $S \in \partial p$. Проверим, что $S \in \mathrm{ext}(p)$. В самом деле, если $2S =$

$S_1 + S_2$, где $S_1, S_2 \in \partial p$, то $2T = 2nS = nS_1 + nS_2$. Таким образом, $nS = nS_1 = nS_2$. По предложению 2.3.5 (3) получаем $S = S_1 = S_2$, что и нужно.

Если теперь $T \in \operatorname{ext}(p)$ и $2nT = T_1 + T_2$, где $T_1, T_2 \in \partial(np)$, то по предложению 2.3.5 (3) будет $T_1 = nS_1$ и $T_2 = nS_2$ для некоторых $S_1, S_2 \in \partial p$. При этом $2nT = n(2T) = n(S_1 + S_2)$. Привлекая 2.3.5 (3), имеем $2T = S_1 + S_2$, откуда $T = S_1 + S_2$. Следовательно, $T_1 = nS_1$ и $T_2 = nS_2$. Тем самым $nT \in \operatorname{ext}(np)$. $\triangleright$

2.3.9. Для дальнейших нужд нам потребуются дополнительные сведения об ортоморфизмах в K-пространствах. Пусть E — некоторое K-пространство, а I_E — это, как обычно, тождественный оператор в E. Полосу, порожденную оператором I_E в K-пространстве регулярных операторов $L^r(E)$, обозначают символом $\operatorname{Orth}(E)$. Напомним, что элементы $\operatorname{Orth}(E)$ называют *ортоморфизмами*. В теории K-пространств проверяется, что ортоморфизм π можно охарактеризовать как регулярный оператор, коммутирующий с проекторами (элементами базы E) или с мультипликаторами (элементами $M(E)$). Другое характеристическое свойство ортоморфизма π, послужившее поводом к его названию, таково: если $e_1 \wedge e_2 = 0$, то $\pi e_1 \wedge e_2 = 0$. В $\operatorname{Orth}(E)$ выделяют наименьшее нормальное подпространство $\mathscr{Z}(E)$, содержащее I_E.

Это подпространство (см. Приложение 2) называют *идеальным центром* E. Очевидно, что относительно естественных кольцевой и порядковой структур $\operatorname{Orth}(E)$ и $\mathscr{Z}(E)$ являются решеточно упорядоченными алгебрами. При этом $\mathscr{Z}(E)$ служит фундаментом $\operatorname{Orth}(E)$, т. е. в $\operatorname{Orth}(E) \setminus \{0\}$ нет элементов, дизъюнктных к $\mathscr{Z}(E)$. В свою очередь, как по сути уже отмечено, $\operatorname{Orth}(E)$ — централизатор $\mathscr{Z}(E)$ в алгебре $L^r(E)$. Подчеркнем также, что в силу коммутативности алгебры $\operatorname{Orth}(E)$ композицию ортоморфизмов $\pi_1 \circ \pi_2$ часто обозначают просто $\pi_1 \pi_2$. Итак, остановимся на необходимых нам фактах об ортоморфизмах.

2.3.10. *Для положительного оператора $T \in L^r(E)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $T \in \operatorname{Orth}(E)$*;*

(2) $T + I_E$ *— решеточный гомоморфизм;*

(3) $T + I_E$ *обладает свойством Магарам, т. е. сохраняет порядковые отрезки.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если $T \in \operatorname{Orth}(E)$, то по определению $T + I_E \in \operatorname{Orth}(E)$. Кроме того, мультипликаторы сохраняют точные границы непустых ограниченных множеств (см. Приложение 2).

(1) $\to$ (3): Пусть $0 \leqslant e \in E$ и $0 \leqslant f \leqslant (T + I_E)e$. Используя, например, спектральную теорему Фрейденталя, можно выбрать такой мультипликатор α, что $f = \alpha(T + I_E)e$. Так как ортоморфизмы коммутируют, имеем $f = (T + I_E)(\alpha e)$. Это означает, что $T + I_E$ сохраняет порядковые интервалы.

(2) $\to$ (1): Поскольку $I_E \leqslant I_E + T$, то по 2.1.9 (1) найдется мультипликатор $\gamma \in M(E)$, для которого $\gamma \circ T = I_E - \gamma$. Отсюда для каждого проектора P в E вытекает $\gamma \circ (T \circ P - P \circ T) = 0$, ибо ортоморфизмы коммутируют друг с другом. В частности, для проектора P_γ на ядро $\ker(\gamma)$, которое, очевидно, является полосой E, получается $\gamma \circ T \circ P_\gamma = 0$.

Кроме того, $\gamma \circ T \circ P_\gamma = (I_E - \gamma)P_\gamma = P_\gamma$. Таким образом, $\ker(\gamma) = 0$. Значит, $T \circ P_\gamma = P_\gamma \circ T$ для всякого проектора P. Как уже отмечено, это свидетельствует о том, что $T \in \operatorname{Orth}(E)$.

(3) $\to$ (1): Пусть $e_1 \wedge e_2 = 0$. Тогда $Te_1 \wedge e_2 \leqslant Te_1 \leqslant Te_1 + e_1 = (I_E + T)e_1$. Так как $I_E + T$ обладает свойством Магарам, то для некоторого e из порядкового интервала $[0, e_1]$ выполнено $e_2 \wedge Te_1 = Te + e$. Имеем оценки $e_2 \geqslant Te_1 \wedge e_2 = e + Te \geqslant e$ и $e_1 \geqslant e \geqslant 0$. Значит, $0 = e_1 \wedge e_2 \geqslant e \wedge e \geqslant 0$. Тем самым $e = 0$, а следовательно, и $Te_1 \wedge e_2 = 0$. $\rhd$

2.3.11. *Пусть A — подкольцо и подрешетка в* $\operatorname{Orth}(E)$. *Для элементов $\pi, \gamma \in A^+$ таких, что $\pi \geqslant I_E$, положим*

$$[\pi^{-1}](\gamma) := \inf\{\delta \in A^+ : \delta\pi \geqslant \gamma\}.$$

Тогда $[\pi^{-1}] : A \to \operatorname{Orth}(E)^\bullet$ — возрастающий A-сублинейный оператор, причем $\gamma = [\pi^{-1}](\pi\gamma)$ для всех $\gamma \in A^+$.

$\lhd$ Прежде всего заметим, что при $\pi\delta_1 \geqslant \gamma$ и $\pi\delta_2 \geqslant \gamma$ выполнено $\pi(\delta_1 \wedge \delta_2) \geqslant \pi\delta_1 \wedge \pi\delta_2 \geqslant \gamma$. Отсюда следует, что $[\pi]^{-1}(\gamma) \leqslant \gamma$ и $\pi[\pi^{-1}](\gamma) \geqslant \gamma$. Если $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$, то

$$\pi([\pi^{-1}](\gamma_2) \wedge \gamma_1) \geqslant \gamma_2 \wedge \pi\gamma_1 \geqslant \gamma_1 \wedge \gamma_2 = \gamma_1.$$

Это означает, что выполнена оценка $[\pi^{-1}](\gamma_2) \wedge \gamma_1 \geqslant [\pi^{-1}](\gamma_1)$. Таким образом, оператор $[\pi^{-1}]$ возрастающий.

Заметим теперь, что для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in A^+$ по уже доказанному будет $\pi([\pi^{-1}](\gamma_1)+[\pi^{-1}](\gamma_2)) \geqslant \gamma_1+\gamma_2$. Следовательно, $[\pi^{-1}](\gamma_1+\gamma_2) \leqslant [\pi^{-1}](\gamma_1) + [\pi^{-1}](\gamma_2)$. Кроме того, если $\mu, \gamma \in A^+$, то справедливо равенство $\pi\mu[\pi^{-1}](\gamma) = \mu\pi[\pi^{-1}](\gamma) \geqslant \mu\gamma$, т. е. $[\pi^{-1}](\mu\gamma) \leqslant \mu[\pi^{-1}](\gamma)$.

Иными словами, оператор $[\pi^{-1}]$ действительно A-сублинеен.

Для завершения доказательства заметим, что имеют место оценки $[\pi^{-1}](\pi\gamma) \leqslant \gamma$ и $\pi[\pi^{-1}](\pi\gamma) \geqslant \pi\gamma$. Отсюда вытекает равенство $\pi[\pi^{-1}](\pi\gamma) = \pi\gamma$. Учитывая, что $\ker(\pi) = \{0\}$ в силу условия $\pi \geqslant I_E$, окончательно выводим: $\gamma = [\pi^{-1}](\pi\gamma)$. $\triangleright$

2.3.12. Перейдем к установлению основного факта текущего параграфа, состоящего в том, что аддитивные миноранты сублинейного оператора автоматически оказываются гомоморфизмами при условии, что речь идет о подкольце (и подрешетке) A кольца ортоморфизмов E_b, естественно действующем в E_b. Идея доказательства этого факта весьма прозрачна. В самом деле, почти очевидно, что крайние точки субдифференциалов должны коммутировать с мультипликаторами. Кроме того, по теореме Крейна — Мильмана для групп каждый субградиент — элемент субдифференциала — получается «интегрированием» крайних точек. Остается заметить, что соответствующие «дисперсные» интегралы, элементы субдифференциала канонического оператора, коммутируют с ортоморфизмами.

2.3.13. *Пусть $E = E_b$ и пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество. Если группа $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ наделена естественной структурой $\mathscr{Z}(E)$-модуля, то выполнено*

$$\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \subset \operatorname{Hom}_{\mathscr{Z}(E)}(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E).$$

$\triangleleft$ Пусть P — произвольный проектор в E и $\alpha \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$. При каждом $y \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ справедливо

$$-P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(-y) \leqslant \alpha \circ Py \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ P(y) = P \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}(y).$$

Таким образом, для дополнительного проектора $P^d := I_E - P$ будет $P^d \circ \alpha \circ P = 0$.

Значит, $\alpha \circ P = P \circ \alpha \circ P$. Кроме того, $P \circ \alpha \circ P^d = 0$. Окончательно $\alpha \circ P = P \circ \alpha \circ P + P \circ \alpha \circ P^d = P \circ \alpha$. Из последнего соотношения следует, что оператор α коммутирует с конечнозначными элементами. Учитывая свойства мультипликаторов (см. Приложение 2) и взяв $n \in \mathbb{N}$ и $\pi \in \mathscr{Z}(E)$, подыщем конечнозначные элементы α_n, β_n

такие, что $0 \leqslant \pi - \alpha_n \leqslant n^{-1}I_E$ и $0 \leqslant \beta_n - \pi \leqslant n^{-1}I_E$. Из соотношения $\alpha_n \circ \alpha \leqslant \alpha \circ \pi \leqslant \beta_n \circ \alpha$ теперь мы выводим, что α является $\mathscr{Z}(E)$-гомоморфизмом. $\triangleright$

2.3.14. *Для всякого A-сублинейного оператора p имеет место включение*

$$\partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p \subset \partial^A p.$$

$\triangleleft$ Возьмем $\pi \in A^+$ и для $n \in \mathbb{N}$ положим $\alpha_n := \pi \wedge n I_E$. Рассмотрим $T \in \partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p$ и точку x из области определения оператора p. Тогда

$$(\pi - \alpha_n)p(x) \geqslant p((\pi - \alpha_n)x) \geqslant T(\pi - \alpha_n)x = T\pi x - \alpha_n T x.$$

Таким образом, $\pi p(x) - T\pi x \geqslant \alpha_n(p(x) - Tx)$. Поскольку $p(x) - Tx \in E_b$, из последнего неравенства вытекает, что $\pi p(x) - T\pi x \geqslant \pi p(x) - \pi T x$. В силу произвольности x заключаем: $T \circ \pi = \pi \circ T$, т. е. $T \in \partial^A p$. $\triangleright$

2.3.15. *Теорема.* *Аддитивные опорные модульно-сублинейного оператора являются модульными гомоморфизмами.*

$\triangleleft$ Итак, для A-сублинейного $p : X \to E$ нужно доказать равенство

$$\partial p = \partial^A p.$$

Установим, прежде всего, что для всякого $T \in \operatorname{ext}(p)$ будет $T \in \partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p$. Возьмем $\pi \in A^+ \cap \mathscr{Z}(E_b)$. Отметим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\pi \leqslant n\mathbb{1}_A$, ибо $\mathbb{1}_A = I_{E_b}$. Поскольку $\mathbb{1}_A$ действует как в X, так и в E, в качестве тождественных операторов получаем:

$$\begin{gathered} nT = n\mathbb{1}_A \circ T = \pi \circ T + (n\mathbb{1}_A - \pi) \circ T; \\ nT = T \circ \pi + T \circ (n\mathbb{1}_A - \pi); \\ 2nT = \pi \circ T + T \circ (n\mathbb{1}_A - \pi) + (T \circ \pi - (n\mathbb{1}_A - \pi) \circ T). \end{gathered}$$

Учитывая очевидные вхождения

$$\begin{gathered} \pi \circ T + T \circ (n\mathbb{1}_A - \pi) \in \partial(np), \\ T \circ \pi + (n\mathbb{1}_A - \pi) \circ T \in \partial(np) \end{gathered}$$

и предложение 2.3.5 (2), по которому $nT \in \partial(np)$, получаем

$$nT = \pi \circ T + T \circ (n\mathbb{1}_A - \pi).$$

Таким образом, $T \circ \pi = \pi \circ T$.

Рассмотрим теперь оператор $p_1 := p - T$, где $T \in \operatorname{ext}(p)$. Ясно, что $\operatorname{im}(p_1) \subset E_b$. В силу ранее доказанного будет

$$\operatorname{ext}(p_1) \subset \partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p_1.$$

Кроме того, по теореме Крейна — Мильмана для групп 2.3.7 и предложению 2.3.13 имеют место соотношения

$$\partial p_1 = \partial\varepsilon_{\operatorname{ext}(p_1)} \circ \langle \operatorname{ext}(p_1) \rangle;$$
$$\partial\varepsilon_{\operatorname{ext}(p_1)} \subset \operatorname{Hom}_{A \cap \mathscr{Z}(E_b)}(l_\infty(\operatorname{ext}(p_1), E_b), E_b).$$

Отсюда непосредственно можно сделать вывод о равенстве

$$\partial p_1 = \partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p_1.$$

Если $S \in \partial p$, то $S - T \in \partial p_1$ и, значит, оператор $S - T$ является $A \cap \mathscr{Z}(E_b)$-гомоморфизмом. Таков же и оператор T. Окончательно $S \in \partial^{A \cap \mathscr{Z}(E_b)} p$. Ссылка на 2.3.14 завершает доказательство. $\triangleright$

2.3.16. *Упорядоченный A-модуль E обладает свойством A-продолжения.*

$\triangleleft$ Нужно апеллировать к теореме Бигарда 2.3.4 и к 2.3.15. $\triangleright$

Сейчас мы займемся обращением последнего утверждения. Точнее говоря, мы установим, что с точностью до элементарных оговорок выпуклый анализ имеет место в тех и только тех случаях, когда речь идет о пространствах Канторовича, рассматриваемых как модули над алгебрами своих ортоморфизмов. С учетом теоремы 2.3.15, которая автоматически обеспечивает выполнение условий коммутации, мы можем сделать несколько парадоксальный вывод о том, что никакого специального «модульного» выпуклого анализа просто нет.

Начнем с аналога теоремы Иоффе о веерах 1.4.10.

2.3.17. *Теорема.* *Если упорядоченный A-модуль E обладает свойством A-продолжения, то E_b — это стертое K-пространство.*

$\lhd$ Установим сначала, что ограниченные множества в E_b имеют точные верхние границы. Для этого следует показать, что любое семейство $([a_\xi, b_\xi])_{\xi\in\Xi}$ попарно пересекающихся порядковых интервалов, т. е. таких, что $a_\xi \leqslant b_\eta$ при всех $\xi, \eta \in \Xi$, имеет общую точку.

Рассмотрим A-модуль X, представляющий собой прямую сумму Ξ копий кольца A. Пусть, далее, X_0 — это A-подмодуль в X, определенный следующим образом:

$$X_0 := \left\{\pi := \pi(\cdot) \in X : \sum_{\xi\in\Xi} \pi(\xi) = 0\right\}.$$

Рассмотрим оператор $p : X \to E$, заданный соотношением

$$p(\pi) := \sum_{\xi\in\Xi} \big(\pi(\xi)^+ b_\xi - \pi(\xi)^- a_\xi\big) = \\ = \sum_{\xi\in\Xi} \big(\pi(\xi) a_\xi + \pi(\xi)^+ (b_\xi - a_\xi)\big).$$

Ясно, что оператор p является A-сублинейным. При этом для элемента $\pi \in X_0$ в силу определения имеем

$$0 = \sum_{\xi\in\Xi} \pi(\xi) = \sum_{\xi\in\Xi} (\pi(\xi)^+ - \pi(\xi)^-) = \\ = \sum_{\eta\in\Xi} \pi(\eta)^+ - \sum_{\xi\in\Xi} \pi(\xi)^-.$$

В теории K-пространств устанавливается *лемма о двойном разбиении*, по которой можно подыскать такое семейство $(\pi_{\xi\eta})_{\xi,\eta\in\Xi}$ положительных элементов A, что

$$\pi(\eta)^+ = \sum_{\xi\in\Xi} \pi_{\xi\eta}, \quad \pi(\xi)^- = \sum_{\eta\in\Xi} \pi_{\xi\eta} \quad (\xi, \eta \in \Xi).$$

Привлекая названную лемму, для нашего $\pi \in X_0$ получаем

$$p(\pi) = \sum_{\eta\in\Xi} \pi(\eta)^+ b_\eta - \sum_{\xi\in\Xi} \pi(\xi)^- a_\xi = \\ = \sum_{\xi,\eta\in\Xi} \pi_{\xi\eta} (b_\eta - a_\xi) \geqslant 0.$$

В силу произвольности $\pi \in X_0$ можно заключить, что существует оператор $T \in \partial^A p$, для которого $T\pi = 0$ при $\pi \in X_0$. Возьмем какой-либо индекс $\xi \in \Xi$ и положим $\pi_\xi(\xi) := \mathbb{1}_A$ и $\pi_\xi(\eta) := 0$ при $\eta \neq \xi$. Так как $\pi_\xi - \pi_\eta \in X_0$ для любых ξ и η, то $T\pi_\xi = T\pi_\zeta$ для всех $\xi \in \Xi$ и фиксированного $\zeta \in \Xi$. Иными словами, для произвольных $\xi, \eta \in \Xi$ выполнено $-p(-\pi_\xi) \leqslant T\pi_\zeta \leqslant p(\pi_\eta)$. Осталось заметить, что $p(\pi_\eta) = b_\eta$ и $p(-\pi_\xi) = -a_\xi$.

Для доказательства того, что условно полная упорядоченная группа E_b является стертым K-пространством, достаточно восстановить в E_b операцию умножения на $1/2$.

Рассмотрим $y \in E^+$ и положим $p(y) := \inf\{z \in E^+ : 2z \geqslant y\}$. Поскольку множество, фигурирующее в правой части последнего соотношения, фильтровано вниз, в силу o-непрерывности сложения выполнены оценки $p(y) \leqslant y$ и $2p(y) \geqslant y$. Отсюда вытекает, что для $\pi_1, \pi_2 \in A^+$ и $y_1, y_2 \in E^+$ справедливо $2(\pi_1 p(y_1) + \pi_2 p(y_2)) \geqslant \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2$. Следовательно, $p(\pi_1 y_1 + \pi_2 y_2) \leqslant \pi_1 p(y_1) + \pi_2 p(y_2)$. Более того, оператор $p : E^+ \to E$ возрастает. В самом деле, если $y_1 \leqslant y_2$, то

$$2(p(y_2) \wedge y_1) = 2p(y_2) \wedge 2y_1 \geqslant y_2 \wedge 2y_1 \geqslant y_1 \wedge y_2 = y_1$$

и, значит, $p(y_2) \geqslant p(y_2) \wedge y_1 \geqslant p(y_1)$. Отметим дополнительно, что для всякого $y \in E^+$ выполнено $p(2y) = y$. Действительно, $p(2y) \leqslant y$ и $2p(2y) \geqslant 2y$. Тем самым $2p(2y) = 2y$, откуда $y - p(2y) = -y(y - p(2y))$.

Рассмотрим теперь $q : E_b \to E$, определенный соотношением $q(y) := p(y^+)$. В силу ранее установленного q — возрастающий A-сублинейный оператор. Значит, по условию $\partial^A q \neq \varnothing$. Для $y \in E_b$ положим

$$[1/2](y) := \sup\{Ty : T \in \partial^A q\}.$$

Возьмем $y \in E^+$. Тогда для всякого $\pi \in A$ будет

$$\begin{aligned} \pi y = \pi^+ y - \pi^- y &= p(2\pi^+ y) - p(2\pi^- y) = \\ &= q(2\pi^+ y) - q(2\pi^- y) \leqslant q(2\pi^+ y - 2\pi^- y) = \\ &= q(2\pi y) = q(\pi(2y)). \end{aligned}$$

Стало быть, в силу 2.3.2 (1) найдется оператор $T \in \partial^A q$ такой, что $T(2y) = y \leqslant q(2y) \leqslant p(2y) = y$. Значит, $2q(y) = q(2y) = y$, ибо q — это $\mathbb{Z}^+$-однородный оператор. Следовательно, $y = [1/2](2y)$ для всех $y \in E^+$. Отсюда непосредственно вытекает, что оператор $[1/2]$ —

возрастающий A-гомоморфизм. Именно этот оператор мы и искали. Теорема доказана полностью. $\triangleright$

2.3.18. *Теорема.* *Пусть A является d-кольцом, т. е. для любых $\pi_1 \in A$ и $\pi_2 \in A^+$ справедливы соотношения $(\pi_1\pi_2)^+ = \pi_1^+\pi_2$, $(\pi_2\pi_1)^+ = \pi_2\pi_1^+$. Упорядоченный A-модуль E обладает свойством A-продолжения в том и только в том случае, если E_b является стертым K-пространством и естественное линейное представление A в E_b служит кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку кольца ортоморфизмов* $\mathrm{Orth}(E_b)$. *При этом для любого A-сублинейного оператора p, действующего в E, выполнено $\partial^A p = \partial p$.*

$\triangleleft$ Пусть сначала известно, что E обладает свойством A-продолжения. По теореме 2.3.17 E_b является (стертым) K-пространством. Рассмотрим естественное линейное представление φ кольца A в пространстве E_b, определенное соотношением

$$\varphi(\pi)y := \pi y \quad (y \in E_b,\, \pi \in A).$$

Установим, прежде всего, что φ — решеточный гомоморфизм. Для этого при $y \in E^+$ определим оператор $p : A \to E$ соотношением $p(\pi) := \pi^+ y$. Оператор p является A-сублинейным и возрастающим. Значит, если $T \in \partial^A p$, то $0 \leqslant T\mathbb{1}_A \leqslant y$. Таким образом, $T\pi = \pi T\mathbb{1}_A = \pi y_1$, где $y_1 := T\mathbb{1}_A$ и $y_1 \in [0, y]$. Если, в свою очередь, зафиксировать элемент $y_1 \in [0, y]$ и положить $T\pi := \pi y_1$ для $\pi \in A$, то получается элемент $\partial^A p$. Учитывая A^+-однородность оператора p (обеспеченную условиями теоремы) и привлекая 2.3.2, получаем соотношение

$$\varphi(\pi^+)y = \pi^+ y = p(\pi) = \sup\{T\pi : T \in \partial^A p\} = \sup \pi[0, y] = \varphi(\pi)^+ y.$$

Проверим теперь, что $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{Orth}(E_b)$. Для этого фиксируем элементы $\pi \in A^+$ и $z, y \in E^+$ такие, что $0 \leqslant z \leqslant \pi y$. При каждом $\pi_1 \in A$ верно $\pi_1 z \leqslant \pi_1^+ z \leqslant \pi_1^+ \pi y = (\pi_1\pi)^+ y = p(\pi_1\pi)$. Значит, на основании 2.3.2 (1) найдется оператор $T \in \partial^A p$ такой, что $T\pi = z$. Следовательно, $z = \pi T\mathbb{1}_A$, причем $T\mathbb{1}_A \in [0, y]$. Тем самым оператор $\varphi(\pi)$ является оператором Магарам.

В силу произвольности π, опираясь на 2.3.10, мы делаем вывод о том, что $\varphi(\pi)$ является ортоморфизмом при $\pi \in A$.

Для завершения доказательства достаточно установить, что если φ является решеточным гомоморфизмом A в K-пространство $\mathrm{Orth}(E_b)$, то для произвольного A-сублинейного оператора $p : X \to E$ будет $\partial p = \partial^A p$.

Изучим сначала случай, когда $E = E_b$. Возьмем $T \in \partial p$ и точку $x \in X$. Рассмотрим оператор $t\pi := T\pi x$, где $\pi \in A$. Так как $t\pi \leqslant p(\pi x) \leqslant \pi^+ p(x) + \pi^- p(-x)$, то $\ker(t) \supset \ker(\varphi)$. Следовательно, по общим соображениям оператор t допускает снижение $\bar{t}$ на решеточно упорядоченное фактор-кольцо $\bar{A} := A/\ker(\varphi)$. Наделим E ассоциированной структурой точного модуля над $\bar{A}$. При этом $\bar{A}$ можно рассматривать как подкольцо и подрешетку $\mathrm{Orth}(E)$. Заметим дополнительно, что для $\bar{\pi} \in \bar{A}$ и $\pi_1, \pi_2 \in \bar{\pi}$ выполнено $p(\pi_1 x) = p(\pi_2 x)$, ибо

$$p(\pi_1 x) - p(\pi_2 x) \leqslant p((\pi_1 - \pi_2)x) \leqslant$$

$$\leqslant (\pi_1 - \pi_2)^+ p(x) + (\pi_1 - \pi_2)^- p(-x).$$

Таким образом, корректно определен оператор $\bar{p} : \bar{A} \to E$, действующий по правилу $\bar{p}(\bar{\pi}) := p(\pi x)$ $(\pi \in \bar{\pi})$. Ясно, что оператор $\bar{p}$ является $\bar{A}$-сублинейным. При этом $\bar{t} \in \partial\bar{p}$. В силу теоремы 2.3.15 $\partial\bar{p} = \partial^A \bar{p}$, т. е. $\bar{t}\bar{\pi} = \bar{\pi}\bar{t}\mathbb{1}_{\bar{A}}$ для $\bar{\pi} \in \bar{A}$. Отсюда вытекает, что $T\pi x = \pi T x$, т. е. $T \in \partial^A p$.

Рассмотрим теперь общий случай и вновь возьмем $T \in \partial p$ и точку $x \in X$. Заметим, что для каждого $\pi \in A$ выполнено

$$\begin{aligned} p(\pi x) - \pi T x = p(\pi^+ x - \pi^- x) - (\pi^+ - \pi^-)Tx \leqslant \\ \leqslant \pi^+(p(x) - Tx) + \pi^-(p(-x) - T(-x)). \end{aligned}$$

Таким образом, выражение $q(\pi) := p(\pi x) - T\pi x$ определяет оператор, действующий из A в E_b. Ясно, что этот оператор A-сублинеен и, значит, по уже доказанному $\partial q = \partial^A q$. Оператор $S\pi := T\pi x - \pi T x$, очевидно, входит в ∂q, а потому $S\pi = \pi S \mathbb{1}_A = \pi(Tx - Tx) = 0$. Последнее означает, что $T \in \partial^A p$. $\triangleright$

2.3.19. Условие, наложенное нами в теореме 2.3.18 на кольцо A, можно изменить, однако избавиться полностью от подобного рода предложений в принципе невозможно, если желательно сохранить

A^+-однородность $\mathbb{Z}^+$-однородного A-сублинейного оператора. Теорема 2.3.18 показывает, что свойство продолжения обязательно имеет место в усиленной форме, т. е. *групповой гомоморфизм, определенный на подгруппе и мажорируемый модульно-сублинейным оператором, допускает продолжение с сохранением мажорации до модульного гомоморфизма.*

Для описания модулей, допускающих выпуклый анализ, нам понадобится еще одно понятие. Подкольцо A кольца ортоморфизмов называют *почти рациональным*, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеется убывающая сеть мультипликаторов $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ из A такая, что при каждом $y \in E^+$ выполнено

$$\frac{1}{n} y = o\text{-}\lim_{\xi \in \Xi} \pi_\xi y = \inf_{\xi \in \Xi} \pi_\xi y.$$

2.3.20. *Кольцо A является почти рациональным в том и только в том случае, если каждый A-сублинейный оператор является A^+-однородным.*

$\lhd$ Допустим сначала, что A-сублинейные операторы являются A^+-однородными. Возьмем $y \in E^+$ и, привлекая предложение 2.3.11, рассмотрим A-сублинейный оператор $\gamma \mapsto [\pi^{-1}](\gamma^+)y$, где $\pi \in A^+$. По условию этот оператор A^+-однороден, т. е.

$$y = [\pi^{-1}](\pi \mathbb{1}_A) y = \pi [\pi^{-1}](\mathbb{1}_A) y.$$

Ввиду произвольности y отсюда следует, что $[\pi^{-1}](\mathbb{1}_A) = \pi^{-1}$. Рассмотрим в качестве π оператор $n\mathbb{1}_A$.

Тогда в силу определения оператора $[\pi^{-1}]$ получается

$$[(n\mathbb{1}_A)^{-1}](\mathbb{1}_A) = \inf\{\delta \in A^+ : n\delta \geqslant \mathbb{1}_A\},$$

откуда и вытекает почти рациональность кольца A.

Пусть теперь заранее известно, что A почти рационально. Рассмотрим некоторый A-сублинейный оператор $p : X \to E$. Заметим, что для любого $\pi \in A$ такого, что $0 \leqslant \pi \leqslant \mathbb{1}_A$, даже без предположения о почти рациональности выполнено $p(\pi x) = \pi p(x)$ для всех $x \in X$. Действительно,

$$p(x) = p(\pi x + (\mathbb{1}_A - \pi)x) \leqslant \pi p(x) + (\mathbb{1}_A - \pi) p(x) = p(x).$$

Таким образом, в силу 2.3.15 для установления A^+-однородности p достаточно убедиться в том, что p является $\mathbb{Z}^+$-однородным оператором. Для проверки последнего свойства возьмем $n \in \mathbb{N}$ и выберем семейство мультипликаторов $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$, для которого $\pi_\xi \downarrow n^{-1}\mathbb{1}_A$ и $\pi_\xi \in A$. Положим $\omega_\xi := (\mathbb{1}_A - (n-1)\pi_\xi)^+$. Ясно, что $\omega_\xi \in A^+$. При этом выполнено $\mathbb{1}_A - (n-1)\pi_\xi \leqslant \mathbb{1}_A - n^{-1}(n-1)\mathbb{1}_A = n^{-1}\mathbb{1}_A$. Следовательно, $\omega_\xi \leqslant n^{-1}\mathbb{1}_A$ и $\omega_\xi \uparrow n^{-1}\mathbb{1}_A$. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда будет $0 \leqslant np(x) - p(nx)$ и, значит,

$$0 \leqslant \omega_\xi(np(x) - p(nx)) = n\omega_\xi p(x) - p(n\omega_\xi x) = 0.$$

Переходя к пределу, убеждаемся, что p — это $\mathbb{Z}^+$-однородный оператор. $\rhd$

2.3.21. *Теорема.* *Упорядоченный A-модуль E допускает выпуклый анализ в том и только в том случае, если E_b — это стертое K-пространство и естественное линейное представление A в E_b является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на почти рациональное кольцо ортоморфизмов в E_b.*

$\lhd$ Операторы $\pi \mapsto \pi^+ y$ $(\pi \in A)$ и $z \mapsto z^+$ $(z \in E_b)$, где $y \in E^+$, очевидно, A-сублинейны. Значит, если A-модуль E допускает выпуклый анализ, то в силу 2.3.2 эти операторы A^+-однородны. Ввиду 2.3.10 последнее означает, что естественное линейное представление A в E_b является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку $\mathrm{Orth}(E_b)$. В силу 2.3.20 это подкольцо почти рационально. Для завершения доказательства достаточно осуществить необходимые факторизации, как в доказательстве теоремы 2.3.18, и сослаться на эту теорему и на 2.3.20. $\rhd$

2.4. Внутреннее строение субдифференциалов

Из результатов предыдущих двух параграфов непосредственно вытекает, что опорные множества общих сублинейных операторов по своей экстремальной структуре весьма напоминают субдифференциалы скалярных выпуклых функций во внутренних точках их областей определения. В то же время для последнего случая выполнены следующие связи, устанавливаемые в стандартных курсах функционального анализа:

(a) субдифференциал — это выпуклое слабо компактное множество;

(b) элементы наименьшего субдифференциала, содержащего некоторое слабо (порядково) ограниченное множество $\mathfrak{A}$, получаются применением операций взятия выпуклой оболочки $\mathfrak{A}$ и перехода к замыканию;

(c) крайние точки наименьшего субдифференциала, порожденного множеством $\mathfrak{A}$, лежат в слабом замыкании исходного множества $\mathfrak{A}$.

Вопрос об операторных вариантах приведенных утверждений — тема текущего параграфа. Ниже в 2.4.10–2.4.13 мы дадим явное представление элементов субдифференциала и его крайних точек с помощью конкретной процедуры, применяемой к o-крайним точкам. Метод исследования — теория булевозначных моделей или, как еще говорят, *булевозначный анализ.*

Приблизительный план использования названного метода таков. Следует сначала подобрать булеву алгебру и отвечающую ей модель теории множеств, в которой изучаемый (= «внешний») оператор станет изображать скалярную выпуклую функцию в модели (= превратится во «внутреннюю» выпуклую функцию). После этого, интерпретируя во внешних терминах внутренний геометрический смысл субдифференциала функции, следует получить искомый ответ. Прямая реализация этого плана возможна, но связана с некоторыми техническими неудобствами (так, понятие o-крайней точки «плохо» интерпретируется). В этой связи ниже предпринят обходной маневр — указанный план использован лишь для анализа канонического сублинейного оператора. Общий случай выводится с учетом как специфики строения его субдифференциала, так и того факта, что любой сублинейный оператор лишь линейной заменой переменной отличается от канонического.

В этой связи отметим, что главная цель текущего параграфа — показать, как центральные понятия субдифференциального исчисления для операторов возникают при внешней расшифровке соответствующих скалярных предшественников в подходящей модели теории множеств. Необходимые сведения из теории булевозначных моделей теории множеств имеются в [119, 121], см. Приложение 4.

2.4.1. Начнем со вспомогательных сведений о способах изображения пространства ограниченных функций и сопряженного пространства в булевозначных моделях.

(1) Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое непустое множество. В силу принципа максимума в $\mathbb{V}^{(B)}$ имеется объект $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ такой, что $[\![l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ — это K-пространство ограниченных функций с областью определения $\mathfrak{A}^\wedge$ и значениями в $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$.

Рассмотрим спуск

$$l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow := \{t \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![t \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})]\!] = \mathbb{1}\}.$$

Осуществим спуск алгебраических операций и отношения порядка из $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ в $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$. Очевидно, что $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$ тем самым превращается в K-пространство и, более того, в модуль над $\mathscr{R}\!\downarrow$.

(2) *Отображение «подъем», сопоставляющее ограниченной $\mathscr{R}\!\downarrow$-значной функции на $\mathfrak{A}$ ее подъем — ограниченную $\mathscr{R}$-значную функцию на $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, осуществляет алгебраический и порядковый изоморфизм $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow)$ и $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$.*

$\triangleleft$ Это утверждение почти очевидно, если держать перед глазами канву конструкции. Для полноты поясним некоторые моменты.

Итак, пусть $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow)$. Как отмечено в [121, 3.5.5 (3)], тогда $[\![f\!\uparrow : \mathfrak{A}^\wedge \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$, причем для $A \in \mathfrak{A}$ будет $[\![f(A) = f\!\uparrow\!(A^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Из определения порядка в $\mathscr{R}\!\downarrow$ ясно, что $f\!\uparrow\!(\mathfrak{A}^\wedge)$ ограничено внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и, стало быть, $f\!\uparrow \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$. Нас интересует оператор $\mathrm{Up} : f \mapsto f\!\uparrow$ из $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow)$ в $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$. Пусть $g \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$. Тогда

$$[\![g : \mathfrak{A}^\wedge \to \mathscr{R} \wedge (\exists t \in \mathscr{R}) |g(\mathfrak{A}^\wedge)| \leqslant t]\!] = \mathbb{1}.$$

Ясно, что $g = \mathrm{Up}(g\!\downarrow)$, т. е. Up — это эпиморфизм. Прочие утверждения об Up проверяются столь же просто. $\triangleright$

Смысл приведенного утверждения состоит, в частности, в том, что $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$, с одной стороны, можно рассматривать как еще одну реализацию пространства $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow)$, а с другой — как область определения $\mathrm{dom}(l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}))$.

(3) Рассмотрим в $\mathbb{V}^{(B)}$ объект $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#$, для которого выполнено

$$[\![l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\# \text{ — это сопряженное к } l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}) \text{ пространство}]\!] = \mathbb{1}.$$

Спуск $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#\!\downarrow$ наделяется спущенными структурами. Нет сомнений, в частности, что $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#\!\downarrow$ — это $\mathscr{R}\!\downarrow$-модуль.

Пусть $\mu \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$, т. е.

$$[\![\mu \text{ — это } \mathscr{R}\text{-гомоморфизм } l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}) \text{ в } \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}.$$

Пусть, далее, $\mu{\downarrow} : l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск μ. Для $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ положим

$$\mu_\downarrow(f) := \mu{\downarrow}(f{\uparrow}).$$

(4) *Отображение «спуск» $\mu \mapsto \mu_\downarrow$ осуществляет изоморфизм $\mathscr{R}{\downarrow}$-модулей $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$, где символом $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})\mathscr{R}{\downarrow})$ обозначено пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизмов из $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$.*

$\vartriangleleft$ Единственным не вполне очевидным утверждением является то, что каждый $\mathscr{R}{\downarrow}$-модульный гомоморфизм $T : l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}) \to \mathscr{R}{\downarrow}$ (а на самом деле и любое $\mathscr{R}{\downarrow}^+$-однородное отображение) представляет собой спуск подходящего отображения внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Для проверки этого утверждения положим

$$t(f) := T(f{\downarrow}) \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}).$$

Следует убедиться, что t — экстенсиональное отображение, ибо то, что t — это $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизм $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}){\downarrow}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$, бесспорно.

Проведем доказательство экстенсиональности t (не апеллируя к его аддитивности). Прежде всего, для элемента $\iota(b)$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, представляющего перемешивание $1^\wedge$ и $0^\wedge$ с вероятностями b и b' соответственно (см. теорему Гордона), выполнено, что $\iota(b) \in \mathscr{R}{\downarrow}$. При этом для функций f и g из $\mathfrak{A}^\wedge$ в $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ последовательно выводим

$$\begin{aligned}
[\![f = g]\!] \geqslant b \leftrightarrow {} & [\![(\forall A \in \mathfrak{A}^\wedge) f(A) = g(A)]\!] \geqslant b \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathfrak{A}} [\![f(A^\wedge) = g(A^\wedge)]\!] \geqslant b \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathfrak{A}} [\![f{\downarrow}(A) = g{\downarrow}(A)]\!] \geqslant b \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow (\forall A \in \mathfrak{A}) \iota(b) f{\downarrow}(A) = \iota(b) g{\downarrow}(A) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow \iota(b) f{\downarrow} = \iota(b) g{\downarrow}.
\end{aligned}$$

Отсюда для $f,\ g \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow$ с учетом положительной однородности T мы получаем

$$\begin{aligned}[\![f = g]\!] \geqslant b \leftrightarrow \iota(b)f\!\downarrow = \iota(b)g\!\downarrow \to\\ \to T(\iota(b)f\!\downarrow) = T(\iota(b)g\!\downarrow) \to\\ \to \iota(b)T(f\!\downarrow) = \iota(b)T(g\!\downarrow) \leftrightarrow\\ \leftrightarrow [\![T(f\!\downarrow) = T(g\!\downarrow)]\!] \geqslant b\end{aligned}$$

в силу теоремы Гордона. $\rhd$

Обратное отображение к отображению «спуск» $\mu \mapsto \mu_\downarrow$ обозначим так: $t \mapsto t^\uparrow$, где $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow), \mathscr{R}\!\downarrow)$. Значит, в подробной записи

$$t^\uparrow(f) := t(f\!\downarrow) \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\!\downarrow).$$

2.4.2. Дадим теперь описание пространства гомоморфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\!\downarrow), \mathscr{R}\!\downarrow)$$

в терминах мер. Это будет сделано путем интерпретации в булевозначной модели следующего утверждения:
сопряженное пространство к банахову пространству $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$ линейно изометрично пространству конечно аддитивных вещественных мер, определенных на $\mathfrak{A}$.

Сначала введем соответствующий класс мер. Пусть B — булева алгебра и $\mathfrak{A}$ — произвольное непустое множество. Тогда множество $B^{\mathfrak{A}}$ всех отображений из $\mathfrak{A}$ в B с поточечным упорядочением (а значит, и с поточечными решеточными операциями) также есть булева алгебра. Если $\pi \in B^{\mathfrak{A}}$ и $b \in B$, то положим по определению, что $b\pi : \alpha \mapsto b \wedge \pi(\alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$. Пусть $B := \mathfrak{B}(E)$ для некоторого K-пространства E. Конечно аддитивную меру $\mu \in \mathrm{ba}(B^{\mathfrak{A}}, E)$ назовем *модулярной*, если $b\mu(\pi) = \mu(b\pi)$ для всех $b \in B$ и $\pi \in B^{\mathfrak{A}}$. Пусть $\mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, E)$ обозначает множество всех E-значных модулярных мер на $B^{\mathfrak{A}}$. Тогда $\mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, E)$, снабженное обычными поточечными операциями и упорядочением, представляет собой векторную решетку. Более того, $\mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, E)$ будет пространством Банаха — Канторовича, если определить в нем E-значную норму формулой $|\!|\mu|\!| := |\mu|(\widetilde{\mathbb{1}})$, где $|\mu|$ — полная вариация меры μ, а $\widetilde{\mathbb{1}}$ — отображение из $\mathfrak{A}$ в B, тождественно равное $\mathbb{1} := I_E$.

Пусть $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — двузначная булева алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В силу принципа максимума в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ имеется объект $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{\mathfrak{A}^\wedge}$ — множество всех двузначных отображений, определенных на $\mathfrak{A}^\wedge$. Более того, в модели справедливо утверждение: *множество $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{\mathfrak{A}^\wedge}$ при поточечном упорядочении служит булевой алгеброй, изоморфной булевой алгебре $\mathscr{P}(\mathfrak{A}^\wedge)$ всех подмножеств $\mathfrak{A}^\wedge$.* Так как спуск двухэлементной булевой алгебры $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ изоморфен B, то в дальнейшем мы будем отождествлять булевы алгебры B и $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}{\downarrow}$.

(1) *Отображение «подъем», сопоставляющее B-значному отображению на $\mathfrak{A}$ его подъем — $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$-значное отображение на $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, осуществляет алгебраический и порядковый изоморфизм булевых алгебр $B^{\mathfrak{A}}$ и $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{\mathfrak{A}^\wedge}{\downarrow}$.*

$\triangleleft$ Это утверждение устанавливается в точности теми же рассуждениями, что и в 2.4.1 (2). $\triangleright$

(2) Рассмотрим теперь в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ объект $\mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$, для которого выполнено $[\![\, \mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ — пространство ограниченных конечно аддитивных вещественнозначных мер на $\mathfrak{A}^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$. Спуск $\mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ наделяется спущенными структурами. Легко убедиться в том, что $\mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ — это $\mathscr{R}{\downarrow}$-модуль. Более того, $\mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ будет пространством Банаха — Канторовича, но этот факт в полном объеме нам не потребуется.

Возьмем элемент $\mu \in \mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$, т. е. $[\![\, \mu$ — это ограниченная конечно аддитивная $\mathscr{R}$-значная мера на $\mathfrak{A}^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$. Пусть, далее, $\mu{\downarrow} : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{\mathfrak{A}^\wedge}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск μ. Для $\pi \in B^{\mathfrak{A}}$ положим

$$\mu_{\downarrow}(\pi) := \mu{\downarrow}(\pi{\uparrow}).$$

(3) *Отображение «спуск» $\mu \mapsto \mu_{\downarrow}$ осуществляет изоморфизм $\mathscr{R}{\downarrow}$-модулей $\mathrm{ba}(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ и $\mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, \mathscr{R}{\downarrow})$.*

$\triangleleft$ Здесь работают те же соображения, что и в 2.4.1 (3). $\triangleright$

2.4.3. Построим теперь интеграл от ограниченной вектор-функции по модулярной мере. Возьмем меру $\mu \in \mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, \mathrm{Orth}(E))$, где $B := \mathfrak{P}(E)$ и $E \subset \mathscr{R}{\downarrow}$. Не ограничивая общности, можно предположить, что мера μ положительна, т. е. $\mu(\pi) \geqslant 0$ для всех $\pi \in B^{\mathfrak{A}}$. Общий случай сводится к этому, как обычно, с помощью разложения Жордана $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Интеграл строится в три шага, см. ниже (1), (3) и (4).

(1) Сначала рассмотрим конструкцию интеграла «ступенчатых» отображений. Обозначим

$$\mathscr{H} := \left\{ h(\cdot) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k(\cdot) e_k : \ \pi_1, \dots, \pi_m \in B^{\mathfrak{A}}, \, e_1, \dots, e_m \in E \right\}.$$

Как видно, $\mathscr{H}$ — подрешетка векторной решетки $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. На множестве $\mathscr{H}$ интеграл определяют формулой

$$I_\mu(h) := \int \left(\sum_{k=1}^{m} \pi_k(\cdot) e_k \right) d\mu := \sum_{k=1}^{m} e_k \mu(\pi).$$

Легко проверить, что тем самым корректно определен положительный оператор I_μ из $\mathscr{H}$ в E. Кроме того, этот оператор обладает следующим свойством:

$$I_\mu(bh) = b I_\mu(h) \quad (b \in B, h \in \mathscr{H});$$
$$|I_\mu(h)| \leqslant |\!|h|\!| \, \mu(\widetilde{\mathbb{1}}) \quad (h \in \mathscr{H}).$$

Для того чтобы распространить интеграл на $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ нам потребуется вспомогательный факт о том, что множество $\mathscr{H}$ в определенном смысле плотно в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$.

(2) *Пусть* $0 \leqslant x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся разбиение единицы* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *в* B *и последовательность* $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ *такие, что*

$$\bigl| b_n x(\alpha) - b_n h_n(\alpha) \bigr| \leqslant \varepsilon \, |\!|x|\!| \quad (\alpha \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}).$$

$\lhd$ Данное утверждение является интерпретацией в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ следующего положения: *ограниченная функция с любой наперед заданной точностью приближается ступенчатыми.* Последнее справедливо внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ в силу принципа переноса. Теперь требуемое выводится несложно с помощью рассмотренных выше приемов булевозначного изображения.

Не умаляя общности, предположим, что $E = \mathscr{R}\!\downarrow$ и $e := |\!|x|\!|$ — единица K-пространства E. Обозначим символом $\varphi(\mathfrak{A}, x, \varepsilon, n, f, g)$ формулу ZFC, формализующую утверждение: f и g — функции из конечного множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$ в $\mathscr{P}(\mathfrak{A}) \simeq \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{\mathfrak{A}}$ и $\mathbb{R}$ соответственно, причем $|x(\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{f(k)} g(k)| < \varepsilon$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда высказанное утверждение можно записать в виде

$$(\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{P})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists f)(\exists g)\, \varphi(\mathfrak{A}, x, \varepsilon, n, f, g),$$

где $\mathbb{P}$ — любое плотное подмножество $\mathbb{R}$. Последняя формула истинна внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ с заменой $\mathbb{R}$ на $\mathscr{R}$, $\mathbb{P}$ на $\mathbb{R}^\wedge$, $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}^\wedge$, $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^\wedge$, и, пользуясь правилами вычисления булевых оценок истинности, можно написать:

$$\bigwedge_{0<\varepsilon\in\mathbb{R}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} [\![(\exists f)(\exists g)\, \varphi(\mathfrak{A}, x, \varepsilon, n, f, g)]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда, пользуясь принципом исчерпывания для булевых алгебр, выводим, что для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется счетное разбиение единицы (b_n), для которого $[\![(\exists f)(\exists g)\, \varphi(\mathfrak{A}, x, \varepsilon, n, f, g)]\!] \geqslant b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, в силу принципа максимума существуют элементы $f_n, g_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что

$$b_n \leqslant [\![f : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}]\!],\ b_n \leqslant [\![g : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathscr{R}]\!],$$
$$b_n \leqslant [\![(\forall \alpha \in \mathfrak{A}^\wedge) \Big| x(\alpha) - \sum_{k<n^\wedge} f_n(k) g_n(k) \Big| < \varepsilon^\wedge]\!].$$

Без потери общности можно считать, что $[\![f_n : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![g_n : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. Пусть теперь f'_n и g'_n — ограничения на множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ спусков $f_n{\downarrow}$ и $g_n{\downarrow}$ соответственно. Тогда $f'_n : \{0, 1, \dots, n-1\} \to B^{\mathfrak{A}}$, $g'_n : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ и при этом

$$b_n \left| x(\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} f'_n(k) g'_n(k) \right| \leqslant \varepsilon b_n e \quad (\alpha \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}).$$

Полагая $h_n := \sum_{k=0}^{n-1} f'_n(k) g'_n(k)$, приходим к требуемому. $\triangleright$

(3) Обозначим символом $\widetilde{\mathscr{H}}$ подмножество $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, состоящее из отображений вида $h(\alpha) = o\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} b_n h_n(\alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$, где (b_n) — разбиение единицы в B, а (h_n) — порядково ограниченная последовательность в $\mathscr{H}$. Как видно, $\widetilde{\mathscr{H}}$ — векторная подрешетка и подмодуль в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Для отображения $h \in \widetilde{\mathscr{H}}$ указанного вида положим по определению

$$I_\mu(h) = o\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} b_n I_\mu(h_n).$$

Нетрудно проверить, что тем самым корректно определен положительный оператор из $\widetilde{\mathscr{H}}$ в E, обозначаемый также символом I_μ.

(4) Наконец, возьмем элемент $0 \leqslant x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Согласно (2) для $\varepsilon := 1/n$ найдется отображение $h_n \in \widetilde{\mathscr{H}}$ такое, что $\lvert x - h_n \rvert \leqslant (1/n) \lvert x \rvert$. Таким образом, последовательность (h_n) сходится с регулятором к x. Положим по определению $I_\mu(x) := r\text{-}\lim_{n\to\infty} I_\mu(h_n)$. И вновь нетрудно проверить корректность этого определения, а также то обстоятельство, что возникающий оператор $I_\mu : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E$ линеен и положителен. Более того, I_μ является модульным гомоморфизмом: $\rho I_\mu(x) = I_\mu(\rho x)$ для любых $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ и $x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Отметим также, что этот оператор ограничен в следующем смысле:

$$|I_\mu(x)| \leqslant \lvert x \rvert\, \mu(\widetilde{\mathbb{1}}) \quad (x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)).$$

2.4.4. Линейный оператор $T : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E$ называют *ограниченным*, если существует такой ортоморфизм $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$, что $|Tx| \leqslant \rho \lvert x \rvert$ для всех $x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Точную нижнюю границу в $\mathrm{Orth}(E)$ всех ρ, удовлетворяющих последнему соотношению, обозначают символом $\lvert T \rvert$ и называют *абстрактной нормой оператора* T. Пространство $L_b(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E)$ всех ограниченных операторов из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ в E с $\mathrm{Orth}(E)$-значной нормой является пространством Банаха — Канторовича. (Соответствующие подробности см. в [110, 367]).

(1) *Теорема.* *Для любого линейного ограниченного оператора $T : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E$ существует единственная модулярная конечно аддитивная мера $\mu := \mu_T : B^{\mathfrak{A}} \to \mathrm{Orth}(E)$ такая, что*

$$Tx = \int x\, d\mu \quad (x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)).$$

Отображение $T \mapsto \mu_T$ осуществляет сохраняющий E-значную норму изоморфизм $\mathrm{Orth}(E)$-модулей $L_b(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E)$ и $\mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, \mathrm{Orth}(E))$.

$\triangleleft$ Мы уже видели в 2.4.3, что для каждой модулярной конечно аддитивной меры $\mu : B^{\mathfrak{A}} \to \mathrm{Orth}(E)$ интеграл I_μ является ограниченным линейным оператором из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ в E, причем $\lvert I_\mu \rvert = \lvert \mu \rvert$.

Наоборот, возьмем $0 \leqslant T \in L_b(l_\infty(\mathfrak{A}, E), E)$. Тогда T входит в опорное множество сублинейного E-значного оператора $x \mapsto \rho\,\lvert x \rvert$ $(x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E))$. Так как последний, очевидно, $\mathrm{Orth}(E)^+$-однороден, то в силу 2.3.15 оператор T — модульный гомоморфизм и, в частности, $\mathrm{Orth}(E)$-однороден. Отсюда вытекает, что для произвольного $\pi \in B^{\mathfrak{A}}$ отображение $e \mapsto T(\pi(\cdot)e)$ $(e \in E)$ будет ортоморфизмом. Обозначим этот ортоморфизм символом $\mu(\pi)$. Нетрудно проверить конечную аддитивность и порядковую ограниченность так возникающего отображения $\mu : B^{\mathfrak{A}} \to \mathrm{Orth}(E)$. Более того, из определения μ вытекает равенство $\mu(\pi)e = T(\pi(\cdot)e)$ $(\pi \in B^{\mathfrak{A}}, e \in E)$. Последнее влечет совпадение на $\mathscr{H}$ операторов T и I_μ. Но тогда эти операторы совпадают и на $\widetilde{\mathscr{H}}$. В самом деле, если $b_n h \in \mathscr{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ для некоторого разбиения единицы (b_n), то $b_n Th = T(b_n h) = I_\mu(b_n h) = b_n I_\mu h$, следовательно, $Th = I_\mu h$. Наконец, равенство на всем пространстве $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ устанавливается путем перехода к соответствующим r-пределам. $\triangleright$

Как и выше, отображение $\widetilde{\mathbb{1}} : \mathfrak{A} \to B$ тождественно равно $\mathbb{1} \in B$. Конечно аддитивную меру $\mu \in \mathrm{bae}(B^{\mathfrak{A}}, E)$ назовем вероятностной, если $\mu(\widetilde{\mathbb{1}}) = I_E$.

(2) *Опорное множество* $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ *биективно с множеством всех вероятностных модулярных* $\mathrm{Orth}(E)$*-значных мер на* $B^{\mathfrak{A}}$*, где* $B := \mathfrak{P}(E)$*. Иными словами, справедливо интегральное представление:*

$$\partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E} = \Big\{ I_\mu(\cdot) :\ \mu \in \mathrm{bae}\,(B^{\mathfrak{A}}, \mathrm{Orth}(E))^+,\ \mu(\widetilde{\mathbb{1}}) = I_E \Big\}.$$

$\triangleleft$ Как видно, $|\varepsilon_{\mathfrak{A},E}(x)| \leqslant \lvert x \rvert$ для всех $x \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Значит, опорное множество канонического оператора состоит из ограниченных операторов, которые в соответствии с (1) являются интегралами по ограниченной конечно аддитивной модулярной мере. Условие $\alpha \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E$ из 2.1.4 (3) равносильно равенству $\mu(\widetilde{\mathbb{1}}) = I_E$. $\triangleright$

2.4.5. Пусть $\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ — канонический сублинейный функционал, определенный множеством $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. такой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого

$$[\![\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge} : l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}) \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![(\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})) \varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f) = \sup f(\mathfrak{A}^\wedge)]\!] = \mathbb{1}.$$

Подсчет показывает, что для каждого элемента $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ выполнено

$$[\![\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f{\uparrow}) = \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f)]\!] = \mathbb{1}.$$

(1) *Пусть $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ — это субдифференциал сублинейного функционала $\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда для любых оператора $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$ и элемента $\mu \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^{\#}{\downarrow}$ выполнено*

$$t^{\uparrow} \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow} \leftrightarrow t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}};$$
$$\mu_{\downarrow} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \leftrightarrow \mu \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow}.$$

◁ Последовательно привлекая установленное ранее, выводим:

$$\begin{aligned}
t^{\uparrow} \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow} &\leftrightarrow [\![t^{\uparrow} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow [\![(\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})) t^{\uparrow}(f) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \bigwedge_{f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\downarrow} [\![t^{\uparrow}(f) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \bigwedge_{f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\downarrow} [\![t(f{\downarrow}) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f{\downarrow}{\uparrow})]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \bigwedge_{f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\downarrow} [\![t(f{\downarrow}) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f{\downarrow})]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \bigwedge_{g \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\downarrow)} [\![t(g) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}}(g)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow (\forall g \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})) [\![t(g) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}}(g)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow (\forall g \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})) t(g) \leqslant \varepsilon_{\mathfrak{A}}(g) \leftrightarrow t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}$$

Вторая из доказываемых эквивалентностей представляет фактически иную запись уже установленной. ▷

(2) *Пусть $\mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge})$ — множество крайних точек субдифференциала $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда для произвольных оператора $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$ и элемента $\mu \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^{\#}{\downarrow}$ выполнено*

$$t^{\uparrow} \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow} \leftrightarrow t \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}});$$
$$\mu_{\downarrow} \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \leftrightarrow \mu \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow}.$$

$\triangleleft$ Вновь ограничимся доказательством первой эквивалентности. При этом удобно воспользоваться тем, что крайние точки субдифференциала канонического оператора суть лежащие в нем решеточные гомоморфизмы (см. 2.2.9). С учетом этого имеем цепочку эквивалентностей

$$\begin{gathered}
t^{\uparrow} \in \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^{\wedge}})\downarrow \leftrightarrow \\
\leftrightarrow [\![\, t^{\uparrow} \in \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow [\![t^{\uparrow} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}]\!] \wedge [\![(\forall f \in l_{\infty}(\mathfrak{A}^{\wedge}, \mathscr{R})) t^{\uparrow}(|f| = |t^{\uparrow}(f)|]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \wedge \bigwedge_{f \in l_{\infty}(\mathfrak{A}^{\wedge}, \mathscr{R})\downarrow} [\![t^{\uparrow}(|f|) = |t^{\uparrow}(f)|]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \wedge (\forall f \in f_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\downarrow)) t(|f|) = |t(f)| \leftrightarrow \\
\leftrightarrow t \in \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}),
\end{gathered}$$

из которой вытекает требуемое. $\triangleright$

2.4.6. Условимся в терминологии. Пусть $B := \mathfrak{B}(E) := \mathfrak{P}(E)$ — *база* K-пространства E, т. е. полная булева алгебра порядковых проекторов в E или (что то же самое) алгебра положительных идемпотентных мультипликаторов в E. Возьмем разбиение единицы в B. Если $(T_{\xi})_{\xi\in\Xi}$ — семейство операторов из $L(X,E)$ и оператор $T \in L(X,E)$ таков, что $Tx = \sum_{\xi\in\Xi} b_{\xi}T_{\xi}x$ для $x \in X$, то T называют *перемешиванием* $(T_{\xi})_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_{\xi})_{\xi\in\Xi}$. Пусть $E := \mathscr{R}\downarrow$, $t^{\uparrow} := T\uparrow$ и $t_{\xi}^{\uparrow} := T_{\xi}\uparrow$. Тогда $t^{\uparrow}$ будет перемешиванием семейства $(t_{\xi}^{\uparrow}) \subset \mathbb{V}^{(B)}$ с вероятностями (b_{ξ}). Отсюда видно, что такое незаконное использование занятого слова «перемешивание» фактически корректно.

Для канонического сублинейного оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, без сомнений, *$\delta$-функции* $\varepsilon_A : f \mapsto f(A)$ $(f \in l_{\infty}(\mathfrak{A}, E))$ лежат в $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Перемешивания семейства $(\varepsilon_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ называют *чистыми состояниями* на $\mathfrak{A}$. Очевидно, что чистые состояния — это o-крайние точки канонического сублинейного оператора.

2.4.7. *Отображение «спуск» осуществляет биекцию между множеством чистых состояний на $\mathfrak{A}$ и подмножеством $\mathbb{V}^{(B)}$, состоящим из δ-функций в точках стандартного имени $\mathfrak{A}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Иными словами, $t \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathscr{R}\downarrow), \mathscr{R}\downarrow)$ — это чистое состояние на $\mathfrak{A}$ в* *том и только в том случае, если*

$$[\![\, (\exists A \in \mathfrak{A}^\wedge)\, t^\uparrow = \varepsilon_A \,]\!] = \mathbb{1}.$$

$\lhd$ Ясно, что

$$[\![\, (\exists A \in \mathfrak{A}^\wedge) t^\uparrow = \varepsilon_A \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \bigvee_{A \in \mathfrak{A}} [\![\, t^\uparrow = \varepsilon_{A^\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Последнее, как очевидно, бывает в том и только в том случае, если найдутся разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейство $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ точек $\mathfrak{A}$ такие, что $t^\uparrow$ есть перемешивание $(\varepsilon_{A_\xi^\wedge})_{\xi \in \Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$.

Далее, привлекая свойства перемешивания и теорему Гордона, выводим:

$$\begin{gathered}
t^\uparrow = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi \varepsilon_{A_\xi^\wedge} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \left[\!\!\left[(\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})) t^\uparrow(f) = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi \varepsilon_{A_\xi^\wedge}(f) \right]\!\!\right] = \mathbb{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})) t^\uparrow(f{\uparrow}) = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi f{\uparrow}(A_\xi^\wedge) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})) t(f) = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi f(A_\xi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}))(\forall \xi \in \Xi) b_\xi t(f) = b_\xi f(A_\xi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}))(\forall_\xi \in \Xi) [\![\, \iota(b_\xi) t(f) = \iota(b_\xi) \varepsilon_{A_\xi}(f) \,]\!] \geqslant b_\xi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})) t(f) = \sum_{\xi \in \Xi} \iota(b_\xi) \varepsilon_{A_\xi}(f) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow t = \sum_{\xi \in \Xi} \iota(b_\xi) \varepsilon_{A_\xi}.
\end{gathered}$$

Установленная эквивалентность делает требуемое очевидным. $\rhd$

Перейдем к описанию строения крайних точек и элементов субдифференциала канонического оператора. Метод получения нужных описаний состоит в интерпретации во внешних терминах теорем Крейна — Мильмана и Мильмана, сформулированных для функционалов в нужной булевозначной модели.

2.4.8. *Каждая крайняя точка субдифференциала канонического оператора является поточечным r-пределом сети чистых состояний.*

$\vartriangleleft$ Рассмотрим крайнюю точку субдифференциала канонического оператора, действующего из $l_\infty(\mathfrak{A}, E_0)$ в E_0 для некоторого K-пространства E_0. В силу теоремы Мильмана 2.2.10 можно считать, что рассматриваемая крайняя точка — это сужение на $l_\infty(\mathfrak{A}, E_0)$ крайней точки t субдифференциала канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, действующего из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ в E, где $E := m(E_0)$ — *максимальное расширение* K-пространства E_0. Иначе говоря, E_0 можно считать нормальным подпространством и даже фундаментом некоторого расширенного K-пространства E. Указанный факт устанавливается в теории K-пространств. Отметим, что его несложно вывести и на основе техники булевозначного анализа. Для этого, прежде всего, нужно заметить, что E_0 допустимо рассматривать как подмножество булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$, построенного над базой $B := \mathscr{B}(E_0)$ исходного пространства E_0, совпадающего с базой $m(E_0)$. Затем в качестве E следует взять $E_0{\uparrow}{\downarrow}$. Замечая теперь, что $E_0{\uparrow} = E{\uparrow}$ и элемент $\mathscr{R} := E{\uparrow}$ играет роль поля вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ по теореме Гордона, видим, что следует разобрать лишь тот случай, когда изучаемый оператор действует на спуск поля вещественных чисел. (Подробнее см. в [121, § 5.2].)

Прежде всего заметим, что, как установлено в 2.3.15, если $t \in L(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$ и $t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, то t автоматически является модульным гомоморфизмом, т. е. $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$. Работая в $\mathbb{V}^{(B)}$, на основании 2.4.5 (2) получаем, что $t^{\uparrow} \in \mathrm{ext}\,(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow}$. Далее, на основании классической теоремы Мильмана δ-функции плотны в слабой топологии в множестве крайних точек субдифференциала (скалярного) канонического оператора. В силу принципа переноса для каждых $f_1, \dots, f_m \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ и $n := 1, 2, \dots$ заключаем:

$$(\forall k := 1, \dots, m)[\![(\exists A \in \mathfrak{A}^\wedge)|t^{\uparrow}(f_k{\uparrow}) - f_k{\uparrow}(A)| \leqslant \mathbb{1}/n^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Привлекая 2.4.7 и полагая $\gamma := (\{f_1, \dots, f_m\}, n)$, находим чистое состояние t_γ, для которого

$$|t_\gamma(f_k) - t(f_k)| \leqslant n^{-1}\mathbb{1} \quad (k := 1, \dots, m).$$

Наделив множество индексов $\{\gamma\}$ естественным порядком и превратив его тем самым в направление, видим, что возникающая сеть чистых состояний (t_γ) является r-сходящейся к t. $\vartriangleright$

2.4.9. *Субдифференциал канонического сублинейного оператора совпадает с поточечным r-замыканием сильно операторно-выпуклой оболочки множества δ-функций.*

$\triangleleft$ Рассуждая так же, как в 2.4.8, мы сводим дело к случаю канонического оператора, действующего в спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Итак, пусть X — сильно операторно-выпуклая оболочка множества δ-функций на $\mathfrak{A}$ и $t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$. Ясно, что X состоит из $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизмов и что элемент t также $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизм. Тем самым $\mathfrak{X} := \{s^{\uparrow} :\ s \in X\}$ является сильно циклическим множеством элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B := \mathscr{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, и при этом для $\alpha, \beta \in \mathscr{R}{\downarrow}$ выполнено $[\![\, \alpha\mathfrak{X}{\uparrow} + \beta\mathfrak{X}{\uparrow} \subset \mathfrak{X}{\uparrow} \,]\!] = \mathbb{1}$, как только $[\![\, \alpha, \beta \geqslant 0^{\wedge} \wedge \alpha + \beta = 1^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$. Здесь мы используем то обстоятельство, что $l_\infty(\mathfrak{A}^{\wedge}, \mathscr{R})^{\#}{\downarrow}$ — это $\mathscr{R}{\downarrow}$-модуль. Окончательно, привлекая 2.4.5, видим, что $\mathfrak{X}{\uparrow}$ — это выпуклое подмножество $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^{\wedge}}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
&[\![\, (\forall \alpha, \beta \in \mathscr{R})(\alpha \geqslant 0^{\wedge} \wedge \beta \geqslant 0^{\wedge} \wedge \alpha + \beta = 1^{\wedge}) \to \\
&\qquad \to (\alpha\mathfrak{X}{\uparrow} + \beta\mathfrak{X}{\uparrow} \subset \mathfrak{X}{\uparrow}) \,]\!] = \\
&\qquad = \bigwedge_{\substack{\alpha,\,\beta \in \mathscr{R}\downarrow \\ \alpha \geqslant 0,\, \beta \geqslant 0,\, \alpha+\beta=1}} \ \bigwedge_{p^{\uparrow},\, q^{\uparrow} \in \mathfrak{X}} [\![\, \alpha p^{\uparrow} + \beta q^{\uparrow} \in \mathfrak{X}{\uparrow} \,]\!] = \\
&\qquad = \bigwedge_{\substack{\alpha,\,\beta \in \mathscr{R}\downarrow \\ \alpha \geqslant 0,\, \beta \geqslant 0,\, \alpha+\beta=1}} \ \bigwedge_{p, q \in X} [\![\, (\alpha p)^{\uparrow} + (\beta q)^{\uparrow} \in \mathfrak{X}{\uparrow} \,]\!] = \mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Значит, в силу классической теоремы Мильмана $\mathfrak{X}{\uparrow}$ плотно в слабой топологии в $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^{\wedge}}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Замечая, что $t^{\uparrow} \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^{\wedge}}{\downarrow})$, находим необходимую сеть элементов X, r-сходящуюся к t (см. 2.4.8). $\triangleright$

Перейдем теперь к формулировке основных результатов о строении субдифференциалов сублинейных операторов, действующих в K-пространство.

2.4.10. *Теорема.* *Любая крайняя точка субдифференциала является поточечным r-пределом сети элементов сильно циклической оболочки множества o-крайних точек.*

$\triangleleft$ Пусть $P : X \to E$ — рассматриваемый сублинейный оператор и $T \in \operatorname{ext}(P)$. В силу 2.2.11 (2) для некоторого $t \in \operatorname{ext}\big(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)}\big)$ будет $T = t \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle$. Пусть (t_γ) — сеть чистых состояний, поточечно r-сходящаяся к t. Ее существование гарантирует 2.4.8. Бесспорно, что $t_\gamma \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle$ — это требуемая сеть. $\triangleright$

2.4.11. *Теорема.* *Крайние точки наименьшего субдифференциала, содержащего данное слабо порядково ограниченное множество линейных операторов $\mathfrak{A}$, представляют собой поточечные r-пределы подходящих сетей перемешиваний элементов $\mathfrak{A}$.*

$\lhd$ На основании 2.2.11 (1) множество крайних точек $\mathfrak{A}$ лежит в множестве $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle$. Остается сослаться на 2.4.9. $\rhd$

2.4.12. *Теорема.* *Слабо порядково ограниченное множество линейных операторов является субдифференциалом в том и только в том случае, если оно операторно-выпукло и поточечно o-замкнуто.*

$\lhd$ Ясно, что операторно-выпуклое и поточечно o-замкнутое слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$ заведомо является сильно операторно-выпуклым. Учитывая, что r-сходимость влечет o-сходимость, и привлекая 2.4.9, выводим

$$\mathfrak{A} \subset \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle \subset \mathfrak{A}$$

(левое включение справедливо без каких-либо предположений). Значит, $\mathfrak{A}$ — субдифференциал. Оставшаяся еще необоснованной часть утверждения бесспорна. $\rhd$

2.4.13. *Теорема.* *Слабо порядково ограниченное множество линейных операторов является субдифференциалом в том и только в том случае, если оно циклично, выпукло и поточечно r-замкнуто.*

$\lhd$ Легко видеть, что цикличность в сочетании с выпуклостью и r-замкнутостью обеспечивает сильную операторную выпуклость и поточечную o-замкнутость. Ссылка на 2.4.12 завершает доказательство. $\rhd$

2.5. Шапки и грани

Продолжим изучение весьма своеобразной геометрии выпуклых множеств в пространстве операторов. Конусы положительных операторов, как правило, лишены крайних лучей (а значит, и шапок, т. е. непустых выпуклых слабо компактных подмножеств с выпуклым дополнением), субдифференциалы, вообще говоря, некомпактны ни в одной локально выпуклой топологии, но в то же время восстанавливаются по собственным подмножествам своих крайних точек. Природа отмеченных эффектов, ограничивающих возможности непосредственного применения стандартных геометрических методов, вскрыта в булевозначном анализе. Оказывается, что имеющиеся препятствия в известном смысле кажущиеся — их можно преодолеть за счет подходящего выбора булевозначной модели, в которой следует проводить исследование. Детализация отмеченного положения для задач изучения внутреннего строения субдифференциалов — сильно операторно-выпуклых поточечно o-замкнутых и слабо порядково ограниченных множеств — проведена в предыдущем параграфе. Цель дальнейшего изложения — ослабить условие ограниченности в духе классической теории шапок, развитой Г. Шоке и его последователями. Особенность нашего подхода состоит во введении операторных шапок, которые в нетривиальных ситуациях не являются таковыми в классическом смысле (хотя и совпадают с ними в скалярном случае). Даются критерии субдифференциалов, служащих шапками и гранями множеств операторов. При этом выявляется существенный эффект: грани (и крайние точки), представленные субдифференциалами, «экстенсиональны», а шапки — нет. Точнее говоря, для изучения выпуклых множеств операторов приспособлены не обычные шапки, а операторные шапки, т. е. субдифференциалы, представляющие собой спуски — изображения скалярных шапок в подходящей булевозначной модели.

2.5.1. Пусть X — вещественное векторное пространство, E — расширенное K-пространство и U — операторно-выпуклое поточечно o-замкнутое подмножество в пространстве $L(X,E)$ линейных операторов из X в E.

Подмножество C множества U называют *операторной шапкой* U или, более образно, *спущенной шапкой*, если C — субдифференциал, удовлетворяющий следующему условию экстремальности: для любых $x, y \in U$ и мультипликаторов $\alpha, \beta \in M(E)$ таких, что $\alpha + \beta = I_E$ и $\alpha x + \beta y \in C$, найдется порядковый проектор $b \in B := \mathscr{B}(E)$, для которого $bx \in bC$ и $b'y \in b'C$ (здесь, как обычно, $b' := I_E - b$ — проектор, дополнительный к b).

Согласно 2.4.12, подмножество $C \in U$ является операторной шапкой U в том и только в том случае, если оно слабо порядково ограниченное поточечно o-замкнутое операторно-выпуклое множество, удовлетворяющее вышеупомянутому условию экстремальности.

Для множества $W \subset L(X,E)$ положим $W^{\uparrow} := \{A^{\uparrow} : \ A \in W\}$, где, как обычно, $\uparrow$ — символ подъема в отделимый булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный над булевой алгеброй $B := \mathscr{B}(E)$ (см. Приложение 4). В соответствии с теоремой Гордона мы будем канонически образом отождествлять K-пространство E со спуском булевозначного поля действительных чисел $\mathscr{R}$; при этом мы будем писать $E = \mathscr{R}{\downarrow}$ или, что то же самое, $E{\uparrow} = \mathscr{R}$. В частности, если $A \in L(X, E)$, то $A{\uparrow}$ — это $\mathbb{R}^\wedge$-линейное отображение стандартного имени $X^\wedge$ в $\mathscr{R}$, т. е. линейный функционал на $\mathbb{R}^\wedge$-векторном пространстве $X^\wedge$.

2.5.2. *Субдифференциал C служит операторной шапкой множества $U \subset L(X, E)$ в том и только в том случае, если $C^\uparrow$ — шапка множества $U^\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\triangleleft$ Используя правила осуществления спусков и подъемов, проведем следующие булевы оценки истинности:

$$\begin{gathered}
[\![\, C^\uparrow - \text{шапка } U^\uparrow \,]\!] = \\
= [\![\, (\forall \alpha \geqslant 0)(\forall \beta \geqslant 0)(\forall x \in U^\uparrow)(\forall y \in U^\uparrow) \\
(\alpha + \beta = 1^\wedge \wedge \alpha x + \beta y \in C^\uparrow) \to (x \in C^\uparrow \vee y \in C^\uparrow) \,]\!] = \\
= \bigwedge_{\substack{\alpha \geqslant 0,\, \beta \geqslant 0 \\ \alpha + \beta = I_E}} \ \bigwedge_{\substack{x, y \in U \\ \alpha x + \beta y \in C}} [\![\, x{\uparrow} \in C^\uparrow \,]\!] \vee [\![\, y{\uparrow} \in C^\uparrow \,]\!].
\end{gathered}$$

Если C — операторная шапка U, то для точек $x, y \in U$ и мультипликаторов $\alpha, \beta \in M(E)$, таких что $\alpha + \beta = I_E$ и $\alpha x + \beta y \in C$, найдется проектор $b \in B := \mathscr{B}(E)$, при котором $bx \in bC$ и $b'y \in b'C$. Иначе говоря, для подходящих x' и y' из C будет $x = bx'$ и $y = b'y'$. Ясно, что $[\![\, x{\uparrow} \in (bC)^\uparrow \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, y{\uparrow} \in (b'C)^\uparrow \,]\!] = \mathbb{1}$. Учитывая логическую истинность формулы

$$(x{\uparrow} \in (bC)^\uparrow) \wedge ((bC)^\uparrow = C^\uparrow) \to x{\uparrow} \in C^\uparrow,$$

а также правила вычисления булевых оценок (см. Приложение 2), можно написать

$$\begin{gathered}
[\![\, x{\uparrow} \in C^\uparrow \,]\!] \geqslant [\![\, x{\uparrow} \in (bC)^\uparrow \,]\!] \wedge [\![\, (bC)^\uparrow = C^\uparrow \,]\!] = [\![\, bC^\uparrow = C^\uparrow \,]\!] \geqslant b; \\
[\![\, y{\uparrow} \in C^\uparrow \,]\!] \geqslant [\![\, y{\uparrow} \in (b'C)^\uparrow \,]\!] \wedge [\![\, (b'C)^\uparrow = C^\uparrow \,]\!] = [\![\, b'C^\uparrow = C^\uparrow \,]\!] \geqslant b'.
\end{gathered}$$

Суммируя сказанное, можно заключить, что $[\![\, C^\uparrow - \text{шапка } U^\uparrow \,]\!] = \mathbb{1}$.

Если, в свою очередь, известно, что $C^{\uparrow}$ — шапка $U^{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то при нужном выборе параметров α, β, x, y на основании проведенных вычислений имеем $[\![x{\uparrow} \in C^{\uparrow}]\!] \vee [\![y{\uparrow} \in C^{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. Значит, для подходящего $b \in B$ будет $[\![x{\uparrow} \in C^{\uparrow}]\!] \geqslant b$ и $[\![y{\uparrow} \in C^{\uparrow}]\!] \geqslant b'$. Отсюда в силу принципа максимума выводим существование x' и y' из $C^{\uparrow\downarrow}$ таких, что $[\![x{\uparrow} = x']\!] \geqslant b$ и $[\![y{\uparrow} = y']\!] \geqslant b'$, т. е. $bx{\uparrow} = bx'$ и $b'y{\uparrow} = b'y'$. Последнее как раз и означает, что $x \in bC$ и $y \in b'C$. $\triangleright$

2.5.3. Множество называют *хорошо накрытым*, если оно представимо в виде объединения своих операторных шапок. *Операторным лучом* или *E-лучом* из S в T называют множество $\{S+\alpha(T-S) : 0 \leqslant \alpha \in \mathrm{Orth}(E)\}$ в пространстве $L(X,E)$. *Крайним операторным лучом* множества U именуют операторный луч, который является крайним множеством в U.

2.5.4. *Теорема.* *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *хорошо накрытое множество есть поточечное o-замыкание сильно выпуклой оболочки множества своих крайних точек и крайних операторных лучей;*

(2) *множество U хорошо накрыто в том и только в том случае, если хорошо накрыт конус H_U, составленный поточечными o-пределами экстенсиональных сетей элементов множества*

$$\{(\alpha T, \alpha) \in L(X,E) \times E : \alpha \geqslant 0,\, T \in U\}.$$

$\triangleleft$ (1): Пусть U — хорошо накрытое множество. В силу допущений $U^{\uparrow}$ — выпуклое подмножество пространства $L(X,E)^{\uparrow}$. Рассуждая так же, как и в 2.4.1 (3), мы заключаем, что $L(X,E)^{\uparrow}$ совпадает с пространством $X^{\wedge\#}$ линейных функционалов над $X^{\wedge}$ ($= \mathbb{R}^{\wedge}$-гомоморфизмов из $X^{\wedge}$ в $\mathscr{R}$) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом $U^{\uparrow}$ замкнуто в мультинорме $\{T \mapsto |Tx| : x \in X^{\wedge}\}$ в смысле рассматриваемого булевозначного универсума. Используя внутреннюю характеризацию субдифференциалов 2.4.12 и привлекая 2.5.2, видим, что $U^{\uparrow}$ является хорошо накрытым множеством внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Стало быть, по соответствующей скалярной теореме Азимова $U^{\uparrow}$ представляет собой выпуклое замыкание множества своих крайних точек и крайних лучей. Используя спуски, приходим к требуемому.

(2): Ясно, что подъем $\{(\alpha T, \alpha) : \ \alpha \geqslant 0,\ T \in U\}^{\uparrow}$ изображает коническую оболочку $U^{\uparrow} \times \mathbb{1}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда видно, что интересующее нас множество H_U таково, что $(H_U)^{\uparrow}$ служит преобразованием Хёрмандера $H(U^{\uparrow})$ множества $U^{\uparrow}$ в булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$. Привлекая 2.5.2 и соответствующий скалярный результат, приходим к нужному заключению. $\triangleright$

2.5.5. В связи с теоремой 2.5.4 развернутые признаки шапок достаточно формулировать для более удобного случая конусов положительных операторов.

(1) *Замкнутое выпуклое множество C является шапкой конуса положительных элементов в топологическом упорядоченном векторном пространстве в том и только в том случае, если для всяких положительных элементов c_1 и c_2 таких, что $c_1 + c_2 \in C$, найдутся $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $c_1 \in \alpha_1 C$ и $c_2 \in \alpha_2 C$.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Пусть сначала известно, что C — это шапка и $c = c_1 + c_2$, где $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$ и $c \in C$. Предположим, что при любом $\lambda > 1$ будет $\lambda c_1 \notin C$ и $\lambda c_2 \notin C$. Тогда по определению шапки

$$t := \lambda^{-1}(\lambda c_1) + (1 - \lambda^{-1})(\lambda(\lambda - 1)^{-1} c_2) \notin C.$$

В то же время $t = c$, что означает ложность сделанного допущения. Итак, имеется $\lambda > 1$ такое, что один из элементов λc_1 и λc_2 лежит в C. Пусть для определенности это λc_1. Обозначим $\lambda_0 := \sup\{\lambda > 0 : \ \lambda c_1 \in C\}$. Тогда $\lambda_0 > 1$ и при каждом $\lambda > \lambda_0$ верно $\lambda c_1 \notin C$. Поскольку $\lambda^{-1}(\lambda c_1) + (1 - \lambda^{-1})(\lambda(\lambda - 1)^{-1} c_2) \in C$, то $\lambda(\lambda - 1)^{-1} c_2 \in C$, как только $\lambda > \lambda_0$. В силу замкнутости C заключаем: $\lambda_0(\lambda_0 - 1)^{-1} c_2 \in C$. Отсюда $c_2 \in (\lambda_0 - 1)/\lambda_0 C$ и $c_1 \in 1/\lambda_0 C$.

$\leftarrow$: Пусть теперь для $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $c_1, c_2 \geqslant 0$ справедливо $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \in C$ и все же $c_1, c_2 \notin C$. Если выполнено сформулированное условие, то $\alpha_1 c_1 = \gamma_1 d_1$ и $\alpha_2 c_2 = \gamma_2 d_2$ при некоторых $d_1, d_2 \in C$, $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$ и $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Поскольку $c_1 = (\gamma_1/\alpha_1) d_1$ и $c_2 = (\gamma_2/\alpha_2) d_2$, то $\gamma_1/\alpha_1 > 1$ и $\gamma_2/\alpha_2 > 1$. В то же время неравенство $\gamma_1/\alpha_1 > 1$ обеспечивает соотношение $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 < 1 - \alpha_1 = \alpha_2$. Получаем противоречие, т. е. хотя бы одна из точек c_1 или c_2 попадает в C. Окончательно заключаем, что C — это шапка. $\triangleright$

(2) *Пусть p — положительный монотонный сублинейный функционал на пространстве (X, X^+). Субдифференциал ∂p служит шапкой конуса $X^{\#+}$ положительных линейных функционалов на X*

в том и только в том случае, если выполнено каждое из следующих утверждений:

(а) $\inf\{p(z) : z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} = p(x_1) \vee p(x_2)$ *при* $x_1, x_2 \in X$;

(б) *конический отрезок* $\{p < 1\}$ *фильтрован по возрастанию;*

(в) $[x_1, \rightarrow) \cap [x_2, \rightarrow) \cap \{p \leqslant 1 + \varepsilon\} \neq \varnothing$ *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x_1, x_2 \in \{p \leqslant 1\}$, *где* $[x, \rightarrow) := \{x' \in X : x \leqslant x'\}$.

$\triangleleft$ Пусть сначала известно, что ∂p — шапка в $X^{\#+}$. Определим два сублинейных функционала $q, r : X \times X \to \mathbb{R}$, полагая

$$g : (x_1, x_2) \mapsto \inf\{p(z) : z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\};$$
$$r : (x_1, x_2) \mapsto p(x_1) \vee p(x_2).$$

Заметим, что $\partial q(\cdot, x_2) = \partial q(x_1, \cdot) = X^{\#+}$. Таким образом,

$$\partial q = \{(f_1, f_2) \in X^{\#} \times X^{\#} :\ f_1 \geqslant 0,\ f_2 \geqslant 0,\ f_1 + f_2 \in \partial p\}.$$

Учитывая 2.1.7 (1), получаем

$$\partial r = \{(\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2) : \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ f_1 \in \partial p,\ f_2 \in \partial p\}.$$

Остается учесть предложение 2.5.5 (1) и заметить, что ∂p является шапкой в том и только в том случае, если $\partial q = \partial r$, чтобы сделать вывод о справедливости импликаций (а) $\to$ (б) и (а) $\to$ (в). Для завершения доказательства достаточно проверить соотношения (б) $\to$ (а) и (в) $\to$ (а).

Итак, в условиях (б) пусть $t := p(x_1) \vee p(x_2)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ будет $(t+\varepsilon)^{-1}x_1 \in \{p < 1\}$ и $(t+\varepsilon)^{-1}x_2 \in \{p < 1\}$. По условию для некоторого $z \in X$ выполнено $z \geqslant (t+\varepsilon)^{-1}x_1$, $z \geqslant (t+\varepsilon)^{-1}x_2$ и $p(z) < 1$. Положим $z_0 := (t+\varepsilon)z$. Видно, что $p(z_0) = (t+\varepsilon)p(z) < t+\varepsilon$. Отсюда выводим

$$p(x_1) \vee p(x_2) \leqslant \inf\{p(z) :\ z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} \leqslant p(z_0) \leqslant p(x_1) \vee p(x_2) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем: (а) вытекает из (б). Оставшаяся импликация (в) $\to$ (а) проверяется столь же просто. $\triangleright$

Для дальнейшего полезно подметить, что 2.5.5 (1) справедливо при рассмотрении векторного пространства X над плотным подполем (с единицей) в $\mathbb{R}$.

2.5.6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *p — верхняя огибающая опорных функций шапок;*

(2) *p — верхняя огибающая дискретных функционалов;*

(3) *p — функционал Минковского некоторого аппроксимативно фильтрованного конического отрезка, т. е. пересечения фильтрованных по возрастанию множеств.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Обеспечено тем, что крайние точки шапок конуса положительных форм являются дискретными функционалами.

(2) $\to$ (3): Пусть $p(x) := \sup\{p_\xi(x) : \xi \in \Xi\}$ при $x \in X$, где для каждого ξ выполнено $p_\xi := T_\xi(x)^+$ и T_ξ — подходящий дискретный функционал. Ясно, что p — это функционал Минковского пересечения $S := \bigcap_{\xi\in\Xi}\{p_\xi < 1\}$ и, стало быть, S — аппроксимативно фильтрованный конический отрезок в силу 2.5.5 (2).

(3) $\to$ (1): Следует из общих свойств шапок и 2.5.5 (2). $\rhd$

2.5.7. *Теорема.* *Пусть X — некоторое упорядоченное векторное пространство и $P : X \to E$ — возрастающий сублинейный оператор. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *субдифференциал ∂P служит спущенной шапкой конуса $L^+(X, E)$;*

(2) *для всяких $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$\inf\{P(z) : z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} = P(x_1) \vee P(x_2);$$

(3) *если $A_1, A_2 \in L^+(X, E)$ таковы, что $A_1 + A_2 \in \partial P$, то найдутся мультипликаторы $\alpha_1, \alpha_2 \in M(E)$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$ и, кроме того, $A_1 \in \alpha_1 \circ \partial P$, $A_2 \in \alpha_2 \circ \partial P$.*

(4) *при любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $P(x_1) \leqslant \mathbb{1}_E$ и $P(x_2) \leqslant \mathbb{1}_E$, и произвольном $\varepsilon > 0$ имеются разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(z_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, удовлетворяющие соотношениям*

$$z_\xi \geqslant x_1,\ z_\xi \geqslant x_2,\ b_\xi P(z_\xi) \leqslant (1 + \varepsilon)b_\xi \quad (\xi \in \Xi);$$

(5) *подъем $(\partial P)^\uparrow$ является шапкой конуса положительных форм на стандартном имени $X^\wedge$ пространства X внутри булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$, построенного над базой B рассматриваемого K-пространства E;*

(6) *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *множество* $\{P\!\uparrow\, < 1\}$ *фильтровано по возрастанию.*

$\lhd$ В силу 2.5.4 имеем (1) $\leftrightarrow$ (5), ибо $(\partial P)\!\uparrow = \partial P^{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Эквивалентности (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (6) обеспечены 2.5.5 (2) и принципом переноса булевозначного анализа (см. Приложение 4). Соотношение (1) $\leftrightarrow$ (4) обеспечено предложением 2.5.5 (2), ибо

$$
\begin{gathered}
[\![\, \partial P\!\uparrow\ \text{— шапка}\,]\!] = \\
= [\![\, (\forall x_1, x_2 \in X^{\wedge})(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in X^{\wedge}) \\
z \geqslant x_1 \wedge z \geqslant x_2 \wedge P\!\uparrow\!(z) \leqslant 1^{\wedge} + \varepsilon \,]\!] = \\
= \bigwedge_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \varepsilon > 0}} [\![\, (\exists z \in X^{\wedge}) z \geqslant x_1^{\wedge} \wedge z \geqslant x_2^{\wedge} \wedge P(z) \leqslant \mathbb{1}_E + \varepsilon \,]\!].
\end{gathered}
$$

Остается привлечь принцип исчерпывания для булевой алгебры, теорему Гордона и правила вычисления булевых оценок истинности. Наконец, эквивалентность (2) $\leftrightarrow$ (3) обеспечена 2.1.7 (1). $\rhd$

2.5.8. Отметим полезные следствия теоремы 2.5.7.

(1) *Крайние точки операторной шапки конуса положительных операторов являются дискретными операторами.*

(2) *Возрастающий положительный сублинейный оператор P является поточечной точной верхней границей множества дискретных операторов в том и только в том случае, если подъем $P\!\uparrow$ — функционал Минковского аппроксимативно фильтрованного конического отрезка в булевозначном универсуме.*

2.5.9. Перейдем к характеристикам субдифференциалов, являющихся гранями. При этом пространства X и E можно считать модулями над одним и тем же решеточно упорядоченным кольцом A с единицей (см. 2.3). Сублинейный оператор P предполагается A^+-однородным. Мы начнем с анализа некоторого обобщения понятия шапки, считая X упорядоченным модулем, P — возрастающим и положительным оператором. Пусть, далее, F — еще один упорядоченный A-модуль, допускающий выпуклый анализ, и T — положительный модульный гомоморфизм из E в F.

Эквивалентны следующие утверждения:

(1) *для всяких $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$\inf\{TP(z) : z \geqslant\ x_1,\, z \geqslant x_2\} = T(P(x_1) \vee P(x_2));$$

(2) *при любых* $A_1, A_2 \in L^+(X, F)$ *таких, что* $A_1 + A_2 \in \partial(T \circ P)$, *найдутся гомоморфизмы* T_1, T_2 *из* $L^+(E, F)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$T_1 + T_2 = T, \quad A_1 \in \partial(T_1 \circ P), \quad A_2 \in \partial(T_2 \circ P).$$

$\lhd$ Определим два оператора $Q_1, Q_2 : X \times X \to F$ формулами

$$Q_1(x_1, x_2) := \inf\{TP(z) : \ z \geqslant x_1, \, z \geqslant x_2\},$$
$$Q_2(x_1, x_2) := T(P(x_1) \vee P(x_2)).$$

Ясно, что, Q_1 и Q_2 — сублинейные операторы, причем $Q_1 \geqslant Q_2$. Таким образом, интересующее нас в (1) равенство можно переписать как включение $\partial Q_1 \subset \partial Q_2$. Осталось вычислить субдифференциалы ∂Q_1 и ∂Q_2. Для $A_k \in L(X, F)$ $(k := 1, 2)$ определим модульный гомоморфизм $(A_1, A_2) : X \times X \to F$ формулой $(A_1, A_2) : (x_1, x_2) \mapsto A_1 x_1 + A_2 x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$. Тогда

$$(A_1, A_2) \in \partial Q_1 \leftrightarrow A_1 \geqslant 0, \, A_2 \geqslant 0, \, A_1 + A_2 \in \partial(T \circ P);$$
$$(A_1, A_2) \in \partial Q_2 \leftrightarrow (\exists T_1 \geqslant 0, \, T_2 \geqslant 0) T_1 + T_2 = T \wedge$$
$$\wedge \, A_1 \in \partial(T_I \circ P) \wedge A_2 \in \partial(T_2 \circ P).$$

В самом деле, достаточно применить формулы субдифференцирования из 1.4.14 (6) и 2.1.7 (2). $\rhd$

2.5.10. Оператор P (и его субдифференциал ∂P), удовлетворяющий равносильным условиям, сформулированным в 2.5.9, называют T-*шапкой* полумодуля $L^+(X, E)$. Отметим некоторые свойства таких шапок.

(1) *Каждая* T-*шапка служит* S-*шапкой при* $S \in [0, T]$.

$\lhd$ Обозначим для симметрии $T' := S$ и $T'' := T - S$. Тогда

$$0 \leqslant \inf\{T'P(z) : z \geqslant x_1, \, z \geqslant x_2\} - T'(P(x_1) \vee P(x_2)) +$$
$$+ \inf\{T''P(z) : z \geqslant x_1, \, z \geqslant x_2\} - T''(P(x_1) \vee P(x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{(T' + T'')P(z) : z \geqslant x_1, \, z \geqslant x_2\} - T(P(x_1) \vee P(x_2)) = 0,$$

что и нужно. $\rhd$

(2) *Пусть P — это T-шапка и $T \circ A \in \operatorname{ext}(T \circ P)$ для $A \in \partial P$ (т. е. A — это T-крайняя точка ∂P). Тогда $[0, T \circ A] = [0, T] \circ A$.*

$\lhd$ Пусть $0 \leqslant S \leqslant T \circ A$. На основании 2.5.9 найдутся $T_1 \geqslant 0$, $T_2 \geqslant 0$, $T_1 + T_2 = T$ такие, что $S \in \partial(T_1 \circ P)$ и $T \circ A - S \in \partial(T_2 \circ P)$. Итак, $2T \circ A = (S + T_2 \circ A) + ((T \circ A - S) + T_1 \circ A)$, т. е. $T_1 \circ A = S$ и $S \in [0, T] \circ A$, ибо $S + T_2 \circ A \in \partial(T \circ P)$ и $(T \circ A - S) + T_1 \circ A \in \partial(T \circ P)$. $\rhd$

2.5.11. *Теорема.* *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *субдифференциал $\partial(T \circ Q)$ является гранью субдифференциала $\partial(T \circ P)$;*

(2) *для произвольных гомоморфизмов $T_1, T_2 \in L(E, F)$ и $A_1, A_2 \in L(X, F)$ таких, что*

$$
\begin{gathered}
T_1 \geqslant 0,\ T_2 \geqslant 0,\ T_1 + T_2 = T; \\
A_1 \in \partial(T_1 \circ P),\ A_2 \in \partial(T_2 \circ P), \\
A_1 + A_2 \in \partial(T \circ Q),
\end{gathered}
$$

будет $A_1 \in \partial(T_1 \circ Q)$ и $A_2 \in \partial(T_2 \circ Q)$;

(3) *оператор $(x, y) \mapsto y + Q(-x)$, действующий из модуля $X \times E$ с полумодулем $\operatorname{epi}(P) := \{(x, e) \in X \times E : x \geqslant P(x)\}$ в модуль E, является T-шапкой;*

(4) *для каждых $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$
\begin{gathered}
\inf_{z \in X} T(R(x_1, z)) \vee (R(x_2, z)) = 0, \\
R(x, z) := P(x - z) + Q(z) - Q(x).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть гомоморфизмы T_1, T_2, A_1, A_2 выбраны в соответствии с условиями (2). Рассмотрим элемент S из субдифференциала ∂Q. Очевидно, справедливы соотношения:

$$
\begin{gathered}
A_1 + T_2 \circ S \in \partial(T \circ P);\ A_2 + T_1 \circ S \in \partial(T \circ P); \\
(A_1 + T_2 \circ S) + (A_2 + T_1 \circ S) = (A_1 + A_2) + T \circ S \in 2\partial Q.
\end{gathered}
$$

Значит, на основании (1) гомоморфизм $A_1 + T_2 \circ S$ лежит в $\partial(T \circ Q)$, т. е. $A_1 x + T_2 S x \leqslant TQ(x)$ при всех $x \in X$. Отсюда

$$
A_1 x + T_2 Q(x) = \sup\{A_1 x + T_2 S x : S \in \partial Q\} \leqslant T \circ Q(x)
$$

для любого $x \in X$. Следовательно, $A_1 \in \partial(T_1 \circ Q)$. Аналогично устанавливается, что $A_2 \in \partial(T_2 \circ Q)$ (ибо $A_2 + T_1 \circ S \in \partial(T \circ Q)$ при каждом $S \in \partial Q$)).

(2) $\to$ (3): Положим $\mathscr{P}(x, y) := y + Q(-x)$ и возьмем гомоморфизмы $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in L(X \times E, F)$ такие, что $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \partial(T \circ \mathscr{P})$. Положим $T_k e := \mathscr{A}(0, e)$ для $k := 1, 2$ и $e \in E$. Ясно, что $T_1 \geqslant 0$, $T_2 \geqslant 0$, ибо $0 \times E^+ \subset \operatorname{epi}(P)$. Кроме того, $(T_1 + T_2)e = \mathscr{A}_1(0, e) + \mathscr{A}_2(0, e) \leqslant T(e + Q(0)) = Te$ при всех $e \in E$. Значит, $T_1 + T_2 = T$. Осталось убедиться, что $\mathscr{A}_1 \in \partial(T_1 \circ \mathscr{P})$ и $\mathscr{A}_2 \in \partial(T_2 \circ \mathscr{P})$. Положим $\mathscr{A}_k x := \mathscr{A}_k(-x, 0)$ для $x \in X$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_k(x, P(x)) &= T_k P(x) + \mathscr{A}_k(x, 0) = \\ &= T_k P(x) - \mathscr{A}_k(-x, 0) = \\ &= T_k P(x) - A_k x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Значит, $A_k \in \partial(T_k \circ P)$ при $k := 1, 2$. Кроме того,

$$(A_1 + A_2)x = (\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)(0, -x) \leqslant T\mathscr{P}(-x, 0) = TQ(x).$$

В силу (2) заключаем, что $A_k \in \partial(T_k \circ Q)$. Итак,

$$\mathscr{A}_k(x, e) = T_k e - A_k x \leqslant T_k e + T_k Q(-x) = T_k \mathscr{P}(x, e)$$

для любых $(x, e) \in X \times E$. Тем самым $\mathscr{P}$ — это T-шапка.

(3) $\to$ (4): Учитывая определение T-шапки, для произвольных $x_1, x_2 \in X$ и $e_1, e_2 \in E$ получим

$$\begin{gathered} T((e_1 + Q(-x_1)) \vee (e_2 + Q(-x_2))) = \\ = \inf\{T(e + Q(-x)) : e - e_1 \geqslant P(x - x_1),\, e - e_2 \geqslant P(x - x_2)\}. \end{gathered}$$

Отсюда ввиду положительности T вытекает соотношение

$$\begin{gathered} T((e_1 + Q(x_1)) \vee (e_2 + Q(x_2))) = \\ = \inf_{z \in X} T((e_1 + P(z + x_1) + Q(-z)) \vee (e_2 + P(z + x_2) + Q(-z))) = \\ = \inf_{z \in X} T((e_1 + P(x_1 - z) + Q(z)) \vee (e_2 + P(x_2 - z) + Q(z))). \end{gathered}$$

Полагая $e_1 := Q(x_2)$ и $e_2 := Q(x_1)$, приходим к (4).

(4) $\to$ (1): Пусть A_1, A_2 — элементы $\partial(T\circ P)$, причем $A_1+A_2\in 2\partial(T\circ Q)$. Для $x_1,x_2\in X$ и произвольного $z\in X$ имеем

$$
\begin{gathered}
A_1x_1+A_2x_2=A_1(x_1-z)+A_2(x_2-z)+(A_1+A_2)z\leqslant\\
\leqslant TP(x_1-z)+TP(x_2-z)+TQ(z)-\\
-TQ(x_1)+TQ(z)-TQ(x_2)+TQ(x_1)+TQ(x_2).
\end{gathered}
$$

Переходя к инфимуму по z, выводим

$$
\begin{gathered}
A_1x_1+A_2x_2\leqslant\inf_{z\in X}\{T(P(x_1-z)+Q(z)-Q(x_1))+\\
+T(P(x_2-z)+Q(z)-Q(x_2))+TQ(x_1)+TQ(x_2)\}\leqslant\\
\leqslant TQ(x_1)+TQ(x_2)+\\
+2\inf_{z\in X}T\big((P(x_1-z)+Q(z)-Q(x_1))\vee(P(x_2-z)+Q(z)-Q(x_2))\big).
\end{gathered}
$$

Учитывая (4), заключаем $A_1\in\partial(T\circ Q)$ и $A_2\in\partial(T\circ Q)$. $\rhd$

2.5.12. В случае, если F — это (расширенное) K-пространство, эквивалентные условия теоремы 2.5.11 равносильны утверждению, что подъем $\partial(T\circ Q)^{\uparrow}$ служит гранью подъема $\partial(T\circ P)^{\uparrow}$ внутри булевозначного универсума, построенного над базой F. Отметим также, что теорема 2.5.11 в части (1) $\leftrightarrow$ (4) представляет собой обобщение критерия 2.2.6 (7). В качестве ее применения приведем признак грани, аналогичный 2.2.6 (8). Рассмотрим слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$ в $L(X,E)$, и пусть $P(x):=\sup\{Ax:A\in\mathfrak{A}\}$ $(x\in X)$. Пусть, далее, $Q:\ X\to E$ — сублинейный оператор, причем $Q\leqslant P$.

2.5.13. *Теорема.* *Множество $\partial(T\circ Q)$ является гранью $\partial(T\circ P)$ в том и только в том случае, если для каждого $\beta\in L^+(l_\infty(\mathfrak{A},E),F)$ такого, что $\beta\circ\Delta_{\mathfrak{A}}=T$ и $\beta\circ\langle\mathfrak{A}\rangle\in\partial(T\circ Q)$, при всех $x_1,x_2\in X$ выполнено*

$$
\beta\big((\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Q(x_1)-\langle\mathfrak{A}\rangle x_1)\wedge(\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Q(x_2)-\langle\mathfrak{A}\rangle x_2)\big)\geqslant 0
$$

или, что равносильно,

$$
\beta(\langle\mathfrak{A}\rangle x-\Delta_{\mathfrak{A}}\circ Q(x))^+=0
$$

для каждого $x\in X$.

$\triangleleft$ Привлекая теорему 2.5.11, выводим следующий критерий грани:

$$
\begin{aligned}
0 = \inf_{z\in X} T\big((\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle(x_1 - z) + Q(z) - Q(x_1)) \vee \\
\vee (\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle(x_2 - z) + Q(z) - Q(x_2))\big) = \\
= \inf_{z\in X} T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}\big((\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \langle\mathfrak{A}\rangle z + \langle\mathfrak{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2)) \vee \\
\vee (\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \langle\mathfrak{A}\rangle z + \langle\mathfrak{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2))\big) = \\
= \inf_{z\in X} T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}}\big(\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \langle\mathfrak{A}\rangle z\big) + \\
+ (\langle\mathfrak{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1)) \vee (\langle\mathfrak{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2)).
\end{aligned}
$$

Если $\beta \geqslant 0$, $\beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = T$ и $\beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle \in \partial(T \circ Q)$, то

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant \inf_{z\in X} \big(\beta\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \beta\langle\mathfrak{A}\rangle z\big) + \\
+\beta\big((\langle\mathfrak{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1)) \vee (\langle\mathfrak{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2))\big) = \\
= \beta\big((\langle\mathfrak{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1)) \vee (\langle\mathfrak{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2))\big).
\end{aligned}
$$

Тем самым установлена необходимость доказываемых неравенств. Для проверки достаточности их выполнения воспользуемся теоремой о векторном минимаксе (см. 1.3.11, 4.1.10 (2)), в силу которой имеется оператор β из $\partial(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A}})$ такой, что интересующий нас инфимум f из 2.5.11 (4) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
f = \inf_{z\in X} (\beta\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \beta\langle\mathfrak{A}\rangle z) + \\
+\beta\big((\langle\mathfrak{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1)) \vee (\langle\mathfrak{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2))\big).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что множество

$$
U := \{\beta\Delta_{\mathfrak{A}} Q(z) - \beta\langle\mathfrak{A}\rangle z : z \in X\}
$$

ограничено снизу и, стало быть, в силу имеющейся положительной однородности Q и $\langle\mathfrak{A}\rangle$ будет $\inf U = 0$. Последнее означает, что $TQ(z) = \beta\langle\mathfrak{A}\rangle z \geqslant 0$ для $z \in X$, т. е. $\beta \circ \langle\mathfrak{A}\rangle \in \partial(T \circ Q)$. Значит, по условию, $f \leqslant 0$, что обеспечивает равенство $f = 0$.

Выполнение исследуемых неравенств при $x_1 := x$ и $x_2 = 0$ приводит к нужному равенству

$$\beta(\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Q(x))^{+} = 0.$$

Последнее, в свою очередь, равносильно импликации

$$(\forall \beta' \geqslant 0)\beta' \leqslant \beta \to \beta'\big(\langle\mathfrak{A}\rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} Q(x)\big) \leqslant 0$$

при всяком $x \in X$. Остается заметить, что

$$\beta\big((\Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1) - \langle\mathfrak{A}\rangle x_1) \wedge (\Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2) - \langle\mathfrak{A}\rangle x_2)\big) =$$
$$= \beta_1\big(\Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_1) - \langle\mathfrak{A}\rangle x_1\big) + \beta_2\big(\Delta_{\mathfrak{A}} Q(x_2) - \langle\mathfrak{A}\rangle x_2\big)$$

при подходящем выборе положительных β_1 и β_2, составляющих β, т. е. $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Последнее наблюдение завершает доказательство. $\triangleright$

2.6. Субдифференциалы, порождаемые суммами решеточных гомоморфизмов

Основная цель данного параграфа — охарактеризовать сублинейные операторы, представленные в виде верхней огибающей семейства положительных n-дизъюнктных операторов, а также описать возникающие субдифференциалы и их крайние точки.

На протяжении всего параграфа X и E — векторные решетки, причем E порядково полна, если не оговорено иное.

2.6.1. Сублинейный оператор $P : X \to E$ называют *n-субморфизмом*, если для любого набора $x_0, \dots, x_n \in X$ справедливо равенство

$$P\left(\bigvee_{k=0}^{n} x_k\right) = \bigvee_{k=0}^{n} P(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n),$$

где по определению $x_{-1} := x_n$ и $x_{n+1} := x_0$. В случае $n = 1$ принято говорить, что P — *субморфизм* и это означает, что P сохраняет верхние границы непустых конечных множеств.

(1) *Всякий n-субморфизм является возрастающим оператором.*

$\triangleleft$ В самом деле, если для произвольных $x, y \in X$, $x \leqslant y$, положить $x_0 := y$ и $x_1 = \ldots = x_n := x$, то по определению n-субморфизма для набора $\{x_0, \ldots, x_n\}$ будет $P(y) = P(x) \vee P(y)$, что означает справедливость неравенства $P(x) \leqslant P(y)$. $\triangleright$

(2) *Пусть $P_k : X \to E$ $(k := 1, \ldots, n)$ — субморфизмы. Тогда их сумма $P := \sum_{k=0}^{n} P_k$ является n-субморфизмом.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольные элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$. Так как в векторной решетке постоянный слагаемый элемент можно выносить из-под знака супремума $(\sup_\xi (x + x_\xi) = x + \sup_\xi x_\xi)$, то

$$
\begin{gathered}
P(x_0 \vee \ldots \vee x_n) = P_1(x_0 \vee \ldots \vee x_n) + \ldots + P_n(x_0 \vee \ldots \vee x_n) = \\
= P_1(x_0) \vee \ldots \vee P_1(x_n) + \ldots + P_n(x_0) \vee \ldots \vee P_n(x_n) = \\
= \sup \big\{ P_1(x_{k_1}) + \ldots + P_n(x_{k_n}) :\ k_1, \ldots, k_n \in \{0, 1, \ldots, n\} \big\}.
\end{gathered}
$$

Как видно, в каждом наборе $\{i_1, \ldots, i_n\}$ отсутствует по крайней мере один элемент из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$. Поэтому, пользуясь ассоциативностью точных верхних границ, можно написать

$$
\begin{gathered}
P(x_0 \vee \ldots \vee x_n) = \\
= \bigvee_{k=0}^{n} \sup \big\{ P_1(x_{i_1}) + \ldots + P_n(x_{i_n}) :\ i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{k\} \big\} = \\
= \bigvee_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{n} P_l(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n) = \\
= \bigvee_{k=0}^{n} P(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n),
\end{gathered}
$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

2.6.2. Назовем линейный оператор $T : X \to E$ *n-дизъюнктным*, если для любого набора из $n + 1$ попарно дизъюнктных элементов $x_0, \ldots, x_n \in X$ точная нижняя граница множества $\big\{ |Tx_k| : k := 0, 1, \ldots, n \big\}$ равна нулю; символически:

$$
(\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X)\, x_k \perp x_l\, (k \neq l) \ \to\ |Tx_0| \wedge \ldots \wedge |Tx_n| = 0.
$$

Как видно, при $n = 1$ условие n-дизъюнктности означает, что $x_0 \perp x_1$ влечет $Tx_0 \perp Tx_1$ для любых $x_0, x_1 \in X$. Такие операторы T

принято называть *d-гомоморфизмами.* В другой терминологии 1-дизъюнктные операторы называют *операторами, сохраняющими дизъюнктность.*

(1) *Положительный оператор n-дизъюнктен в том и только в том случае, если он является n-субморфизмом.*

$\lhd$ Пусть S — положительный n-дизъюнктный оператор и возьмем произвольные $x_0, \dots, x_n \in X$. Если $y_k := x_0 \vee \dots \vee x_n - x_0 \vee \dots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \dots \vee x_n$, то $y_k \geqslant 0$ и $y_k \perp y_l$ $(k \neq l)$. Тем самым $Sy_0 \wedge \dots \wedge Sy_n = 0$, что эквивалентно требуемому равенству из определения n-субморфизма.

Наоборот, пусть S — это n-субморфизм. Возьмем набор попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_n \in X$. Не ограничивая общности, можно считать все x_k положительными. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} Sx_k = S\bigg(\sum_{k=0}^{n} x_k\bigg) = S\bigg(\bigvee_{k=0}^{n} x_k\bigg) =$$
$$= \bigvee_{k=0}^{n} S(x_0 \vee \dots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \dots \vee x_n) = \bigvee_{k=0}^{n} \sum_{\substack{l:=0,\dots,n \\ l\neq k}} Sx_l,$$

откуда выводим

$$\bigwedge_{k=0}^{n} Sx_k = -\bigvee_{k=0}^{n} (-Sx_k) = -\bigvee_{k=0}^{n} \Bigg(\sum_{\substack{l:=0,\dots,n \\ l\neq k}} Sx_l - \sum_{l=0}^{n} Sx_l \Bigg) =$$
$$= -\bigvee_{k=0}^{n} \sum_{\substack{l:=0,\dots,n \\ l\neq k}} Sx_l + \sum_{l=0}^{n} Sx_l = 0,$$

что и требовалось. $\rhd$

(2) *Регулярный оператор $T : X \to E$ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, если его модуль $|T|$ является решеточным гомоморфизмом. В частности, каждый положительный оператор из X в E, сохраняющий дизъюнктность, является решеточным гомоморфизмом.*

◁ Ввиду (1) нужно лишь доказать вторую часть. Для любых $x, y \in X$ элементы $x - x \wedge y$ и $y - x \wedge y$ положительны и дизъюнктны. Если оператор $0 \leqslant T \in L^{\sim}(X, E)$ сохраняет дизъюнктность, то $T(x - x \wedge y)$ и $T(y - x \wedge y)$ также положительны и дизъюнктны. Следовательно, $0 = (Tx - z) \wedge (Ty - z) = T(x) \wedge T(y) - z$, где $z = T(x \wedge y)$. Это и завершает доказательство. ▷

(3) *Пусть $(T_\xi)_{\xi \in \Xi} : X \to E$ — слабо порядково ограниченное семейство положительных n-дизъюнктных операторов. Тогда их верхняя огибающая P (= точная верхняя граница относительно порядка в $\mathrm{Sbl}(X, E)$) является n-субморфизмом.*

◁ Возьмем элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$. Применив (1), выводим

$$P(x_0 \vee \ldots \vee x_n) = \sup\{T_\xi(x_0 \vee \ldots \vee x_n) : \ \xi \in \Xi\} =$$

$$= \sup\left\{ \bigvee_{k=0}^{n} T_\xi(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n) : \ \xi \in \Xi \right\} =$$

$$= \bigvee_{k=0}^{n} \sup\{T_\xi(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n) : \ \xi \in \Xi\} =$$

$$= \bigvee_{k=0}^{n} P(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n),$$

что и требовалось. ▷

2.6.3. Установим теперь характеризацию n-субморфизма в терминах его субдифференциала.

Теорема. *Пусть X — векторная решетка, а E — произвольное K-пространство. Для возрастающего сублинейного оператора $P \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *P является n-субморфизмом;*

(2) *для любого набора из $n+1$ оператора $T_0, T_1, \dots, T_n \in L^+(X, E)$, где $\sum_{i=0}^{n} T_i \in \partial P$, существуют подходящие ортоморфизмы $\alpha_j \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и операторы $T_i^j \in L^+(X, E)$ $(i, j := 0, 1, \dots, n)$, такие, что совместна си-*

стема условий:

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j = I_E,\ T_i^i = 0,\quad \sum_{i=0}^{n} T_i^j \in \partial P,$$

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j T_i^j = T_i \quad (i := 0, 1, \ldots, n;\ j := 0, 1, \ldots, n).$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Определим отображения P', $P_0, P_1, \ldots, P_n$ из X^{n+1} в E формулами:

$$P'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = P(x_0 \vee x_1 \vee \ldots \vee x_n),$$

$$P_j(x_0, x_1, \ldots, x_n) := P(x_0 \vee x_1 \vee \ldots \vee x_{j-1} \vee x_{j+1} \vee \ldots \vee x_n),$$

где $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ и $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Как видно, $P' : X^{n+1} \to E$ и $P_j : X^{n+1} \to E$ — возрастающие сублинейные операторы. По определению оператор P будет n-субморфизмом в том и только в том случае, если выполнено соотношение $P' = P_0 \vee P_1 \vee \ldots \vee P_n$. Но согласно 1.4.14 (2) последнее равносильно равенству $\partial P' = \partial(P_0 \vee P_1 \vee \ldots \vee P_n)$. Воспользовавшись формулой 2.1.5 (1), выводим:

$$\partial P' = \Big\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto T_0x_0 + T_1x_1 + \ldots + T_nx_n :$$
$$T_i \in L^{+}(X, E)\ (i := 0, 1, \ldots, n),\ \sum_{i=0}^{n} T_i \in \partial P\Big\}.$$

Аналогично вычисляется опорное множество ∂P_j $(j := 0, 1, \ldots, n)$:

$$\partial P_j = \Big\{(x_0, \ldots, x_n) \mapsto T_0^j x_0 + \ldots + T_{j-1}^j x_{j-1} + T_{j+1}^j x_{j+1} + \ldots$$
$$+ T_n^j x_n : T_i^j \in L^{+}(X, E)\ (i := 0, 1, \ldots, n, j \neq i),\ \sum_{0 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} T_i^j \in \partial P\Big\}.$$

Теперь, применив формулу 2.1.7 (1) к вычислению субдифференциала $\partial(P_0 \vee \ldots \vee P_n)$, получим, что последний совпадает с множеством операторов вида

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq 0}} \alpha_j T_0^j\right)(x_0) + \ldots + \left(\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq n}} \alpha_j T_n^j\right)(x_n),$$

где $\alpha_0 \dots \alpha_n \in \mathrm{Orth}^+(E)$, $\sum_{j=0}^n \alpha_j = I_E$. Сравнивая этот результат с вычисленным выше множеством $\partial P'$, получаем требуемое. $\triangleright$

2.6.4. Для дальнейшего анализа n-субморфизмов и их опорных множеств необходимы некоторые дополнительные сведения о линейных n-дизъюнктных операторах. В частности, будет показано, что регулярный n-дизъюнктный оператор представим в виде суммы из n регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность. Начнем с одного вспомогательного построения.

Пусть T и S — порядково ограниченные операторы из X в E. Введем множество порядково ограниченных операторов $\mathscr{L}(S)$ и отображение $\| \cdot \| : \mathscr{L}(S) \to \mathrm{Orth}(E)$ следующим образом:

$$\mathscr{L}(S) := \{T \in L^{\sim}(X, E) : (\exists \rho \in \mathrm{Orth}(E)^+)(|T| \leqslant \rho \circ S)\},$$
$$\|T\| := \inf\{\rho \in \mathrm{Orth}(E)^+ : |T| \leqslant \rho \circ S\} \quad (T \in \mathscr{L}(S)).$$

Заметим, что $\mathscr{L}(S)$ совпадает с множеством $\mathscr{L}(p)$, определенным в 1.6.12, если положить $p(x) := S(|x|)$ $(x \in X)$.

(1) *Тройка* $(\mathscr{L}(S), \| \cdot \|, \mathrm{Orth}(E))$ *представляет собой решетку Банаха — Канторовича с порядково полунепрерывной M-нормой.*

$\triangleleft$ Тот факт, что $(\mathscr{L}(S), \| \cdot \|, \mathrm{Orth}(E))$ — пространство Банаха — Канторовича, следует из 1.6.12. Монотонность нормы $\| \cdot \|$ видна непосредственно из ее определения. В частности, $\|T_1\| \vee \|T_2\| \leqslant \|T_1 \vee T_2\|$ для положительных T_1, T_2. Однако верно и противоположное неравенство, так как $T_1 \leqslant \|T_1\| S$ и $T_2 \leqslant \|T_2\| S$, откуда $T_1 \vee T_2 \leqslant (\|T_1\| \vee \|T_2\|) S$. Если (T_α) — возрастающее семейство положительных операторов из $\mathscr{L}(S)$, причем $T = \sup_\alpha T_\alpha$, то имеют место эквивалентности

$$\|T\| \leqslant \gamma \ \leftrightarrow \ (\forall \alpha) \ \|T_\alpha\| \leqslant \gamma \ \leftrightarrow \ \sup \|T\alpha\| \leqslant \gamma.$$

Тем самым $\|T\| = \sup_\alpha \|T_\alpha\|$. $\triangleright$

Пространство $\mathscr{L}(S)$ имеет естественную структуру модуля над $\mathrm{Orth}(E)$, определяемую формулой $\rho T := \rho \circ T$. В то же время $\mathscr{L}(S)$ допускает структуру модуля над $\mathrm{Orth}(\mathrm{Orth}(E))$ согласно 2.1.8. Эти две модульные структуры идентичны в следующем смысле.

(2) *Для каждого* $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ *существует единственный* $\bar{\rho} \in \mathrm{Orth}(\mathrm{Orth}(E))$ *такой, что* $\rho \circ T = \bar{\rho} * T$ *для всех* $T \in \mathscr{L}(S)$.

$\triangleleft$ Известно, что f-алгебры $\mathrm{Orth}(E)$ и $\mathrm{Orth}(\mathrm{Orth}(E))$ изоморфны. Изоморфизм между ними можно задать сопоставлением ортоморфизму $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ оператора $\bar{\rho} : \sigma \mapsto \rho \circ \sigma$ ($\sigma \in \mathrm{Orth}(E)$), см. Приложение 2. Для заданных $T \in \mathscr{X}(S)$ и $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$ произведение $\rho * T$ определено формулами $|\bar{\rho} * T| = \bar{\rho} * |T| = \rho \circ |T|$ и $|T - \bar{\rho} * T| = |T| - \bar{\rho} * |T| = \rho^{\perp} \circ |T|$. В силу 1.6.12 $\rho \circ T$ удовлетворяет тем же равенствам: $|T - \rho \circ T| = \rho^{\perp} \circ |T|$, $|\rho \circ T| = \rho \circ |T|$. Следовательно, $\bar{\rho} * T = \rho \circ T$, поскольку дизъюнктное разложение единственно в соответствии с 1.6.2 (3). $\triangleright$

2.6.5. Ниже потребуется также один специальный вид порядкового проектирования в пространстве регулярных операторов. Пусть X и E — векторные решетки, причем E порядково полна. Рассмотрим положительный оператор $S : G \to E$, определенный на идеале $G \subset X$. Если для каждого $e \in X^{+}$ множество $S([0, e] \cap G)$, где $[0, e]$ — порядковый интервал в X, порядково ограничено в E, то можно определить

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_G(S)e := \sup\{Sg : g \in G,\ 0 \leqslant g \leqslant e\} :=\\ := \sup\{S(g \wedge e) : g \in G\} \quad (e \in X^{+}).\end{aligned}$$

Оператор $\mathscr{E}_G(S) : E^{+} \to F$ аддитивен и положительно однороден, стало быть, его можно продолжить на все пространство X по формуле $\mathscr{E}_G(S)x := \mathscr{E}_G(S)x^{+} - \mathscr{E}_G(S)x^{-}$. Полученный оператор называют *минимальным продолжением* оператора S и обозначают тем же символом $\mathscr{E}(S) := \mathscr{E}_G(S)$. Рассмотрим некоторые свойства минимального продолжения.

(1) *Минимальное продолжение $\mathscr{E}(S)$ совпадает с S на идеале G и обращается в нуль на его дизъюнктном дополнении $G^{\perp}$.*

$\triangleleft$ Следует непосредственно из определения минимального продолжения. $\triangleright$

Нулевым идеалом $T \in L^{\sim}(X, E)$, как и выше (ср. 2.2.4), мы называем множество $\mathscr{N}(T) := \{x \in X : |T|(|x|) = 0\}$. Дизъюнктное дополнение нулевого идеала $\mathscr{N}(T)^{\perp}$, *носитель* или *полоса существенной положительности* оператора T, обозначено символом $\mathscr{C}_T$. В случае, когда $\mathscr{N}(T)^{\perp} = E$, говорят, что T — *существенно положительный оператор.*

(2) *Оператор $\pi_G := \mathscr{E}_G \circ \mathscr{R}_G$ — порядковый проектор в K-пространстве $L^{\sim}(X, E)$, и при этом имеет место представление*

$$\pi_G^{\perp} L^{\sim}(E, F) = \{T \in L^{\sim}(X, E) : G \subset \mathscr{N}(T)\}.$$

$\lhd$ Достаточно показать, что $S := \pi_G T$ — осколок T для каждого положительного $T \in L^{\sim}(X, E)$. Пусть $V := S \wedge (T - S)$. Если $x \in E^+$, то $Sx_\alpha \to Sx$ для некоторой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset G$ в соответствии с определением π_G. Так как $V \leqslant S$, то имеем $V(x - x_\alpha) \leqslant S(x - x_\alpha) \to 0$. Учитывая (1) и неравенство $V \leqslant T - S$, легко видеть, что V обращается в нуль на G, поэтому $Vx = o\text{-}\lim Vx_\alpha = 0$. $\rhd$

(3) *Предположим, что C и D — порядковые идеалы в X и $G = C \cap D$. Тогда $\pi_G = \pi_C \wedge \pi_D$. В частности, π_G и π_D дизъюнктны тогда и только тогда, когда на идеале $C \cap D$ нет ненулевых регулярных операторов, со значениями в E.*

$\lhd$ Так как $C \cap D = \{c \wedge d : c \in C,\, d \in D\}$, то для $0 \leqslant x \in E$ и $0 \leqslant T \in L^{\sim}(X, E)$ выводим

$$\begin{aligned} \pi_G T(x) &= \sup\{T(x \wedge c \wedge d) : c \in C,\, d \in D\} = \\ &= \sup_{c \in C} \sup\{T(x \wedge c \wedge d) : d \in D\} = \pi_C(\pi_D T)(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $\pi_G = \pi_C \circ \pi_D = \pi_C \wedge \pi_D$. $\rhd$

Если $G := E(e)$ — идеал, порожденный элементом $e \in E^+$, то пишут π_e вместо π_G.

(4) *Для вычисления проектора π_e имеет место следующая формула:*

$$\begin{gathered} \pi_e Tx = \sup_n T(ne \wedge x) \quad (x \in E^+,\, T \in L^+(E, F)), \\ \pi_e Tx = \pi_e Tx^+ - \pi_e Tx^- \quad (x \in E,\, T \in L^+(E, F)), \\ \pi_e T = \pi_e T^+ - \pi_e T^- \quad (T \in L^{\sim}(E, F)). \end{gathered}$$

2.6.6. *Теорема.* *Пусть X и E — векторные решетки, причем E — это K-пространство. Пусть T — порядково ограниченный оператор из X в E. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *T является n-дизъюнктным оператором;*

(2) *для любого набора из $n+1$ положительного оператора $T_0, \ldots, T_n \in L^{\sim}(X, E)$, удовлетворяющего условию $|T| = T_0 + \ldots + T_n$, существуют наборы операторов $\{T_{k,l} : k, l := 0, 1, \ldots, n\}$ и $\{\sigma_l : l := 0, 1, \ldots, n\}$ такие, что совместна система условий:*

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \sigma_l \in \operatorname{Orth}(E), \\ \leqslant T_{k,l} \in L^{\sim}(X, E), \quad T_{k,k} = 0, \\ \sum_{l=0}^{n} \sigma_l = I_E, \quad \sum_{k=0}^{n} \sigma_l T_{k,l} = |T|, \quad \sum_{l=0}^{n} \sigma_l T_{k,l} = T_k \\ (k, l := 0, 1, \ldots, n); \end{gathered}$$

(3) *для любого набора из $n+1$ положительного оператора $T_0, \ldots, T_n \in L^{\sim}(X, E)$, удовлетворяющего условию $|T| = T_0 + \ldots + T_n$, существуют наборы операторов $\{S_{k,l} : k, l := 0, 1, \ldots, n\}$ и $\{\sigma_l : l := 0, 1, \ldots, n\}$ такие, что совместна система условий:*

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \sigma_l \in \operatorname{Orth}(E), \\ 0 \leqslant S_{k,l} \in L^{\sim}(X, E), \quad S_{k,k} = 0, \\ \sum_{l=0}^{n} \sigma_l = I_E, \quad \sum_{k=0}^{n} S_{k,l} = \sigma_l |T|, \quad \sum_{l=0}^{n} S_{k,l} = T_k \\ (k, l := 0, 1, \ldots, n); \end{gathered}$$

(4) *для дизъюнктного набора из $n+1$ оператора*

$$T_0, \ldots, T_n \in L^{\sim}(X, E),$$

удовлетворяющих условию $|T| = T_0 + \ldots + T_n$, существует набор ортоморфизмов $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \operatorname{Orth}(E)^+$ такой, что $\sigma_0 + \ldots + \sigma_n = I_E$ и $\sigma_k \circ T_k = 0$ $(k := 0, 1, \ldots, n)$;

(5) *для любого дизъюнктного набора из $n+1$ оператора $T_0, \ldots, T_n \in L^{\sim}(X, E)$, удовлетворяющего условию $|T| = T_0 + \ldots + T_n$, существует разбиение единицы $\pi_0, \ldots, \pi_n$ в $\mathfrak{P}(E)$ такое, что $\pi_k \circ T_k = 0$, где $k := 0, 1, \ldots, n$;*

(6) *T представляет собой метрически n-разложимый элемент решетки Банаха — Канторовича $\mathscr{X}(T)$.*

◁ Без ограничения общности можно предположить, что $T \geqslant 0$.

(1) ↔ (2): Следует из 2.6.3.

(2) → (3): Если выполнено (2), то нужно лишь положить $S_{k,l} := \sigma_k T_{l,k}$ $(k, l := 0, 1, \dots, n)$.

(3) → (4): Допустим, что $T = T_0 + \dots + T_n$, причем операторы $T_0, \dots, T_n \in L^\sim(X, E)^+$ попарно дизъюнктны. Пусть $S_{k,l}$ и σ_l такие же, что и в (3). Тогда $S_{k,l} \perp T_l$ $(k \neq l)$ и, суммируя левую часть последнего по $k := 0, 1, \dots, n$, приходим к соотношению $\sigma_l T \perp T_l$. Поскольку $\sigma_k T_k \leqslant T_k$ и $\sigma_k T_k \leqslant \sigma_k T$, то $\sigma_k T_k = 0$.

(4) ↔ (5) ↔ (6): Эти эквивалентности следуют из определений и из предложений 1.6.9 (1, 2) и 2.6.4 (2).

(6) → (1): Предположим, что T — метрически n-разложимый элемент решетки $\mathscr{Z}(T)$. Возьмем набор $e_0, \dots, e_n$ попарно дизъюнктных элементов из X. Положим $\pi_k := \pi_{e_k}$ $(k := 1, \dots, n)$ и $\pi_0 := (\pi_1 + \dots + \pi_n)^\perp$, где порядковые проекторы $\pi_{e_1}, \dots, \pi_{e_n}$ в $L^\sim(X, E)$ определены как в 2.6.5 (4). Если $T_k := \pi_k T$, то $T_k \perp T_l$ $(k \neq l)$ в соответствии с 2.6.5 (3) и $T_k(e_k) = T(e_k)$ ввиду 2.6.5 (1). Более того, $T = T_0 + T_1 + \dots + T_n$, стало быть, $|T_0| \wedge \dots \wedge |T_n| = 0$ по определению 1.6.9. Но $|Te_k| = |T_k e_k| \leqslant T_k(|e_k|) \leqslant |T_k|\, T(|e_k|) \leqslant |T_k|\, f$, где $f := T(|e_0|) \vee \dots \vee T(|e_n|)$. Таким образом, учитывая, что точные границы множества ортоморфизмов вычисляются поточечно (см. Приложение 2), можно написать

$$\bigwedge_{k=0}^{n} |Te_k| \leqslant \bigwedge_{k=0}^{n} |T_k|\, f = \left(\bigwedge_{k=0}^{n} |T_k| \right) f = 0,$$

откуда и следует требуемое согласно 2.6.2 (1). ▷

2.6.7. (1) *Теорема.* *Предположим, что X — векторная решетка, а E — некоторое K-пространство. Регулярный оператор $T : X \to E$ будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если T представим в виде суммы n регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность.*

◁ Достаточно применить 2.6.6 и 1.6.10. ▷

(2) *Разложение n-дизъюнктного оператора $T = T_1 + \dots + T_n$ из (1) единственно с точностью до перемешиваний относительно булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E)$: именно, если $T = \sum_{i=1}^{n} S_i$ — еще одно разложение T в дизъюнктную сумму операторов $S_1, \dots, S_m$ $(m \in \mathbb{N})$, сохраняющих дизъюнктность, то для каждого $i := 1, 2, \dots, m$ найдется* *дизъюнктное семейство проекторов* $(\pi_i^1, \dots, \pi_i^n) \subseteq \mathfrak{Pr}(E)$ *такое, что* $S_i = \sum_{j=1}^n \pi_i^j T_j$.

$\lhd$ Согласно теореме 2.6.6 оператор T является метрически n-разложимым элементом в $\mathscr{L}(T)$, а наборы $\{T_1, \dots, T_n\}$ и $\{S_1, \dots, S_n\}$ состоят из метрически неразложимых элементов. Теперь, применяя предложение 1.6.10 (3), для каждого $i := 1, 2, \dots, m$ подберем дизъюнктное семейство $\{\prod_i^1, \dots, \prod_i^n\} \subseteq \mathfrak{Pr}(\mathrm{Orth}(E))$ такое, что $S_i = \sum_{j=1}^n \prod_i^j T_j$. Наконец, в силу предложения 2.6.4 (2) найдутся попарно дизъюнктные проекторы $(\pi_i^1, \dots, \pi_i^n) \subseteq \mathfrak{Pr}(E)$, для которых справедливо $S_i = \sum_{j=1}^n \pi_i^j T_j$ $(i := 0, 1, \dots, m)$. $\rhd$

2.6.8. *Теорема.* *Крайние точки субдифференциала сублинейного оператора, действующего из векторной решетки в K-пространство, будут положительными n-дизъюнктными операторами в том и только в том случае, если он является n-субморфизмом.*

$\lhd$ Пусть $P : X \to E$ — какой-нибудь n-субморфизм и $T \in \mathrm{ext}(P)$. Для обоснования n-дизъюнктности оператора T воспользуемся критерием 2.6.6 (4). Возьмем операторы $T_0, T_1, \dots, T_n \in L^+(X, E)$ такие, что $T_i \perp T_j$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=0}^n T_i = T$. В силу теоремы 2.6.3 найдутся семейство операторов $\{T_i^j \in L^+(X, E) : \ i := 0, 1, \dots, n\}$ и набор ортоморфизмов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Orth}^+(E)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$T_i^i = 0 \ (i := 0, 1, \dots, n); \quad \sum_{i=0}^n T_i^j \in \partial P \ (j := 0, 1, \dots, n);$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = I_E, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j T_i^j = T_i \ (i := 0, 1, \dots, n).$$

Для каждого $j := \{0, 1, \dots, n\}$ положим $S_j := \sum_{i=0}^n T_i^j$. Согласно второму соотношению $S_j \in \partial P$. Кроме того, суммируя по $i := 0, 1, \dots, n$ в последнем равенстве, получим $T = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_j T_i^j = \sum_{j=0}^n \alpha_j S_j$. Зафиксируем $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. В силу 2.2.7 выполнено равенство $\alpha_j S_j = \alpha_j T$. Тогда из дизъюнктности семейства $\{T_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ вытекает, что для каждого $i := 0, 1, \dots, n$, $i \neq j$, выполнено соотношение $\alpha_j T_i^j \perp T_j$. Отсюда, суммируя по i, получаем $\alpha_j S_j \perp T_j$. Но поскольку $\alpha_j S_j = \alpha_j T$, то из неравенств

$0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant \alpha_j T$ и $0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant T_j$ выводим $0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant \alpha_j T \wedge T_j = 0$, т. е. $\alpha_j T_j = 0$. Привлекая теорему 2.6.6 и используя произвол в выборе j, получим, что T — это n-дизъюнктный оператор.

Предположим, что множество $\operatorname{ext}(P)$ состоит из n-дизъюнктных операторов. Согласно теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов (см. 2.2.2) выполнено соотношение $P(x) = \sup\{T(x) : T \in \operatorname{ext}(P)\}$ при всех $x \in X$. Требуемое теперь следует из предложения 2.6.2 (3). $\triangleright$

2.6.9. Рассмотрим некоторые следствия из доказанной теоремы.

(1) *Сублинейный оператор, действующий из векторной решетки в K-пространство, представим в виде верхней огибающей семейства положительных n-дизъюнктных операторов в том и только в том случае, если он является n-субморфизмом.*

$\triangleleft$ См. теорему 2.6.8, теорему Крейна — Мильмана и предложение 2.6.2 (3). $\triangleright$

Пусть X — произвольная векторная решетка, а E — некоторое K-пространство. Сублинейный оператор $P : X \to E$ называют *субморфизмом,* если $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ для всех $x, y \in X$. Если $P(x) = P(|x|)$ для всех $x \in X$ и отображение $x \mapsto P(x^+)$ — субморфизм, то P именуют *M-полунормой.*

Как обычно, мы будем говорить, что оператор P положителен, если $P(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in X$. Обозначим символом $\partial_h P$ множество всех решеточных гомоморфизмов, содержащихся в ∂P. В следующих двух предложениях P — произвольный положительный субморфизм.

(2) *Крайние точки субдифференциала сублинейного оператора, действующего из векторной решетки в K-пространство, будут решеточными гомоморфизмами в том и только в том случае, если он является субморфизмом.*

$\triangleleft$ Следует из 2.6.8 при $n = 1$. $\triangleright$

(3) *Сублинейный оператор, действующий из векторной решетки в K-пространство, представим в виде верхней огибающей семейства решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, если он является субморфизмом* (ср. 2.5.7, 2.5.8 (2)). *В частности, каждый положительный субморфизм p, действующий из векторной решетки в K-пространство, представим в виде верхней огибающей* *семейства мажорируемых им решеточных гомоморфизмов, т. е. допускает представление*

$$p(x) = \sup\{Sx : S \in \mathrm{Hom}(E, F) \cap \partial p\} \quad (x \in E).$$

$\lhd$ Следует из теоремы Крейна — Мильмана. $\rhd$

2.6.10. *Пусть $p : X \to E$ — возрастающий положительный сублинейный оператор и S — решеточный гомоморфизм, содержащийся в ∂p. Тогда существует $\gamma \in \mathrm{Orth}(F)$ такой, что $0 \leqslant \gamma \leqslant I_F$ и $S \in \mathrm{ext}(\gamma \circ P)$.*

$\lhd$ Для произвольного оператора T из субдифференциала ∂p положим $\lambda(T) := \inf\{\lambda \in \mathrm{Orth}(F)^+ : T^+ \in \partial(\gamma \circ p)\}$. Так же, как и в 2.6.4 (1), устанавливается, что для любого $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ верно равенство $\lambda(\pi T) = \pi\lambda(T)$. Тем самым $\lambda(\pi T + \rho T) = \pi\lambda(T) + \rho\lambda(T)$ для дизъюнктных $\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)$. Кроме того, очевидно, что $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(tT) = t\lambda(T)$ для строго положительного $t \in \mathbb{R}$. Из этих свойств вытекает равенство $\lambda(\alpha T) = \alpha\lambda(T)$ для любого «ступенчатого» ортоморфизма $\alpha = \sum_{k=1}^{n} t_k\pi_k$, где $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{P}(E)$ и $t_1, \dots, t_n$. Для произвольного положительного ортоморфизма α существуют последовательности положительных ступенчатых ортоморфизмов (α_k) и (β_k) такие, что $\alpha_k \leqslant \alpha \leqslant \beta_k$ и $\sup_k \alpha_k = \alpha = \inf_k \beta_k$. Воспользовавшись уже доказанной однородностью и очевидной монотонностью отображения $\alpha \mapsto \lambda(\alpha T)$, получим $\alpha_n\lambda(T) = \lambda(\alpha_n T) \leqslant \lambda(\alpha T) \leqslant \lambda(\beta_n T) = \beta_n\lambda(T)$, следовательно, $\lambda(\alpha T) = \alpha\lambda(T)$. Возьмем теперь решеточный гомоморфизм S из ∂P. Пусть $\gamma := \lambda(S)$, и заметим, что $S \in \partial(\gamma p)$. Если π — проектор на полосу $\ker(\gamma)$, то $\pi \circ S = 0$ и $\partial(\gamma \circ p) = \partial(\pi^d\gamma \circ p)$, поэтому достаточно доказать, что $\pi^d S \in \mathrm{ext}(\pi^d\gamma \circ p)$. Таким образом, можно считать, что $\pi = 0$, т. е. $\ker(\gamma) = \{0\}$.

Пусть $\mathscr{S} := (-S, 1) : (x, e) \mapsto e - Sx$. Предположим, что отношение порядка в $X \times E$ определено конусом $\mathrm{epi}(\gamma p)$. Пусть оператор $\mathscr{B} := (-B, \beta) : (x, e) \mapsto \beta e - Bx$ принадлежит $[0, \mathscr{S}]$. Тогда из неравенства $\mathscr{B} \geqslant 0$ вытекает $\beta \geqslant 0$ и $Bx \leqslant \beta \circ \gamma p(x)$ $(x \in X)$, а неравенство $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{S}$ влечет $\beta \leqslant I_E$ и $(S - B)x \leqslant (1 - \beta)\gamma P(x)$ $(x \in X)$. Полагая $x \leqslant 0$, получаем $B \in [0, S]$ и, учитывая 2.1.9 (2), приходим к представлению $B = \rho S$, где $\rho \in [0, I_F]$. Тем самым получаем $\rho S \in \partial(\gamma\beta p)$ и $(1 - \rho)S \in \partial((1 - \beta)\gamma p)$. Отсюда, используя установленную выше положительную однородность $\lambda(\cdot)$, выводим $\rho\gamma = \lambda(\rho S) \leqslant \gamma\beta$ и $(1 - \rho)\gamma = \lambda((1 - \rho)S) \leqslant (1 - \beta)\gamma$, следовательно, $\rho\gamma = \beta\gamma$ и $\rho = \beta$.

Таким образом, обоснованы равенства $[0,\mathscr{S}] = [0, I_F]\circ\mathscr{S}$, поскольку $\mathscr{B} = (-B,\beta) = (-\rho S,\rho) = \rho(-S,1) = \rho\mathscr{S}$. В соответствии с 2.2.3 приходим к требуемому включению $S \in \operatorname{ext}(\gamma\circ p)$. $\rhd$

2.6.11. Приведем два результата о мажорированном продолжении решеточных гомоморфизмов.

(1) ***Теорема.*** *Пусть X и E — векторные решетки, а F — некоторое K-пространство. Пусть $p : E \to F$ — положительный субморфизм, а $T : X \to E$ — решеточный гомоморфизм. Тогда имеет место формула Хана — Банаха для решеточных гомоморфизмов:*

$$\partial_h(p\circ T) = (\partial_h p)\circ T.$$

$\lhd$ Достаточно обосновать включение $\partial_h(p\circ T) \subset (\partial_h p)\circ T$, так как противоположное включение очевидно. Возьмем $S \in \partial_h(p\circ T)$. Поскольку $p\circ T$ — субморфизм, то из 2.6.10 следует существование ортоморфизма $\rho \in [0, I_F]$ и оператора $U \in \operatorname{ext}(p\circ T)$ таких, что $S = \rho\circ U$. По теореме 2.1.9 (1) имеем $U = V\circ T$ для некоторого $V \in \operatorname{ext}(p)$, стало быть, $S = \rho\circ V\circ T$. В силу 2.6.10 $\rho\circ V$ — решеточный гомоморфизм. Учитывая соотношения $p \geqslant 0$, $0 \leqslant \rho \leqslant I_F$ и $V \in \partial p$, выводим $\rho\circ V \in \partial p$, что и завершает доказательство. $\rhd$

(2) ***Теорема Хана — Банаха для решеточных гомоморфизмов.*** *Пусть p — положительный субморфизм из E в F и пусть T_0 — решеточный гомоморфизм из подрешетки $E_0 \subset E$ в F такой, что $T_0 x \leqslant p(x)$ для всех $x \in E_0$. Тогда T_0 можно продолжить до решеточного гомоморфизма $T : E \to F$ так, что $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Требуемое немедленно вытекает из 2.6.10, если заменить T на тождественное вложение E_0 в E. $\rhd$

2.6.12. В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о том, когда в субдифференциале нет решеточных гомоморфизмов. Зафиксируем возрастающий сублинейный оператор $p : X \to E$. Определим отображения $g_p, h_p : X \to E$ формулами

$$g_p(x) := \inf\big\{p(x_1)\vee\ldots\vee p(x_n) : |x| \leqslant x_1\vee\ldots\vee x_n,\\ x_1,\ldots,x_n \in X^+,\ n\in\mathbb{N}\big\},$$

$$h_p(x) := \inf\big\{p(x_1)\vee\ldots\vee p(x_n) : x \leqslant x_1\vee\ldots\vee x_n,\\ x_1,\ldots,x_n \in X,\ n\in\mathbb{N}\big\}.$$

Легко заметить, что $g_p(x) \leqslant p(|x|)$ и $h_p(x) \leqslant p(x)$, а если p — субморфизм, то $h_p(x) = p(x)$ и $g_p(x) = p(|x|)$ $(x \in X)$.

(1) *Отображения g_p и h_p являются M-полунормой и субморфизмом соответственно.*

$\lhd$ Докажем лишь, что отображение g_p является M-полунормой. Утверждение относительно h_p устанавливается аналогичными рассуждениями. Положительная однородность и монотонность g_p, а также свойство $g_p(x) = g_p(|x|)$ очевидны. Докажем субаддитивность и сохранение точных верхних границ конечных множеств. Возьмем $x, y \in X^+$ и такие элементы $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X^+$, что

$$x \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n, \quad y \leqslant y_1 \vee \ldots \vee y_m.$$

Тогда

$$x + y \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} \bigvee_{l=1}^{m} (x_k + y_l),$$

поэтому из определения g_p выводим

$$g_p(x+y) \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} \bigvee_{l=1}^{m} (p(x_k) + p(y_l)) = \bigvee_{k=1}^{n} p(x_k) + \bigvee_{l=1}^{m} p(y_l).$$

Переход к точной нижней границе приводит к требуемому неравенству $g_p(x+y) \leqslant g_p(x)+g_p(y)$. Из монотонности оператора g_p вытекает неравенство $g_p(x) \vee g_p(y) \leqslant g_p(x \vee y)$. Для доказательства обратного неравенства заметим, что для указанных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X^+$ выполнено

$$g_p(x \vee y) \leqslant \left(\bigvee_{k=1}^{n} p(x_k) \right) \vee \left(\bigvee_{l=1}^{m} p(y_l) \right).$$

Следовательно, $g_p(x \vee y) \leqslant g_p(x) \vee g_p(y)$, что и требовалось. $\rhd$

(2) *Решеточный гомоморфизм $T : X \to E$ входит в $\partial(h_p)$ в том и только в том случае, когда $T \in \partial p$, и входит в $\partial(g_p)$ в том и только в том случае, если $T \leqslant S$ для некоторого $S \in \partial p$; символически:*

$$\partial(h_p) \cap \mathrm{Hom}(X, E) = \partial p \cap \mathrm{Hom}(X, E),$$
$$\partial(g_p) \cap \mathrm{Hom}(X, E) = [0, \partial p] \cap \mathrm{Hom}(X, E),$$

где $[0, \partial p] := \bigcup \{[0, S] :\ S \in \partial p\}$.

$\triangleleft$ Включения $\subset$ очевидны, так как $h_p(x) \leqslant p(x)$ и $g_p(x) \leqslant p(|x|)$ $(x \in X)$. Проверим противоположные включения. Если $x \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in X$, то для решеточного гомоморфизма $T \in \partial p$ будет

$$Tx \leqslant T(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = Tx_1 \vee \ldots \vee Tx_n = p(x_1) \vee \ldots \vee p(x_n).$$

Следовательно, $T \in \partial h_p$. Если же и $|x| \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и решеточный гомоморфизм T содержится в $[0, \partial p]$, то $T \leqslant S$ для подходящего $S \in \partial p$, поэтому можно написать

$$\begin{gathered} Tx \leqslant T(|x|) \leqslant T(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = \\ = Tx_1 \vee \ldots \vee Tx_n \leqslant Sx_1 \vee \ldots \vee Sx_n \leqslant p(x_1) \vee \ldots \vee p(x_n). \end{gathered}$$

Переход к инфимуму дает неравенства $Tx \leqslant g_p(x)$ и $Tx \leqslant g_p(x)$, равносильные требуемым включениям. $\triangleright$

(3) *Для каждого возрастающего сублинейного оператора $p : X \to E$ имеет место представление:*

$$h_p(x) = \sup\{Tx : \, T \in \operatorname{Hom}(X, E) \cap \partial p\} \quad (x \in X^+).$$

$\triangleleft$ Вытекает непосредственно из (2) и 2.6.9 (3). $\triangleright$

(4) *Если X — решетка с проекциями на главные полосы, то*

$$\begin{gathered} g_p(x) = \inf \Big\{ p(x_1) \vee \ldots \vee p(x_n) : \, |x| = x_1 + \ldots + x_n; \\ x_1, \ldots, x_n \in X^+, \, x_k \perp x_l \, (k \neq l), \, n \in \mathbb{N} \Big\}. \end{gathered}$$

2.6.13. (1) ***Теорема.*** *Пусть X — векторная решетка, E — некоторое K-пространство и $p : X \to E$ — возрастающий сублинейный оператор. Опорное множество ∂p не содержит ненулевых решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, когда для любого $x \in X^+$ выполнено равенство*

$$\inf\{p(x_1) \vee \ldots \vee p(x_n) : \; x_1, \ldots, x_n \in X^+, \, x \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n, \, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Если же E содержит слабую порядковую единицу $\mathbb{1}$, то указанные условия равносильны также следующему: для любых $x \in X^+$ и $0 <$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ можно подобрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$, такое, что для каждого $\xi \in \Xi$ найдутся номер $n(\xi) \in \mathbb{N}$ и положительные элементы $x_{1,\xi}, \dots, x_{n(\xi),\xi} \in X$, удовлетворяющие условиям

$$x \leqslant x_{1,\xi} \vee \dots \vee x_{n(\xi),\xi}, \quad \pi_\xi P(x_{l,\xi}) \leqslant \varepsilon\mathbb{1} \quad (l := 1, \dots, n(\xi)).$$

$\lhd$ Первая часть теоремы следует из 2.6.12 (2, 3). Вторая часть выводится из первой и следующего факта, устанавливаемого в теории K-пространств: для произвольного семейства $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в K-пространство E со слабой порядковой единицей $\mathbb{1}$ выполнено $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}} z_\alpha = 0$ в том и только в том случае, если для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$ такое, что для каждого $\xi \in \Xi$ найдется индекс $\alpha(\xi) \in A$, для которого $\pi_\xi z_{\alpha(\xi)} \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$. $\rhd$

(2) ***Теорема.*** *Пусть X — векторная решетка с проекциями на главные полосы, E — некоторое K-пространство и $p : X \to E$ — монотонная полунорма. Опорное множество ∂p не содержит ненулевых решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, когда для любого $x \in X^+$ выполнено равенство*

$$\inf\{p(x_1) \vee \dots \vee p(x_n) : \ x_1, \dots, x_n \in X^+,$$

$$x_k \wedge x_l = 0\,(k \neq l), x = x_1 + \dots + x_n,\, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Если же E содержит слабую порядковую единицу $\mathbb{1}$, то указанные условия равносильны также следующему: для любых $x \in X^+$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно подобрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$, такое, что для каждого $\xi \in \Xi$ найдутся номер $n(\xi) \in \mathbb{N}$ и положительные попарно дизъюнктные элементы $x_{1,\xi}, \dots, x_{n(\xi),\xi} \in X$, удовлетворяющие условиям

$$x = x_{1,\xi} + \dots + x_{n(\xi),\xi}, \quad \pi_\xi P(x_{l,\xi}) \leqslant \varepsilon\mathbb{1} \quad (l := 1, \dots, n(\xi)).$$

$\lhd$ Первая часть теоремы следует из 2.6.12 (2, 4). Вторая часть выводится из тех же соображений, что и (1). $\rhd$

2.7. Комментарии

2.7.1. (1) Метод канонического сублинейного оператора, изложенный в 2.1.1–2.1.8, был предложен С. С. Кутателадзе [125] (см. также [1, 127, 132]). Некоторые авторы называют $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ *каноническим* *оператором Кутателадзе*, см. [192, 201]. Метод канонического сублинейного оператора освещен в обзорах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [114], С. С. Кутателадзе [132], А. М. Рубинова [192], В. М. Тихомирова [201].

(2) Характеризация решеточного гомоморфизма 2.1.9 (1) получена С. С. Кутателадзе в [125]; в западной литературе этот результат принято называть *теоремой Кутателадзе.* Другое доказательство (не использующее теорему Хана — Банаха — Канторовича) предложили В. Люксембург и А. Шэп в [386]. Подробности см. в [109, 367].

(3) Приведенные результаты об интегральном представлении из 2.1.14 (3)–(5), 2.1.15 и 2.1.16 были впервые опубликованы в книге А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [118]. В основе этих фактов лежит теорема М. Райта, установленная в [497], см. Приложение 3. Относительно теории меры и интеграла в векторных решетках см. статью М. Райта [496] и монографии А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [122], А. Г. Кусраева [367].

(4) Классы регулярных и квазирегулярных векторных мер, вообще говоря, существенно различны. Они не совпадают, даже если борелевская алгебра совпадает с бэровской, а E — некоторое K-пространство счетного типа. Соответствующий пример смотри у М. Райта [496], где дана изящная характеризация K-пространств, для которых это различие исчезает:

Теорема Райта. *Пусть E — некоторое K-пространство. Равносильны следующие утверждения:*

(i) *E слабо (σ, ∞)-дистрибутивно;*

(ii) *всякая E-значная бэровская мера на произвольном компакте допускает продолжение до регулярной E-значной борелевской меры;*

(iii) *всякая E-значная квазирегулярная борелевская мера на произвольном компакте регулярна.*

Более подробное изложение этого круга вопросов см. в монографии А. Г. Кусраева [367].

2.7.2. (1) Понятие крайней точки ввел Г. Минковский. Он же установил следующий результат:

(1.1) ***Теорема Минковского о крайних точках.*** *Выпуклое замкнутое ограниченное множество в конечномерном про-*

странстве есть выпуклая оболочка крайних точек этого множества.

Некоторое уточнение теоремы Минковского о крайних точках содержится и в теореме Каратеодори, см. 1.1.9 (2). Обобщение теоремы (1.1) для неограниченного множества получил В. Кли.

(1.2) ***Теорема Кли.*** *Пусть C — замкнутое выпуклое множество в конечномерном пространстве, не содержащее прямых, и $D \subset C$ содержит крайние точки и лучи C. Тогда $C = \operatorname{co}(D)$.*

Доказательства этих и других близких фактов можно найти в книгах К. Лейхтвейса [160], Р. Т. Рокафеллара [188], Р. Холмса [325].

(2) Теорема 2.2.2 для функционалов (т. е. при $E = \mathbb{R}$) — классическая теорема Крейна — Мильмана — была установлена в 1940 г. М. Г. Крейном и Д. П. Мильманом в [363]. Разумеется, в скалярном случае различие между крайними точками и o-крайними точками исчезает. Следующая традиционная формулировка теоремы Крейна — Мильмана, включаемая в большинство учебников по функциональному анализу, легко выводится из 2.2.2 при $E = \mathbb{R}$:

Теорема Крейна — Мильмана. *Выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.*

(3) Как один из наиболее общих геометрических принципов функционального анализа теорема Крейна — Мильмана получила развитие в различных направлениях, см., например, книги Э. Алфсена [220], В. П. Солтана [197], статью Л. Азимова [225], обзор Ю. А. Шашкина [209].

В связи с геометрией банаховых пространств стоит выделить *проблему Дистеля* об эквивалентности свойств Крейна — Мильмана и Радона — Никодима, см. Дж. Дистель и Дж. Уль [289], Дж. Дистель [48], Р. Фелпс [426]. Имеются различные интересные взаимосвязи с теорией Г. Шоке, см. Г. П. Акилов и С. С. Кутателадзе [1], Э. Алфсен [220], Л. Азимов [225], Р. Фелпс [204], Ю. А. Шашкин [209]. О некоторых приложениях теоремы Крейна — Мильмана см. также в монографии Р. Эдвардса [212].

(4) Вопрос о восстановлении опорного множества операторов по крайним точкам был впервые выдвинут, по-видимому, в работе Ф. Бонсола, Й. Линденштраусса и Р. Фелпса [251]. Для сублинейного оператора, действующего в K-пространство ограниченных элементов, такой результат получил Д. Оутс [414]. А. М. Рубинов [191] разобрал случай K-пространства с достаточным числом порядково непрерывных функционалов. А. М. Рубинов обнаружил, в частности, эффект восстановления опорного множества по слабо крайним точкам. Общий результат 2.2.2 получил С. С. Кутателадзе [129, 135]. Основные результаты параграфа 2.2 также принадлежат С. С. Кутателадзе, см. [129, 133, 135].

(5) Характеризация крайних точек из теоремы 2.2.5, полученная С. С. Кутателадзе в [135], представляет собой, по существу, операторный вариант характеризации Р. Бака и Р. Фелпса крайних точек, см. [325].

(6) Применив результаты параграфа 2.2 к специальному сублинейному оператору, можно получить различные результаты о продолжении положительных операторов. Множество $\mathscr{E}(T)$ всех положительных продолжений положительного оператора T, заданного на массивной подрешетке G векторной решетки E, совпадает с опорным множеством ∂p, где $p : E \to F$ действует по формуле $p(e) := \inf\{Tg : e \leqslant g,\, g \in G\}$ $(e \in E)$. Теперь из теоремы Крейна — Мильмана следует, что выпуклое множество $\mathscr{E}(T)$ имеет крайние точки. Это простое следствие было независимо доказано З. Липецким [376]. Относительно других результатов о продолжении, полученных З. Липецким и его соавторами, см. [375, 377–379] (а также книгу К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [222] и обзор А. В. Бухвалова [18]).

2.7.3. (1) Наше изложение в параграфе 2.3 следует С. С. Кутателадзе [134, 137]. Близкие результаты см. также П. Анденаес [223], И. Бенко и Е. Шейбер [242], А. Бигард [246], В. Брекнер и Е. Шейбер [262], М. Орхон [415], Р. Фелпс [425], Г. Винсент-Смит [484], Д. Вуза [485]. Теорема 2.3.4 была установлена А. Бигардом в [246].

(2) Доказательство теоремы 2.3.17 по существу повторяет схему, предложенную А. Д. Иоффе при доказательстве теоремы 1.4.10. Существуют различные категории, отличные от категории модулей, для которых имеет место какой-нибудь вариант теоремы Хана — Банаха, см. обзор Г. Баскеса [267].

(3) В связи с теоремой 2.3.21 стоит вспомнить методологическую установку Л. В. Канторовича о неразрывной связи K-пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Действительно, теорему 2.3.21 можно воспринимать в том смысле, что идеи математического программирования имманентны теории K-

пространств в следующем строго математическом смысле: *выполнение в абстрактной математической структуре любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством.*

2.7.4. (1) Внутренняя характеризация субдифференциалов в виде 2.4.12 была впервые высказана в качестве гипотезы в работе С. С. Кутателадзе [125]; этот факт был установлен с использованием метода булевозначных реализаций А. Г. Кусраевым и С. С. Кутателадзе в [113]. Стандартное (т. е. не апеллирующее к булевозначной модели) доказательство внутренней характеризации субдифференциалов приведено в монографии А. Г. Кусраева [104].

(2) Стоит отметить, что доказательство операторных вариантов (теоремы 2.4.10–2.4.13) хорошо известных в скалярном случае результатов некоторое время относилось к трудным и важным задачам локального выпуклого анализа. Были найдены несколько интересных частных решений для различных специальных классов пространств и операторов, которые так или иначе были связаны либо с компактностью субдифференциала в подходящей операторной топологии, либо со специфической геометрической интерпретацией отделимости в конкретных функциональных пространствах, см. обзоры С. С. Кутателадзе [132], и А. М. Рубинова [192], а также статьи В. А. Левашова [149–152], В. Л. Левина [156], А. Я. Заславского [55]. Однако общее положительное решение не удавалось найти как раз по той причине, что для произвольных пространств и операторный субдифференциал, как правило, не является компактным ни в какой подходящей операторной топологии и скалярные теоремы отделимости не дают адекватную характеризацию субдифференциалов.

(3) Общее понятие счетно аддитивной модулярной векторной меры было введено М. Райтом [495]. О дальнейшем развитии теории модулярных векторных мер см. в монографиях А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [122], А. Г. Кусраева [367]. Конструкция интеграла по конечно аддитивной модулярной мере из 2.4.3, а также теорема 2.4.4 (1) принадлежат И. П. Глазыриной [32], см. также [104].

(4) Г. Такеути назвал булевозначным анализом раздел функционального анализа, который использует одноименные модели теории множеств [466, 467]. В последнее время этот термин трактуют расширительно, включая в него методы, основанные на одновременном использовании двух различных моделей теории множеств. Подробное изложение материала этого раздела имеется в [59, 119, 121, 240, 241, 468]. Методы теории булевозначных моделей в разных вариантах широко используют в исследованиях по функциональному анализу. Техника спусков и подъемов наиболее приспособлена для этих целей. Погружение множеств с булевой структурой в булевозначный универсум основано на методе Соловея — Тенненбаума, предложенном ими ранее для погружения полных булевых алгебр [460].

(5) Стоит подчеркнуть, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще отсутствовала та генеральная идея, которая впоследствии привела к бурному прогрессу в теории моделей. Эта идея пришла с открытием П. Дж. Коэна [75], установившем в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта и Р. Соловея.

2.7.5. (1) Относительно метода шапок в теории Г. Шоке см. в книгах Л. Азимова [225], и Р. Фелпса [204]. В параграфе 2.5 представлены результаты С. С. Кутателадзе [139, 141].

(2) Доказательство основных результатов 2.5 вновь использует теорию булевозначных моделей теории множеств. Несомненно, эти же результаты можно получить и стандартными средствами. Подчеркнем, однако, что вряд ли следует считать оправданными попытки избегать применения булевозначного принципа переноса и искать более привычные прямые доказательства. На этом пути часто возникают более громоздкие доказательства и, что важнее, теряется замечательная возможность расширения рамок классических теорем с помощью булевозначного анализа. Другими словами, воздерживаться от использования булевозначных моделей в подходящих ситуациях это то же самое, что игнорировать спектральную теорему (после того, как она установлена) при изучении общих свойств нормальных операторов в гильбертовом пространстве.

2.7.6. (1) Понятие n-дизъюнктного оператора в векторных решетках введено С. Дж. Берно, С. Б. Гюйсмансом и Б. де Пахте [245] и было адаптировано к операторам в решеточно нормированных пространствах А. Г. Кусраевым [367]. Характеризации n-дизъюнктных операторов, представленные в 2.6.2 (1) и 2.6.6, получил В. А. Раднаев в [184, 432]. Следует подчеркнуть, что эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (6) в 2.6.6 дает чисто алгебраическую характеризацию n-дизъюнктных операторов как метрически n-неразложимых элементов ассоциированного пространства Банаха — Канторовича.

(2) Теорему 2.6.7 (1) нашли С. Дж. Берно, С. Б. Гюйсманс и Б. де Пахте [245] (см. также [244]); алгебраический подход к доказательству (см. 2.1.10, 2.6.6, 2.6.7 (1)) найден в [184, 432]. Единственность в смысле 2.6.7 (2) разложения n-дизъюнктного оператора в сумму n операторов, сохраняющих дизъюнктность, также установлена в [184, 432]. Разложение оператора в бесконечную сумму решеточных гомоморфизмов рассматривал И. И. Шамаев в [208].

(3) Предложение 2.6.1 (2) нельзя обратить. Более того, для каждой векторной решетки E найдется E-значный сублинейный оператор, сохраняющий 2-супремумы, но не являющийся суммой двух сублинейных операторов, сохраняющих конечные верхние грани. Следующий пример приведен в [184].

Пусть E — произвольная векторная решетка, p — отображение из $E \times E$ в E, действующее по правилу $p(x, y) = (x + y)^+$ $((x, y) \in E \times E)$. Тогда p является сублинейным оператором, сохраняющим 2-супремумы.

(4) Формула Хана — Банаха для решеточных гомоморфизмов (теорема 2.6.11 (1)) установлена в [184]. Подход В. А. Раднаева основан на методах исчисления опорных множеств и изучения их экстремальной структуры, развитых в 2.1 и 2.2. Вспомогательные факты из 2.6.4 взяты из [184]. Утверждение 2.6.10 установлено Г. Баскесом и А. ван Ружем [268] другим способом. Важное следствие 2.6.11 (2) получено также Г. Баскесом и А. ван Ружем в [268]. Минимальное продолжение и проектирование, описанные в 2.6.5, используют в теории положительных операторов давно; в приведенном виде этот материал имеется в [109, 367].

(5) Теорема 2.6.11 (2), часто цитируемая как теорема Липецкого — Люксембурга — Шэпа в связи с публикациями [376] и [387] (см., например, [222, 244, 267, 268], была впервые анонсирована в [129] и доказана в [135] С. С. Кутателадзе. (Фактически в [135] доказана теорема 2.1.10, которая содержит в себе 2.1.9 (1) как частный случай в силу 2.1.9 (2).) Многие подходы к теоремам типа Хана —

Банаха для решеточных гомоморфизмов, за удивительным исключением оригинального, обсуждаются в работе С. Дж. Берно [244]; см. также емкий, но все же неполный обзор Г. Баскеса [267], в котором представлены история, взаимосвязи и значительная часть многочисленных обобщений теоремы Хана — Банаха.

(6) В [120] поставлена проблема развития исчисления крайних точек субдифференциалов. В частности, там была сформулирована следующая задача:

Для каких сублинейных операторов $p : X \to E$ *и* $q : E \to F$ *имеют место следующие соотношения* $\operatorname{ext}(q \circ p) \subset \operatorname{ext}(q) \circ \operatorname{ext}(p)$ *или* $\operatorname{ext}(q \circ p) = \operatorname{ext}(q) \circ \operatorname{ext}(p))$*?*

Аналогичный вопрос может быть сформулирован относительно o-крайних точек:

Для каких p *и* q *выполнены соотношения* $\mathscr{E}_0(q \circ p) \subset \mathscr{E}_0(q) \circ \mathscr{E}_0(p)$ *или* $\mathscr{E}_0(q \circ p) = \mathscr{E}_0(q) \circ \mathscr{E}_0(p)$*?*

Разумеется, сформулированные задачи отчасти мотивированы теоремой Мильмана 2.2.10 (см., в частности, 2.2.6). В работе [184] замечено, что $\operatorname{ext}(\pi p) = \pi \operatorname{ext}(p)$ для сублинейного оператора $p : X \to E$ и положительного ортоморфизма $\pi \in \operatorname{Orth}(E)$. Формулу из 2.6.10 можно также рассматривать как частичное решение поставленной выше задачи, так как согласно 3.3.9 (2, 3) она может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\bigcup_{0 \leqslant \pi \leqslant I_E} \pi \operatorname{ext}(p \circ T) = \Biggl(\bigcup_{0 \leqslant \pi \leqslant I_E} \pi \operatorname{ext}(p) \Biggr) \circ T.$$

(7) Результаты из 2.6.12 и 2.6.13, полученные В. А. Раднаевым [183, 184], являются обобщением аналогичных скалярных результатов. Именно Г. Я. Лозановский [165] установил, что сопряженная решетка σ-полной банаховой решетки X безатомна (= не содержит дискретных функционалов) в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся попарно дизъюнктные элементы $x_1, \dots, x_n$, для которых $x = x_1 + \ldots + x_n$ и $\|x_k\| \leqslant \varepsilon$ $k := 1, \dots, n$. В. Внук и Б. де Пахте [416] распространили этот результат на произвольные банаховы решетки. Для решеток Банаха — Канторовича аналогичные результаты приведены в [184].

Глава 3

Выпуклость и открытость

Изучение субдифференциалов до сих пор проводилось нами на алгебраическом уровне. Точнее говоря, мы изучали всюду определенные сублинейные операторы или, что эквивалентно, субдифференциалы выпуклых операторов во внутренних точках их областей определения. Привлечение топологии в таких ситуациях не является особенно осмысленным, так как при наличии естественного согласования со структурой порядка в рассматриваемых областях значений элементы субдифференциала автоматически будут непрерывными в том же смысле, в каком непрерывен субдифференцируемый оператор. Принципиально иначе обстоит дело для сублинейных операторов, определенных не на всем пространстве, которые часто возникают как производные по направлениями в граничных точках областей определения выпуклых операторов. Здесь широко распахнуты двери для всевозможных патологий. В то же время рассмотрение субдифференциалов в граничных точках в подавляющем числе случаев — неизбежная необходимость. Достаточно вспомнить, что возникновение субдифференциального исчисления связано с современными разделами теории экстремальных задач, трактующими сложные способы задания допустимой области, в которой ищется наибольшее или наименьшее значение целевой функции.

Центральная тема текущей главы — взаимоотношения выпуклости и открытости в топологических векторных пространствах. Мы изучаем здесь условия, обеспечивающие свойство открытости выпуклого соответствия в некоторой его точке. Как обычно, открытость означает, что открытые множества, содержащие точку из области определения, переходят под действием рассматриваемого соответствия в окрестности фиксированного элемента из образа интересующей нас точки. Исследование этого свойства и его принципиальной разновидности, приводящей к понятию общего положения выпуклых множеств или операторов, позволяет добиться важного продвижения в задачах субдифференцирования. Фактически, у нас *создается автоматическая возможность получать теоремы существования непрерывных операторов* с нужными свойствами мажорации, анализируя лишь соответствующий алгебраический вариант задачи.

Рассмотрение топологии совместно с выпуклостью немыслимо без фундаментальной концепции двойственности векторных пространств. В этой связи мы развиваем аппарат исчисления поляр, представляющих собой фактически субдифференциалы функционалов Минковского, и даем приложения этого аппарата к двойственному описанию открытых соответствий. Отдельная важная тема — принцип открытости для выпуклых соответствий, возникающий как итог развития идей, заложенных в классическом принципе Банаха, и позволяющий существенно упростить проверку условий применимости изучаемых приемов субдифференцирования.

3.1. Открытость выпуклых соответствий

Текущий параграф посвящен предварительному рассмотрению понятия открытости выпуклого соответствия в точке.

3.1.1. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, и рассмотрим выпуклое соответствие Φ из X в Y. Говорят, что Φ *открыто* (или *почти открыто*) *в точке* $(x, y) \in \Phi$, если для любой окрестности U точки x множество $\Phi(U) - y$ (соответственно замыкание множества $(\Phi(U) - y) \cap (y - \Phi(U))$) есть окрестность нуля в Y. В случае, когда $x = 0$ и $y = 0$, говорят об открытости или почти открытости в нуле.

3.1.2. *Выпуклое соответствие $\Phi \subset X \times Y$ будет открытым в точке $(x, y) \in \Phi$ в том и только в том случае, если для любой окрестности нуля $U \subset X$ существует такая окрестность нуля $V \subset Y$, что $\Phi(x + \lambda U) \supset y + \lambda V$ при всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

$\lhd$ Если Φ открыто в точке (x, y) и U — окрестность нуля в X, то найдется такая окрестность нуля $V \subset Y$, что $\Phi(x + U) \supset y + V$.

Но тогда для любого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ в силу 1.2.2 (1) будет

$$\begin{aligned}\Phi(x + \lambda U) &= \Phi((1-\lambda)x + \lambda(x+U)) \supset \\ &\supset (1-\lambda)\Phi(x) + \lambda\Phi(x+U) \supset \\ &\supset (1-\lambda)y + \lambda(y+V) = y + \lambda V.\end{aligned}$$

Обратное утверждение сомнений не вызывает. $\triangleright$

3.1.3. *Если выпуклое соответствие* Φ (*почти*) *открыто в какой-нибудь точке* $(x, y) \in \Phi$, *то* Φ *будет* (*почти*) *открытым в любой точке* $(x_0, y_0) \in \Phi$, *для которой* $y_0 \in \operatorname{core}(\Phi(X))$.

$\triangleleft$ Осуществляя сдвиг $(x', y') \mapsto (x' - x, y' - y)$, можно свести дело к случаю, когда $x = 0$, $y = 0$. Поэтому предположим, что $0 \in \Phi(0)$ и Φ (почти) открыто в нуле. Если $y_0 \in \operatorname{core}(\Phi(X))$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ элемент $y_1 := (1+\varepsilon)y_0$ входит в $\Phi(X)$. Стало быть, существует $x_1 \in X$ такой, что $(x_1, y_1) \in \Phi$. Если $u_0 := (1+\varepsilon)^{-1}x_1$, то $(x_1, y_1) = (1+\varepsilon)(u_0, y_0)$, причем $y_0 \in \Phi(u_0)$. Для любой окрестности нуля $U \subset X$ имеем

$$\Phi(u_0 + \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}U) \supset \frac{1}{1+\varepsilon}\Phi(x_1) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Phi(U) \supset y_0 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Phi(U).$$

Итак, если Φ (почти) открыто в нуле, то Φ (почти) открыто в точке (u_0, y_0) для некоторого $u_0 \in X$. Однако при достаточно малом $0 < \lambda < 1$ для подходящей окрестности нуля $U' \subset X$ выполнено $\lambda(u_0 - x_0 + U') \subset U$, поэтому

$$\begin{aligned}\Phi(x_0 + U) &\supset \Phi((1-\lambda)x_0 + \lambda(u_0 + U')) \supset \\ &\supset (1-\lambda)\Phi(x_0) + \lambda\Phi(u_0 + U') \supset \\ &\supset y_0 + \lambda(\Phi(u_0 + U') - y_0).\end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое. $\triangleright$

3.1.4. Пусть Y — это упорядоченное топологическое векторное пространство с конусом положительных элементов Y^+. Множество $V \subset Y$ называют *нормальным*, если $V = (V + Y^+) \cap (V - Y^+)$. Говорят, что конус Y^+ *нормален*, если всякая окрестность нуля в Y содержит в себе нормальную окрестность нуля.

Пусть X — топологическое векторное пространство, Y — упорядоченное топологическое векторное пространство с нормальным положительным конусом. Пусть $f : X \to Y^\bullet$ — выпуклый оператор и $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. Тогда f непрерывен в точке x_0 в том и только в том случае, если соответствие $\Phi := \operatorname{epi}(f)^{-1}$ открыто в точке $(f(x_0), x_0)$.

$\lhd$ Если соответствие Φ открыто в точке $(f(x_0), x_0)$, то для любой симметричной окрестности нуля $V \subset Y$ найдется такая симметричная окрестность нуля $U \subset X$, что

$$\Phi(f(x_0) + V) \supset x_0 + U.$$

Если $x \in x_0 + U$, то $(x, f(x_0) + y) \in \operatorname{epi}(f)$ или $f(x) \leqslant f(x_0) + y$ для некоторого $y \in V$. Следовательно, $f(x) - f(x_0) \in V - Y^+$ для всех $x \in x_0 + U$. Элемент $x' := 2x_0 - x$ также содержится в $x_0 + U$, значит, $f(x') - f(x_0) \in V - Y^+$. В силу выпуклости f имеем $2f(x_0) \leqslant f(x') + f(x)$ или $f(x_0) - f(x) \leqslant f(x') - f(x_0)$. Таким образом, $f(x_0) - f(x) \in V - Y^+$, стало быть,

$$f(x) - f(x_0) \in (V - Y^+) \cap (V + Y^+) \quad (x \in x_0 + U).$$

Благодаря нормальности конуса Y^+ последнее означает непрерывность оператора f в точке x_0. Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

3.1.5. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а Z — упорядоченное топологическое векторное пространство с нормальным положительным конусом. Пусть, далее, Φ — выпуклое соответствие из X в Y и $f : X \to Z^\bullet$ — выпуклый оператор. Предположим, что выполнены условия:

(а) соответствие Φ открыто в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Phi$;

(б) $\operatorname{dom}(f) \supset \operatorname{dom}(\Phi)$ и сужение f на $\operatorname{dom}(\Phi)$ непрерывно в точке x_0;

(в) существует точная нижняя граница в Z множества $f(\Phi^{-1}(y))$ при всех $y \in \Phi(X)$.

(1) *Отображение $h := \Phi(f) : Y \to Z^\bullet$, определяемое соотношением*

$$h(y) := \begin{cases} \inf f(\Phi^{-1}(y)), & \text{если } y \in \Phi(X), \\ +\infty, & \text{если } y \notin \Phi(X), \end{cases}$$

является выпуклым и непрерывным в точке y_0.

◁ Выпуклость оператора h обоснована в 1.3.5 и 1.3.9 (1). Покажем, что h непрерывен в точке y_0. Осуществляя сдвиг $(x, y, z) \mapsto (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0))$, можно свести рассматриваемую ситуацию к случаю $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Введем соответствие $\Psi := \{(x, z, y) : (x, y) \in \Phi,\ f(x) \leqslant z\}$ из $X \times Z$ в Y. Пусть W — произвольная окрестность нуля в Z, а число $0 < \varepsilon < 1$ и симметричная окрестность нуля $W_1 \subset Z$ таковы, что $\varepsilon(W_1 \pm h(0)) \subset W$. Подберем окрестность нуля $U \subset X$, удовлетворяющую условию $U \cap \mathrm{dom}(\Phi) \subset f^{-1}(W_1)$. Тогда, как нетрудно видеть, $\Psi(U \times W_1) \supset \Phi(U)$. В силу открытости Φ в нуле множество $\Psi(U \times W_1)$ содержит некоторую симметричную окрестность нуля V. Если теперь $y \in V$, то $h(y) \leqslant f(x) \in W_1 - Z^+$ для некоторого $x \in U \cap \mathrm{dom}(\Phi)$. Следовательно, $h(V) \subset W_1 - Z^+$. Таким образом, $\varphi(y) := h(y) - h(0) \in W_1 - h(0) - Z^+$ $(y \in V)$. Пусть $y \in \varepsilon V$. Тогда из-за выпуклости h получим

$$\varphi(y) \leqslant (1 - \varepsilon)\varphi(0) + \varepsilon\varphi\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon\varphi\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big) \in \varepsilon(W_1 - h(0) - Z^+).$$

Значит, $\varphi(\varepsilon V) \subset \varepsilon(W_1 - h(0) - Z^+) \subset W - Z^+$. С другой стороны, элемент $-y$ также входит в симметричное множество εV. Поэтому, вновь учитывая выпуклость h, получим $0 = \varphi(0) \leqslant (1 + \varepsilon)^{-1}\varphi(y) + \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}\varphi(-\varepsilon^{-1}y)$. Отсюда $-\varepsilon\varphi(-\varepsilon^{-1}y) \leqslant \varphi(y)$. Стало быть, благодаря выбору V, приходим к соотношению

$$\varphi(y) \in \varepsilon(W_1 + h(0) + Z^+) \subset W + Z^+.$$

Окончательно получаем:

$$h(y) - h(0) \in (W + Z^+) \cap (W - Z^+).$$

Последнее означает непрерывность h в нуле ввиду нормальности конуса Z^+. ▷

(2) *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем Y упорядочено нормальным миниэдральным конусом. Пусть Φ — такое соответствие из X в Y, что Φ^{-1} открыто в точке (y_0, x_0) и множество $\Phi(x)$ ограничено снизу для всех $x \in X$. Тогда отображение $\inf \circ \Phi : X \to Y^\bullet$ (определенное в соответствии с 1.3.5) выпукло и непрерывно в точке x_0.*

◁ Достаточно взять в (1) в качестве f тождественное отображение I_Z пространства $Z = Y$. ▷

3.1.6. Рассмотрим конусы K_1 и K_2 в топологическом векторном пространстве X и положим $\varkappa := (K_1, K_2)$. С парой $\varkappa$ свяжем соответствие $\Phi_\varkappa$ из X^2 в X, определяемое формулой

$$\Phi_\varkappa := \{(k_1, k_2, x) \in X^3 : x = k_1 - k_2,\ k_l \in K_l\ (l := 1, 2)\}.$$

Ясно, что $\Phi_\varkappa$ — коническое соответствие.

Говорят, что конусы K_1 и K_2 составляют *несплющенную пару* или что $\varkappa$ — *несплющенная пара*, если соответствие $\Phi_\varkappa$ открыто в нуле. Так как $\Phi_\varkappa(V \times V) = V \cap K_1 - V \cap K_2$ для всякого $V \subset X$, то несплющенность пары $\varkappa$ означает, что для любой окрестности нуля $V \subset X$ множество

$$\varkappa V := (V \cap K_1 - V \cap K_2) \cap (V \cap K_2 - V \cap K_1)$$

также является окрестностью нуля. Как видно, $\varkappa V \subset V - V$. Значит, несплющенность $\varkappa$ равносильна тому, что система множеств $\{\varkappa V\}$ служит базисом фильтра окрестностей нуля, если V пробегает какой-нибудь базис того же фильтра.

Заметим, что множество $\Phi_\varkappa(X \times X)$ будет поглощающим в том и только в том случае, если $K_1 - K_2 = X = K_2 - K_1$. В этом случае принято говорить, что конусы K_1 и K_2 *воспроизводят* (алгебраически) *пространство* X или, короче, K_1 и K_2 образуют *воспроизводящую пару*.

3.1.7. (1) *Пара конусов $\varkappa := (K_1, K_2)$ несплющенна в том и только в том случае, если пара $\lambda := (K_1 \times K_2, \Delta_2(X))$ несплющена в пространстве X^2.*

Здесь, как и выше, $\Delta_n : x \mapsto (x, \dots, x)$ — вложение X в диагональ $\Delta_n(X)$ пространства X^n.

$\lhd$ Пусть $\Phi := \Phi_\varkappa$ и $\Psi := \Phi_\lambda$. Покажем, что при $U,\ V \subset X$ и $U + U \subset V$ справедливы включения

$$\Phi(U \times U)^2 \subset \Psi(V^2 \times V^2), \quad \Psi(V^2 \times V^2)(0) \subset \Phi(V).$$

В самом деле, для $x \in \Phi(U)^2$ имеем $x = x_1 - x_2$ при некоторых $x_l \in U \cap K_l$ $(l := 1, 2)$. Поэтому

$$(x, 0) = (x_1, x_2) - (x_2, x_2) \in \Psi(U^2 \times U^2).$$

Отсюда вытекает, что $\Phi(U^2) \times \{0\} \subset \Psi(U^2 \times U^2)$. По аналогичным соображениям $\{0\} \times \Phi(U^2) \subset \Psi(U^2 \times U^2)$. Следовательно,

$$\Phi(U \times U)^2 \subset \Psi(U^2 \times U^2) + \Psi(U^2 \times U^2) \subset \Psi(V^2 \times V^2).$$

Пусть теперь $(0, x) \in \Psi(V^2 \times V^2)$. Тогда $(0, x) = (h, h) - (y_1, y_2)$ для некоторых $h \in V$ и $(y_1, y_2) \in V^2 \cap (K_1 \times K_2)$. Получаем: $x = y_1 - y_2 \in \Phi(V^2)$, что и доказывает второе включение. Требуемое утверждение без труда вытекает из установленных соотношений. $\triangleright$

(2) *Конусы K_1 и K_2 составляют несплющенную пару в том и только в том случае, если коническое соответствие Φ из X в X^2, определенное соотношением*

$$\Phi := \{(h, x_1, x_2) \in X \times X^2 : x_l + h \in K_l \ (l := 1, 2)\},$$

открыто в нуле.

$\triangleleft$ В самом деле, если (K_1, K_2) — несплющенная пара, то согласно (1) для любой окрестности нуля U в X найдется такая окрестность нуля V в X, что $V^2 \subset U^2 \cap (K_1 \times K_2) - U^2 \cap \Delta_2(X)$. Следовательно, для $(x, y) \in V^2$ имеет место представление $(x, y) = (u, v) - (h, h)$, где $h \in U$, $u \in U \cap K_1$ и $v \in U \cap K_2$. При этом $(h, x, y) \in \Phi$. Последнее означает, что $\Phi(U) \supset V^2$.

Наоборот, пусть заранее известно, что Φ открыто в нуле. Возьмем произвольную окрестность нуля W в X. Выберем окрестность нуля V в X так, чтобы $V + V \subset W$. Множество $\Phi(V)$ содержит U^2 для некоторой окрестности нуля U в X. Не нарушая общности, можно считать, что $U \subset V$. Интересующая нас несплющенность пары (K_1, K_2) вытекает из очевидного включения $U^2 \subset \Phi(V) \subset W^2 \cap (K_1, K_2) - W^2 \cap \Delta_2(X)$. $\triangleright$

3.1.8. *Выпуклое соответствие Φ из X в Y открыто в нуле в том и только в том случае, если преобразование Хёрмандера множества $X \times \Phi$ и конус $\Delta_2(X) \times \{0\} \times \mathbb{R}^+$ составляют несплющенную пару в пространстве $X^2 \times Y \times \mathbb{R}$.*

$\triangleleft$ Пусть $K_1 := H(X \times \Phi)$ и $K_2 := \Delta_2(X) \times \{0\} \times \mathbb{R}^+$. Рассмотрим произвольные окрестности нуля $V \subset X$ и $W \subset Y$ и некоторое число $\varepsilon > 0$. Подберем еще одну окрестность нуля $V_1 \subset X$ так, чтобы $V_1 + V_1 + V_1 \subset V$. Если Φ открыто в нуле, то $\varepsilon\Phi$ тоже открыто в нуле. Следовательно, $W_1 \subset (\varepsilon\Phi)(V_1) \cap W$ для некоторой окрестности нуля $W_1 \subset Y$. Положим $U_1 := V_1^2 \times W_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $U := V^2 \times W \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Тогда $U_1 \subset U \cap K_1 - U \cap K_2$. Значит, пара (K_1, K_2) несплющена.

Наоборот, предположим, что (K_1, K_2) — несплющенная пара, и возьмем произвольную окрестность нуля V в X. Пусть $U := V_1^2 \times Y \times [-1, 1]$, где V_1 — такая окрестность нуля в X, что $V_1 + V_2 \subset V$. Если W — проекция на Y множества $U \cap K_1 - U \cap K_2$, то W — окрестность нуля и $W \subset \Phi(V)$. $\rhd$

3.1.9. Введем одно из центральных понятий субдифференциального исчисления.

Будем говорить, что конусы K_1 и K_2 в топологическом векторном пространстве X находятся *в общем положении*, если выполнены условия:

(1) K_1 и K_2 воспроизводят (алгебраически) некоторое подпространство $X_0 \subset X$, т. е. $X_0 = K_1 - K_2 = K_2 - K_1$;

(2) подпространство X_0 *дополняемо*, т. е. существует линейный непрерывный проектор $P : X \to X$ такой, что $P(X) = X_0$;

(3) K_1 и K_2 составляют несплющенную пару в X_0.

3.1.10. *Конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении в том и только в том случае, если в общем положении находятся конус $K_1 \times K_2$ и диагональ $\Delta_2(X)$ пространства X^2. При этом если пары (K_1, K_2) и $(K_1 \times K_2, \Delta_2(X))$ воспроизводят соответственно подпространства $X_0 \subset X$ и $Z_0 \subset X^2$, а $X_1 \subset X$ — топологически дополнительное к X_0 подпространство, то Z_0 разлагается в топологическую прямую сумму X_0^2 и $\Delta_2(X_1)$.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что если X_1 — алгебраическое дополнение X_0, то K_1 и K_2 воспроизводят X_0 в том и только в том случае, когда $K_1 \times K_2$ и $\Delta_2(X)$ воспроизводят $Z_0 = X_0^2 + \Delta_2(X_1)$. Если K_1 и K_2 находятся в общем положении и $X = X_0 \oplus X_1$, то Z_0 дополняемо. Действительно, пусть $P_\Delta : X^2 \to X^2$ — проектор на диагональ вида $P_\Delta : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y, x + y)$, а $Q : X^2 \to X^2$ действует по правилу $Q : (x, y) \mapsto (Px, Py)$, где P — непрерывный проектор в X на X_0. Тогда, как нетрудно проверить, $Q + P_\Delta \circ (I_{X^2} - Q)$ — непрерывный проектор на Z_0. Вид последнего проектора показывает, что $Z_0 = X_0^2 \oplus \Delta_2(X_1)$.

Несплющенность пары $(K_1 \times K_2, \Delta_2(X))$ в Z_0^2 вытекает из 3.1.7

в силу включений

$$
\begin{gathered}
(K_1 \times K_2) \cap U^2 + \Delta_2(X) \cap U^2 \supset \\
\supset (K_1 \times K_2) \cap U^2 + \Delta_2(X_0 \cap V) + \Delta_2(X_1 \cap V), \quad V + V \subset U.
\end{gathered}
$$

Наоборот, пусть конусы $K_1 \times K_2$ и $\Delta_2(X)$ находятся в общем положении и воспроизводят подпространство $Z_0 \subset X^2$. Тогда, как замечено выше, $Z_0 = X_0^2 + \Delta_2(X_1)$, где $X_0 := K_1 - K_2$ и X_1 — алгебраическое дополнение X_0. Если при этом P_0 — непрерывный проектор в X^2 на X_0^2, то P_0, как известно, открыт. Поэтому включение

$$
\begin{gathered}
P_0(U^2 \cap (K_1 \times K_2) + U^2 \cap \Delta_2(X)) \subset \\
\subset P_0(U^2) \cap (K_1 \cap K_2) + P_0(U^2) \cap \Delta_2(X_0),
\end{gathered}
$$

где $U \subset X$ немедленно приводит к несплющенности $K_1 \times K_2$ и $\Delta_2(X_0)$ в X_0^2, значит, и к несплющенности K_1 и K_2 в X_0 согласно 3.1.7. Таким образом, осталось показать дополняемость X_0. Пусть P — непрерывный проектор на Z_0, и положим $Q := P - P_\Delta \circ P$. Поскольку $\Delta_2(X) \subset Z_0$, то $P \circ P_\Delta = P_\Delta$, поэтому $Q^2 = P - P \circ P_\Delta \circ P - P_\Delta \circ P + P_\Delta \circ P \circ P_\Delta \circ P = Q$, т. е. Q — непрерывный проектор. Далее, $Q(X^2) = (I_{X^2} - P_\Delta)(Z_0) = Z_0 \cap \Delta_2^-(X) = \Delta_2^-(X_0)$, где $\Delta_2^-(X) := \{(x, -x) : x \in X\}$. Наконец, если $\pi : \Delta_2^-(X) \to X$ и $\rho : X \to \Delta_2^-(X)$ определить соотношениями $\pi(x, -x) := x$ и $\rho(x) := (x, -x)$, то оператор $\pi \circ Q \circ \rho : X \to X$ будет искомым проектором на X_0. $\triangleright$

3.1.11. Предложение 3.1.10 позволяет распространить понятие общего положения на любой конечный набор конусов. Говорят, что конусы $K_1, \dots, K_n$ в пространстве X находятся *в общем положении*, если в общем положении находятся конус $K_1 \times \dots \times K_n$ и диагональ $\Delta_n(X)$ пространства X^n.

Заметим, что преобразования Хёрмандера выпуклых конусов находятся в общем положении тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают исходные конусы. Таким образом, естественно принять следующее определение.

Непустые выпуклые множества $C_1, \dots, C_n$ находятся *в общем положении*, если в общем положении находятся их преобразования Хёрмандера $H(C_1), \dots, H(C_n)$.

3.1.12. *Если пересечение $C_1 \cap \ldots \cap C_{n+1}$ содержит точку, внутреннюю для каждого, за исключением, быть может, одного из выпуклых множеств $C_1, \ldots, C_{n+1}$, то эти множества находятся в общем положении.*

$\triangleleft$ Пусть x_0 — внутренняя точка выпуклого множества C. Так как отображение $(x,t) \mapsto x(1+t)^{-1}$ непрерывно в точке $(x_0, 0)$, то найдутся окрестность нуля $U \subset X$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(x_0+U)(1+t)^{-1} \subset C$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Отсюда видно, что окрестность $V := (x_0 + U) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ точки $(x_0, 1)$ содержится в $H(C)$. Следовательно, наше утверждение достаточно установить для случая конусов.

Итак, пусть $C_1, \ldots, C_{n+1}$ — конусы. Рассмотрим произвольную окрестность нуля U и предположим, что $\varepsilon x_0 \in V$ и $V+V+V \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и симметричной окрестности нуля V. Однако εx_0 также является внутренней точкой конуса $C_1 \cap \ldots \cap C_n$, поэтому можно выбрать V, удовлетворяющую условию $\varepsilon(x_0, \ldots, x_0) + V^n \subset C_1 \times \ldots \times C_n$. Теперь нетрудно проверить соотношения

$$V^{n+1} \subset (C_1 \times \ldots \times C_{n+1}) \cap (V^{n+1} + V^{n+1} + V^{n+1}) + \Delta_{n+1}(X) \cap$$
$$\cap (V^{n+1} + V^{n+1}) \subset (C_1 \times \ldots \times C_{n+1}) \cap U^{n+1} - \Delta_{n+1}(X) \cap U^{n+1};$$
$$(v_1, \ldots, v_{n+1}) = (v_{n+1} - \varepsilon x_0, \ldots, v_{n+1} - \varepsilon x_0) +$$
$$+ (v_1 - v_{n+1} + \varepsilon x_0, \ldots, v_n - v_{n+1} + \varepsilon x_0, \varepsilon x_0).$$

Это и требовалось установить. $\triangleright$

3.1.13. Отметим еще следующие простые факты.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — топологические векторные пространства, $X_0 := X_1 \times \ldots \times X_n$ и для каждого $l := 0, 1, \ldots, n$ заданы выпуклые множества $B_l \subset X_l$ и $C_l \subset X_l$. Тогда справедливы утверждения:

(1) *если множества B_l и C_l находятся в общем положении для любого $l := 1, \ldots, n$, то в общем положении находятся множества $B_1 \times \ldots \times B_n$ и $C_1 \times \ldots \times C_n$;*

(2) *если B_0 и C_0 находятся в общем положении, то для любой перестановки $\theta := \{l_1, \ldots, l_n\}$ множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ в общем положении находятся множества $l_\theta(B_0)$ и $l_\theta(C_0)$, $l_\theta : X_0 \to X_{l_1} \times \ldots \times X_{l_n}$ — перестановка координат*

$$l_\theta : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{l_1}, \ldots, x_{l_n}).$$

3.1.14. Открытость выпуклых соответствий имеет весьма интересные и важные приложения в выпуклом анализе. В частности, в следующем параграфе понятие общего положения применено к изучению не всюду определенных (= принимающих бесконечные значения) сублинейных операторов. В этой связи возникает естественное желание выяснить, при каких обстоятельствах можно автоматически гарантировать открытость выпуклого соответствия. Тем самым возникает проблема распространения на различные типы выпуклых соответствий классического принципа открытости.

Покажем, как использовать в этой ситуации классический *метод обкатывающего шара*, предложенный С. Банахом. Другие приемы анализа открытости выпуклых соответствий мы обсуждаем ниже в 3.5 и 3.6.

Итак, пусть C — множество в топологическом векторном пространстве X. Говорят, что C является *σ-выпуклым*, если для любой ограниченной последовательности (x_n) в C и произвольной последовательности положительных чисел (λ_n) такой, что $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ сходится и его сумма лежит в C. Если же C содержит суммы сходящихся рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ для произвольной последовательности (x_n) в C и любых параметров $\lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$, то C называют *идеально выпуклым.*

Рассмотрим *ускользающую* для C последовательность $((x_n, t_n))$ в $X \times \mathbb{R}$. Последнее означает, что

$$0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}, \quad x_n \in t_n C,$$
$$x_{n+1} - x_n \in (t_{n+1} - t_n)C \quad (n := 0, 1, \dots).$$

Если для всякой сходящейся ускользающей для C последовательности $((x_n, t_n))$ выполнено $\lim x_n \in (\lim t_n)C$, то множество C называют *монотонно замкнутым.* Наконец, C называют *монотонно полным*, если у всякой ускользающей для C последовательности Коши $((x_n, t_n))$ есть предел $(x, t) := \lim(x_n, t_n)$, причем $x \in tC$.

Нетрудно убедиться, что выпуклое множество C монотонно полно в том и только в том случае, если любая последовательность Коши в $H(C)$, возрастающая в пространстве $X \times \mathbb{R}$ (с конусом $H(C)$), сходится к некоторому элементу из $H(C)$. Последнее условие, в свою очередь, равносильно монотонной полноте конуса $H(C)$. Таким образом, можно сказать, что C монотонно полно в том и только в том случае, если монотонно полно преобразование Хёрмандера $H(C)$ множества C. Аналогичное суждение можно высказать и о монотонно замкнутых множествах. Рассмотрим, наконец, соответствие $\Phi \subset X \times Y$. Говорят, что Φ — *совершенно выпуклое соответствие*, если Φ — идеально выпуклое подмножество $X \times Y$, а эффективное множество $\operatorname{dom}(\Phi)$ является или σ-выпуклым, или монотонно полным. Понятия σ-выпуклости и идеальной выпуклости тесно связаны с монотонной полнотой и замкнутостью.

3.1.15. *Выпуклое множество в топологическом векторном пространстве монотонно замкнуто в том и только в том случае, если оно идеально выпукло.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Пусть C монотонно замкнуто и выпукло. Учитывая, что монотонная полнота сохраняется при сдвигах, можно считать нуль элементом C. Возьмем $(x_n) \subset C$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$, и допустим, что $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k{=}1$ и имеется сумма $x := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$.

Положим $t_n := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k$ и $y_n := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$. Ясно, что $0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$, $y_n \in t_n C$, $y_{n+1} - y_n \in (t_{n+1} - t_n)C$ и $(y_n, t_n) \to (x, 1)$. Итак, указанная последовательность ускользает и сходится. Значит, $x \in 1C = C$, т. е. C идеально выпукло.

$\leftarrow$: Пусть теперь известно, что C идеально выпукло. Вновь можно полагать, что $0 \in C$. Отметим, что для ускользающей последовательности $((x_n, t_n))$, сходящейся к (x, t), можно считать, что $t_n > 0$ и $t_{n+1} \neq t_n$ (другие случаи анализируются без труда). Рассмотрим элементы

$$y_0 := \frac{x_0}{t_0}, \quad y_n := \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad (n := 1, 2, \dots);$$
$$\lambda_0 := \frac{t_0}{t}, \quad \lambda_n := \frac{t_n - t_{n-1}}{t} \quad (n := 1, 2, \dots).$$

Ясно, что $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$, и при этом $y_n \in C$. Кроме того,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{t} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} + \frac{t_0}{t} \cdot \frac{x_0}{t} = \frac{x}{t}.$$

Итак, $x/t \in C$, т. е. C монотонно замкнуто. $\triangleright$

3.1.16. *Выпуклое множество C в локально выпуклом метризуемом пространстве σ-выпукло в том и только в том случае, если C монотонно полно.*

$\lhd$ $\leftarrow$: Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в C и числа $\lambda_n > 0$ таковы, что $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 1$. Нет сомнений, что последовательность $y_n := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$ фундаментальна, ибо

$$y_{n+p} - y_n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{n+k} x_{n+k} \in \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_{n+k} \right) B = (t_{n+p} - t_n) B,$$

где B — выпуклое ограниченное множество, содержащее (x_n), а $t_n := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k$. В силу монотонной полноты C, выводим, как и в 3.1.15, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ имеет сумму, которая входит в C.

$\rightarrow$: Как и в 3.1.15, можно считать, что $0 \in C$. Пусть $((x_n, t_n))$ — фундаментальная ускользающая последовательность. Найдем подпоследовательность индексов $(n(k))$ такую, что

$$d\left(\frac{1}{t} x_{n(k+p)}, \frac{1}{t} x_{n(k)} \right) \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad \frac{1}{t} \left| t_{n(k+p)} - t_{n(k)} \right| \leqslant \frac{1}{2^k},$$

где d — (инвариантная относительно сдвигов) метрика, задающая топологию в рассматриваемом пространстве. Не нарушая общности, ограничимся случаем, когда $t_{n(k+p)} > t_{n(k)}$ и $x_{n(k+1)} \neq x_{n(k)}$. Положим

$$y_k := \frac{2^k}{t} (x_{n(k+1)} - x_{n(k)}); \ y_0 := \frac{1}{t} x_0, \ \lambda_k = \frac{1}{2^k},$$

где $t := \lim t_n$. Имеем $y_n \in \frac{2^k}{t} (t_{n(k+1)} - t_{n(k)}) C \subset C$. С другой стороны,

$$\begin{gathered} d(y_k, 0) = d\left(\frac{2^k}{t} (x_{n(k+1)} - x_{n(k)}), 0 \right) \leqslant \\ \leqslant \underbrace{d\left(\frac{1}{t} x_{n(k+1)}, \frac{1}{t} x_{n(k)} \right) + \ldots + d\left(\frac{1}{t} x_{n(k+1)}, \frac{1}{t} x_{n(k)} \right)}_{2^k \text{ раз}} \leqslant 1, \end{gathered}$$

ибо $d\left(\frac{1}{t} x_{n(k+1)}, \frac{1}{t} x_{n(k)} \right) \leqslant \frac{1}{2^k}$ по условию. Окончательно заключаем, что (y_n) — ограниченная последовательность точек C (последовательность $((x_n, t_n))$ ускользает!). Значит, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k y_k$ сходится к элементу из C. Последнее означает, что $(x_{n(k)})$ сходится. Отсюда вытекает требуемое. $\rhd$

3.1.17. Рассмотрим коротко вопрос об устройстве классов идеально выпуклых и σ-выпуклых соответствий.

(1) *Замкнутое или открытое выпуклое подмножество топологического векторного пространства идеально выпукло.*

$\lhd$ Возьмем выпуклое множество C в топологическом векторном пространстве X. Так как идеальная выпуклость сохраняется при сдвигах, то C можно считать коническим отрезком. Пусть последовательности $(x_n) \subset C$ и $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$, все λ_k строго положительны и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ сходится к некоторому элементу $x \in X$. Положим $s_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ и заметим, что $s_n \in C$ и $x = \lim_n s_n$. Если C замкнуто, то, очевидно, $x \in C$.

Пусть C открыто. Тогда функционал Минковского $p := \mu(C)$ непрерывен и, как нетрудно проверить, $C = \{p < 1\}$. Предположим, что $x \notin C$, т. е. $p(x) = 1$. Тогда, учитывая непрерывность p, напишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1 = p(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p(x_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - p(x_k)) = 0.$$

Отсюда вытекает противоречивое равенство $p(x_k) = 1$, следовательно, $x \in C$. $\rhd$

(2) *В конечномерном пространстве всякое выпуклое множество идеально выпукло.*

$\lhd$ Возьмем произвольное выпуклое множество C в конечномерном пространстве X и докажем его идеальную выпуклость. Как и в (1) можно считать S коническим отрезком. Доказательство ведется индукцией по размерности C. Напомним, что *размерностью выпуклого множества* $\dim(C)$ называют размерность подпространства, параллельного аффинной оболочке этого множества. Допустим, что требуемое верно для всех выпуклых множеств меньшей размерности, чем $\dim(C)$. Пусть последовательности $(x_n) \subset C$ и $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, точка $x \in X$ и функционал p те же, что и в (1). Если $p(x) < 1$, то $x \in C$ согласно 3.3.2 (3). Предположим, что $p(x) = 1$. По теореме Хана — Банаха существует линейный функционал $l \in \partial p$, для которого $lx = 1$. Поскольку функционал l непрерывен, то верно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1 = lx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k l x_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - l(x_k)) = 0.$$

Ввиду включения $l \in \partial p$ будет $lx_k \leqslant 1$, стало быть, $lx_k = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность (x_n) содержится в выпуклом множестве $C_0 := C \cap H$, где H — гиперплоскость $\{l = 1\}$. Множество C_0 имеет размерность меньшую, чем $\dim(C)$, следовательно, по индукционному предположению $x \in C_0$. $\triangleright$

Следующие свойства (3)–(7) проверяются непосредственно.

(3) *Пересечение любого семейства идеально выпуклых множеств идеально выпукло.*

(4) *Если Φ — совершенно выпуклое соответствие, то множество $\Phi(C)$ идеально выпукло для любого ограниченного идеально выпуклого множества C.*

(5) *Идеально выпуклое подмножество σ-выпуклого множества само σ-выпукло. В частности, в секвенциально полном локально выпуклом пространстве всякое идеально выпуклое множество σ-выпукло.*

(6) *Сумма и выпуклая оболочка объединения двух σ-выпуклых множеств будут σ-выпуклыми, если одно из них ограничено.*

(7) *Если Φ — это σ-выпуклое соответствие, то $\Phi(C)$ будет σ-выпуклым для каждого ограниченного множества C.*

3.1.18. *Теорема.* *Пусть X и Y — метризуемые топологические векторные пространства, причем Y нетощее. Пусть, далее, Φ — совершенно выпуклое соответствие из X в Y и точка $(x_0, y_0) \in \Phi$ такова, что $y_0 \in \operatorname{core}(\Phi(X))$. Тогда соответствие Φ открыто в точке (x_0, y_0).*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Также ясно, что для каждой окрестности нуля V в X множество $\operatorname{cl}(\Phi(V))$ является окрестностью нуля в Y. В самом деле, по условию множество $\Phi(X) \cap -\Phi(X)$ поглощающее. Возьмем окрестность нуля $U \subset X$ такую, что $\alpha U + \beta U \subset V$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

В силу 1.2.8 (2) множество $\Phi(U)$ также поглощающее. Поскольку Y нетощее, то $\mathrm{cl}(\Phi(U) \cap -\Phi(U))$ содержит некоторое открытое множество W. Тем более $W \subset \mathrm{cl}(\Phi(U))$ и $-W \subset \mathrm{cl}(\Phi(U))$. Благодаря выпуклости Φ будет $\mathrm{cl}(\Phi(V)) \supset \alpha\,\mathrm{cl}(\Phi(U)) + \mathrm{cl}(\beta\Phi(U)) \supset \alpha W - \beta W$. Отсюда видно, что $\mathrm{cl}(\Phi(V))$ — окрестность нуля.

Пусть теперь d — (инвариантная относительно сдвигов) метрика в X, задающая топологию. Положим $V_n := \{x \in X : d(x,0) \leqslant r/2^n\}$, где r подобрано так, что $V_0 \subset V$. Установим включение $\frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_1)) \subset \Phi(V)$ (чем доказательство будет завершено). Пусть (W_n) — последовательность окрестностей нуля в Y, построенная так же, как (V_n) в X. Возьмем произвольную точку $y \in \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(\Phi(V))$. Положим $z_1 := y$. Так как $\mathrm{cl}(\Phi(V_2)) \cap W_1$ — окрестность нуля, то $\bigl(z_1 - \frac{1}{4}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_2)) \cap W_1\bigr) \cap \frac{1}{2}\Phi(V_1) \neq \varnothing$. Иначе говоря, имеются элементы x_1, y_1, z_2, для которых

$$x_1 \in V_1,\ y_1 \in \Phi(x_1), \quad z_2 \in \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_2)) \cap W_1,$$
$$\frac{1}{2}z_2 = z_1 - \frac{1}{2}y_1 \ \left(\to y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_2\right).$$

Так как $\mathrm{cl}(\Phi(V_3))$ — окрестность нуля, то $\bigl(z_2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_3)) \cap W_2\bigr) \cap \frac{1}{2}\Phi(V_2) \neq \varnothing$, и вновь имеются элементы x_2, y_2, z_3, для которых

$$x_2 \in V_2, \quad y_2 \in \Phi(x_2), \quad z_3 \in \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_3)) \cap W_2,$$
$$\frac{1}{2}z_3 = z_2 - \frac{1}{2}y_2 \ \left(\to y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}z_3\right).$$

Продолжая проведенный процесс по индукции, получим последовательности $(x_n), (y_n), (z_n)$, удовлетворяющие соотношениям

$$x_n \in V_n, \quad y_n \in \Phi(x_n), \quad z_{n+1} \in \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(\Phi(V_{n+1})) \cap W_n,$$
$$\frac{1}{2}z_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}y_n \ \left(\to y = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}y_k + \frac{1}{2^k}z_{k+1}\right).$$

Последовательность (x_n) ограничена, так как $x_{n+k} \in V_{n+k} \subset V_n$ $(k := 1, 2, \dots)$, т. е. все члены (x_n), начиная с номера n, содержатся в окрестности нуля V_n. Значит, если $\mathrm{dom}(\Phi)$ — это σ-выпуклое множество, то существует сумма $x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$ и $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$. С другой стороны, если $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} x_k$, то

$$d(u_{n+k} - u_n, 0) \leqslant \left(\sum_{m=n+1}^{n+k} d\frac{1}{2^m} x_m, 0 \right) \leqslant \sum_{m=n+1}^{n+k} d(x_m, 0) \leqslant \frac{r}{2^n},$$

т. е. (u_n) — последовательность Коши. Если $t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$, то $((u_n, t_n))$ — ускользающая последовательность Коши для $\operatorname{dom}(\Phi)$. Если последнее множество монотонно полно, то вновь приходим к существованию предела $x = \lim_{n\to\infty} u_n$ и справедливости вхождения $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Далее, по построению $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} y_k$, так как $z_n \to 0$. Отсюда ввиду идеальной выпуклости Φ вытекает, что $y \in \Phi(x)$. Кроме того,

$$d(x, 0) = d\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k, 0 \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} d\left(\frac{1}{2^k} x_k, 0 \right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{2^k} = r,$$

т. е. x лежит в V и $y \in \Phi(V)$, что и требовалось. $\triangleright$

3.1.19. *Пусть Φ — это σ-выпуклое соответствие, действующее из пространства X в метризуемое пространство Y. Если для любого ограниченного множества C в Y найдутся ограниченное множество B в X и число $\alpha > 0$ такие, что $\alpha C \subset \Phi(B)$, то Y полно.*

$\triangleleft$ Из условия ясно, что для любой ограниченной последовательности (z_n) в Y и всякой последовательности $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ такой, что $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$, имеется сумма $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z_n$. Отсюда с легкостью вытекает требуемое.

В самом деле, для произвольной последовательности Коши (y_n) элементов в Y образуем подпоследовательность $(y_{n(k)})$, для которой $0 < \beta_k := d(y_{n(k+1)}, y_{n(k)}) \leqslant \frac{1}{2^k}$, где, как обычно, d — метрика, задающая топологию в Y. Последовательность (z_k), определенная соотношением $z_k := (y_{n(k+1)} - y_{n(k)})/\beta_k$, ограничена. Пусть $\lambda_k := \beta_k / \sum_{k=0}^{\infty} \beta_n$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 1$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z_k$ сходится. Последнее означает наличие предела у последовательности (z_n). Окончательно мы делаем вывод о сходимости (y_n). $\triangleright$

3.1.20. *Пусть K_1 и K_2 — монотонно полные конусы в нетощем метризуемом топологическом векторном пространстве X, причем $X = K_1 - K_2$. Тогда X полно, а конусы K_1 и K_2 составляют несплющенную пару.*

$\lhd$ Рассмотрим соответствие

$$\Phi_{\varkappa} := \{(k_1, k_2, x) \in X^2 \times X : x = k_1 - k_2,\ k_l \in K_l\ (l := 1, 2)\},$$

фигурирующее в определении несплющенной пары, см. 3.1.6. Ясно, что Φ — монотонно замкнутое выпуклое множество. Таким образом, Φ — идеально выпуклое соответствие, причем $0 \in \operatorname{core}(\Phi(X_2))$, ибо $\Phi(X_2) = X$ по условию. В силу 3.1.16 $\operatorname{dom}(\Phi) = K_1 \times K_2$ является σ-выпуклым. Из теоремы 3.1.18 следует открытость Φ в нуле. Учитывая положительную однородность Φ, можно сделать вывод о его σ-выпуклости. Привлекая, наконец, 3.1.19, мы видим, что X полно. $\rhd$

3.2. Метод общего положения

Наша ближайшая цель — развить *метод общего положения*, представляющий собой, образно говоря, автомат для получения топологических теорем существования из алгебраических эквивалентов теоремы Хана — Банаха — Канторовича. Существование такого автомата тесно связано с феноменом открытости выпуклого соответствия.

3.2.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, E — упорядоченное топологическое векторное пространство. Для сублинейного оператора $P : X \to E$ в этой ситуации представляет интерес изучить совокупность всех линейных непрерывных операторов, содержащихся в субдифференциале ∂P. Указанное множество также обозначают символом ∂P и по естественным причинам сохраняют для него прежние названия: «∂P — субдифференциал (в нуле)» и «∂P — опорное множество». В тех случаях, когда имеется опасность недоразумений, используют более подробные обозначения и термины, говоря об *алгебраическом субдифференциале* $\partial^a P$ и *топологическом субдифференциале* $\partial^c P$. Иными словами, желая избежать двусмысленностей, полагают

$$\partial^a P := \partial P, \quad \partial^c P := (\partial^a P) \cap \mathscr{L}(X, E),$$

где, как обычно, $\mathscr{L}(X, E)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов из X в E.

3.2.2. (1) *Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор, причем* $\operatorname{dom}(P) = X$. *Если положительный конус E^+ в E нормален, то равносильны утверждения:*

(a) *P равномерно непрерывен;*
(b) *P непрерывен;*
(c) *P непрерывен в нуле;*
(d) *множество ∂P эквинепрерывно.*

$\lhd$ Импликации (a) $\to$ (b) $\to$ (c) очевидны.

(c) $\to$ (d): Если $T \in \partial P$, то $-P(-x) \leqslant Tx \leqslant P(x)$ $(x \in X)$. Поэтому для произвольной окрестности нуля $U \subset X$ будет $T(U) \subset n_P(U) := (P(U) - E^+) \cap (-P(-U) + E^+)$. Тем самым

$$U \subset \bigcap \{T^{-1}(n_P(U)) : T \in \partial P\}.$$

В силу нормальности конуса E^+ и непрерывности в нуле оператора P множества $\{n_P(U)\}$ образуют базис фильтра, сходящегося к нулю. Отсюда вытекает эквинепрерывность ∂P.

(d) $\to$ (a): Пусть V — симметричная нормальная окрестность нуля в E. Подберем симметричную окрестность нуля $U \subset X$ так, чтобы

$$U + U \subset \bigcap \{T^{-1}(V) : T \in \partial P\}.$$

Возьмем теперь произвольные $x, y \in U$. Из субаддитивности P получаем

$$P(x) - P(y) \leqslant P(x - y),\ P(y) - P(x) \leqslant P(y - x).$$

С другой стороны, ввиду 1.4.14 (1) можно подобрать такие $S, T \in \partial P$, что $S(x - y) = P(x - y)$ и $T(y - x) = P(y - x)$. В силу выбора U имеем $P(x) - P(y) \in V - E^+$ и $P(y) - P(x) \in V - E^+$. Учитывая нормальность и симметричность V, окончательно получаем

$$P(x) - P(y) \in (V + E^+) \cap (V - E^+) = V. \ \rhd$$

(2) *Топологический субдифференциал всюду определенного непрерывного сублинейного оператора непуст.*

$\lhd$ Это следует из установленного предложения и 1.4.14 (2). $\rhd$

3.2.3. Из приведенных утверждений видно, что техника вычисления алгебраических субдифференциалов автоматически обслуживает топологический случай для всюду определенных непрерывных сублинейных операторов. Для не всюду определенного оператора P даже при условии его непрерывности на $\mathrm{dom}(P)$ опорные множества $\partial^a P$ и $\partial^c P$ не обязательно совпадают. В то же время потребности приложений (и просто здравый смысл) требуют решения задачи поиска формул субдифференцирования в топологической ситуации в классе топологических опорных множеств, ибо в указанных условиях можно говорить о более обозримом классе, нежели класс всех линейных операторов, — о классе непрерывных линейных операторов.

Как мы видели в 1.4, формулы субдифференцирования — это тонкие формы утверждений о существовании типа теоремы Хана — Банаха — Канторовича. Понятно, что формулы подсчета топологического опорного множества для суперпозиций — это еще более квалифицированные формы теорем существования, в которых при разумных дополнительных топологических ограничениях (ср. 3.2.2) гарантируется существование непрерывных операторов с предписанными алгебраическими свойствами.

Развиваемый ниже метод общего положения дает регулярный способ получения топологических теорем существования из алгебраической техники субдифференцирования, основанной на теореме Хана — Банаха — Канторовича.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые соглашения. Всюду ниже будем считать, что E — это K-пространство и положительный конус E^+ в нем нормален, т. е. что E — топологическое K-пространство. Вскоре читатель увидит, что это предположение очень существенно и связано по сути с 3.2.2 (1). Следующее же соглашение носит чисто технический характер, ибо приводит к значительному упрощению многих формул.

Пусть X_1 и X_2 — векторные пространства. Осуществим изоморфизм пространств $L(X_1, E) \times L(X_2, E)$ и $L(X_1 \times X_2, E)$ следующим образом. Для операторов $T_1 \in L(X_1, E)$ и $T_2 \in L(X_2, E)$ положим

$$(T_1, T_2)(x_1, x_2) := T_1 x_1 - T_2 x_2 \quad (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2).$$

В случае, когда число n рассматриваемых пространств $X_1, \ldots, X_n$ больше двух, мы будем использовать процедуру отождествления индуктивно, используя представление

$$X_1 \times \ldots \times X_n \simeq (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Итак, запись $(T_1, \ldots, T_n) \in L(X_1 \times \ldots \times X_n, E)$ в дальнейшем означает, что $T_l \in L(X_l, E)$ $(l := 1, \ldots, n)$ и

$$(T_1, \ldots, T_n)(x_1, \ldots, x_n) = T_1x_1 - T_2x_2 - \ldots - T_nx_n$$

для всех $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Приведенное соглашение тем самым действует и в топологических ситуациях, т. е. для пространств $\mathscr{L}(X_1, E) \times \mathscr{L}(X_2, E)$ и $\mathscr{L}(X_1 \times X_2, E)$ и т. п.

Для конуса $K \subset X$, положим

$$\pi_E(K) := \{T \in \mathscr{L}(X, E) : Tk \leqslant 0 \ (k \in K)\}.$$

Как видно, $\pi_E(K)$ — конус в $\mathscr{L}(X, E)$.

Пусть $P : X \to E$ — *сублинейный оператор,* $T \in \mathscr{L}(X, E)$ *и* $S \in \mathscr{L}^+(E, F)$. *Тогда* $(T, S) \in \pi_E(\mathrm{epi}(P))$ *в том и только в том случае, если* $S \geqslant 0$ *и* $T \in \partial(S \circ P)$.

$\lhd$ Действительно, если $S \geqslant 0$ и $T \in \partial(S \circ P)$, то для $(h, k) \in \mathrm{epi}(P)$ будет $Th \leqslant S \circ P(h) \leqslant Sk$, т. е. $Th - Sk \leqslant 0$. Наоборот, допустим, что $Th \leqslant Sk$ для всех $(h, k) \in \mathrm{epi}(P)$. При $h = 0$ и $k \geqslant 0$ получаем $Sk \geqslant 0$, т. е. $S \geqslant 0$. Если же $k = P(h)$, то будет $Th \leqslant S \circ P(h)$, т. е. $T \in \partial(S \circ P)$. $\rhd$

Следующее предложение является ключевым.

3.2.4. *Пусть* $K_1, \ldots, K_n$ — *конусы в топологическом векторном пространстве* X *и* E — *топологическое* K*-пространство. Если* $K_1, \ldots, K_n$ *находятся в общем положении, то справедливо представление:*

$$\pi_E(K_1 \cap \ldots \cap K_n) = \pi_E(K_1) + \ldots + \pi_E(K_n).$$

$\lhd$ Предположим сначала, что $n = 2$. Пусть оператор T входит в левую часть требуемого равенства. Положим $X_0 := K_1 - K_2$ и рассмотрим коническое соответствие Φ из X^2 в X, обратное к Φ из 3.1.7 (2). Так как

$$K_1 \cap K_2 = \Phi(0, 0) \supset \Phi(x_1, x_2) + \Phi(-x_1, -x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X_0$, то при $h \in \Phi(x_1, x_2)$ и $k \in \Phi(-x_1, -x_2)$ будет $T(h+k) \leqslant 0$, т. е. $Tk \leqslant -Th$. Итак, множество $-T(\Phi(x_1, x_2))$ ограничено снизу при $x_1, x_2 \in X_0$ и соотношение

$$P(x_1, x_2) := \inf\{-Th : h \in \Phi(x_1, x_2)\}$$

корректно определяет сублинейный оператор из X_0^2 в $E^\bullet$. Легко видеть, что $\operatorname{dom}(P) = X_0^2$. Более того, оператор P непрерывен в силу 3.1.5. Стало быть, $\partial P \neq \varnothing$ согласно 3.2.2 (2). Если $S \in \mathscr{L}(X^2)$ — линейный непрерывный проектор на X_0^2 и $(T_1, -T_2) \in (\partial P) \circ S$, то, как нетрудно видеть, $T = T_1 + T_2$, $T_l \in \pi_E(K_l)$ $(l := 1, 2)$. Последнее означает, что $T \in \pi_E(K_1) + \pi_E(K_2)$. Допустим теперь, что $n > 2$. Положим $K := K_1 \times \ldots \times K_n$ и $K_0 = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ и заметим, что $K_0^n = K \cap \Delta_n(X)$. Если $T \in \pi_E(K_0)$, то $S := (T, -T, \ldots, -T) \in \pi_E(K_0^n)$. В силу уже доказанного $\pi_E(K_0^n) \subset \pi_E(K) + \pi(\Delta_n(X))$, ибо конусы K и $\Delta_n(X)$ находятся в общем положении по определению. Следовательно, существуют операторы $T_l, S_l \in \mathscr{L}(X, E)$ $(l := 1, \ldots, n)$ такие, что $(S_1, -S_2, \ldots, -S_n) \in \pi_E(\Delta_n(X))$, $(T_1, -T_2, \ldots, -T_n) \in \pi_E(K)$ и $(T, 0, \ldots, 0) = (T_1, -T_2, \ldots, -T_n) + (S_1, -S_2, \ldots, -S_n)$. Из этих соотношений получаем, что $\sum_{l=1}^n S_l = 0$, $T = \sum_{l=1}^n T_l$ и $T_l \in \pi_E(K_l)$ $(l := 1, \ldots, n)$. Противоположное включение очевидно. $\triangleright$

3.2.5. (1) *Пусть пространство E (топологически) полно и конусы $K_1 \times \ldots \times K_n$ и $\Delta_n(X)$ образуют несплющенную пару в подпространстве $Z_0 \subset X^n$, замыкание которого дополняемо в X^n. Тогда*

$$\pi_E(K_1 \cap \ldots \cap K_n) = \pi_E(K_1) + \ldots + \pi_E(K_n).$$

Если же $E = \mathbb{R}$ и X — локально выпуклое пространство, то в условии общего положения конусов $K_1, \ldots, K_n$ предположение о дополняемости можно опустить, сохранив при этом указанное представление.

$\triangleleft$ В самом деле, в силу полноты E — непрерывный сублинейный оператор P, построенный в доказательстве 3.2.4, можно продолжить по непрерывности с указанного там подпространства X на $\operatorname{cl}(X_0^2)$ и завершить доказательство по уже известной схеме. Если же $E = \mathbb{R}$ и X локально выпукло, то любой функционал $f \in \partial P$ допускает непрерывное линейное распространение с X_0^2 на все X^2 по классическому принципу продолжения. $\triangleright$

(2) Следует подчеркнуть, что при соблюдении нужного условия общего положения справедливо несколько более сильное утверждение:

В условиях 3.2.4 для каждого оператора $T \in \pi_E(K_1 \cap \ldots \cap K_n)$ *множество*

$$\{(T_1, \ldots, T_n) \in \mathscr{L}(X, E)^n : T = T_1 + \ldots + T_n,\ T_l \in \pi_E(K_l)\}$$

непусто и эквинепрерывно на подпространстве $\Delta_n(X) + \prod_{l=1}^{n} K_l$.

$\lhd$ Ограничимся случаем $n = 2$. Пусть X_0 и P те же, что и в доказательстве 3.2.4. Тогда ограничения операторов из указанного множества на подпространство X_0^2 составляют ∂P. С другой стороны, ∂P эквинепрерывно ввиду 3.2.2 (1). $\rhd$

3.2.6. Метод общего положения состоит фактически в последовательном применении 3.2.5 (1) и следующего очевидного утверждения.

Пусть X *и* Y — *топологические векторные пространства,* T — *линейный непрерывный оператор из* X *в* Y *и* $K \subset X$ — *конус. Тогда*

$$\pi_E(T(K)) = \{S \in \mathscr{L}(Y, E) : S \circ T \in \pi_E(K)\}.$$

В качестве важнейшего приложения этого метода установим правило субдифференцирования суммы (не обязательно всюду определенных) сублинейных операторов — ключевую теорему локального выпуклого анализа. Для его формулировки условимся символом σ_n обозначать отображение перестановки координат

$$\sigma_n : ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) \mapsto ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)),$$

осуществляющее изоморфизм пространств $(X \times Y)^n$ и $X^n \times Y^n$.

3.2.7. Теорема. *Пусть* X *и* Y — *топологические векторные пространства,* E — *топологическое* K*-пространство и* $K_1, \ldots, K_n$ — *конические соответствия из* X *в* Y. *Если конусы* $\sigma_n(\prod_{l=1}^{n} K_l)$ *и* $\Delta_n(X) \times Y^n$ *находятся в общем положении, то справедливо представление:*

$$\pi_E(K_1 \dotplus \ldots \dotplus K_n) = \pi_E(K_1) \underset{\cdot}{+} \ldots \underset{\cdot}{+} \pi_E(K_n).$$

$\lhd$ Пусть оператор Λ из $X^n \times Y^n$ в $X \times Y$ действует по правилу

$$\Lambda : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} x_l, \sum_{l=1}^{n} y_l \right).$$

Тогда $K_0 = \Lambda(K \cap (\Delta_n(X) \times Y^n))$, где $K_0 := K_1 \dotplus \dots \dotplus K_n$ и $K := \sigma_n(\prod_{l=1}^{n} K_l)$. Если $(T, S) \in \pi_E(K_0)$, то, в силу предложений 3.2.4 и 3.2.6, найдутся такие операторы $\mathscr{A} \in \pi_E(K)$ и $\mathscr{B} \in \pi_E(\Delta_n(X) \times Y^n)$, что $(T, S) \circ \Lambda = \mathscr{A} + \mathscr{B}$. Полагая $T_l x := \mathscr{A}(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ и $S_l(x) = \mathscr{B}(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ (x стоит на l-м месте, а $l := 1, 2, \dots, 2n$), получим набор линейных операторов, для которых

$$\begin{gathered}
S_l, T_l \in \mathscr{L}(X, E) \quad (l := 1, \dots, n); \\
S_l, T_l \in \mathscr{L}(Y, E) \quad (l := n+1, \dots, 2n); \\
\sum_{l=1}^{n} S_l = 0; \quad S_l = 0 \quad (l := n+1, \dots, 2n); \\
\sum_{l=1}^{n} T_l x + \sum_{l=1}^{n} T_{l+n} y_l - \sum_{l=1}^{n} S_l x = Tx - \sum_{l=1}^{n} S y_l \\
(x \in X,\ (x, y_l) \in K_l,\ l := 1, \dots, n); \\
(T_l, S_l) \in \pi_E(K_l) \quad (l := 1, \dots, n).
\end{gathered}$$

Отсюда вытекает, что $T = \sum_{l=1}^{n} T_l$, а кроме того, $T_l = -S$ для всех $l := n+1, \dots, 2n$ или, что то же самое, $(T_l, S) \in \pi_E(K_l)$ $(l := 1, \dots, n)$. Таким образом, T входит в правую часть рассматриваемого равенства. Противоположное включение тривиально. $\rhd$

3.2.8. Условимся в дальнейшем говорить, что сублинейные операторы $P_1, \dots, P_n : X \to E$ находятся *в общем положении*, если в общем положении находятся множества $\Delta_n(X) \times E^n$ и $\sigma_n(\mathrm{epi}(P_1) \times \dots \times \mathrm{epi}(P_n))$. Аналогичную терминологию мы примем и для выпуклых операторов.

Теорема. *Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Если сублинейные операторы $P_1, \dots, P_n : X \to E$ находятся в общем положении, то имеет место формула Моро — Рокафеллара*

$$\partial(P_1 + \dots + P_n) = \partial P_1 + \dots + \partial P_n.$$

$\triangleleft$ Следует применить 3.2.7 к конусам $\mathrm{epi}(P_1), \dots, \mathrm{epi}(P_n)$. $\triangleright$

Из теоремы 3.2.7 можно вывести правило подсчета опорного множества свертки сублинейных операторов. Рассмотрим топологические векторные пространства X, Y, Z и сублинейные операторы $P : X \times Y \to E^\bullet$ и $Q : Y \times Z \to E^\bullet$.

3.2.9. *Теорема.* *Если конусы* $\mathrm{epi}(P, Z)$ *и* $\mathrm{epi}(X, Q)$ *находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\partial(Q \vartriangle P) = \partial Q \circ \partial P.$$

Здесь $\partial Q \circ \partial P$ — композиция соответствий ∂Q и ∂P, понимаемая в соответствии с 3.2.3, т. е.

$$\begin{aligned}\partial Q \circ \partial P = \{(T_1, T_2) \in \mathscr{L}(X, E) \times \mathscr{L}(Z, E) :\\ (\exists T \in \mathscr{L}(Y, E))\, T_1 x - Ty \leqslant P(x, y), \quad Ty - T_2 z \leqslant Q(y, z),\\ (x, y, z) \in X \times Y \times Z\}.\end{aligned}$$

$\triangleleft$ Если операторы $T_1 \in \mathscr{L}(X, E)$, $T \in \mathscr{L}(Y, E)$ и $T_2 \in \mathscr{L}(Z, E)$ таковы, что $(T_1, T) \in \partial P$ и $(T, T_2) \in \partial Q$, то для любых $x \in X$, $y \in Y$ и $z \in Z$ будет

$$T_1 x - T_2 z = (T_1 x - T_1 y) + (Ty - T_2 z) \leqslant P(x, y) + Q(y, z).$$

Переходя в этом неравенстве к точной нижней границе по $y \in Y$, получим $(T_1, T_2) \in \partial(Q \triangle P)$. Докажем обратное включение. Определим операторы $\overline{P}, \overline{Q} : X \times Y \times Z \to E$ и $\nabla : X \times Y \times Z \to X \times Z$ соотношениями

$$\begin{aligned}\overline{P}(x, y, z) := P(x, y), \quad \overline{Q}(x, y, z) := Q(x, z),\\ \nabla(x, y, z) := (x, z) \quad ((x, y, z) \in X \times Y \times Z).\end{aligned}$$

Очевидно, что если $(T_1, T_2) \in \partial(Q \triangle P)$, то $(T_1, T_2) \circ \nabla \in \partial(\overline{P} + \overline{Q})$. Далее, так как $\mathrm{epi}(\overline{P}) = \mathrm{epi}(P, Z)$ и $\mathrm{epi}(\overline{Q}) = \mathrm{epi}(X, Q)$, применима теорема 3.2.8. Стало быть, $(T_1, T_2) \circ \nabla \in \partial\overline{P} + \partial\overline{Q}$. Пусть $(T_1, T_2) \circ \nabla = S_1 + S_2$, где $S_1 \in \partial\overline{P}$ и $S_2 \in \partial\overline{Q}$. Положим $(U_1, V_1) = S_1(\cdot, \cdot, 0)$ и $(U_2, V_2) = S(0, \cdot, \cdot)$. Тогда $(U_1, V_1) \in \partial P$ и $(U_2, V_2) \in \partial Q$ и для всех $(x, y, z) \in X^2 \times Y \times Z$ будем иметь

$$T_1 x - T_2 z = U_1 x - V_1 y + U_2 y - V_2 z.$$

Отсюда следует, что $T_1 = U_1$, $T_2 = V_2$ и $U_2 = V_1$. Иными словами, $(T_1, T_2) \in \partial Q \circ \partial P$. $\triangleright$

3.2.10. Отметим несколько следствий установленного факта:

(1) *Рассмотрим пару конусов $K_1 \subset X \times Y$ и $K_2 \subset Y \times Z$ и предположим, что конусы $K_1 \times Z$ и $X \times K_2$ находятся в общем положении. Тогда $\pi_E(K_2 \circ K_1) = \pi_E(K_2) \circ \pi_E(K_1)$.*

$\lhd$ Положим $P := \delta_E(K)$ и $Q := \delta_E(K)$ и заметим, что $Q \triangle P = \delta_E(K_2 \circ K_1)$, $\operatorname{epi}(P, Z) = K_1 \times Z \times E^+$ и $\operatorname{epi}(X, Q) = X \times K_2 \times E^+$. Остается сослаться на теорему 3.2.9. $\rhd$

(2) *Пусть F — упорядоченное топологическое векторное пространство, $P : X \to F^\bullet$ — сублинейный оператор, $Q : F \to E^\bullet$ — возрастающий сублинейный оператор. Если конусы $\operatorname{epi}(P) \times E$ и $X \times \operatorname{epi}(Q)$ находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$\partial(Q \circ P) = \bigcup \{\partial(T \circ P) : T \in \partial Q\}.$$

$\lhd$ Положим $K_1 := \operatorname{epi}(P)$ и $K_2 := \operatorname{epi}(Q)$ и заметим, что в силу монотонности оператора Q имеем $\operatorname{epi}(Q \circ P) = K_2 \circ K_1$. Если $S \in \partial(Q \circ P)$, то $(S, I_E) \in \pi_E(K_2) \circ \pi_E(K_1)$ в силу (1), поэтому для некоторого $T \in \mathscr{L}(F, E)$ справедливы включения $(S, T) \in \pi_E(K_1)$ и $(T, I_E) \in \pi_E(K_2)$. Первое из них обеспечивает соотношение $S \in \partial(T \circ P)$, а второе — $T \in \partial Q$. Итак, S входит в правую часть требуемого включения. Противоположное включение бесспорно. $\rhd$

(3) *Пусть $P : X \to E^\bullet$ — сублинейный оператор, $T : Y \to X$ — линейный непрерывный оператор, а конусы $Y \times \operatorname{epi}(P)$ и $T \times E$ находятся в общем положении. Тогда $\partial(P \circ T) = (\partial P) \circ T$.*

$\lhd$ Вытекает из (1), если положить $K_1 := T$ и $K_2 := \operatorname{epi}(P)$. $\rhd$

(4) *Пусть $P : Y \times X \to E^\bullet$ — сублинейный оператор и $K \subset X \times Y$ — коническое соответствие. Допустим, что множество $P(K(x) \times \{x\})$ ограничено снизу для каждого $x \in X$. Тогда формула $Q(x) := \inf(P(K(x) \times \{x\}))$ определяет сублинейный оператор $Q : X \to E^\bullet$. Если конусы $X \times \operatorname{epi}(P)$ и $K \times X \times E^+$ находятся в общем положении, то*

$$\partial Q = (\partial P) \circ \pi_E(K) \circ \Delta_2.$$

$\lhd$ Действительно, имеет место представление

$$Q = (P \triangle \delta_E(K)) \circ \Delta_2.$$

Из (3) вытекает $\partial Q = \partial(P \triangle \delta_E(K)) \circ \Delta_2$. Остается применить теорему 3.2.9, учитывая, что $\operatorname{epi}(X, P) = X \times \operatorname{epi}(P)$ и $\operatorname{epi}(\delta_E(K), X) = K \times X \times E^+$. $\rhd$

3.2.11. Для дальнейших формул субдифференцирования необходимо установить правила для вынесения линейного оператора слева из-под знака субдифференциала. Иными словами, нужно выяснить вопрос о справедливости формулы $\partial(S \circ P) = S \circ \partial P$. Ситуация здесь не столь проста, как в 3.2.10 (3). (Мы это уже видели в 1.4.14 (5), изучая случай, когда S — мультипликатор.) Поэтому ограничимся тем случаем, когда S — положительный ортоморфизм. Более общая задача будет изучена в 4.5.

(1) *Если $P : X \to E$ — некоторый сублинейный оператор, а $\alpha : E \to E$ — произвольный ортоморфизм, то $\partial^a(\alpha \circ P) = \alpha \circ \partial^a P$.*

$\lhd$ Ядро $\ker(\alpha)$ положительного ортоморфизма, как уже отмечено, является полосой. Пусть π — проектор на $\ker(\alpha)$. По теореме 2.1.6 (2) $\partial(\alpha \circ P) = \partial(\beta \circ P)$, где $\beta := \alpha|_{\pi^d(E)}$. Ортоморфизм β имеет нулевое ядро, поэтому определен положительный оператор $\beta^{-1} : \beta(\pi^d(E)) \to E$, обратный к β. При этом $\beta(\pi^d(E))$ — фундамент в $\pi^d E$. Пусть $T \in \partial(\beta \circ P)$. Тогда $-\beta \circ P(-x) \leqslant Tx \leqslant \beta \circ P(x)$ для всех $x \in X$, поэтому $T(X) \subset \beta(\pi^d(E))$. Отсюда видно, что $S := \beta^{-1} \circ T \in L(X, E)$ и $S \in \partial P$. Кроме того, $\beta \circ S = T$. Значит, $T \in \beta \circ \partial P$. Обратное включение тривиально. Итак, $\partial(\alpha \circ P) = \beta \circ \partial P$ и остается лишь заметить, что $\beta \circ \partial P = \alpha \circ \partial P$. $\rhd$

(2) *Если $P : X \to E^\bullet$ — положительный сублинейный оператор, то для любого $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ будет*

$$\partial(\alpha \circ P) = \bigcap \{\beta \circ \partial P : \ \alpha \leqslant \beta \in \mathrm{Inv}(\mathrm{Orth}^+(E))\},$$

где $\mathrm{Inv}(\mathrm{Orth}^+(E))$ — множество положительных обратимых элементов алгебры $\mathrm{Orth}(E)$.

$\lhd$ Всякий положительный ортоморфизм α является инфимумом обратимых положительных элементов $\mathrm{Orth}(E)$, например, последовательности $\alpha + (1/n)I_E$. Для обратимого $\beta \in \mathrm{Orth}^+(E)$ выполнено, очевидно, $\partial(\beta \circ P) = \beta \circ \partial P$. В силу же положительности P равносильны соотношения $(\forall x \in \mathrm{dom}(P))Tx \leqslant \alpha \circ Px$ и $(\forall x \in \mathrm{dom}(P))(\forall \beta \in \mathrm{Inv}(\mathrm{Orth}^+(E)))\beta \geqslant \alpha \to Tx \leqslant \beta \circ Px$. $\rhd$

Из этого предложения легко можно вывести, что если $\partial P \neq \varnothing$, то множество

$$\bigcap \{\beta \circ \partial P - (\alpha - \beta) \circ T : \alpha \leqslant \beta \in \mathrm{Inv}(\mathrm{Orth}^+(E))\}$$

не зависит от выбора $T \in \partial P$ и совпадает с $\partial(\alpha \circ P)$.

Перейдем теперь к случаю произвольного сублинейного оператора $P : X \to E^\bullet$. Пусть α, β, π — те же, что и в доказательстве (1). В максимальном расширении $m(\pi^d(E))$ полосы $\pi^d(E)$ существует фундамент E_1 такой, что $\pi^d(E) \subset E_1$ и оператор β^{-1} допускает единственное продолжение, скажем ρ, до положительного оператора, определенного на $\pi^d(E)$ и принимающего свои значения в E_1. Итак, $\rho : \pi^d(E) \to E_1$ и $\rho \circ \beta = I_{\pi^d(E)}$. Поскольку ρ биективен, то можно положить $\overline{\alpha} := \rho^{-1}$ и получить тем самым положительный оператор $\overline{\alpha} : E_1 \to E$. Тогда для каждого $x \in \pi^d(E)$ будет $\overline{\alpha}x = \rho^{-1}x = \rho^{-1}(\rho \circ \beta)x = \beta x = \alpha x$, т. е. $\overline{\alpha}$ и α совпадают на $\pi^d(E)$.

Положим

$$\alpha \cdot \partial P := \partial(\delta_{E_0}(\mathrm{dom}(P))) + \overline{\alpha} \circ \partial_{E_1}(P),$$

где $E_0 := \pi E = \ker(\alpha)$, а множество $\partial_{E_1}(P)$ состоит из линейных операторов $S : X \to E_1$, для которых $Sx \leqslant \pi^d P(x)$ $(x \in X)$ и $\overline{\alpha} \circ S : X \to E$ непрерывен. Если $\mathrm{dom}\, P = X$, то $\partial(\delta_{E_0}(\mathrm{dom}(P))) = \{0\}$ и, поскольку $\mathrm{im}(S) \subset \pi^d(E)$, мы видим, что $\overline{\alpha} \circ S = \alpha \circ S$. Таким образом, $\alpha \cdot \partial P = \alpha \circ \partial P$.

(3) *Для сублинейного $P : X \to E^\bullet$ и положительного $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$ выполнено $\partial(\alpha \circ P) = \alpha \cdot \partial P$.*

$\lhd$ Возьмем произвольный оператор $T \in \partial(\alpha \circ P)$. Положим $T_1 := \pi \circ T$ и определим сублинейный оператор $P_1 : X \to E_1$ формулой $P_1(x) := \pi^d \circ P(x)$ $(x \in X)$. Тогда из данных выше определений видно, что $T_1 \in \partial(\delta_{E_0}(\mathrm{dom}(P)))$ и $\partial_{E_1}(P) = \partial P_1$. Далее, для произвольного $x \in \mathrm{dom}(P) = \mathrm{dom}(P_1)$ будет $\pi^d Tx \leqslant \pi^d \circ \alpha \circ P(x) = \overline{\alpha} \circ P(x) = \overline{\alpha} \circ P_1(x)$, стало быть, $\rho \circ \pi^d \circ Tx \leqslant P_1(x)$. Если обозначить $T_2 := \rho \circ \pi^d \circ T$, то $T_2 \in \partial P_1$ и $T = T_1 + \overline{\alpha} \circ T_2$, следовательно, $\partial(\alpha \circ P) \subset \alpha \cdot \partial P$. Обратное включение очевидно. $\rhd$

3.2.12. *Если сублинейные операторы $P_1, \dots, P_n : X \to E^\bullet$ таковы, что надграфики $\mathrm{epi}(P_1), \dots, \mathrm{epi}(P_n)$ находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\partial(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = \bigcup (\alpha_1 \cdot \partial P_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \partial P_n),$$

где объединение взято по всем $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Orth}^+(E)$ таким, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E$.

◁ Пусть $P := P_1 \vee \ldots \vee P_n$, $K := \operatorname{epi}(P)$ и $K_l := \operatorname{epi}(P_l)$ ($l := 1, \ldots, n$). Возьмем $T \in \partial P$. Как отмечалось в 3.2.2, $(T, I_E) \in \pi_E(K)$. Имеет место очевидное соотношение $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$. Поэтому найдутся операторы $T_l \in \mathscr{L}(X, E)$ и $\alpha_l \in \mathscr{L}(E)$ ($l := 1, \ldots, n$) такие, что

$$(T, I_E) = (T_1, \alpha_1) + \ldots + (T_n, \alpha_n);$$
$$(T_1, \alpha_1) \in \pi_E(K_1), \ldots, (T_n, \alpha_n) \in \pi_E(K_n).$$

На основании 3.2.3 и 3.2.11 (3) заключаем, что $\alpha_l \geqslant 0$ и $T_l \in \partial(\alpha_1 \circ P_l) = \alpha_l \cdot \partial P_l$. Кроме того, $T = T_1 + \ldots + T_n$ и $I_E = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, следовательно, T входит в правую часть требуемого представления. Обратное включение опять очевидно. ▷

3.2.13. Для сублинейных операторов $P : X \times Y \to E^\bullet$ и $Q : Y \times Z \to E^\bullet$ введем следующее обозначение:

$$(\partial Q) \odot (\partial P) = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \geqslant 0 \\ \alpha + \beta = I_E}} (\beta \cdot \partial Q) \circ (\alpha \cdot \partial P).$$

В силу 3.2.11 (3) это обозначение согласуется с 1.2.5.

Предположим, что $P : X \times Y \to E^\bullet$ *и* $Q : Y \times Z \to E^\bullet$ *— сублинейные операторы, причем конусы* $\operatorname{epi}(P, Z)$ *и* $\operatorname{epi}(X, Q)$ *находятся в общем положении. Тогда имеет место представление*

$$\partial(Q \odot P) = (\partial Q) \odot (\partial P).$$

◁ Допустим, что $(T_1, T_0) \in \alpha \cdot \partial P$ и $(T_0, T_2) \in \beta \cdot \partial Q$, причем $\alpha, \beta \in \operatorname{Orth}^+(E)$ и $\alpha + \beta = I_E$. Тогда

$$T_1 x - T_2 z = (T_1 x - T_0 y) + (T_0 y - T_2 z) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \circ P(x, y) + \beta \circ Q(y, z) \leqslant P(x, y) \vee Q(y, z).$$

Следовательно, $(T_1, T_2)(x, z) \leqslant (Q \odot P)(x, z)$.

Наоборот, пусть $(T_1, T_2) \in \partial(Q \odot P)$. По тем же соображениям, что и в 3.2.9, отсюда вытекает, что $(T_1, T_2) \circ \triangle \in \partial(\overline{P} \vee \overline{Q})$, где $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и $\triangle$ фигурируют в доказательстве 3.2.9. Как видно из представления 3.2.12, найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha, \beta \in \operatorname{Orth}(E)$, $\alpha + \beta = I_E$, и операторы $\mathscr{U} \in \alpha \cdot \partial P$ и $\mathscr{V} \in \beta \cdot \partial Q$ такие, что $(T_1, T_2) \circ \triangle = \mathscr{U} + \mathscr{V}$. Нетрудно понять, что $\alpha \cdot \partial \overline{P} = (\alpha \cdot \partial P) \times \{0\}$ и $\beta \cdot \partial \overline{Q} = \{(0, V_0, V_2) : (-V_0, V_2) \in \beta \cdot \partial Q\}$. Пусть $\mathscr{U} = (U_1, U_0, 0)$ и $\mathscr{V} = (0, V_0, V_1)$. Тогда должно быть $T_1 = U_1$, $T_2 = V_2$ и $U_0 = -V_0$. Тем самым $(T_1, T_2) \in (\beta \cdot \partial Q) \circ (\alpha \cdot \partial P) \subset (\partial Q) \odot (\partial P)$. ▷

3.2.14. (1) *Для сублинейных операторов $P_1, \dots, P_n : X \to E^\bullet$ справедлива формула*

$$\partial(P_1 \oplus \dots \oplus P_n) = \partial P_1 \cap \dots \cap \partial P_n.$$

$\lhd$ Оператор $P := P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ есть точная нижняя граница множества $\{P_1, \dots, P_n\}$ в решетке $\mathrm{Sbl}(X, \overline{E})$. Поэтому $\partial P \subset \partial P_l$ для всех $l := 1, \dots, n$. С другой стороны, оператор $Q : x \mapsto \sup\{Tx : T \in \partial P_1 \cap \dots \cap \partial P_n\}$ мажорируется каждым из P_l. Значит, должно быть $Q \leqslant P$. Но тогда $\partial P_1 \cap \dots \cap \partial P_n \subset \partial Q \subset \partial P$. $\rhd$

Для сублинейных операторов $P_1, \dots, P_n : X \to E^\bullet$ положим

$$\partial P_1 \# \dots \# \partial P_n := \bigcup_{\substack{\alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_E}} \alpha_1 \cdot \partial P_1 \cap \dots \cap \alpha_n \cdot \partial P_n.$$

В силу 3.2.11 (3) это обозначение согласовано с 1.1.6 (8).

(2) *Если положительный конус E^+ несплющен, то для любых сублинейных операторов $P_1, \dots, P_n : X \to E^\bullet$ имеет место представление*

$$\partial(P_1 \# \dots \# P_n) = \partial P_1 \# \dots \# \partial P_n.$$

$\lhd$ Без ограничения общности рассмотрим лишь случай $n = 2$. Пусть $Y := X$, а Z — произвольное пространство. Определим операторы $P : X \times Y \to E^\bullet$ и $Q : Y \times Z \to E^\bullet$ формулами

$$P(x, y) := P_1(x - y), \quad Q(y, z) := P_2(y).$$

Тогда $(Q \odot P)(x, z) = (P_1 \# P_2)(x)$ для всех $x \in X$ и $z \in Z$. Следовательно,

$$\partial(Q \odot P) = \partial(P_1 \# P_2) \times \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что несплющенность положительного конуса E^+ обеспечивает условие общего положения $\mathrm{epi}(P, Z)$ и $\mathrm{epi}(X, Q)$. Тем самым применима теорема 3.2.13, согласно которой

$$\partial(P_1 \# P_2) \times \{0\} = (\partial Q) \odot (\partial P).$$

Осталось сосчитать субдифференциалы:

$$\alpha \cdot \partial P = \{(T, T) : \ T \in \alpha \cdot \partial P_1\}, \ \beta \cdot \partial Q = (\beta \cdot \partial P_2) \times \{0\},$$
$$(\beta \cdot \partial Q) \circ (\alpha \cdot \partial P) = (\partial P_1 \cap \partial P_2) \times \{0\}.$$

Теперь ясно, что $(\partial Q) \odot (\partial P) = (\partial P_1 \# \partial P_2) \times \{0\}$. $\rhd$

3.2.15. *Теорема о сэндвиче.* *Пусть $P, Q : X \to E^{\bullet}$ — сублинейные операторы, находящиеся в общем положении. Если $P(x) + Q(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, то существует линейный непрерывный оператор $T : X \to E$ такой, что*

$$-Q(x) \leqslant Tx \leqslant P(x) \quad (x \in X).$$

$\lhd$ По условию теоремы $0 \in \partial(P + Q)$. В силу 3.2.8 имеет место формула Моро — Рокафеллара. Следовательно, $0 = T + S$ для некоторых $T \in \partial P$ и $S \in \partial Q$. Оператор $T (= -S)$ искомый. $\rhd$

Следует подчеркнуть, что теорема о сэндвиче и формула Моро — Рокафеллара равносильны. Если для сублинейных операторов P и Q имеет место теорема о сэндвиче, то для любого $T \in \partial(P + Q)$ из очевидного соотношения $0 \in \partial(P + Q - T)$ вытекает существование такого $S \in \mathscr{L}(X, E)$, что $-Q(x) \leqslant -Sx \leqslant P(x) - Tx$ для всех $x \in X$. Это означает, что $S \in \partial Q$ и $T - S \in \partial P$, т. е. $\partial(P + Q) \subset \partial P + \partial Q$. Учитывая очевидное обратное включение, приходим к формуле Моро — Рокафеллара.

3.2.16. *Теорема Мазура — Орлича.* *Пусть $P : X \to E^{\bullet}$ — сублинейный оператор и $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и $(e_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейства элементов в X и E соответственно. Допустим, что конусы $\Delta_2(X) \times E^2$ и $\sigma_2(K \times \operatorname{epi}(P))$, где K — коническая оболочка семейства $((x_\xi, -e_\xi))_{\xi \in \Xi}$, находятся в общем положении в $X^2 \times E^2$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *существует оператор $T \in \mathscr{L}(X, E)$ такой, что*

$$T \in \partial P, \ e_\xi \leqslant Tx_\xi \quad (\xi \in \Xi);$$

(2) *для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ и $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Xi$ верно*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{\xi_k} \leqslant P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\xi_k}\right).$$

$\lhd$ Импликация (1) $\to$ (2) очевидна и верна без требования об общем положении. Для доказательства (2) $\to$ (1) нужно применить теорему о сэндвиче 3.2.15 к данному оператору P и новому оператору $Q : X \to E^{\bullet}$, определенному соотношением

$$Q(x) := \inf\left\{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{\xi_k} : \ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\xi_k}, \ \lambda_k \geqslant 0\right\}.$$

При этом нужно заметить, что Q сублинеен, $\operatorname{epi}(Q) \supset K$ и $P + Q \geqslant 0$. $\triangleright$

3.2.17. *Лемма Крейна.* *Пусть X — упорядоченное векторное пространство и сублинейный оператор $P : X \to E$ монотонен в следующем смысле: $P(u) \leqslant P(x)$ для всех $x, u \in X$ при $-x \leqslant u \leqslant x$. Тогда для любого линейного оператора $T \in \partial P$ существует линейный оператор $S \in \partial P$ такой, что $-S \leqslant T \leqslant S$.*

$\triangleleft$ Для $T \in \partial P$ определим оператор $Q : X \to E^{\bullet}$ формулой:

$$Q(x) := \begin{cases} \inf\{-Ty : -x \leqslant y \leqslant x\}, & \text{если } x \in X^{+}, \\ +\infty, & \text{если } x \notin X^{+}. \end{cases}$$

Если $x, y \in X^{+}$ и $-x \leqslant u \leqslant x$, $-y \leqslant v \leqslant y$ для некоторых $u, v \in X$, то $-x-y \leqslant u+v \leqslant x+y$, следовательно, $Q(x+y) \leqslant -Tu-Tv$. Переход к точным нижним границам по указанным u и v дает субаддитивность Q на X^{+}. Субаддитивность Q в случае $x \notin X^{+}$ или $y \notin X^{+}$, а также положительная однородность очевидны. Далее, в силу предположения о монотонности $-P(x) \leqslant -P(u) \leqslant -Tu$, поэтому при $x \in X^{+}$ будет $-P(x) \leqslant Q(x)$. Тем самым оператор Q сублинеен и $(P+Q)(x) \geqslant 0$ $(x \in X)$. По теореме о сэндвиче 3.2.15 существует линейный оператор $S \in \partial P$, для которого $-S \in \partial Q$. Отсюда $Sx \geqslant Ty$ при $-x \leqslant y \leqslant x$, $x \in E^{+}$. Подставив $y := \pm x$, получим $S \geqslant \pm T$, что и требовалось. $\triangleright$

3.2.18. В заключение настоящего параграфа приведем борнологический вариант формулы Моро — Рокафеллара. Сначала напомним необходимые определения. *Борнологией* на множестве X называют возрастающий (относительно $\subset$) фильтр $\mathfrak{B}$, элементы которого образуют покрытие X. При этом множества из $\mathfrak{B}$ называют *ограниченными.* Отображение (или соответствие), действующее между множествами с борнологией, называют *ограниченным*, если образ всякого ограниченного множества является ограниченным множеством. *Борнологическим векторным пространством* называют пару $(X, \mathfrak{B})$, где X — векторное пространство, а $\mathfrak{B}$ — борнология, согласованная с векторной структурой в том смысле, что отображения $(x, y) \mapsto x+y$ из $X \times X$ в X и $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ из $\mathbb{R} \times X$ в X являются ограниченными. Последнее, очевидно, равносильно замкнутости $\mathfrak{B}$ как относительно сложения множеств, так и умножения множества на положительные числа, а также относительно операции взятия уравновешенной оболочки. Множество всех ограниченных (эквинепрерывных) подмножеств топологического векторного пространства является борнологией, которую называют *канонической* (*эквинепрерывной*). Борнологию пространства $(X, \mathfrak{B})$ называют *выпуклой*, если фильтр $\mathfrak{B}$ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых множеств. При этом говорят, что $(X, \mathfrak{B})$ — выпуклое борнологическое пространство. Введем теперь понятие борнологической несплющенности и борнологического общего положения.

Пусть X — борнологическое векторное пространство. Пару конусов $\varkappa := (K_1, K_2)$ в X называют *борнологически несплющенной*, если коническое соответствие $\Phi_\varkappa$ из 3.1.6 является ограниченным (в смысле 3.1.6). Иными словами, $\varkappa$ борнологически несплющена, если $X = K_1 - K_2$ и для каждого ограниченного множества $A \subset X$ найдется такое ограниченное множество $B \subset X$, что

$$A \subset (B \cap K_1 - B \cap K_2) \cap (B \cap K_2 - B \cap K_1).$$

Говорят, что конусы K_1 и K_2 находятся в *борнологическом общем положении*, если выполнены условия:

(1) K_1 и K_2 воспроизводят (алгебраически) некоторое подпространство $X_0 \subset X$, т. е. $X_0 = K_1 - K_2$;

(2) подпространство X_0 борнологически дополняемо, т. е. существует линейный ограниченный проектор π в X, для которого $X_0 = \pi(X)$;

(3) (K_1, K_2) — борнологически несплющенная пара в X_0.

Если $K := K_1 = K_2$, то естественно говорить о *борнологически несплющенном конусе* K.

Конечный набор конусов $K_1, \dots, K_n$ находится в *борнологическом общем положении*, если пара конусов $K_1 \times \ldots \times K_n$ и $\Delta_n(X)$ находится в борнологическом общем положении. Понятно, как распространить понятие борнологического общего положения на конечное семейство выпуклых множеств.

Аналогично определяют борнологическую нормальность. Конус K в борнологическом векторном пространстве называют *борнологически нормальным*, если множество $(B+K) \cap (B-K)$ ограничено для любого ограниченного B. *Борнологическим K-пространством* назовем такое K-пространство, которое одновременно является борнологическим векторным пространством и при этом положительный конус борнологически нормален. Наконец, обозначим символом $\partial^b P$ множество всех линейных ограниченных операторов, содержащихся в субдифференциале $\partial^a P$, если P действует в борнологических векторных пространствах.

3.2.19. *Пусть X — борнологическое векторное пространство, E — борнологическое K-пространство и $P_1, \dots, P_n : X \to E^\bullet$ — сублинейные операторы. Если конусы $\operatorname{epi}(P_1 \times \ldots \times P_n)$ и $\Delta_n(X) \times E^n$ находятся в борнологическом общем положении, то имеет место представление*

$$\partial^b(P_1 + \ldots + P_n) = \partial^b P_1 + \ldots + \partial^b P_n.$$

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из 3.2.4 и 3.2.8 с очевидными модификациями. $\rhd$

3.3. Исчисление поляр

Цель текущего параграфа — получить все основные формулы вычисления поляр конических отрезков и калибров. Решение этой задачи включает два этапа: построение функционала Минковского составного конического отрезка и нахождение субдифференциала составного сублинейного функционала. Первый этап сводится к простому вычислению, второй основан на методе общего положения.

3.3.1. Пусть X — вещественное векторное пространство. Под *функционалом Минковского* непустого множества $C \subset X$ понимают функцию $\mu(C) : X \to \mathbb{R}^\bullet$, определяемую формулой

$$\mu(C) : x \mapsto \inf(H(C)(x)),$$

где $H(C)$ — преобразование Хёрмандера множества C (см. 1.2.6). Итак, в более подробной записи

$$\mu(C)(x) = \inf\{\lambda > 0 : \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \lambda C\} \quad (x \in X).$$

Из 1.2.6 (1) и предложения 1.3.5 видно, что для выпуклого множества C отображение $\mu(C)$ — положительный сублинейный функционал, т. е. $\mu(C) \in \operatorname{Cal}(X)$. Тем самым возникает отображение μ из $\operatorname{CS}(X) \setminus \{\varnothing\}$ в множество всех калибров $\operatorname{Cal}(X)$. Функционал Минковского $\mu(C)$ часто называют также *калибром* или *калибровочной функцией* множества C.

3.3.2. Рассмотрим простейшие свойства отображения μ.

(1) *Для любого выпуклого множества C будет*

$$\mu(C) = \mu(\operatorname{sco}(C)).$$

$\lhd$ Пусть $C' := \operatorname{sco}(C) := \operatorname{co}(C \cup \{0\})$. Очевидно неравенство $\mu(C') \leqslant \mu(C)$, ибо $H(C) \subset H(C')$. Возьмем $0 \neq x \in \operatorname{dom}(\mu(C'))$ и число $\varepsilon > 0$. По определению μ существует строго положительное $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $\lambda \leqslant \mu(C')(x) + \varepsilon$ и $x \in \lambda C'$. Благодаря 1.1.6 (7) $C' = \bigcup\{\alpha C : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$. Значит, $x \in \alpha\lambda C$ для подходящего $0 < \alpha \leqslant 1$. Отсюда $\mu(C)(x) \leqslant \alpha\lambda \leqslant \lambda \leqslant \mu(C') + \varepsilon$. Устремив ε к нулю, приходим к соотношению $\mu(C) \leqslant \mu(C')$. $\rhd$

Установленный факт позволяет ограничиться изучением функционала Минковского лишь для конических отрезков. Ввиду этого в дальнейшем мы будем рассматривать отображение μ только на множестве $\operatorname{CSeg}(X)$.

(2) *Для любых $C, D \in \operatorname{CSeg}(X)$ неравенство $\mu(C) \leqslant \mu(D)$ выполнено в том и только в том случае, если $tD \subset sC$ для любых $0 < t < s$.*

$\lhd$ Пусть $\mu(C) \leqslant \mu(D)$, и возьмем $0 < t < s \in \mathbb{R}$. Если $x \in tD$, то $\mu(C)(x) \leqslant \mu(D) \leqslant t < s$, значит, существует число $\mu(C)(x) \leqslant r < s$, для которого $x \in rC \subset sC$. Тем самым $tD \subset sC$. Если же выполнено последнее включение при всех $0 < t < s \in \mathbb{R}$ и $\mu(D)(x) < t$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$, то можно подобрать число $r < t$, удовлетворяющее условию $x \in rD$, поэтому $x \in tD \subset sC$. Отсюда $\mu(C)(x) \leqslant s$. Итак, $\mu(D)(x) < t$ влечет $\mu(C)(x) \leqslant t$, следовательно, $\mu(C)(x) \leqslant \mu(D)(x)$. $\rhd$

(3) *Для произвольных $p \in \operatorname{Cal}(X)$ и $C \in \operatorname{CSeg}(X)$ выполнено $p = \mu(C)$ тогда и только тогда, когда $\{p < 1\} \subset C \subset \{p \leqslant 1\}$, где $\{p < 1\} := \{x \in X : p(x) < 1\}$ и $\{p \leqslant 1\} := \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$.*

$\lhd$ Если $B := \{p < 1\}$ и $D := \{p \leqslant 1\}$, то при $0 < t < s$ имеем $tD = s(t/s)D \subset sB$, так как $(t/s)D = \{p \leqslant t/s\}$ и $t/s < 1$. Стало быть, $\mu(D) \geqslant \mu(B)$. Но, с другой стороны, по очевидным соображениям должно быть $p \leqslant \mu(D) \leqslant \mu(C) \leqslant p$. Теперь ясно, что при $B \subset C \subset D$ будет $p = \mu(C)$. Если же $p = \mu(C)$, то видно непосредственно, что $B \subset C \subset D$. $\rhd$

(4) *Множество нулей $\{\mu(C) = 0\} := \{x \in X : \mu(C)(x) = 0\}$ функционала Минковского $\mu(C)$ совпадает с множеством $\bigcap\{tC :$

$0 \leqslant t \in \mathbb{R}$. *Если конический отрезок C алгебраически замкнут, то $\{\mu(C) = 0\}$ совпадает с рецессивным конусом множества C; символически:* $\{\mu(C) = 0\} = \operatorname{rec}(C)$.

$\triangleleft$ Из определения функционала Минковского видно, что равенство $\mu(C)(x) = 0$ имеет место в том и только в том случае, если $x \in tC$ для каждого $t > 0$. Вторая часть вытекает из 1.2.8 (4). $\triangleright$

(5) *Функция $\mu(C)$ — наибольший сублинейный функционал, удовлетворяющий включению $H(C) \subset \operatorname{epi}(\mu(C))$.*

$\triangleleft$ Следует из 1.3.5, так как $\mu(C)(x) = \inf\{H(C)(x)\}$. $\triangleright$

(6) *Для каждого $x \in X$ будет $\mu(-C)(x) = \mu(C)(-x)$.*

$\triangleleft$ Очевидно из определения $\mu(C)$. $\triangleright$

(7) *Эффективное множество функционала $\mu(C)$ совпадает с конической оболочкой множества C; символически:* $\operatorname{dom}(\mu(C)) = \operatorname{cone}(C)$.

$\triangleleft$ Как видно из 3.3.1, эффективное множество $\operatorname{dom}(\mu(C))$ совпадает с $\bigcup\{\lambda C : 0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}\}$. Остается сослаться на 1.1.8 (2). $\triangleright$

(8) *Функционал $\mu(C)$ конического отрезка C всюду определен в том и только в том случае, если C — поглощающее множество; символически:* $\operatorname{dom}(\mu(C)) = X \leftrightarrow 0 \in \operatorname{core}(C)$.

$\triangleleft$ Ввиду (7) функционал $\mu(C)$ всюду определен в том и только в том случае, если $X = \bigcup\{\lambda C : 0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}\}$. Последнее же равносильно соотношению $0 \in \operatorname{core}(C)$. $\triangleright$

(9) *Функционал $\mu(C)$ является полунормой, если C — абсолютно выпуклое поглощающее множество.*

$\triangleleft$ Следует из (6) и (8), так как абсолютно выпуклое множество является симметричным, а всюду определенный сублинейный функционал p будет полунормой лишь в том случае, если $p(x) = p(-x)$ для всех $x \in X$. $\triangleright$

(10) *Функционал $\mu(C)$ является нормой, если C — абсолютно выпуклое поглощающее множество, не содержащее лучей.*

$\triangleleft$ Следует из (4) и (9). $\triangleright$

(11) *Пусть C — поглощающий конический отрезок в X и $p := \mu(C)$. Тогда множества $\{p < 1\}$ и $\{p \leqslant 1\}$ совпадают соответственно с алгебраической внутренностью и алгебраическим замыканием C.*

$\triangleleft$ Согласно (8) имеем $\operatorname{dom}(p) = X$. Отсюда легко выводится алгебраическая открытость множеств $\{p < 1\}$ и $X \backslash \{p \leqslant 1\} = \{p > 1\}$. В самом деле, если $p(x_0) < 1$ и $p(y_0) > 1$, то для любого $h \in X$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет $p(x_0 + \varepsilon h) \leqslant p(x_0) + \varepsilon p(h) < 1 + \varepsilon p(h) < 1$ и $1 < p(x_0) - \varepsilon p(h) \leqslant p(x_0 + \varepsilon h)$, поэтому $x_0 \in \operatorname{core}(\{p < 1\})$ и $y_0 \in \operatorname{core}(X \setminus \{p \leqslant 1\})$. Далее, если $x_0 \in \operatorname{core}(C)$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ должно быть $(1 + \varepsilon)x_0 \in C$, и предположение $p(x_0) = 1$ ведет к противоречию: $p((1 + \varepsilon)x_0) = 1 + \varepsilon > 1$. Следовательно, $\operatorname{core}(C) \subset \{p < 1\}$. Остается заметить, что если x_0 не входит в алгебраическое замыкание C, то для некоторого $0 < \varepsilon < 1$ будет $(1 - \varepsilon)x_0 \notin C$, поэтому $p((1 - \varepsilon)x_0) \geqslant 1$ и $p(x_0) \geqslant 1/(1 - \varepsilon) > 1$, т. е. $x \notin \{p \leqslant 1\}$. $\triangleright$

3.3.3. Рассмотрим двойственность между вещественными векторными пространствами $X \leftrightarrow Y$, чья билинейная форма обозначена символом $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Если не оговорено противное, то двойственность считается отделимой, т. е. *бра-отображение* $x \mapsto \langle x|$ $(x \in X)$ и *кет-отображение* $y \mapsto |y\rangle$ $(y \in Y)$, где

$$\langle x| : y \mapsto \langle x|y\rangle, \ |y\rangle : x \mapsto \langle x|y\rangle \quad (x \in X, \, y \in Y),$$

мы считаем инъективными (вложениями) X в $Y^{\#}$ и Y в $X^{\#}$ соответственно. Как обычно, $X^{\#}$ обозначает алгебраически сопряженное пространство к X: $X^{\#} := L(X, \mathbb{R})$. Без специальных оговорок мы будем пользоваться удобным и обычным в рассматриваемой ситуации отождествлением X с подпространством в $Y^{\#}$, а Y — с подпространством в $X^{\#}$. При этом билинейная форма двойственности $X \leftrightarrow Y$ индуцируется билинейной формой двойственности $X \leftrightarrow X^{\#}$ (в случае отождествления Y с подпространством $X^{\#}$):

$$(x, x^{\#}) \mapsto \langle x|x^{\#}\rangle := x^{\#}(x) \quad (x \in X, \ x^{\#} \in X^{\#}).$$

Если двойственность фиксирована, то, говоря о топологическом субдифференциале, мы имеем в виду любую локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью. Так, если $p \in \operatorname{Sbl}(X)$, то по определению

$$\partial p := \{y \in Y : \langle x|y\rangle \leqslant p(x) \ (x \in X)\} = (\partial^a p) \cap Y.$$

Сформулируем теперь основные определения текущего параграфа. *Полярой C° выпуклого множества $C \subset X$* называют множество

$\partial\mu(C) \subset Y$, а *полярой* p° *сублинейного функционала* $p : X \to \mathbb{R}$ называют функцию $\mu(\partial p) : Y \to \mathbb{R}^\bullet$. В более подробной записи

$$C^\circ := \{y \in Y : \ \langle x|y\rangle \leqslant 1 \quad (x \in C)\},$$
$$p^\circ := \inf\{\lambda > 0 : \ y \in \lambda\partial p\} \quad (y \in Y).$$

Аналогично определяют поляры множества $D \subset Y$ и сублинейного функционала $q : X \to \mathbb{R}^\bullet$, так что

$$D^\circ := \{x \in X : \langle x|y\rangle \leqslant 1 \ (y \in D)\},$$
$$q^\circ := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\partial q\} \quad (x \in X),$$

где $\partial q := (\partial^a q) \cap X$. *Биполяру* $C^{\circ\circ}$ *множества* $C \subset X$ и *биполяру* $p^{\circ\circ}$ *сублинейного функционала* $p : X \to \mathbb{R}^\bullet$ определяют, как обычно, формулами

$$C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ, \quad p^{\circ\circ} := (p^\circ)^\circ.$$

Заметим, что если $D := \mathrm{sco}(C)$ и $q := p \vee 0$ — соответственно наименьший конический отрезок, содержащий C, и наименьший калибр, мажорирующий p, то $C^\circ = D^\circ$ и $p^\circ = q^\circ$. Это следует из 3.3.2 (1) и соотношения $\partial(p \vee 0) = \mathrm{co}(\partial p \cup \{0\})$. Таким образом, при изучении поляр можно ограничиться рассмотрением лишь конических отрезков и калибров.

Операторами поляры назовем следующие две композиции:

$$\partial \circ \mu : \mathrm{CSeg}(X) \to \mathrm{CSeg}(Y),$$
$$\mu \circ \partial : \mathrm{Cal}(X) \to \mathrm{Cal}(Y).$$

Оставшаяся часть текущего параграфа посвящена следующему вопросу: как преобразуют операторы поляры различные операции в $\mathrm{CSeg}(X)$ и $\mathrm{Cal}(X)$? Разумеется, что для решения поставленной задачи нужно найти ответы на аналогичные вопросы для каждого из операторов ∂ и μ в отдельности. Случай оператора ∂ обслуживает метод общего положения, изложенный в предыдущем параграфе. Следовательно, необходимо изучить подробнее оператор μ.

3.3.4. *Пусть X и Y — вещественные векторные пространства. Предположим, что $A, B \in \mathrm{CSeg}(X)$, $C \in \mathrm{CSeg}(Y)$, $(A_\xi) \subset \mathrm{CSeg}(X)$, $T \in L(X, Y)$ и $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Тогда справедливы формулы:*

(1) $\mu(A \cap B) = \mu(A) \vee \mu(B)$;

(2) $\mu\big(\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} A_\xi\big) = \inf\limits_{\xi\in\Xi}(\mu(A_\xi))$;

(3) $\mu(B \times C)(x, y) = \mu(B)(x) \vee \mu(C)(y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$;

(4) $\mu(T(B))(y) = \inf\{\mu(B)(x) : Tx = y\}$ $(y \in Y)$;

(5) $\mu(\alpha * A) = \alpha\mu(A)$;

(6) $\mu(\alpha \cdot A) = \alpha * \mu(A)$ *(здесь A алгебраически замкнут).*

$\triangleleft$ (1): Если A — конический отрезок, то множество $H(A)(x)$ насыщенно вверх, т. е. из $t \in H(A)(x)$ и $s \geqslant t$ следует, что $s \in H(A)(x)$. Благодаря этому выполнено

$$\inf(H(A)(x) \cap H(B)(x)) = \inf(H(A)(x)) \vee \inf(H(B)(x)).$$

Осталось заметить, что

$$H(A \cap B)(x) = H(A)(x) \cap H(B)(x).$$

(2): Отметим, что

$$H\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\right)(x) = \bigcup_{\xi\in\Xi} H(A_\xi)(x).$$

Отсюда ввиду ассоциативности точных нижних границ получим

$$\inf\left(H\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\right)(x)\right) = \inf_{\xi\in\Xi}\inf(H(A_\xi)(x)),$$

а это равносильно требуемому.

(3): Отправляясь от очевидного соотношения $H(A \times B)(x, y) = H(A)(x) \cap H(B)(y)$, по тем же соображениям, что и в (1), приходим к требуемому.

(4): Как видно, соотношение $y \in \lambda T(B)$, где $\lambda > 0$, выполнено в том и только в том случае, если $y = Tx$ для некоторого $x \in \lambda B$. Следовательно,

$$H(T(B))(y) = \bigcup\{H(B)(x) : Tx = y\}.$$

Остается применить ассоциативность точных границ (см. (2)).

(5): При $\alpha > 0$ требуемое равносильно формуле $\mu(\alpha^{-1}A) = \alpha\mu(A)$ (см. 1.5.9), которая легко выводится из определения функционала Минковского. Если же $\alpha = 0$, то, используя (2), можно написать:

$$\mu(0 * A) = \mu(\mathrm{cone}(A)) = \mu\biggl(\bigcup_{\alpha>0} \alpha^{-1}A\biggr) =$$
$$= \inf_{\alpha>0} \alpha\mu(A) = \delta_{\mathbb{R}}(\mathrm{dom}(\mu(A))) = 0\mu(A).$$

(6): При $\alpha > 0$ требуемая формула совпадает с (5). Неочевидным здесь может быть лишь случай $\alpha = 0$. Однако по смыслу операций $\cdot$ и $*$, введенных в 1.1.6 (5) и 1.5.9 соответственно, для $\alpha = 0$ требуемое совпадает с формулой

$$\mu(\mathrm{rec}(A)) = \delta_{\mathbb{R}}(\{\mu(A) = 0\}),$$

которая в случае алгебраически замкнутого A вытекает из 3.3.2 (4) и из того, что для любого конуса K верно $\mu(K) = \delta_R(K)$. $\triangleright$

3.3.5. *Теорема.* *Пусть $\Gamma \subset X \times Y$ и $\Delta \subset Y \times Z$ — выпуклые соответствия, причем $0 \in \Gamma(0)$ и $0 \in \Delta(0)$. Тогда справедлива формула:*

$$\mu(\Delta \circ \Gamma) = \mu(\Delta) \odot \mu(\Gamma).$$

Если сверх сказанного Γ и Δ алгебраически замкнуты, то

$$\mu(\Delta \odot \Gamma) = \mu(\Delta) \vartriangle \mu(\Gamma).$$

$\triangleleft$ Положим $p := \mu(\Delta \circ \Gamma)$, $q := \mu(\Gamma)$, $r := \mu(\Delta)$, $q_0 := \mu(\Gamma \times Z)$, $r_0 := \mu(X \times \Delta)$. Заметим, что имеют место соотношения

$$\Delta \circ \Gamma = \Pi((\Gamma \times Z) \cap (X \times \Delta)),$$
$$q_0(w) = q(x, y),\ r_0(w) = r(y, z),$$

где $\Pi : w \mapsto (x, z)$ и $w := (x, y, z)$. Теперь последовательным применением 3.3.4 (4), 3.3.4 (1) и 3.3.4 (3) приходим к первому из требуемых равенств:

$$\begin{aligned}p(x,z) &= \mu(\Pi((\Gamma\times Z)\cap(X\times\Delta)))(x,z) =\\ &= \inf\{\mu((\Gamma\times Z)\cap(X\times\Delta))(\omega) : y\in Y\} =\\ &= \inf\{(q_0\vee r_0)(\omega) : y\in Y\} =\\ &= \inf\{q(x,y)\vee r(y,z) : y\in Y\} =\\ &= p\odot q(x,z).\end{aligned}$$

Для доказательства второго равенства потребуется следующий вспомогательный факт. Если $s,t\in\mathbb{R}^+$, то

$$u := \inf_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{R}\\ \alpha>0,\beta>0\\ \alpha+\beta=1}} \max\left\{\frac{s}{\alpha},\frac{t}{\beta}\right\} = s+t.$$

Действительно, при $s+t\neq 0$, полагая $\alpha := s/(s+t)$ и $\beta := t/(s+t)$, получим $u\leqslant s+t$. С другой стороны,

$$u = \inf_{\substack{\alpha>0,\beta>0\\ \alpha+\beta=1}} \sup_{\substack{\varepsilon\geqslant0,\delta\geqslant0\\ \varepsilon+\delta=1}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}s+\frac{\delta}{\beta}t\right) \geqslant s+t.$$

Случай, когда $s+t=0$, тривиален.

Положим теперь $p := \mu(\Delta\odot\Gamma)$, $q := \mu(\Gamma)$, $r := \mu(\Delta)$. Введем также обозначения $a := \inf\{q(x,y) :\ y\in Y,\ r(y,z)=0\}$ и $b := \inf\{r(y,z) : y\in Y,\ q(x,y)=0\}$ и заметим, что $r\vartriangle q(x,z)\leqslant a\wedge b$. Пользуясь уже доказанной выше формулой и привлекая правила 3.3.4 (2, 5), получим

$$\begin{aligned}p(x,z) &= \inf_{\substack{\alpha,\beta\geqslant0\\ \alpha+\beta=1}} (\alpha * r)\odot(\beta * q)(x,z)) =\\ &= a\wedge b\wedge \inf_{y\in Y}\inf_{\substack{\alpha,\beta>0\\ \alpha+\beta=0}}\left(\frac{1}{\beta}q(x,y)\vee\frac{1}{\alpha}r(y,z)\right) =\\ &= a\wedge b\wedge\inf_{y\in Y}(q(x,y)+r(y,z)) =\\ &= r\vartriangle q(x,z),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\rhd$

3.3.6. Отметим несколько простых следствий.

(1) *Пусть* $C \in \mathrm{CSeg}(X)$ *и* $\Gamma \subset X \times Y$ — *выпуклое соответствие, причем* $0 \in \Gamma(0)$. *Тогда*

$$\mu(\Gamma(C))(y) = \inf\{\mu(C)(x) \vee \mu(\Gamma)(x, y) : x \in X\}.$$

$\lhd$ Положим $\Delta := Y \times C$ и заметим, что $\Gamma \circ \Delta = Y \times \Gamma(C)$. Как видно,

$$\mu(Y \times D(u, v) = \mu(D)(y) \quad (u, y \in Y),$$

поэтому достаточно применить 3.3.5 к композиции $\Gamma \circ \Delta$. $\rhd$

(2) *Если* Γ — *коническое соответствие, то*

$$\mu(\Gamma(C))(y) = \inf\{\mu(C)(x) : y \in \Gamma(x)\}.$$

$\lhd$ В этом случае $\mu(\Gamma) = \delta_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и требуемое следует из (1). $\rhd$

(3) *Если* $\Gamma \in L(Y, X)$, *то*

$$\mu(\Gamma^{-1}(C)) = \mu(C) \circ \Gamma.$$

3.3.7. Возьмем полулинейную решетку $\mathrm{CS}^+(X)$, введенную в 1.5.9, и изменим в ней умножение на нуль следующим образом: $0 \circ C := \bigcap\{\lambda C : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$. Согласно 1.2.8 (4) для алгебраически замкнутых конических отрезков новое умножение совпадает со старым, т. е. $0 \circ C = 0 \cdot C$. Для $\alpha > 0$ положим $\alpha \circ C = \alpha \cdot C = \alpha C$. Полученную таким образом алгебраическую систему обозначим символом $\mathrm{CS}^+_\circ(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{CS}^+_\circ(X) := (\mathrm{CSeg}(X),\, +,\, \circ,\, \leqslant).$$

Легко понять, что $\mathrm{CS}^+_\circ(X)$ — порядково полная коническая полурешетка. Обозначим символом $\mathrm{CS}^\#_{\mathrm{cl}}(X)$ часть $\mathrm{CS}^\#(X)$ (см. 1.5.9), состоящую из алгебраически замкнутых конических отрезков.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *отображение* μ *является алгебраическим и решеточным гомоморфизмом из* $\mathrm{CS}^+_\circ(X)$ *на* $\mathrm{Cal}^\#(X)$*;*

(2) *отображение* μ *является алгебраическим и решеточным гомоморфизмом из* $\mathrm{CS}^\#_{\mathrm{cl}}(X)$ *на* $\mathrm{Cal}^+(X)$*;*

(3) *выполнены равенства* $\mu \circ \mathrm{sk} = \mathrm{sh} \circ \mu$ *и* $\mu \circ \mathrm{sh} = \mathrm{sk} \circ \mu$, *где* $\mathrm{sh}(p)(x) := \max\{p(x), p(-x)\}$ *и* $\mathrm{sk}(p)(x) := \inf\{p(x_1) + p(-x_2) : x_1 + x_2 = x\}$.

$\lhd$ Большая часть требуемого уже доказана в 3.3.2 и 3.3.4. Так, например, сюръективность отображения $\mu : \mathrm{CS}^{\#}_{\mathrm{cl}}(X) \to \mathrm{Cal}^{+}(X)$ следует из 3.3.2 (3). Остается лишь удостовериться в справедливости следующих формул:

(a) $\mu(A + B) = \mu(A)\#\mu(B)$;

(b) $\mu(\mathrm{co}(A \cup B)) = \mu(A) \oplus \mu(B)$;

(c) $\mu(A\#B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(a): Воспользуемся представлением $A + B = \Sigma(A \times B)$, где $\Sigma : X^2 \to X$ и $\Sigma(x, y) := x + y$. Благодаря правилам 3.3.4 (3, 4) верны соотношения

$$\begin{aligned}\mu(A + B)(x) &= \inf\{\mu(A \times B)(y, z) : y + z = x\} = \\ &= \inf\{\mu(A)(y) \vee \mu(B)(z) : y + z = x\} = \\ &= \mu(A)\#\mu(B).\end{aligned}$$

(b): Положим $\gamma := \min\{\mu(A)(x), \mu(B)(x)\}$. Привлекая формулу 3.3.4 (2) и доказанное в (a), можно написать

$$\mu(\mathrm{co}(A \cup B))(x) = \mu\Big(\bigcup\{\alpha A + \beta B : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+},\ \alpha + \beta = 1\}\Big)(x) =$$
$$= \gamma \wedge \inf\{\alpha * \mu(A)\#\beta * \mu(B)(x) :\ 0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta = 1\} =$$
$$= \gamma \wedge \inf_{x = y + z} \inf_{\substack{\alpha, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = 1}} \left(\frac{1}{\alpha}\mu(A)(y) \vee \frac{1}{\beta}\mu(B)(z)\right).$$

Отсюда, так же, как в 3.3.5, выводим

$$\mu(\mathrm{co}(A \cup B))(x) = \inf_{x = y + z}(\mu(A)(y) + \mu(B)(z)) = \mu(A) \oplus \mu(B)x.$$

(c): Как видно, $(A\#B) \times \{0\} = \Delta \odot \Gamma$, где $\Gamma := \Delta_2(A)$ и $\Delta := B \times \{0\}$. Если A и B алгебраически замкнуты, то Γ и Δ также алгебраически замкнуты. По теореме 3.3.5 будет

$$\mu(A\#B)(x) = \mu(\Delta) \vartriangle \mu(\Gamma)(x, 0) = \inf_{y \in X}(\mu(\Delta_2(A)(x, y) + \mu(B)(y)).$$

Нетрудно видеть, что $\mu(\Delta_2(A))(x, y) = \mu(A)(x)$ при том условии, что $x = y$ и $\mu(\Delta_2(A))(x, y) = +\infty$ в противном случае. Отсюда видно, что крайняя правая часть выписанной выше цепочки равенств совпадает с $\mu(A)(x) + \mu(B)(x)$. Это и требовалось установить. $\rhd$

3.3.8. Теперь имеется уже почти все необходимое для того, чтобы вывести формулы преобразования поляр. Прежде чем непосредственно переходить к вычислительным вопросам, отметим несколько нужных нам общих свойств отображений ∂ и μ, а также операторов поляры $\partial \circ \mu$ и $\mu \circ \partial$. Все они представляют собой простые следствия изложенных выше результатов и классической теоремы о биполяре, устанавливаемой в стандартных курсах функционального анализа. Дадим необходимые определения. Пусть фиксирована двойственность $X \leftrightarrow X'$. *Опорной функцией множества* $C \subset X$ называют отображение $s(C) : X' \to \mathbb{R}$, определяемое соотношением

$$s(C) : x' \mapsto \sup\{\langle x|x'\rangle : x \in C\}.$$

Очевидно, что опорная функция сублинейна и $s(C) = s(\mathrm{co}(C))$. Если $0 \in C$, то $s(C) \in \mathrm{Cal}(X')$. Калибр $p \in \mathrm{Cal}(X)$ называют *замкнутым*, если он имеет замкнутый надграфик $\mathrm{epi}(p) \subset X \times \mathbb{R}$ (в какой-нибудь, а тогда и в любой, локально выпуклой топологии на X, согласованной с двойственностью $X \leftrightarrow X'$).

Понятно, что опорная функция конического отрезка является замкнутым калибром.

(1) ***Теорема о биполяре.*** *Конический отрезок C совпадает со своей биполярой $C^{\circ\circ}$ в том и только в том случае, если он замкнут. Калибр p совпадает со своей биполярой $p^{\circ\circ}$ в том и только в том случае, если он замкнут.*

$\lhd$ Доказательство первой части можно найти, например, в [67, 74, 210, 212, 225]. Вторая часть без труда выводится из следующего утверждения, которое в более общей ситуации будет установлено в параграфе 4.3: *Для того чтобы сублинейный функционал $p : X \to \mathbb{R}$ совпадал с верхней огибающей множества всех непрерывных линейных функционалов, опорных к p (т. е. $p(x) = \sup\{lx : l \in \partial p\}$ $(x \in X)$), необходимо и достаточно, чтобы p был замкнут.* Из равенства $p = p^{\circ\circ}$ очевидно следует замкнутость p. Если же p замкнут, то в силу сказанного выше равенства $p = p^{\circ\circ}$ и $\partial p = \partial(p^{\circ\circ})$ равносильны. Но последнее легко выводится из определений и доказательства первой части:

$$\partial(p^{\circ\circ}) = \partial((\mu \circ \partial) \circ (\mu \circ \partial)p) = (\partial \circ \mu) \circ (\partial \circ \mu)(\partial p) = (\partial p)^{\circ\circ} = \partial p.$$

Последнее равенство верно согласно первой части, так как ∂p — замкнутый конический отрезок. $\rhd$

(2) *Отображение ∂ есть изотонная биекция между решетками замкнутых калибров на X и замкнутых конических отрезков в X'.*

(3) *Отображение μ устанавливает антитонную биекцию между решетками замкнутых конических отрезков в X и замкнутых калибров на X.*

(4) *Оператор поляры $\partial \circ \mu$ (соответственно $\mu \circ \partial$) устанавливает антитонную биекцию между решетками замкнутых конических отрезков в X и в X' (соответственно между решетками замкнутых калибров на X и на X').*

(5) *Функционал Минковского поляры конического отрезка равен поляре функционала Минковского этого конического отрезка: $\mu(C^\circ) = \mu(C)^\circ$.*

(6) *Субдифференциал в нуле поляры калибра равен поляре субдифференциала в нуле этого же калибра: $\partial(p^\circ) = (\partial p)^\circ$.*

(7) *Опорная функция поляры конического отрезка совпадет с полярой опорной функции самого конического отрезка; символически: $s(C^\circ) = s(C)^\circ$.*

(8) *Функционал Минковского и опорная функция каждого замкнутого конического отрезка — полярные калибры.*

(9) *Субдифференциал в нуле ∂p и лебегово множество $\{p \leqslant 1\}$ замкнутого калибра p — полярные друг к другу конические отрезки.*

3.3.9. Приведем правила вычисления поляр, для которых необходимые формулы субдифференцирования получены в 3.2. Как и ранее, X — локально выпуклое пространство.

(1) *Если замкнутые конические отрезки*

$$C_1, \dots, C_n \in \mathrm{CSeg}(X)$$

находятся в общем положении, то

$$(C_1 \# \dots \# C_n)^\circ = C_1^\circ + \dots + C_n^\circ.$$

Если калибры $p_1, \dots, p_n \in \mathrm{Cal}(X)$ находятся в общем положении, то

$$(p_1 + \dots + p_n)^\circ = p_1^\circ \# \dots \# p_n^\circ.$$

$\triangleleft$ Первая часть вытекает из 3.3.7 (c) и 3.2.8. Для обоснования второй части нужно применить сначала 3.2.8, а затем 3.3.7 (a). $\triangleright$

(2) *Если конические отрезки $C_1, \dots, C_n \in \mathrm{CSeg}(X)$ находятся в общем положении, то*

$$(C_1 \cap \dots \cap C_n)^\circ = \mathrm{co}(C_1^\circ \cup \dots \cup C_n^\circ).$$

Если надграфики калибров $p_1, \dots, p_n \in \mathrm{Cal}(X)$ находятся в общем положении, то

$$(p_1 \vee \dots \vee p_n)^\circ = p_1^\circ \oplus \dots \oplus p_n^\circ.$$

$\lhd$ Первое утверждение можно установить с помощью 3.3.4 (1) и 3.2.12. Второе утверждение — результат последовательного применения 3.2.12 и 3.3.7 (b). $\rhd$

(3) *Пусть соответствия $\Gamma \subset X \times Y$ и $\Delta \subset Y \times Z$ таковы, что $0 \in \Gamma(0)$, $0 \in \Delta(0)$ и конусы $H(\Gamma \times Z)$ и $H(X \times \Delta)$ находятся в общем положении. Тогда $(\Delta \circ \Gamma)^\circ = \Delta^\circ \odot \Gamma^\circ$. Если же сверх сказанного соответствия Γ и Δ замкнуты, то $(\Delta \odot \Gamma)^\circ = \Delta^\circ \circ \Gamma^\circ$.*

$\lhd$ Следует привлечь сначала 3.3.5, а затем 3.2.9 и 3.2.13. $\rhd$

(4) *Пусть калибры $p \in \mathrm{Cal}(X \times Y)$ и $q \in \mathrm{Cal}(Y, Z)$ таковы, что конусы $\mathrm{epi}(p, Z)$ и $\mathrm{epi}(X, q)$ находятся в общем положении. Тогда*

$$(q \vartriangle p)^\circ = q^\circ \odot p^\circ, \ (q \odot p)^\circ = q^\circ \vartriangle p^\circ.$$

$\lhd$ Следует привлечь 3.2.9 и 3.2.13, а затем 3.3.5. $\rhd$

3.3.10. Рассмотрим несколько следствий из 3.3.9 (3).

(1) *Пусть Γ — выпуклое соответствие из X в Y, причем $0 \in \Gamma(0)$. Если конический отрезок $C \in \mathrm{CSeg}(X)$ таков, что множества Γ и $C \times Y$ находятся в общем положении, то*

$$\Gamma(C)^\circ = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta=1}} (-\alpha \cdot \Gamma^\circ)(\beta \cdot C^\circ).$$

$\lhd$ Применим формулу 3.3.9 (3) к вычислению поляры $(\Gamma \circ \Delta)^\circ$, где $\Delta := Y \times C \subset Y \times X$. По условию множества $Y \times \Gamma$ и $\Delta \times Y = Y \times C \times Y$ находятся в общем положении, поэтому $(\Gamma \circ \Delta)^\circ = \{0\} \times (-\Gamma(C)^\circ)$. Заметим, что $\Gamma \circ \Delta = Y \times \Gamma(C)$, поэтому $(\Gamma \circ \Delta)^\circ = \{0\} \times (-\Gamma(C)^\circ)$. Таким образом,

$$\{0\} \times (-\Gamma(C)^\circ) = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta=1}} (\alpha \cdot \Gamma^\circ) \circ (\beta \cdot \{0\} \times (-C^\circ)) =$$

$$= \{0\} \times \left(\bigcup \{ (\alpha \cdot \Gamma^\circ)(-\beta \cdot C^\circ) : \alpha, \beta \geqslant 0, \, \alpha + \beta = 1 \} \right),$$

что равносильно требуемому представлению. $\triangleright$

(2) *Если* Γ *и* C *удовлетворяют условиям* (1), *то выполнены включения*

$$-\frac{1}{2}\Gamma^\circ(-C^\circ) \subset \Gamma(C)^\circ \subset -\Gamma^\circ(-C^\circ).$$

(3) *Если выполнены условия предложения* (*1*) *и, сверх того,* Γ — *коническое соответствие, то*

$$\Gamma(C)^\circ = -\Gamma^\circ(-C^\circ).$$

Если же Γ — *линейное соответствие, то*

$$\Gamma(C)^\circ = \Gamma^\circ(C^\circ).$$

(4) Если $T : X \to Y$ — слабо непрерывный линейный оператор, то множества $C \times Y$ и T находятся в общем положении (в слабой топологии). Более того, сопряженный оператор $T' := (T^\circ)^{-1} : Y' \to X'$ также слабо непрерывен, а множества T° и $X' \times D$ находятся в общем положении (относительно слабых топологий в X' и Y'). Следовательно, выполнены следующие хорошо известные в функциональном анализе соотношения:

$$T(C)^\circ = {T'}^{-1}(C^\circ), \quad T'(D)^\circ = T^{-1}(D^\circ).$$

В частности, при $C = X$ и $D = Y'$ мы получим

$$\mathrm{cl}(T(X)) = (\ker(T'))^\circ, \quad \mathrm{cl}(T'(Y')) = (\ker(T))^\circ.$$

3.3.11. По изложенной выше схеме могут быть сосчитаны и более сложно устроенные поляры. Ограничимся рассмотрением лишь еще одного случая, а именно поляры правой частичной суммы соответствий. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — выпуклые соответствия из X в Y. Определим *правую инверсную* (*частичную*) *сумму* $\Gamma_1 \dot{\#} \dots \dot{\#} \Gamma_n$ этих соответствий формулой

$$\Gamma_1 \dot{\#} \dots \dot{\#} \Gamma_n := \bigcup_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1}} (\alpha_1 \Gamma_1 \dotplus \dots \dotplus \alpha_n \Gamma_n).$$

Заменив $\dot{+}$ на $\underset{\cdot}{+}$, получим определение *левой инверсной суммы* $\underset{\cdot}{\#}$. Можно показать, что правая (левая) инверсная сумма выпуклых соответствий есть выпуклое соответствие. Введем обозначения:

$$(X^{n-1}\Gamma_l) := \{(x_1, \dots, x_n, y) \in X^n \times Y : \ (x_l, y) \in \Gamma_l\},$$
$$(\Gamma_l Y^{n-1}) := \{(x, y_1, \dots, y_n) \in X \times Y^n : \ (x, y_l) \in \Gamma_l\}.$$

Пусть выпуклые соответствия $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *из* X *в* Y *таковы, что* $0 \in \Gamma_l(0)$ $(l := 1, \dots, n)$. *Если множества* $(\Gamma_l Y^{n-1})$ $(l := 1, \dots, n)$ *находятся в общем положении, то*

$$(\Gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \Gamma_n)^\circ = \Gamma_1^\circ \dot{\#} \dots \dot{\#} \Gamma_n^\circ.$$

Если же в общем положении находятся множества $(X^{n-1}\Gamma_l)$ $(l := 1, \dots, n)$, *то выполнено*

$$(\Gamma_1 \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \Gamma_n)^\circ = \Gamma_1^\circ \underset{\cdot}{\#} \dots \underset{\cdot}{\#} \Gamma_n^\circ.$$

$\triangleleft$ Стандартный путь обоснования указанных формул — вычисление функционала Минковского частичной суммы с последующим применением нужных правил субдифференцирования. Однако можно воспользоваться уже готовыми формулами для подсчета поляр, полученными в предыдущих пунктах. Для этой цели представим правую сумму в виде

$$\Gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \Gamma_n = \Lambda \bigg(\bigcap_{l=1}^{n} (\Gamma_l Y^{n-1}) \bigg),$$

где $\Lambda : X \times Y^n \to X \times Y$ действует по правилу $\Lambda : (x, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x, y_1 + \dots + y_n)$. Легко видеть, что сопряженный оператор $\Lambda' : X' \times Y' \to X' \times (Y'^n)$ имеет вид

$$\Lambda' : (x', y') \mapsto (x', y', \dots, y').$$

В силу 3.3.10 (4) можно написать

$$(\Gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \Gamma_n)^\circ = \Lambda'^{-1} \left(\bigg(\bigcap_{l=1}^{n} (\Gamma_l Y^{n-1}) \bigg)^\circ \right).$$

Очевидно, что поляра $(\Gamma_l Y^{n-1})^\circ$ совпадает с множеством наборов $(x', y'_1, \dots, y'_n)$ таких, что $(x', y'_l) \in \Gamma_l^\circ$ и $y'_k = 0$ при $k \neq l$.

Учитывая условие общего положения, можно воспользоваться формулой 3.3.10 (2), следовательно,

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_1 \dotplus \ldots \dotplus \Gamma_n)^\circ = \Lambda'^{-1}\left(\mathrm{co}\left(\bigcup_{l=1}^{n}(\Gamma_l Y^{n-1})^\circ\right)\right) = \\
= \bigcup_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=1}} \Lambda'^{-1}\left(\left\{\sum_{l=1}^{n}\alpha_l(x', y'_l) : y'_l \in \Gamma_l^\circ(x')\right\}\right) = \\
= \bigcup_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=1}} (\alpha_1\Gamma_1^\circ) \dotplus \ldots \dotplus (\alpha_n\Gamma_n^\circ) = \Gamma_1^\circ \dot{\#} \ldots \dot{\#} \Gamma_n^\circ.
\end{aligned}
$$

Совершенно ясно, что если множества $(X^{n-1}\Gamma_l)$ $(l := 1, \dots, n)$ находятся в общем положении, то в силу доказанного будет выполнено также второе из требуемых соотношений. $\rhd$

3.3.12. Выясним, как вычисляются поляры конических отрезков и калибров, если не требовать условия общего положения. Напомним, что для $C \in \mathrm{CSeg}(X)$ и $p \in \mathrm{Cal}(X)$ выполнены равенства $C^{\circ\circ} = \mathrm{cl}(C)$ и $p^{\circ\circ} = \mathrm{cl}(p)$, где $\mathrm{cl}(C)$ — замыкание C в слабой (или в любой согласованной с $X \leftrightarrow X'$) топологии, а $\mathrm{cl}(p)$ определено соотношением $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(p)) = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}(p))$ или по любой из формул $\mathrm{cl}(p) := \mu(\mathrm{cl}\{p \leqslant 1\})$, $\mathrm{cl}(p) := s(\partial p)$ (см. 3.3.8).

Для любых $C_1, \dots, C_n \in \mathrm{CSeg}(X)$ и $p_1, \dots, p_n \in \mathrm{Cal}(X)$ справедливы представления:

(1) $(C_1 \cup \ldots \cup C_n)^\circ = C_1^\circ \cap \ldots \cap C_n^\circ$;

(2) $(p_1 \oplus \ldots \oplus p_n)^\circ = p_1^\circ \vee \ldots \vee p_n^\circ$;

(3) $(C_1 + \ldots + C_n)^\circ = C_1^\circ \# \ldots \# C_n^\circ$;

(4) $(p_1 \# \ldots \# p_n)^\circ = p_1^\circ + \ldots + p_n^\circ$;

(5) $(\mathrm{cl}(C_1) \cap \ldots \cap \mathrm{cl}(C_n))^\circ = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(C_1 \cup \ldots \cup C_n))$;

(6) $(\mathrm{cl}(p_1) \vee \ldots \vee \mathrm{cl}(p_n))^\circ = \mathrm{cl}(p_1^\circ \oplus \ldots \oplus p_n^\circ)$;

(7) $(\mathrm{cl}(C_1) \# \ldots \# \mathrm{cl}(C_n))^\circ = \mathrm{cl}(C_1^\circ + \ldots + C_n^\circ)$;

(8) $(\mathrm{cl}(p_1) + \ldots + \mathrm{cl}(p_n))^\circ = \mathrm{cl}(p_1^\circ \# \ldots \# p_n^\circ)$.

$\lhd$ Формулы (1)–(4) вытекают непосредственно из 3.2.14 (1, 2) и 3.3.7 (1). Далее, по теореме о биполяре

$$A := \mathrm{cl}(\mathrm{co}(C_1^\circ \cup \ldots \cup C_n^\circ)) = (C_1^\circ \cup \ldots \cup C_n^\circ)^{\circ\circ}.$$

Учитывая (1) и привлекая вновь теорему о биполяре, получим

$$A = (C_1^{\circ\circ} \cap \ldots \cap C_n^{\circ\circ})^\circ = (\mathrm{cl}(C_1) \cap \ldots \cap \mathrm{cl}(C_n))^\circ.$$

Тем самым доказано (5). Применив теперь (2) к соотношению

$$p := \mathrm{cl}(p_1^\circ \oplus \ldots \oplus p_n^\circ) = (p_1^\circ \oplus \ldots \oplus p_n^\circ)^{\circ\circ},$$

приходим к равенству $p = (p_1^{\circ\circ} \oplus \ldots \oplus p_n^{\circ\circ})^\circ$, которое равносильно (6). Аналогично выводятся (7) и (8). $\triangleright$

3.3.13. Сложнее обстоит дело с операциями композиции и инверсной композиции.

(1) *Для любых замкнутых выпуклых соответствий* $\Gamma \subset X \times Y$ *и* $\Delta \subset Y \times Z$ *выполнены эквивалентности*

$$(x', z') \in (\Delta \circ \Gamma)^\circ \leftrightarrow (x', 0, z') \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\Gamma^\circ \times \{0\} \cup -\{0\} \times \Delta^\circ)),$$
$$(x', z') \in (\Delta \odot \Gamma)^\circ \leftrightarrow (x', 0, z') \in \mathrm{cl}(\Gamma^\circ \times \{0\} - \{0\} \times \Delta^\circ).$$

$\triangleleft$ Докажем первое утверждение, второе выводится аналогично. Напомним, что $\Delta \circ \Gamma = \Pi((\Gamma \times Z) \cap (X \times \Delta))$, где $\Pi : (x, y, z) \mapsto (x, z)$. Если $B = \Delta \circ \Gamma$, то согласно 3.3.6 (2)

$$\mu(B)(x, z) = \inf_{y \in Y} (\mu(\Gamma \times Z) \cap (X \times \Delta))(x, y, z)).$$

Следовательно, $(x', z') \in \partial\mu(B) = (\Delta \circ \Gamma)^\circ$ в том и только в том случае, если

$$(x', 0, z') \in ((\Gamma \times Z) \cap (X \times \Delta))^\circ.$$

Остается привлечь 3.3.12 (5) и заметить, что $(\Gamma \times Z)^\circ = \Gamma^\circ \times \{0\}$ и $(X \times \Delta)^\circ = \{0\} \times (-\Delta^\circ) = -\{0\} \times \Delta^\circ$. $\triangleright$

(2) *Если* Γ — *замкнутое выпуклое соответствие из* X *в* Y, *то для любого* $C \in \mathrm{CSeg}(X)$ *выполнена эквивалентность*

$$y' \in \Gamma(\mathrm{cl}(C))^\circ \leftrightarrow (0, y') \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}((-\Gamma^\circ) \cup (C^\circ \times \{0\}))).$$

$\triangleleft$ Нужно применить (1) к соответствиям $\Delta := \Gamma$ и $\Gamma := Y \times C$. $\triangleright$

(3) *Для тех же* Γ *и* C *верно включение*

$$\Gamma(\mathrm{cl}(C))^\circ \supset -\frac{1}{2}\Gamma^\circ\left(-\frac{1}{2}C^\circ\right).$$

Если же, сверх того, C° *— окрестность нуля в какой-нибудь топологии* τ*, согласованной с двойственностью* $X \leftrightarrow X'$*, то*

$$\Gamma(\mathrm{cl}(C))^\circ \subset -\,\mathrm{cl}(\Gamma^\circ(-2C^\circ)).$$

$\triangleleft$ Возьмем $y' \in \Gamma(\mathrm{cl}(C))^\circ$. В силу (2) найдутся сети $(x'_\alpha) \subset X'$, $(y'_\alpha) \subset Y'$, $(u'_\alpha) \subset C^\circ$, $(t_\alpha) \subset \mathbb{R}^+$, $(s_\alpha) \subset \mathbb{R}^+$ такие, что

$$(x'_\alpha, y'_\alpha) \in -\Gamma^\circ, \quad s_\alpha + t_\alpha = 1,$$
$$y' = \lim t_\alpha y'_\alpha, \quad 0 = \lim(s_\alpha u'_\alpha - t_\alpha x'_\alpha),$$

причем последний предел можно понимать в смысле топологии τ. В силу предположений при достаточно больших α будет $-s_\alpha u'_\alpha + t_\alpha x'_\alpha \in C^\circ$ или $t_\alpha x'_\alpha \in s_\alpha x' + C^\circ \subset 2C^\circ$. Итак, $t_\alpha y_\alpha \in (-\Gamma^\circ)(t_\alpha x'_\alpha) \subset -\Gamma^\circ(-2C^\circ)$, поэтому $y \in -\Gamma^\circ(-2C^\circ)$. $\triangleright$

(4) *Для любого выпуклого соответствия* $\Gamma \subset X \times Y$ *выполнено*

$$(\mathrm{cl}(\Gamma)(0))^\circ = -\,\mathrm{cl}(\Gamma^\circ(X')).$$

3.4. Двойственная характеризация открытости

Основное содержание текущего параграфа — это описание открытости выпуклых соответствий в локально выпуклых пространствах на языке двойственности.

3.4.1. Мы будем рассматривать векторные пространства X и Y, а также выпуклое соответствие Φ из X в Y. Предположим, что $0 \in \Phi(0)$ и $\mathrm{im}(\Phi)$ — поглощающее множество. Напомним операции симметричной оболочки $\mathrm{sh}(C) := \mathrm{co}(C \cup -C)$ и симметричного ядра $\mathrm{sk}(C) := C \cap -C$.

Допустим, что на X задана некоторая локально выпуклая топология τ. Система множеств $\{t\,\mathrm{sk}(\Phi(V)) : t \in \mathbb{R},\ t > 0,\ V \in \tau(0)\}$ является, как нетрудно видеть, базисом фильтра окрестности нуля в однозначно определяемой локально выпуклой топологии на Y. Эту топологию мы обозначим символом $\Phi(\tau)$. Аналогично система множеств $\{t\,\mathrm{cl}(\mathrm{sk}(\Phi(V))) :\ t \in \mathbb{R},\ t > 0,\ V \in \tau(0)\}$ определяет единственную локально выпуклую топологию на Y — топологию $\overline{\Phi}(\tau)$. Как видно, если на Y имеется векторная топология ν, то соответствие Φ открыто (соответственно почти открыто в нуле) в том и только в том случае, если $\Phi(\tau)$ (соответственно $\overline{\Phi}(\tau)$) слабее топологии ν.

Допустим теперь, что $\mathfrak{B}$ — некоторая выпуклая борнология на X. Система множеств $\{t\,\mathrm{sh}(\Phi(S)) :\ t \in \mathbb{R},\ t > 0,\ S \in \mathfrak{B}\}$ составляет базу некоторой выпуклой борнологии на Y. Обозначим эту борнологию символом $\Phi(\mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{S}$ — борнология на Y. Если $\Phi(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{S}$, то говорят, что соответствие Φ *ограничено относительно борнологий* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{S}$. Предположим, что пространства X и Y образуют двойственные пары с пространствами X' и Y' соответственно, и задана выпуклая борнология $\mathfrak{B}$ на X', которая содержится в слабой борнологии, т. е. $\mathfrak{B}$ состоит из слабо ограниченных множеств. Обозначим символом $t(\mathfrak{B})$ единственную локально выпуклую топологию на X, определяемую базисом фильтра $\{S^\circ : S \in \mathfrak{B}\}$. Эту топологию называют $\mathfrak{B}$-*топологией* на X или же *топологией равномерной сходимости на множествах* $\mathfrak{B}$. Для непустого множества $C \subset X$ обозначим через C^* опорную функцию $s(C) : X' \to \mathbb{R}^\bullet$ (см. 3.3.8). Если $C \subset X \times Y$, то следует иметь в виду наши соглашения об отождествлении $(X \times Y)'$ и $X' \times Y'$ (см. 2.3). Поляру множества A относительно (алгебраической) двойственности $X \leftrightarrow X^\#$ мы будем обозначать символом $A^\bullet$, а относительно двойственности $X \leftrightarrow X'$ — как обычно, через A°. Всюду ниже мы предполагаем, что $\mathfrak{B}$ имеет базис из слабо замкнутых абсолютно выпуклых множеств, т. е., как еще говорят, $\mathfrak{B}$ — *насыщенное семейство.*

3.4.2. Теорема. *Топология $\Phi(t(\mathfrak{B}))$ есть топология равномерной сходимости на множествах $\Phi^\bullet(\mathfrak{B})$; символически: $\Phi(t(\mathfrak{B})) = t(\Phi^\bullet(\mathfrak{B}))$. Если $t(\mathfrak{B})$ согласована с двойственностью $X \leftrightarrow X'$, то топология $\overline{\Phi}(t(\mathfrak{B}))$ есть топология равномерной сходимости на множествах $\Phi^\circ(\mathfrak{B})$; символически: $\overline{\Phi}(t(\mathfrak{B})) = t(\Phi^\circ(\mathfrak{B}))$.*

$\triangleleft$ Пусть S — абсолютно выпуклое слабо замкнутое множество из $\mathfrak{B}$ и $V := S^\circ$. Поскольку множество $\Phi(V)$ поглощающее (см. 1.2.8), то $\mathrm{sk}(\Phi(V))^\bullet = \mathrm{sh}(\Phi(V)^\bullet)$. Привлекая правила подсчета поляры к образу 3.3.10 (1), запишем:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(\Phi^\bullet(V^\bullet)) \subset \mathrm{sk}(\Phi(V))^\bullet \subset \mathrm{sh}(\Phi^\bullet(V^\bullet)).$$

Отсюда следует, что $\Phi(t(\mathfrak{B}))$ есть топология равномерной сходимости на множествах вида $\operatorname{sh}(\Phi^\bullet(V^\bullet))$.

В силу ранее сделанных замечаний (см. 3.3.13) будет

$$-\frac{1}{2}\operatorname{cl}(\Phi^{\bullet\bullet}(V)) \subset \Phi^\bullet(S)^\bullet \subset -\operatorname{cl}(\Phi^{\bullet\bullet}(V)),$$

где cl означает замыкание в топологии $\sigma(Y^\#, Y)$. Воспользовавшись на этот раз формулами 3.3.10 (1) для соответствия $\Phi^{\bullet\bullet}$, а также соотношением $\Phi^\bullet = \Phi^{\bullet\bullet\bullet}$, получим

$$4\Phi^\bullet(V^\bullet) \supset \operatorname{cl}(\Phi^\bullet(S)) \supset \frac{1}{2}\Phi(V^\bullet).$$

Из всего сказанного выводим, что $\Phi(t(\mathfrak{B}))$ есть топология равномерной сходимости на множествах $\operatorname{sh}(\operatorname{cl}(\Phi^\bullet(S)))$. Однако поляры $\operatorname{sh}(\operatorname{cl}(\Phi^\bullet(S)))^\bullet$ и $\operatorname{sh}(\Phi^\bullet(S))^\bullet$ совпадают. Окончательно заключаем, что $\Phi(t(\mathfrak{B}))$ есть топология равномерной сходимости на множествах $\Phi^\bullet(\mathfrak{S})$.

Предположим теперь, что $t(\mathfrak{B})$ согласуется с двойственностью $X \leftrightarrow X'$. В этом случае $V^\bullet = V^\circ$ и $\Phi^\circ(S) = \Phi^\bullet(V^\bullet) \cap Y'$, поскольку $S^{\bullet\bullet} = S$. Привлекая вновь правила подсчета поляр и теорему о биполяре, получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\Phi^\circ(S)) \subset \operatorname{sh}(\Phi(V)^\circ) \subset \operatorname{sh}(\Phi^\circ(S)).$$

Переходя в этом соотношении к полярам, выводим

$$2\operatorname{sh}(\Phi^\circ(S))^\circ \supset \operatorname{sk}(\Phi(V))^{\circ\circ} \supset \operatorname{sh}(\Phi^\circ(S))^\circ.$$

Отсюда немедленно вытекает, что $\overline{\Phi}(t(\mathfrak{B})) = t(\Phi^\circ(\mathfrak{B}))$. $\triangleright$

3.4.3. Отметим следующие следствия теоремы 3.4.2:

(1) *Пространство, сопряженное к пространству*

$$(Y, \Phi(t(\mathfrak{B}))),$$

совпадает с объединением $\sigma(Y^\#, Y)$-замыканий множеств

$$\lambda \operatorname{sh}(\Phi^\bullet(S)),$$

когда S пробегает множество $\mathfrak{B}$, а λ — множество $\mathbb{R}^+$. В частности, если X — локально выпуклое пространство, а X' — его сопряженное, то сопряженное к $(Y, \Phi(\tau))$ совпадает с подпространством в $Y^\#$, порожденным множеством $\operatorname{sh}(\Phi^\bullet(X'))$.

$\triangleleft$ В самом деле, функционал $y^\# \in Y^\#$ входит в $(Y, \Phi(t(\mathfrak{B})))'$ в том и только в том случае, если $y^\#$ содержится в поляре некоторой окрестности нуля относительно двойственности $Y \leftrightarrow Y^\#$. Однако по теореме 3.4.2 множества вида $\lambda \cdot \mathrm{sh}(\Phi^\bullet(S))^{\bullet\bullet}$ составляют базис возрастающего фильтра $\{V^\bullet : V \in \Phi(t(\mathfrak{B}))\}$. Осталось заметить, что $\mathrm{sh}(\Phi^\bullet(S))^{\bullet\bullet}$ есть $\sigma(Y^\#, Y)$-замыкание множества $\mathrm{sh}(\Phi^\bullet(S))$. $\triangleright$

(2) *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, а Φ — выпуклое соответствие, удовлетворяющее условиям из 3.4.1. Тогда равносильны утверждения:*

(а) *соответствие Φ почти открыто в нуле;*

(б) *соответствие Φ° ограничено относительно эквинепрерывных борнологий сопряженных пространств X' и Y'.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathfrak{B}$ — эквинепрерывная борнология на X'. Тогда $t(\mathfrak{B})$ — исходная топология пространства X. Значит, соответствие Φ почти открыто в нуле в том и только в том случае, если $\Phi(t(\mathfrak{B}))$ слабее топологии пространства Y. По теореме 3.4.2 последнее равносильно тому, что топология $t(\Phi^\circ(\mathfrak{B}))$ слабее топологии пространства Y или, что то же самое, $\Phi^\circ(\mathfrak{B})$ состоит из эквинепрерывных подмножеств пространства Y'. $\triangleright$

3.4.4. *Теорема.* *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, а X' и Y' — соответствующие сопряженные пространства. Пусть, далее, Φ — выпуклое соответствие из X в Y такое, что $0 \in \Phi(0)$ и $0 \in \mathrm{core}(\Phi(X))$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *соответствие Φ открыто в нуле;*

(2) *$\Phi^\bullet \cap (X' \times Y^\#)$ есть ограниченное соответствие из X' в Y' относительно эквинепрерывных борнологий X' и Y';*

(3) *соответствие Φ почти открыто в нуле и $\Phi^\bullet(X') \subset Y'$;*

(4) *соответствие Φ будет почти открыто в нуле, множество $\Phi(X)$ — окрестность нуля в Y и, кроме того, для любых $x' \in X'$ и $y_0 \in \mathrm{core}(\Phi(X))$ выполнено*

$$\Phi^{-1}(y_0)^*(x') \rightleftharpoons \inf\{\Phi^*(x', y') + \langle y_0 | y' \rangle : \ y' \in Y'\}$$

(знак $\rightleftharpoons$ подразумевает точность формулы, т. е. равенство с тем дополнительным условием, что точная нижняя граница в стоящем справа от него выражении достигается).

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Если абсолютно выпуклое множество $S \subset X'$ эквинепрерывно, то при условии открытости Φ в нуле множество $\Phi(S^\circ)$ является окрестностью нуля в Y. Отсюда, учитывая включение $-2\Phi(S^\circ)^\bullet \supset \Phi^\bullet(S^{\circ\circ}) \supset \Phi^\bullet(S)$ (см. 3.3.10 (2)) и эквинепрерывность множества $\Phi(S^\circ)^\bullet$, получаем (2).

(2) $\to$ (3): Включение $\Phi^\bullet(X') \subset Y'$ непосредственно следует из (2). Соответствие Φ почти открыто в нуле согласно 3.4.3 (2), так как $\Phi^\circ(S) \subset \Phi^\bullet(S)$ для любого $S \subset X'$.

(3) $\to$ (4): Множество $\Phi(X)^\bullet$ — часть $\Phi^\bullet(0)$, а потому содержится в Y'. Следовательно, биполяры множества $\Phi(X)$ относительно двойственностей $Y \leftrightarrow Y'$ и $Y \leftrightarrow Y^\#$ совпадают. Биполяра $\Phi(X)^{\bullet\bullet}$ совпадает с алгебраическим замыканием множества $\Phi(X)$. В свою очередь, биполяра $\Phi(X)^{\circ\circ}$ есть окрестность нуля в Y. Таким образом, алгебраическое замыкание множества $\Phi(X)$, а значит, и само $\Phi(X)$ являются окрестностями нуля. Пусть $(x_0, y_0) \in \Phi$, $y_0 \in \operatorname{core}(\Phi(X))$, и положим $\Psi := \Phi - (x_0, y_0)$. Тогда $0 \in \Psi(0) \cap \operatorname{core}(\Psi(X))$ и $\Psi^\bullet(X') \subset Y'$. Нетрудно проверить, что для любых $x' \in X'$ и $y^\# \in Y^\#$ выполнено

$$
\begin{aligned}
(\Psi^{-1}(0))^*(x') &= \sup\{\langle x|x'\rangle : x \in \Psi^{-1}(0)\} = \\
&= \sup\{\langle x|x'\rangle - \langle 0|y^\#\rangle : x \in \Psi^{-1}(0)\} \leqslant \\
&\leqslant \sup\{\langle x|x'\rangle - \langle y|y^\#\rangle : x \in \Psi^{-1}(y),\ y \in Y\} = \\
&= \Psi^*(x', y^\#).
\end{aligned}
$$

Предположим, что $\alpha := (\Psi^{-1}(0))^*(x') > 0$. Условие $0 \in \operatorname{core}(\Phi(X))$ влечет за собой, что $H(\Phi) - X \times \{0\} \times \mathbb{R}^+ = X \times Y \times \mathbb{R}$, т. е. множества Φ и $X \times \{0\}$ находятся в алгебраическом общем положении. Тогда ввиду 3.3.10 (1) будет $(\Psi^{-1}(0))^\bullet = (-(\Psi^{-1})^\bullet)(Y^\#) = (-(\Psi^\bullet)^{-1})(Y^\#)$. Таким образом, $(1/\alpha)x' \in (-(\Psi^\bullet)^{-1})(Y^\#)$. Следовательно, $(y^\#, (1/\alpha)x') \in -(\Psi^\bullet)^{-1}$ или $((1/\alpha)x', y^\#) \in \Psi^\bullet$ для некоторого $y^\# \in Y^\#$. Как видно, $\Psi^*(x', \alpha y^\#) \leqslant \alpha$ и тем самым

$$
(\Psi^{-1}(0))^*(x') = \inf\{\Psi^*(x', y^\#) : y^\# \in Y^\#\},
$$

причем точная нижняя граница в правой части равенства достигается. Заметим далее, что если $\Psi^*(x', y^\#) < \lambda < +\infty$, то $y^\# \in \lambda\Psi^\bullet((1/\lambda)x') \subset Y'$, поэтому

$$
\alpha = \inf\{\Psi^*(x', y') :\ y' \in Y'\}.
$$

Если же $\alpha = 0$, то согласно доказанному для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $u_\varepsilon \in Y'$ такое, что $\Psi^*(x', u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и $u_\varepsilon \in \Psi^\circ(x')$. Поскольку Ψ почти открыто в нуле, то ввиду следствия 3.4.3 (2) (u_ε) эквинепрерывно. По этой причине имеется предельная точка y' для семейства (u_ε) и ясно, что $\Psi^*(x', y') = 0$. Случай $\alpha = +\infty$ тривиален. Переход от Ψ в Φ сводится к простым вычислениям:

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1}(y_0))^*(x') &= (\Psi^{-1}(0))^*(x') + \langle x_0|x'\rangle = \\ &= \langle x_0|x'\rangle + \inf\{\Psi^*(x', y') : y' \in Y'\} = \\ &= \inf\{\Phi^*(x', y') + \langle y_0|y'\rangle : y' \in Y'\}.\end{aligned}$$

(4) $\to$ (1): Рассмотрим абсолютно выпуклую окрестность нуля $U \subset X$ и покажем, что $V \subset \Phi(U)$, где

$$V := \operatorname{cl}\left(\Phi\left(\frac{1}{2}U\right) \cap -\Phi\left(\frac{1}{2}U\right)\right) \cap \operatorname{core}(\Phi(X)).$$

Если $y_0 \notin \operatorname{core}(\Phi(X)) \backslash \Phi(U)$, то $U \cap \Phi^{-1}(y_0) = \varnothing$. Следовательно, существует функционал $x' \in ((1/2)U)^\circ$ такой, что $\inf\{\langle x|x'\rangle : x \in \Phi^{-1}(y_0)\} =: \lambda > 1$, или, что то же самое, $(\Phi^{-1}(y_0))^*(-x') = -\lambda < -1$. В силу (4) для некоторого $y' \in Y'$ выполнено

$$-\langle x|x'\rangle - \langle y|y'\rangle \leqslant (\Phi^{-1}(y_0))^*(-x') + \langle y_0|y\rangle,$$

каковы бы ни были $(x, y) \in \Phi$. Если в последнем неравенстве считать $x \in (1/2)U$ и $\pm y \in \Phi((1/2)U)$, то будет

$$\langle y|y'\rangle \leqslant \langle x|x'\rangle - \lambda + \langle y_0|y\rangle \leqslant 1 - \lambda + \langle y_0|y\rangle =: \mu < \langle y_0|y\rangle.$$

Таким образом, $\langle y|y'\rangle \leqslant \mu < \langle y_0|y'\rangle$ для всех $y \in V$. Тем самым $y_0 \notin V$. $\triangleright$

3.4.5. Применим теорему 3.4.4 к соответствию $\operatorname{epi}(f)$ для выпуклого оператора f. Для этого нам необходимо еще одно определение. *Преобразованием Юнга — Фенхеля* функции $g : X \to \mathbb{R}$ или *сопряженной к g функцией* называют отображение $g^* : X^\# \to \overline{\mathbb{R}}$, действующее по правилу

$$g^*(x^\#) := \sup\{\langle x|x^\#\rangle - g(x) : x \in X\}.$$

Преобразование Юнга — Фенхеля подробно будет рассмотрено в следующей главе. Заметим, что опорная функция множества $C \subset X$ есть не что иное, как сопряженная функция к индикаторной функции:

$$C^*(x^\#) := s(C)(x^\#) = \delta_{\mathbb{R}}(C)^*(x^\#).$$

Напомним, что через $\{\varphi \leqslant \alpha\}$ обозначено лебегово множество $\{x \in X : \varphi(x) \leqslant \alpha\}$.

Пусть X — локально выпуклое пространство, $E^\bullet$ — упорядоченное локально выпуклое пространство с нормальным положительным конусом. Пусть $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор, $0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ *и* $f(0) = 0$. *Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *оператор f непрерывен в точке 0;*

(2) *для каждого эквинепрерывного множества $S \subset E'^{+}$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ множество*

$$\bigcup_{y' \in S} \{(y' \circ f)^* \leqslant \alpha\}$$

эквинепрерывно;

(3) *оператор f почти непрерывен в точке 0 и для всякого $y' \in E'^{+}$ выполнено $\{(y' \circ f)^* \leqslant \alpha\} \subset X'$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;*

(4) $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, *оператор f почти непрерывен в точке 0 и для каждых $y' \in E'^{+}$ и $x \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ существует $x' \in X'$ такой, что*

$$\langle f(x)|y'\rangle + (y' \circ f)^*(x') = \langle x|x'\rangle.$$

$\lhd$ Нужно применить 3.4.4 к соответствию $\Phi := (\operatorname{epi}(f))^{-1}$. Ограничимся следующими замечаниями. Пара $(x^\#, y^\#)$ из $(X \times E)^\#$ входит в $\operatorname{dom}(\Phi^*)$ в том и только в том случае, если $y^\# \geqslant 0$ и $(y^\# \circ f)^*(x^\#) < +\infty$. Более того, для $0 \leqslant y^\# \in E^\#$ и $x^\# \in X^\#$ выполнено $\Phi^*(x^\#, y^\#) = (y^\# \circ f)^*(x^\#)$. В частности, $(x^\#, y^\#) \in \Phi^\bullet$ тогда и только тогда, когда $(y^\# \circ f)^*(x^\#) \leqslant 1$. Наконец, для $x \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ будет $\Phi^{-1}(x) = f(x) + E^+$, значит, $(\Phi^{-1}(x))^*(y^\#) = \langle f(x)|y^\#\rangle$ при $y^\# \leqslant 0$ и $(\Phi^{-1}(x))^*(y^\#) = +\infty$ в противном случае. $\rhd$

3.4.6. Для случая линейного оператора T, действующего из локально выпуклого пространства X на локально выпуклое пространство Y, из 3.4.4 и 3.4.5 можно вывести такие следствия.

(1) *Оператор T непрерывен в том и только в том случае, если T слабо непрерывен и образ всякого эквинепрерывного множества в Y' относительно сопряженного оператора T' является эквинепрерывным множеством.*

(2) *Для того чтобы оператор T был открытым, необходимо и достаточно, чтобы отображение T было слабо открытым и каждое эквинепрерывное множество в X' являлось образом некоторого эквинепрерывного множества в Y' относительно алгебраически сопряженного оператора $T^{\#}$.*

(3) *Для того чтобы оператор T был топологическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы T являлся слабым изоморфизмом, а сопряженный оператор T' представлял собой борнологический изоморфизм относительно эквинепрерывных борнологий пространств Y' и X'.*

3.4.7. В дальнейшем нам потребуется еще одно понятие, родственное открытости. Соответствие Φ называют *полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности нуля $V \subset Y$ существует окрестность нуля $U \subset X$ такая, что $\Phi(x_0+U) \subset \Phi(x_0)+V$. Следующий результат дает двойственную характеризацию полунепрерывности сверху.

Теорема. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, а Φ — выпуклое соответствие из X в Y, причем $\Phi(0)$ — конус. Тогда равносильны утверждения:*

(1) Φ *полунепрерывно сверху в нуле;*

(2) *Множество $\Phi^\circ(X')$ замкнуто и для каждого эквинепрерывного множества $B \subset Y'$ найдется эквинепрерывное множество $A \subset X'$ такое, что*

$$\Phi^\circ(A) \supset \Phi^\circ(X') \cap B.$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Возьмем $y' \in \Phi(0)^\circ$ и положим

$$f(x) := \inf\{-\langle y|y'\rangle : \ y \in \Phi(x)\}.$$

Понятно, что $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция (см. 1.3.5). Пусть V — такая окрестность нуля в Y, что $|\langle y|y'\rangle| \leqslant 1$ для всех $y \in V$. Подберем окрестность нуля $U \subset X$, для которой $\Phi(U) \subset \Phi(0) + V$.

Тогда для каждых $x \in U$ и $y \in \Phi(x)$ будет $y = u + v$ для некоторых $u \in \Phi(0)$ и $v \in V$, поэтому $\langle y|y'\rangle \leqslant 2$ и $f(x) \geqslant -2$. Итак, выпуклая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничена снизу на окрестности нуля U. Положим

$$p(x) := \inf\{t^{-1}(f(tx) - f(0)) : \ t > 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, причем $p(x) \geqslant -2$ для всех $x \in U$. Последнее следует из того, что $p(x) \geqslant f(0) - f(-x)$ $(x \in X)$. Из ограниченности снизу функционала p на U следует, что $p \geqslant -2q$, где $q = \mu(U)$, значит, $\partial p \neq \varnothing$ в силу 3.2.15. Возьмем $x' \in \partial p$. Как видно,

$$\langle x|x'\rangle \leqslant p(x) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant f(x) + 1 \leqslant -\langle y|y'\rangle + 1$$

для всех $x \in X$ и $y \in \Phi(x)$. Отсюда вытекает, что $(x', -y') \in \Phi^\circ$ или $-y' \in \Phi^\circ(x') \subset \Phi^\circ(X')$. Итак, $\Phi(0)^\circ \subset -\Phi^\circ(X')$. Обратное включение следует из 3.3.13 (4). Тем самым доказана замкнутость множества $\Phi^\circ(X')$. Пусть теперь B — симметричное эквинепрерывное множество в Y. Тогда B° — окрестность нуля в Y. Стало быть, существует симметричная окрестность нуля $U \subset X$, для которой $\Phi(U) \subset \Phi(0) + B^\circ$. Переходя к полярам и привлекая 1.3.10 (2), получим:

$$\Phi^\circ(U^\circ) \supset \Phi^\circ(X') \cap B.$$

Остается заметить, что U° симметрично и эквинепрерывно.

(2) $\to$ (1): Для симметричной окрестности нуля $W \subset Y$ подберем замкнутую симметричную окрестность нуля $V \subset Y$ так, что $V + V \subset W$. Согласно (2), существует симметричное эквинепрерывное множество $A \subset X'$ такое, что

$$\Phi^\circ(A) \supset \Phi^\circ(X') \cap V^\circ.$$

Перейдем к полярам в последнем соотношении, учитывая 3.3.12 (5) и 3.3.13 (3). Получим

$$\begin{gathered}-\Phi(A^\circ) \subset -\Phi^{\circ\circ}(A^\circ) \subset \mathrm{cl}(-\Phi^\circ(X')^\circ + V^{\circ\circ}) \subset \\ \subset -\Phi(0) + V + V \subset -\Phi(0) + W.\end{gathered}$$

Последнее дает $\Phi(U) \subset \Phi(0) + W$, где $U := A^\circ$ — это окрестность нуля в X. $\triangleright$

3.4.8. Пусть $K_1, \dots, K_n$ — конусы в X. Говорят, что эти конусы удовлетворяют *условию* (N), если для любой окрестности нуля $U \subset X$ найдется такая окрестность нуля $V \subset X$, что

$$(K_1 + V) \cap \dots \cap (K_n + V) \subset K_1 \cap \dots \cap K_n + U.$$

Так же, как и в 3.1.7 (2), с набором конусов $K_1, \dots, K_n$ свяжем коническое соответствие Φ из X в $Y := X^n$ по формуле

$$\Phi := \{(h, x_1, \dots, x_n) \in X \times Y : x_l + h \in K_l \ (l := 1, \dots, n)\}.$$

(1) *Соответствие Φ^{-1} полунепрерывно сверху в нуле в том и только в том случае, если конусы $K_1, \dots, K_n$ удовлетворяют условию* (N).

$\triangleleft$ Заметим, что $\Phi^{-1}(0) = K_1 \cap \dots \cap K_n$. Если V — симметричное множество в X, то $h \in \Phi^{-1}(V^n)$ тогда и только тогда, когда существуют $x_1, \dots, x_n \in V$ и $k_1 \in K_1, \dots, k_n \in K_n$, такие что $x_l + h = k_l,\ l = 1, \dots, n$. Значит, включение $h \in \Phi^{-1}(V^n)$ равносильно тому, что $h \in K_l + V$ $(l := 1, \dots, n)$. Окончательно $\Phi^{-1}(V^n) = (K_1 + V) \cap \dots \cap (K_n + V)$. Остальное вытекает из определений. $\triangleright$

(2) *Если $K_1, \dots, K_n$ и Φ те же, что и выше, то*

$$\Phi^\circ = \left\{ (h', k'_1, \dots, k'_n) \in (X \times Y)' : -k'_l \in K_l^\circ,\ h' + \sum_{l=1}^n k'_l = 0 \right\}.$$

$\triangleleft$ Действительно, если $(h', k'_1, \dots, k'_n) \in \Phi^\circ$, то

$$\langle h | h' \rangle - \sum_{l=1}^n \langle x_l | k'_l \rangle \leqslant 0 \quad (x_l + h \in K_l,\ l := 1, \dots, n).$$

Полагая $h := 0$, получим $-k'_l \in K_l^\circ$ $(l := 1, \dots, n)$. Если же $x_l := -h$, то $\langle h | h' + \sum_{l=1}^n k'_l \rangle = 0$, поэтому $h' + \sum_{l=1}^n k'_l = 0$. Наоборот, если $h' \in X'$, $k'_l \in -K_l^\circ$ $(l := 1, \dots, n)$ и $h' = -\sum_{l=1}^n k'_l$, то

$$\langle h | h' \rangle - \sum_{l=1}^n \langle x_l | k'_l \rangle = -\sum_{l=1}^n \langle x_l + h | k'_l \rangle \leqslant 0,$$

как только $x_l + h \in K_l$ для всех $l := 1, \dots, n$. $\triangleright$

3.4.9. *Теорема Джеймсона.* *Для конусов $K_1, \dots, K_n$ в локально выпуклом пространстве X равносильны утверждения:*

(a) *$K_1, \dots, K_n$ удовлетворяют условию* (N)*;*

(b) *конус $K_1^\circ + \ldots + K_n^\circ$ замкнут и для каждого эквинепрерывного множества $C \subset X'$ найдется такое эквинепрерывное множество $B \subset X'$, что*

$$K_1^\circ \cap B + \ldots + K_n^\circ \cap B \supset (K_1^\circ + \ldots + K_n^\circ) \cap C.$$

$\lhd$ Достаточно применить теорему 3.4.7 к соответствию $\Psi := \Phi^{-1}$ и учесть 3.4.8 (1). При этом нужно иметь в виду, что из-за 3.4.8 (2) будет $\Psi^\circ(Y') = K_1^\circ + \ldots + K_n^\circ$ и $\Psi^\circ(C^n) = K_1^\circ \cap C + \ldots + K_n^\circ \cap C$. $\rhd$

3.4.10. Дадим, наконец, двойственную характеризацию несплющенности конусов. Пусть $\varkappa := (K_1, K_2)$ — воспроизводящая пара конусов в локально выпуклом пространстве X. Воспроизводимость означает, что $X = K_1 - K_2$. Определим $\Phi_\varkappa$ так же, как и в 3.1.6, а Φ — это то же, что и в 3.1.7 (2). Тогда несплющенность пары $\varkappa$ равносильна открытости в нуле каждого из соответствий $\Phi_\varkappa \subset X^2 \times X$ и $\Phi \subset X \times X^2$. Как и в 3.4.8 (2), верно, что

$$\Phi^\bullet = \{(h^\#, k_1^\#, k_2^\#) \in (X \times X \times X)^\# : \\ - k_l^\# \in K_l^\bullet \ (l := 1, 2),\ h^\# + k_1^\# + k_0^\# = 0\}.$$

С другой стороны, нетрудно сосчитать

$$\Phi_\varkappa^\bullet = \{(x_1^\#, x_2^\#, h^\#) \in (X \times X \times X)^\# : x_1^\# - h^\# \in K_1^\bullet,\ h^\# - x_2^\# \in K_2^\bullet\}.$$

Заметим, что для $S \subset X^\#$ будет $\Phi_\varkappa^\bullet(S^2) = (S - K_1^\bullet) \cap (S + K_2^\bullet)$. *Нормальной оболочкой* множества $C \subset X$ относительно пары конусов (K_1, K_2) назовем множество

$$\operatorname{co}(((C - K_1) \cap (C + K_2)) \cup ((C + K_2) \cap (C + K_1))).$$

Как видно, $\operatorname{sh}(\Phi_\varkappa^\bullet(S^2))$ — нормальная оболочка S относительно пары $(K_1^\bullet, K_2^\bullet)$. Если S симметрично, то

$$\Phi^\bullet(S) = \{(k_1^\#, k_2^\#) \in K_1^\bullet \times K_2^\bullet : k_1^\# + k_2^\# \in S\}.$$

Теперь из теоремы 3.4.4 вытекает следующий результат.

Теорема. *Равносильны утверждения:*

(1) *пара конусов (K_1, K_2) несплющена;*

(2) *нормальная оболочка всякого эквинепрерывного множества в X' относительно пары конусов $(K_1^\bullet, K_2^\bullet)$ является эквинепрерывной;*

(3) *для любого эквинепрерывного множества $S \subset X'$ множество*

$$\{(k_1^\#, k_2^\#) \in K_1^\bullet \times K_2^\bullet : \ k_1^\# + k_2^\# \in S\}$$

содержится в $(X \times X)'$ и является эквинепрерывным.

3.5. Открытость и полнота

В параграфе 3.1 было показано, как метод обкатывающего шара Банаха можно приспособить для изучения открытости выпуклых соответствий. Здесь мы рассматриваем иной подход к названной проблематике.

3.5.1. Основную роль в упомянутом подходе наряду с аппаратом двойственности будет играть равномерность Хаусдорфа на множестве непустых выпуклых замкнутых множеств топологического векторного пространства. Введем необходимые определения.

(1) Пусть X — отделимое равномерное пространство с базисом фильтра окружений диагонали $\mathscr{W}$. Обозначим символом $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ множество всех непустых замкнутых подмножеств X. Для каждого $W \in \mathscr{W}$ положим

$$\overline{W} := \big\{(A, B) \in \mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)^2 : \ A \in W(B), \ B \in W(A)\big\}.$$

Как видно, $\overline{W}$ симметрично, т. е. $\overline{W} = \overline{W}^{-1}$, содержит диагональ множества $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)^2$ и если для некоторого $V \in \mathscr{W}$ выполнено $V \circ V \subset W$, то $\overline{V} \circ \overline{V} \subset \overline{W}$. Кроме того, ясно, что множество $\overline{\mathscr{W}} := \{\overline{V} : V \in \mathscr{W}\}$ является базисом некоторого фильтра. Таким образом, существует единственная равномерность на множестве $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, в которой фильтр окружений диагонали определен базисом $\overline{\mathscr{W}}$. Эту равномерность называют *равномерностью Хаусдорфа.* В дальнейшем говоря о равномерном пространстве $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ или его подпространствах, а также о равномерной топологии на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ и его подпространствах мы всегда будем иметь в виду равномерность

Хаусдорфа. Очевидно, что равномерность Хаусдорфа на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ отделима. Отображение $x \mapsto \{x\}$ $(x \in X)$ служит равномерным изоморфизмом X на замкнутое подпространство в $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$.

В том случае, когда X — топологическое векторное пространство с базисом фильтра окрестностей нуля $\mathscr{V}$, базис фильтра окружений диагонали в $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ имеет вид $\overline{\mathscr{V}} := \{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\}$, где

$$\overline{V} := \big\{(A, B) \in \mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X) : \ A \subset B + V, \ B \subset A + V\big\}.$$

(2) Пусть d — некоторая полуметрика на множестве X, причем диаметр $\sup\{d(x, y) : x \in X, y \in X\}$ конечен. Предположение о конечности диаметра не является существенным ограничением, так как каждое полуметрическое пространство (X, d) равномерно изоморфно полуметрическому пространству (X, d') с конечным диаметром. Можно положить, например, $d'(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$, см. Дж. Келли [71].

Итак, пусть (X, d) — полуметрическое пространство с конечным диаметром. Определим функцию $\bar{d} : \mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)^2 \to \mathbb{R}^+$ формулой

$$\bar{d}(A, B) := \sup\{d(x, B) : \ x \in A\} \vee \sup\{d(x, A) : \ x \in B\},$$

где $d(x, C) := \inf\{(d(x, y) : y \in C\}$ — это d-расстояние от точки x до множества C. Если обозначить $V_\lambda(A) := \{x \in X : d(x, A) < \lambda\}$, то определение $\bar{d}$ можно переписать в виде:

$$\bar{d}(A, B) := \inf\big\{\lambda > 0 : \ A \subset V_\lambda(B), \ B \subset V_\lambda(A)\big\}.$$

Можно показать, что $\bar{d}$ — полуметрика на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$. Более того, $\bar{d}$ будет метрикой в том и только в том случае, когда метрикой является d. Функцию $\bar{d}$ называют *хаусдорфовой* (*полу*)*метрикой.*

Предположим теперь, что равномерность $\mathscr{W}$ на множестве X *порождается мультиметрикой* — множеством полуметрик — $\mathfrak{M}$. Это означает, что множество окружений диагонали вида $\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}$, где $d \in \mathfrak{M}$ и $\varepsilon > 0$, образует базу равномерности $\mathscr{W}$. С каждой полуметрикой $d \in \mathfrak{M}$ свяжем функцию $\bar{d}$. Положим $\overline{\mathfrak{M}} := \{\bar{d} : d \in \mathfrak{M}\}$. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ фильтровано вверх, то $\overline{\mathfrak{M}}$ также фильтровано вверх. Более того, несложно показать, что мультиметрика $\overline{\mathfrak{M}}$ порождает в точности ту же равномерность на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, что и базис фильтра окружений диагонали $\overline{\mathscr{W}}$.

3.5.2. *Метрическое пространство (X, d) полно в том и только в том случае, если полно ассоциированное с ним метрическое пространство $(\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X), \bar{d})$.*

$\triangleleft$ Из полноты $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ вытекает полнота X, поскольку отображение $x \mapsto \{x\}$ есть равномерный гомеоморфизм X на замкнутое подпространство в $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$. Предположим теперь, что X — полное метрическое пространство, и пусть (A_n) — последовательность Коши в $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой номер $n(k) \in \mathbb{N}$, что $\bar{d}(A_n, A_m) < \varepsilon 2^{-k}$ при $m, n \geqslant n(k)$. Пусть $(m(k))$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $m(k) \geqslant n(k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Построим по индукции последовательность (x_k) в X, удовлетворяющую условиям:

$$x_k \in A_{m(k)}, \quad d(x_k, x_{k+1}) \leqslant 2^{-k}\varepsilon.$$

Индукцию начнем с произвольного $x_0 \in A_{m(0)}$.

Допустим, что $x_1, \ldots, x_k$ уже выбраны. Поскольку

$$d(x_k, A_{m(k+1)}) \leqslant \bar{d}(A_{m(k)}, A_{m(k+1)}) < 2^{-k}\varepsilon,$$

то $d(x_k, a) \leqslant 2^{-k}\varepsilon$ для некоторого $a \in A_{m(k+1)}$. Полагаем $x_{k+1} := a$. Ясно, что (x_k) — последовательность Коши. Значит, существует предел $x := \lim(x_k)$. Нетрудно видеть, что

$$x \in A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\biggl(\bigcup_{m \geqslant n} A_m\biggr)$$

и $d(x, x_0) < 2\varepsilon$. Отсюда вытекает, что множество A непусто и, кроме того, при $m > n(0)$ будет $\sup\{d(y, A) : y \in A_m\} < 2\varepsilon$ из-за произвольности $m := m(0) > n(0)$ и $x_0 \in A_{m(0)}$. Если $a \in A$, то $a \in \mathrm{cl}\bigl(\bigcup_{m \geqslant n(0)} A_m\bigr)$. Поэтому для некоторых $k \geqslant n(0)$ и $a_k \in A_k$ имеем $d(a, a_k) < \varepsilon$. Тогда при $m \geqslant n(0)$ справедливы неравенства

$$d(a, A_m) \leqslant d(a, A_k) + \bar{d}(A_k, A_m) \leqslant d(a, a_k) + \varepsilon 2^{-m(0)} < 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\bar{d}(A, A_m) \leqslant 2\varepsilon$. $\triangleright$

3.5.3. Всюду ниже в этом параграфе X — локально выпуклое пространство. Пусть $\mathrm{ClC}(X)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства X. Множество $\mathrm{ClC}(X)$, упорядоченное по включению, является полной решеткой. Точная верхняя граница семейства замкнутых выпуклых подмножеств равна замыканию выпуклой оболочки объединения, а точная нижняя граница совпадает с пересечением. Множество $\mathrm{ClC}(X)$ станет конической решеткой, если ввести в нем сумму двух элементов A и $B \in \mathrm{ClC}(X)$ как замыкание множества $\{a + b : a \in A,\ b \in B\}$, а умножение на положительные числа определить как в § 1.5. Несложно проверить, что операции суммы и точной верхней границы двух замкнутых выпуклых множеств являются непрерывными отображениями $\mathrm{ClC}(X)^2$ в $\mathrm{ClC}(X)$.

Для произвольного подмножества $S \subset X$, положим

$$\mathrm{ClC}(X, S) := \{C \in \mathrm{ClC}(X) :\ S \subset C\}.$$

Вместо $\mathrm{ClC}(X, \{x\})$ мы будем писать $\mathrm{ClC}(X, x)$. Таким образом, множество $\mathrm{ClC}(X, 0)$ состоит из всех замкнутых конических отрезков в X. Пусть, наконец, $\mathrm{ClC}_b(X)$ — совокупность всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств X. Тогда в $\mathrm{ClC}_b(X)$, наряду с операциями суммы и точной верхней границы, непрерывной будет также и операция умножения на положительные числа, рассматриваемая в качестве отображения из $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{ClC}_b(X)$ в $\mathrm{ClC}_b(X)$.

3.5.4. (1) *Множество* $\mathrm{ClC}(X)$ *служит замкнутым подпространством равномерного пространства* $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$. *Для любого* $S \subset X$ *множество* $\mathrm{ClC}(X, S)$ *есть замкнутое подпространство в* $\mathrm{ClC}(X)$.

$\lhd$ Возьмем сеть $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, которая состоит из замкнутых выпуклых множеств и сходится к некоторому замкнутому множеству $C \subset X$. Пусть $x, y \in C$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$. Рассмотрим произвольную окрестность нуля $V \subset X$. Подберем абсолютную выпуклую окрестность нуля U так, чтобы $U \subset V$. Ввиду определений 3.5.1 существует такой индекс α_0, что

$$C_\alpha \subset C + U,\ C \subset C_\alpha + U$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Очевидно, что для тех же α из-за выпуклости C_α и U имеем

$$z \in \lambda C + (1 - \lambda)C \subset \lambda C_\alpha + (1 - \lambda)C_\alpha + \lambda U + (1 - \lambda)U = C_\alpha + U,$$

следовательно,

$$C_\alpha \subset C \cup \{z\} + U, \quad C \cup \{z\} \subset C_\alpha + U.$$

Таким образом, сеть (C_α) сходится к множеству $C \cup \{z\}$. Значит, $C = C \cup \{z\}$ и $z \in C$, т. е. C выпукло. Вторая часть предложения очевидно следует из первой. $\triangleright$

(2) *Метризуемое локально выпуклое пространство X будет полным в том и только в том случае, когда полно равномерное* (*метризуемое*) *пространство* $\mathrm{ClC}(X)$.

$\triangleleft$ Это следует из (1) и 3.5.2. $\triangleright$

3.5.5. Рассмотрим сеть $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в $\mathrm{ClC}(X)$. Множество

$$\bigcap_{\alpha_0 \in A} \mathrm{cl}\Big(\mathrm{co}\Big(\bigcup_{\alpha \geqslant \alpha_0} C_\alpha\Big)\Big)$$

называют *верхним пределом сети* (C_α) и обозначают $\limsup(C_\alpha)$.

(1) *Если сеть (C_α) в $\mathrm{ClC}(X)$ сходится к некоторому $C \in \mathrm{ClC}(X)$, то $C = \limsup(C_\alpha)$.*

$\triangleleft$ Действительно, если U и V — выпуклые окрестности нуля, причем $U + U \subset V$, а индекс α_0 таков, что $C_\alpha \subset C + U$ и $C \subset C_\alpha + U$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, то справедливы соотношения

$$\mathrm{cl}\Big(\mathrm{co}\Big(\bigcup_{\alpha \geqslant \alpha_0} C_\alpha\Big)\Big) \subset \mathrm{cl}(C + U) \subset C + V,$$

$$C \subset \mathrm{cl}\Big(\mathrm{co}\Big(\bigcup_{\alpha \geqslant \alpha_0} C_\alpha\Big)\Big) C + V.$$

Следовательно, $C = \limsup(C_\alpha)$ в силу произвольности V. $\triangleright$

Базис фильтра $\mathscr{F}$ в X, состоящий из замкнутых выпуклых множеств, называют *фундаментальным семейством*, если он, рассматриваемый как сеть в $\mathrm{ClC}(X)$, является сетью Коши. Последнее означает, очевидно, что для любой окрестности нуля $U \subset X$ существует такой элемент $A \in \mathscr{F}$, что $A \subset B + U$ для всех $B \in \mathscr{F}$. Ясно, что фундаментальное семейство сходится в том и только в том случае, если для любой окрестности нуля U множество $\bigcap\{C : C \in \mathscr{F}\} + U$ содержит некоторый член (а тогда и все последующие члены) этого семейства.

(2) *Предположим, что множество* $\mathscr{U} \subset \mathrm{ClC}(X)$ sup-*замкнуто, т. е.*

$$\sup_{\alpha\in\mathrm{A}}(C_\alpha) := \mathrm{cl}\Big(\mathrm{co}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha\Big)\Big) \in \mathscr{U}$$

для каждого семейства $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \subset \mathscr{U}$. *Тогда* $\mathscr{U}$ *полно в том и только в том случае, если всякое фундаментальное семейство в* $\mathscr{U}$ *сходится.*

$\lhd$ Из (1) видно, что сходимость фундаментального семейства равносильна ее сходимости как сети в топологии, порожденной равномерностью Хаусдорфа. Поэтому из полноты $\mathscr{U}$ вытекает сходимость фундаментальных семейств (без предположения о sup-замкнутости). Наоборот, допустим, что в $\mathscr{U}$ сходятся фундаментальные семейства. Пусть $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — сеть Коши в $\mathscr{U}$, и положим $B_\beta := \mathrm{cl}\left(\mathrm{co}\left(\bigcup_{\alpha\geqslant\beta} C_\beta\right)\right)$. Семейство $(B_\beta)_{\beta\in\mathrm{A}}$, как видно, содержится в $\mathscr{U}$, фундаментально и, стало быть, имеет предел $B \in \mathscr{U}$. Последнее, по определению, означает, что для любой окрестности нуля $U \subset X$ найдется такой индекс $\gamma \in A$, что $B \subset B_\gamma \subset B + U$. Но тогда для всех $\alpha \geqslant \gamma$ будет $C_\alpha \subset B + U$. Включение $B \subset C_\alpha + U$ вытекает из того, что (C_α) — сеть Коши. Итак, (C_α) сходится к B в равномерной топологии. $\rhd$

3.5.6. Локально выпуклое пространство X называют *гиперполным*, если полно равномерное пространство $\mathrm{ClC}(X, 0)$. Как видно, для гиперполного X полно пространство $\mathrm{ClC}(X, S)$ при любом непустом подмножестве S в X. Из 3.5.5 (2) вытекает, что X гиперполно в том и только в том случае, когда всякое фундаментальное семейство в X, имеющее непустой верхний предел, сходится (разумеется, к этому верхнему пределу), а также в том и только в том случае, когда сходится всякое фундаментальное семейство, состоящее из замкнутых конических отрезков.

Обозначим через $\mathrm{ClA}(X)$ множество всех абсолютно выпуклых замкнутых подмножеств X. Говорят, что X *гиперполно в смысле Келли*, если полно равномерное пространство $\mathrm{ClA}(X)$. Вновь из 3.5.5 (2) выводим, что X гиперполно в смысле Келли в том и только в том случае, если всякое фундаментальное семейство, состоящее из абсолютно выпуклых множеств, сходится. Еще одно эквивалентное условие содержится в следующем предложении:

(1) *Локально выпуклое пространство* X *будет гиперполным в смысле Келли тогда и только тогда, когда в* $\mathrm{ClC}(X, 0)$ *сходит-*

ся всякое фундаментальное симметричное семейство. (Семейство $\mathscr{F}$ называют *симметричным*, если из $C \in \mathscr{F}$ вытекает $-C \in \mathscr{F}$.)

$\lhd$ Пусть $\mathscr{F}$ — симметричное фундаментальное семейство. Обозначим через $\mathscr{F}^s$ семейство $\{C^s : C \in \mathscr{F}\}$, где $C^s := \mathrm{cl}(\mathrm{co}(C \cup -C))$. Тогда $\mathscr{F}^s$ также фундаментально, причем $\mathscr{F}^s \subset \mathrm{ClA}(X)$ и $\bigcap(\mathscr{F}) = \bigcap(\mathscr{F}^s)$. Отсюда сразу же следует достаточность; необходимость очевидна. $\rhd$

(2) Имеются еще два естественных понятия гиперполноты. Семейство $\mathscr{F} \subset \mathrm{ClC}(X, 0)$ назовем *коническим* (*линейным*), если для любых $C \in \mathscr{F}$ и строго положительного числа λ (произвольного числа $\lambda \neq 0$) будет $\lambda C \in \mathscr{F}$. Ясно, что $\mathscr{F}$ — линейное семейство, если оно симметричное и коническое. Будем говорить, что X *конически гиперполно* (*совершенно полно*), если всякое фундаментальное коническое (линейное) семейство сходится. Для конически гиперполного или совершенно полного пространства полны соответственно равномерные пространства всех замкнутых конусов или замкнутых подпространств, однако обратное утверждение неверно.

3.5.7. Концепция гиперполноты допускает естественную локализацию. Тем самым возникает полезная возможность использовать вместо гиперполноты менее ограничительные «локальные» требования.

Говорят, что замкнутое выпуклое множество $C \subset X$ *обладает свойством Келли* или *келлиево*, если всякое фундаментальное семейство $\mathscr{F}$, для которого $C = \bigcap(\mathscr{F})$, сходится (к множеству C). Если в этом определении требуется, чтобы фундаментальное семейство $\mathscr{F}$ было симметричным, коническим или линейным, то говорят соответственно о *симметрическом*, *коническом* или *линейном свойстве Келли.* Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения:

(1) *X гиперполно тогда и только тогда, когда всякий замкнутый конический отрезок в X обладает свойством Келли;*

(2) *X гиперполно в смысле Келли тогда и только тогда, когда всякое абсолютно выпуклое замкнутое множество в X обладает симметрическим свойством Келли;*

(3) *X конически гиперполно тогда и только тогда, когда всякий замкнутый конус в X имеет коническое свойство Келли;*

(4) *X совершенно полно тогда и только тогда, когда всякое замкнутое подпространство обладает линейным свойством Келли.*

Двойственным по отношению к свойству Келли является свойство Крейна — Шмульяна. Рассмотрим локально выпуклое пространство X с сопряженным X' и, как обычно, мы будем обозначать поляру множества $U \subset X$ относительно двойственности $X \leftrightarrow X'$ символом U°. Множество $C \subset X'$ называют *почти слабо замкнутым*, если пересечение $C \cap U^\circ$ слабо замкнуто для любой окрестности нуля U в X. Пусть S — слабо замкнутое выпуклое множество в X'. Говорят, что S *обладает свойством Крейна — Шмульяна*, если всякое слабо плотное почти слабо замкнутое выпуклое подмножество $C \subset S$ совпадает с самим множеством S. Если в этом определении S и C — абсолютно выпуклые множества или конусы, или подпространства, то говорят соответственно о *симметрическом*, *коническом* или *линейном свойстве Крейна — Шмульяна*.

3.5.8. *Теорема.* *Пусть C — замкнутый конический отрезок* (*абсолютно выпуклое множество, конус, подпространство*) *в локально выпуклом пространстве. Тогда множество C обладает свойством Келли* (*симметрическим, коническим или линейным свойством Келли*) *в том и только в том случае, если поляра C° имеет свойство Крейна — Шмульяна* (*соответственно симметрическое, коническое или линейное свойство Крейна — Шмульяна*).

$\lhd$ Ограничимся доказательством лишь того случая, когда C — произвольный замкнутый конический отрезок. Симметрический, конический или линейный случаи получаются повторением тех же рассуждений с некоторыми простыми видоизменениями.

Предположим, что множество C келлиево, и пусть S — слабо плотное почти слабо замкнутое выпуклое подмножество в C°. Обозначим буквой $\mathscr{F}$ семейство всех множеств вида $(S \cap U^\circ)^\circ$, где U — окрестность нуля. Ясно, что $\mathscr{F}$ содержится в $\mathrm{ClC}(X, C)$ и является базисом фильтра. Пусть U и W — произвольные окрестности нуля, а V — такая окрестность нуля, что $V + V \subset W$. Привлекая элементарные свойства поляры, получим

$$(V + (U^\circ \cap S)^\circ)^\circ \subset V^\circ \cap (U^\circ \cap S)^{\circ\circ} = V^\circ \cap U^\circ \cap S \subset V^\circ \cap S,$$

следовательно, $W + (S \cap U^\circ)^\circ \supset (S \cap V^\circ)^\circ$. Тем самым $\mathscr{F}$ — фундаментальное семейство в $\mathrm{ClC}(X, C)$. Если $x \notin C$, то для некоторого $x' \in C^\circ$ выполнено $\langle x|x'\rangle > 1$, а поскольку S слабо плотно в C°, то можно считать, что $x' \in S$. Но $x' \in V^\circ$ для некоторой окрестности нуля V. Значит, $x \notin (S \cap V^\circ)^\circ$. Отсюда вытекает, что $C = \bigcap(\mathscr{F})$. Итак, семейство $\mathscr{F}$, рассматриваемое как сеть в $\mathrm{ClC}(X, C)$, сходится к C в равномерной топологии. Значит, какова бы ни была окрестность нуля V, найдется такая окрестность нуля U, что $C + V \supset (C \cap U^\circ)^\circ$. Переходя к полярам и привлекая правило из 3.3.12 (3), получим

$$S \supset (S \cap U^\circ)^{\circ\circ} \supset (C + V)^\circ = C^\circ \# V^\circ.$$

Из-за произвольности V отсюда следует, что $S \supset [0, 1)C^\circ$. Если $x' \in C^\circ$ и $x' \in V^\circ$ для некоторой окрестности нуля V, то $[0, 1)x' \subset S \cap V^\circ$, а ввиду слабой замкнутости множества $S \cap V^\circ$ имеем $x' \in S$. Таким образом, $S = C^\circ$ и C° имеет свойство Крейна — Шмульяна.

Допустим теперь, что C° обладает свойством Крейна — Шмульяна. Рассмотрим фундаментальное семейство $\mathscr{F}$ такое, что $C = \bigcap(\mathscr{F})$. Положим $\mathscr{F}^\circ := \{A^\circ : A \in \mathscr{F}\}$ и $S := \bigcup(\mathscr{F}^\circ)$. Из фундаментальности семейства $\mathscr{F}$ можно вывести, применив 3.3.12 (3), что для любой окрестности нуля U существует элемент $A \in \mathscr{F}$ такой, что $A^\circ \supset \alpha U^\circ \cap \beta D$ при всех $D \in \mathscr{F}^\circ$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Но тогда для тех же α и β будет $S \supset A^\circ \supset \mathrm{cl}(\alpha U^\circ \cap \beta S)$. Если число $0 < \varepsilon < 1$ произвольно и $\lambda := (1 - \varepsilon)/\varepsilon$, то

$$S \supset \mathrm{cl}(\varepsilon\lambda U^\circ \cap (1 - \varepsilon)S) = (1 - \varepsilon)\,\mathrm{cl}(S \cap U^\circ),$$

поэтому $S \cap U^\circ \supset [0, 1)\,\mathrm{cl}(S \cap U^\circ)$. Пусть $\mathrm{rcl}(B)$ — совокупность таких $x' \in X'$, что $[0, 1)x' \subset B$. Ясно, что $\mathrm{rcl}(U^\circ \cap S) = U^\circ \cap \mathrm{rcl}(S)$, поэтому

$$\mathrm{cl}(S \cap U^\circ) = \mathrm{cl}(\mathrm{rcl}(S) \cap U^\circ).$$

Ввиду доказанного выше

$$[0, 1)\,\mathrm{cl}(\mathrm{rcl}(S) \cap U^\circ) \subset S \cap U^\circ \subset \mathrm{rcl}(S) \cap U^\circ,$$

а по определению операции rcl имеем

$$\mathrm{cl}(\mathrm{rcl}(S) \cap U^\circ) \subset \mathrm{rcl}(S) \cap U^\circ.$$

Итак, множество $\operatorname{rcl}(S)$ выпукло и почти слабо замкнуто, а поскольку $\operatorname{rcl}(S)^\circ = S^\circ = \bigcap(\mathscr{F}) = C$, верно также, что S слабо плотно в C°. По свойству Крейна — Шмульяна $C^\circ = \operatorname{rcl}(S)$. Наконец, воспользуемся еще раз тем, что для любой окрестности нуля U существует такой элемент $A \in \mathscr{F}$, что $A^\circ \supset \alpha U^\circ \cap \beta \operatorname{rcl}(S)$ при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Ввиду этого $A^\circ \supset U^\circ \# C^\circ$. Далее, применив теорему о биполяре и 3.3.12 (7), приходим к соотношениям

$$A \subset \operatorname{cl}(U + C) \subset 2U + C.$$

Ввиду произвольности U последнее означает, что $\mathscr{F}$ сходится в C. $\triangleright$

3.5.9. Из установленного факта сразу вытекают двойственные характеризации гиперполноты.

(1) *Локально выпуклое пространство гиперполно (гиперполно в смысле Келли, конически гиперполно, совершенно полно) в том и только в том случае, если в сопряженном пространстве всякое почти слабо замкнутое выпуклое множество (соответственно абсолютно выпуклое множество, конус, подпространство) является слабо замкнутым.*

(2) ***Теорема Крейна — Шмульяна.*** *Метризуемое локально выпуклое пространство полно в том и только в том случае, если всякое почти слабо замкнутое выпуклое подмножество сопряженного пространства слабо замкнуто.*

$\triangleleft$ Это следует из (1) в силу 3.5.4 (1, 2). $\triangleright$

(3) ***Теорема Банаха — Гротендика.*** *Для произвольного локально выпуклого пространства X равносильны утверждения:*

(a) *X полно;*

(b) *всякий линейный функционал на X', который непрерывен на каждом эквинепрерывном подмножестве X, будет также и $\sigma(X', X)$-непрерывным;*

(c) *всякая почти слабо замкнутая гиперплоскость в X' слабо замкнута.*

3.5.10. *Теорема.* *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, а Φ — выпуклое замкнутое соответствие из X в Y, почти открытое в какой-нибудь точке. Предположим, что $\operatorname{int}(\Phi(X)) \neq \varnothing$ и множество $\Phi^{-1}(u)$ келлиево для любого $u \in \operatorname{int}(\Phi(X))$. Тогда соответствие Φ открыто в любой точке $(x, y) \in \Phi$, для которой $y \in \operatorname{int}(\Phi(X))$.*

$\triangleleft$ Без ограничения общности, можно считать, что $x = 0$ и $y = 0$. В силу теоремы 3.4.4 требуемое будет установлено, если доказать, что для любых $y_0 \in \operatorname{int}(\Phi(X))$ и $x' \in X'$ справедлива формула

$$\Phi^{-1}(y_0)^*(x') = \inf\{\Phi^*(x', y') - \langle y_0 | y' \rangle : y' \in Y'\},$$

причем точная нижняя граница в правой части достигается. Ввиду предложения 3.1.3 соответствие Φ почти открыто в точке (x_0, y_0) для некоторого $x_0 \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Положим $\Psi := \Phi - (x_0, y_0)$ и $G := \Psi^{-1}(0)$. Тогда Ψ почти открыто в нуле, $0 \in \operatorname{int}(\Psi(X))$ и множество G келлиево. Элементарный подсчет убеждает, что требуемое утверждение будет доказано, если установить справедливость точной формулы

$$G^*(x') = \inf\{\Psi^*(x', y') : y' \in Y'\}$$

для всех $x' \in X'$. Последнее же равносильно совпадению множеств

$$S_\alpha := \{x' \in X' : G^*(x') \leqslant \alpha\},$$
$$Q_\alpha := \{x' \in X' : (\exists y' \in Y')\Psi^*(x', y') \leqslant \alpha\}$$

при всех $\alpha \geqslant 0$ (при $\alpha < 0$ будет $S_\alpha = Q_\alpha = \varnothing$). В самом деле, легко показать, что $0 \leqslant G^*(x') \leqslant \Psi^*(x', y')$, каковы бы ни были $x' \in X'$ и $y' \in Y'$. Если же $Q_\alpha = S_\alpha$ при $\alpha \geqslant 0$, то для $\alpha := G^*(x')$ имеем $x' \in S_\alpha$. Следовательно, существует такой $y'_0 \in Y'$, что $\Psi^*(x', y'_0) \leqslant \alpha = G^*(x')$. Тем самым

$$G^*(x') = \Psi^*(x', y'_0) = \inf\{\Psi_*(x', y') : y' \subset Y'\}.$$

Заметим далее, что $S_\alpha = \alpha S_1$ и $Q_\alpha = \alpha Q_1$ при $\alpha > 0$.

Таким образом, осталось проверить справедливость равенства $Q_1 = S_1$, ибо $S_0 = \bigcap\{S_\alpha : \alpha > 0\}$ и $Q_0 = \bigcap\{Q_\alpha : \alpha > 0\}$.

Второе из этих равенств следует из того, что если $\Psi^*(x', y'_n) \leqslant 1/n$, то последовательность (y'_n) эквинепрерывна согласно 3.4.3 (2). Если y' — предельная точка этой последовательности, то равенство $\Psi^*(x', y')$=0 верно ввиду полунепрерывности снизу функционала Ψ^*.

Включение $S_1 \supset Q_1$ очевидно. Поскольку $S_1 = G^\circ$, а значит, $S_1^\circ = G^{\circ\circ} = G$, из соотношения $x_0 \notin S_1^\circ$ вытекает, что $(x, 0) \notin \Psi$. Следовательно, для некоторых функционалов $x' \in X'$ и $y' \in Y'$ будет $\langle x | x' \rangle - \langle y | y' \rangle \leqslant 1$ при $(x, y) \in \Psi$ и $\langle x_0 | x' \rangle - \langle 0 | y' \rangle = \langle x_0 | x' \rangle > 1$.

Это влечет $x_0 \notin Q_1^\circ$. Учитывая слабую замкнутость S_1, получим, что $S_1 = Q_1^{\circ\circ}$. В силу теоремы о биполяре соотношение $S_1 = Q_1$ обеспечено слабой замкнутостью Q_1. Значит, принимая в расчет келлиевость множества $Q_1^\circ = S_1^\circ = G$, достаточно установить, что Q_1 почти слабо замкнуто, и сослаться на теорему 3.5.8.

Пусть U — окрестность нуля в X и сеть $(x'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в $Q_1 \cap U^\circ$ слабо сходится к некоторому $x' \in X'$. Тогда $x' \in U^\circ$ и покажем, что $x' \in Q_1$. Так как $Q_1 = \mathrm{dom}(\Psi^\circ)$, существует сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в Y' такая, что $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Psi^\circ$ при $\alpha \in A$. Множество $Q_1 \cap U^\circ$ эквинепрерывно, а Ψ почти открыто в нуле, следовательно, сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ эквинепрерывна в силу 3.4.3 (2). Если y' — предельная точка сети $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, то благодаря слабой замкнутости множества Ψ° имеем $y' \in \Psi^\circ(x')$ или $x' \in \mathrm{dom}(\Psi^\circ) = Q_1$. Итак, множество $U^\circ \cap Q_1$ слабо замкнуто. ▷

3.5.11. Сделаем несколько дополнительных замечаний по поводу теоремы 3.5.10. Прежде всего ясно, что случай гиперполного X обслуживает весь класс выпуклых соответствий без «локальных» требований келлиевости к прообразам точек $y \in \mathrm{int}(\Phi(X))$. Далее, очевидно, что для бочечного пространства Y можно опустить предположение о почти открытости Φ. Иными словами, справедливо следующее утверждение:

(1) ***Теорема.*** *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, причем X гиперполно, а Y бочечно. Тогда всякое замкнутое выпуклое соответствие $\Phi \subset X \times Y$ открыто в любой точке $(x, y) \in \Phi$, как только $y \in \mathrm{int}(\Phi(X))$.*

Если Φ — симметричное соответствие, т. е. $\Phi = -\Phi$, то в теореме 3.5.10 достаточно требовать, чтобы $\Phi^{-1}(y)$ обладало симметрическим свойством Келли, а в (1) предполагать гиперполноту X в смысле Келли. Для линейных соответствий схема доказательства теоремы 3.5.10 приводит к следующему результату.

(2) ***Теорема Птака.*** *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства и Φ — замкнутое линейное соответствие из X в Y. Пусть, далее, X совершенно полно, а Φ почти открыто в нуле. Тогда Φ открыто в нуле.*

3.6. Решета, совершенные ткани и принцип открытости

Анализ доказательства классического принципа открытости, которое было дано самим С. Банахом (см. 3.1.18), показывает, что лежащий в его основе метод обкатывающего шара применим и в том случае, если фундаментальную последовательность шаров метризуемого топологического векторного пространства заменить на убывающую последовательность множеств, измельчающихся в том или ином смысле. Систематическое использование этого наблюдения ведет к новым результатам об автоматической открытости выпуклых соответствий.

3.6.1. Рассмотрим множество всех мультииндексов $I(\mathbb{N}) := \{0\} \cup (\bigcup\{\mathbb{N}^k : k \in \mathbb{N}\})$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Отношение порядка в $I(\mathbb{N})$ определим так: $(n_1, \dots, n_k) \leqslant (m_1, \dots, m_l)$ в том и только в том случае, если $k \leqslant l$ и $(n_1, \dots, n_k) = (m_1, \dots, m_k)$. Нулевой мультииндекс 0 — наименьший элемент множества $I(\mathbb{N})$. *Тканью* произвольного множества M называют отображение ω из $I(\mathbb{N})$ в $\mathscr{P}(M)$, удовлетворяющее условиям:

(1) $\omega(0) = M$;

(2) $\omega(\nu) \subset \omega(\mu)$, если только $\mu \leqslant \nu$;

(3) $\omega(\mu) = \bigcup\{\omega(\nu) : \nu > \mu\}$ при всех $\mu \in I(\mathbb{N})$.

Предположим теперь, что M — топологическое пространство. Ткань ω множества M называют *решетом*, если для всякой строго возрастающей последовательности мультииндексов (ν_k) множество $\{\omega(\nu_k) : k \in \mathbb{N}\}$ есть базис некоторого сходящегося фильтра в M. Хаусдорфово топологическое пространство называют *суслинским* (или *аналитическим*), если оно обладает решетом. Можно показать, что топологическое пространство является суслинским, если и только если оно является непрерывным образом *польского* (т. е. полного сепарабельного метрического) пространства. Подмножество топологического пространства называют *суслинским* (*аналитическим*), если оно является суслинским (аналитическим) топологическим пространством в индуцированной топологии.

Если множество M лежит в топологическом векторном пространстве X, то можно рассматривать и более квалифицированные ткани. Именно, ткань ω множества M называют *совершенной*, если для любой строго возрастающей последовательности мультииндексов (ν_k) существует последовательность неотрицательных чисел (λ_k) такая, что множество $\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq 0\}$ бесконечно и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} t_k x_k$ сходится к некоторому элементу из M при любом выборе

$x_k \in \omega(\nu_k)$ и $t_k \in [0, \lambda_k]$ $(k := 0, 1, \dots)$. При этом говорят, что (λ_k) ω-ассоциирована с (ν_k).

Множество M в топологическом векторном пространстве X называют *тканым в точке* $x \in M$ (или просто *тканым*, когда $x = 0$), если $M - x$ допускает совершенную ткань. Если в этом определении $M = X$, то говорят, что X — *тканое пространство.*

3.6.2. Классы суслинских и тканых множеств устойчивы относительно основных теоретико-множественных конструкций. Прежде, чем сформулировать соответствующий результат, напомним, что подмножество M топологического пространства обладает *свойством Бэра*, если для некоторого открытого G множество $M \vartriangle G := (M \backslash G) \cup (G \backslash M)$ будет тощим.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *непрерывный образ суслинского (непрерывный линейный образ тканого) множества вновь есть множество суслинское (тканое);*

(2) *объединение, пересечение и произведение не более чем счетного множества суслинских (тканых) множеств есть множество суслинское (тканое);*

(3) *любое суслинское подмножество хаусдорфова топологического пространства обладает свойством Бэра;*

(4) *если (M_n) — последовательность суслинских (тканых) множеств, то множество $\bigcup_{n=0}^{\infty}(M_n \times \{n\})$ (соответственно, множество $\bigcup_{n=0}^{\infty}(M_0 + \ldots + M_n)$) также суслинское (тканое);*

(5) *если V — множество второй категории в топологическом векторном пространстве и обладает свойством Бэра, то $V - V$ — окрестность нуля;*

(6) *если суслинское топологическое векторное пространство является бэровским (т. е. всякое его непустое открытое подмножество нетощее), то оно есть польское пространство.*

$\triangleleft$ Устойчивость класса тканых множеств относительно указанных операций устанавливается путем явного построения соответствующей совершенной ткани. Приведем коротко эти построения.

(a) Пусть M — подмножество топологического векторного пространства X и ω — совершенная ткань множества M. Если T —

линейный непрерывный оператор из X в некоторое топологическое векторное пространство, то отображение $\nu \mapsto T\omega(\nu) := T(\omega(\nu))$ $(\nu \in I(\mathbb{N}))$ есть совершенная ткань множества $T(M)$.

(б) Если ω^k — совершенная ткань множества M_k при $k \in \mathbb{N}$, то совершенную ткань ω множества $M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$ можно определить соотношениями

$$\omega(0) := M, \quad \omega(n_1) := M_{n_1} \quad (n_1 \in \mathbb{N});$$
$$\omega(n_0, \dots, n_k) := \omega^{n_0}(n_1, \dots, n_k) \quad (k, n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}).$$

(в) Конструкция совершенной ткани множества $M := \prod_{k=0}^{\infty} M_k$ следующая. Пусть ψ_s — биективное отображение $\mathbb{N}^{s+1}$ на $\mathbb{N}$. Положим по определению

$$\omega(n_0^0) := \omega^0(n_0^0) \times \prod_{i=1}^{\infty} M_i,$$
$$\omega(n_0^0, \psi_1(n_1^0, n_0^1)) := \omega^0(n_0^0, n_1^0) \times \omega^1(n_0^1) \times \prod_{i=2}^{\infty} M_i,$$
$$\omega(n_0^0, \psi_1(n_1^0, n_0^1), \psi_2(n_2^0, n_1^1, n_0^2)) := \omega^0(n_0^0, n_1^0, n_2^0) \times$$
$$\times \omega^1(n_0^1, n_1^1) \times \omega^2(n_0^2) \times \prod_{i=3}^{\infty} M_i, \dots .$$

Для возрастающей последовательности мультииндексов (ν_k) существуют последовательности (n_k^0), (n_k^1), $\dots$ натуральных чисел таких, что

$$\nu_k := (n_0^0, \psi_1(n_1^0, n_0^1), \psi_2(n_2^0, n_1^1, n_0^2), \dots, \psi_k(n_k^0, \dots, n_0^k)).$$

Допустим, что последовательность (λ_k^i) является ω^i-ассоциированной с (n_k^i) при всех i. Положим

$$\mu_0 := \lambda_0^0,\ \mu_1 := \inf\{\lambda_1^0, \lambda_0^1\},\ \mu_2 := \inf\{\lambda_2^0, \lambda_1^1, \lambda_0^2\}, \dots .$$

Тогда последовательность (μ_k) будет ω-ассоциированной с последовательностью (ν_k).

(г) Если M_n — подмножество одного и того же топологического векторного пространства X, а $\Delta_{\mathbb{N}}(X)$ — диагональ пространства $X^{\mathbb{N}}$, то проекция множества $(\prod_{n=0}^{\infty} M_n) \cap \Delta_{\mathbb{N}}(X)$ на любое координатное пространство совпадает с $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Поэтому тканость пересечения вытекает из (а) и (в).

(д) Конечная сумма $M_1 + \ldots + M_n$ совпадает с образом произведения $M_1 \times \ldots \times M_n$ при отображении $X^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \to x_1 + \ldots + x_n \in X$. Следовательно, из (а), (б) и (в) вытекает (4). $\triangleright$

3.6.3. Интересные примеры тканых множеств связаны с понятиями монотонной полноты и идеальной выпуклости (см. 3.1.14).

Назовем *нитью* в X последовательность (V_n) поглощающих и уравновешенных подмножеств X, для которой $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если V_n — окрестность нуля для каждого n, то нить назовем *топологической*. Нить (V_n) именуют *порождающей*, если она служит базисом фильтра окрестностей нуля.

(1) *Пусть C — идеально выпуклое или монотонно полное выпуклое подмножество в X. Предположим, что либо X метризуемо, либо X есть объединение последовательности ограниченных абсолютно выпуклых подмножеств. Тогда C ткано в любой точке $x \in C$.*

$\triangleleft$ Достаточно рассмотреть случай $x = 0 \in C$. Если X метризуемо и (U_k) — порождающая нить в X, состоящая из уравновешенных множеств, то совершенная ткань ω множества C определена формулами

$$\omega(0) := C,\ \omega(n_0, \ldots, n_k) := n_0 U_0 \cap \ldots \cap n_k U_k \cap C.$$

Если (D_n) — последовательность ограниченных абсолютно выпуклых множеств и $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = X$, то полагаем

$$\omega(0) := C,\ \omega(n_0, \ldots, n_k) := \omega(n_0) = C \cap D_{n_0}.$$

Пусть $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность. Тогда ω-ассоциированная последовательность (λ_i) в первом случае имеет вид $\lambda_i := (\sup\{n_1, \ldots, n_i\})^{-1}$, а во втором случае — $\lambda_i := 2^{-i}$ $(i \in \mathbb{N})$. $\triangleright$

Из теоремы 3.6.2 и предложения (1) можно извлечь следующие примеры тканых пространств.

(2) *Если топологическое векторное пространство представимо в виде объединения абсолютно выпуклых полных ограниченных подмножеств, то оно ткано.*

(3) *Всякое полное метризуемое топологическое векторное пространство ткано.*

(4) *Сопряженное к метризуемому топологическому векторному пространству является тканым с любой отделимой локально выпуклой топологией, в которой все равностепенно непрерывные множества ограничены.*

(5) *Индуктивный и проективный пределы любой последовательности тканых топологических векторных пространств являются ткаными.*

3.6.4. Перейдем к доказательству результатов об автоматической открытости. Мы будем называть соответствие *суслинским*, *тканым* и т. п., если соответствующим свойством обладает его график. Скажем также, что соответствие Γ *полуткано в точке* $x \in \operatorname{dom}(\Gamma)$, если оно идеально выпукло и $\operatorname{dom}(\Gamma)$ ткано в точке x.

Теорема. *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем Y бэровское. Пусть (Γ_n) — возрастающая последовательность выпуклых суслинских соответствий из X в Y, и предположим, что $\operatorname{core}(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(X)) \neq \varnothing$. Тогда Y — польское пространство и для любого $y_0 \in \operatorname{core}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(X))$ существует такой номер m, что соответствие Γ_m открыто в точке (x_0, y_0) при $x_0 \in \Gamma^{-1}(y_0)$.*

$\triangleleft$ Если $V := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(X)$, то множество $(V - y_0) \cap (y_0 - V)$ поглощающее, а значит, не является тощим. Поскольку (Γ_n) возрастает, то будет

$$(V - y_0) \cap (y_0 - V) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Gamma_n(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma_n(X)),$$

стало быть, существует номер m такой, что $U := (\Gamma_m(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma_m(X))$ — нетощее множество. Кроме того, U — симметричное и суслинское множество, поэтому является окрестностью нуля в соответствии с 3.6.2 (3, 5). Докажем открытость соответствия $\Gamma := \Gamma_m$ в точке (x_0, y_0), $x_0 \in \Gamma^{-1}(y_0)$, причем достаточно рассмотреть случай $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Возьмем произвольную окрестность нуля $V \subset X$

и подберем замкнутую симметричную окрестность нуля $V_1 \subset X$ так, чтобы $(1/2)V_1 + (1/2)V_1 \subset V$. Как легко видеть, множество $U_1 := \Gamma(V_1)$ поглощающее, поскольку $0 \in \operatorname{core}(\Gamma(X))$. Но тогда $U_1 \cap (-U_1)$ — нетощее подмножество пространства Y. Далее, заметим, что $\Gamma \cap (V_1 \times Y)$ — борелевское подмножество соответствия Γ, следовательно, его проекция на Y, совпадающая с U_1, является суслинским множеством. Пространство Y также суслинское, так как $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} nU_1$. Таким образом, по 3.6.2 (6) Y — польское пространство. Из сказанного ясно также, что $U := (1/2)(U_1 \cap (-U_1))$ — нетощее суслинское множество. Выпуклость же соответствия Γ дает справедливость соотношений

$$U - U \subset (1/2)U_1 + (1/2)U_1 \subset \Gamma\big((1/2)V_1 + (1/2)V_1\big) \subset \Gamma(V).$$

Осталось заметить, что по 3.6.2 (3) суслинское множество обладает свойством Бэра, и сослаться на 3.6.2 (5). $\triangleright$

3.6.5. Отметим два следствия из доказанной теоремы.

(1) *Пусть Γ — выпуклое суслинское соответствие из топологического векторного пространства X в бэровское топологическое векторное пространство Y, причем $\operatorname{core}(\Gamma(X)) \neq \varnothing$. Тогда Y — польское пространство, а Γ открыто в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$ при $y_0 \in \operatorname{core}(\Gamma(X))$.*

(2) *Для сублинейных операторов $p_1, p_2 : X \to Y^\bullet$, где X — топологическое векторное пространство и Y — топологическое K-пространство, имеет место представление Моро — Рокафеллара, если выполнены условия:*

(а) *Y^+ — суслинское множество;*

(б) *$\operatorname{dom}(p_1) - \operatorname{dom}(p_2)$ — дополняемое пространство, нетощее в себе;*

(в) *$p_i : \operatorname{dom}(p_i) \to Y$ есть борелевское отображение при $i := 1, 2$.*

3.6.6. Теперь несколько изменим квалификацию рассматриваемых соответствий. Тогда существенно расширится класс допустимых пространств-образов. Множество в топологическом пространстве Q называют *секвенциально борелевским*, если оно входит в σ-алгебру $\mathscr{B}_s(Q)$, порожденную совокупностью всех секвенциально замкнутых подмножеств в Q.

(1) *Теорема.* *Пусть X — произвольное топологическое векторное пространство, а Y — индуктивный предел полных метризуемых топологических векторных пространств. Предположим, что Γ — секвенциально борелевское соответствие из X в Y, эффективное множество* $\operatorname{dom}(\Gamma)$ *которого суслинское. Тогда Γ открыто в любой точке (x_0, y_0), как только $y_0 \in \operatorname{core}(\Gamma(X))$.*

$\lhd$ Не ограничивая общности, можно предположить, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Пусть $\mathscr{U} := (U_n)$ — произвольная топологическая нить в X, см. 3.6.3. Рассмотрим последовательность $\mathscr{V} := (V_n)$, где $V_n := (2^{-n}\Gamma)(U_n) \cap -(2^{-n}\Gamma)(U_n)$. Очевидно, что $\mathscr{V}$ — нить, и нужно установить, что эта нить топологическая.

Пусть $Y := \varinjlim T_\alpha(Y_\alpha)$, где Y_α — полные метризуемые топологические векторные пространства, а $T_\alpha : Y_\alpha \to Y$ — линейные непрерывные операторы. Положим

$$u_\alpha := (I_X, T_\alpha), \quad \Gamma_\alpha := u_\alpha^{-1}(\Gamma),$$
$$V_{n\alpha} := (2^{-n}\Gamma_\alpha)(U_n) \cap -(2^{-n}\Gamma_\alpha)(U_n)$$

и рассмотрим нити $\mathscr{V}_\alpha := (V_{n\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$. Так как $V_{n\alpha} = T_\alpha^{-1}(V_n)$, то теорема будет установлена, если показать, что $\mathscr{V}_\alpha$ является топологической нитью для всех α. Однако в силу борнологичности метризуемого пространства достаточно убедиться в том, что нить $\mathscr{V}_\alpha$ поглощает любое ограниченное множество в Y. Допустим, что последнее неверно и множество $V_{m\alpha}$ не поглощает некоторое ограниченное множество. Тогда существует ограниченная последовательность (y_k) в Y_α такая, что $k^{-1}y_k \notin V_{m\alpha}$ для всех k. Очевидно, что замкнутая линейная оболочка Z последовательности (y_k) является польским пространством. В силу непрерывности оператора u_α имеем $\Gamma_\alpha \in \mathscr{B}_s(X \times Y_\alpha)$, а значит, множество $\Phi_\alpha := (X \times Z) \cap \Gamma_\alpha$ суслинское, поскольку оно секвенциально борелевское подмножество суслинского множества $\operatorname{dom}(\Gamma) \times Z$. Таким образом, соответствие Φ_α из X в Z удовлетворяет всем условиям 3.6.5 (1) при $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, стало быть, оно открыто в нуле. Но тогда для достаточно больших k будет $k^{-1}y_k \in (2^{-m}\Phi_\alpha(U_m) \cap (-(2^{-m}\Phi_\alpha)(U_m))$. Полученное противоречие показывает, что нить $\mathscr{V}$ поглощает всякое ограниченное множество в Y. $\rhd$

(2) *Теорема Шварца.* *Пусть X — индуктивный предел полных метризуемых топологических векторных пространств, Y —*

суслинское топологическое векторное пространство и T — линейный оператор из X в Y с секвенциально борелевским графиком. Тогда T непрерывен.

$\triangleleft$ Достаточно в теореме (1) взять в качестве Γ линейное соответствие. $\triangleright$

3.6.7. Обратимся теперь к автоматической открытости выпуклого соответствия, связанной с понятием совершенной ткани. Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Пусть Γ — выпуклое соответствие из X в Y, причем $0 \in \Gamma(0)$ и $\Gamma(X) \cap (-\Gamma(X))$ — нетощее множество в Y. Предположим, что Γ полуткано или ткано в нуле. Тогда существует последовательность (Φ_k) соответствий из X в Y, обладающая свойствами:

(1) *$\Phi_k \subset \Gamma$ и $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*

(2) *для любой последовательности $((x_k, y_k))$ из включений $y_k \in \Phi_k(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится к некоторому $x \in \operatorname{dom}(\Gamma)$, а если сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ к элементу $y \in Y$, то $y \in \Gamma(x)$;*

(3) *множество $\operatorname{cl}(\Phi_k(X))$ есть окрестность нуля для всех $k \in \mathbb{N}$;*

(4) *для любой окрестности нуля $U \subset X$ существует такой номер m, что $\sum_{k=m}^{n} \operatorname{dom}(\Phi_k) \subset U$ для всех $n > m$.*

$\triangleleft$ Ограничимся утверждением относительно полутканого (в нуле) соответствия. К этому сводится и случай тканого соответствия Γ с помощью связанного с ним соответствия $\widetilde{\Gamma}$ из $X \times Y$ в Y, определяемого формулой:

$$\widetilde{\Gamma} := \{(x, y, z) \in X \times Y^2 : y \in \Gamma(x), z = y\}.$$

Итак, пусть соответствие Γ полуткано в нуле. Пусть ω — совершенная ткань множества $\operatorname{dom}(\Gamma)$. Поскольку $\operatorname{dom}(\Gamma) = \bigcup_{n_0=0}^{\infty} \omega(n_0)$, то будет

$$\Gamma(X) \cap -\Gamma(X) = \bigcup_{n_0, n_0'=0}^{\infty} \Gamma(\omega(n_0)) \cap -\Gamma(\omega(n_0')).$$

Так как множество в правой части этого равенства нетощее, то найдутся такие номера n_0 и n_0', что замыкание множества $\Gamma(\omega(n_0)) \cap$

$(-\Gamma(\omega(n'_0)))$ имеет непустую внутренность. Положим $e_0 := \omega(n_0)$ и $e'_0 := \omega(n'_0)$. Далее,

$$\Gamma(e_0) \cap -\Gamma(e'_0) = \bigcup_{n_1, n'_1 = 0}^{\infty} \Gamma(\omega(n_0, n_1)) \cap -\Gamma(\omega(n'_0, n'_1)),$$

значит, по тем же соображениям, что и выше, замыкание множества $\Gamma(\omega(n_0, n_1)) \cap (-\Gamma(\omega(n'_0, n'_1)))$ имеет непустую внутренность при некоторых $n_1, n'_1 \in \mathbb{N}$. Обозначим $e_1 := \omega(n_0, n_1)$ и $e'_1 := \omega(n'_0, n'_1)$. Продолжая этот процесс, получим последовательности (n_k), (n'_k), (e_k) и (e'_k), причем

$$\operatorname{int}\big(\operatorname{cl}(\Gamma(e_k) \cap (-\Gamma(e'_k)))\big) \neq \varnothing \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Пусть (λ_k) и (λ'_k) — последовательности неотрицательных чисел, ω-ассоциированные с (n_k) и (n'_k) соответственно, причем можно считать, не умаляя общности, что $0 < \lambda_k, \lambda'_k \leqslant 1$, $\lambda_{k+1} \leqslant \lambda_k/2$ и $\lambda'_{k+1} \leqslant \lambda'_k/2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mu_k := \min\{\lambda_k, \lambda'_k\},$$

$$\Phi_k := [0, \mu_k/2](e_k \times Y) \cap \Gamma + [0, \mu_k/2](e'_k \times Y) \cap \Gamma.$$

Поскольку последовательности (e_k) и (e'_k) убывают, а Γ выпукло и $(0,0) \in \Gamma$, то $\Phi_k \subset \Gamma$ и $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Если окрестность нуля $U \subset X$ и элемент $x \in X$ таковы, что $x + U$ содержится в замыкании $\Gamma(e_k) \cap (-\Gamma(e'_k))$, то

$$\begin{aligned} U \subset & \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U \subset \frac{1}{2}\operatorname{cl}(\Gamma(E'_N)) + \frac{1}{2}\operatorname{cl}(\Gamma(E'_N)) \subset \\ \subset & \frac{1}{2}\operatorname{cl}(\Gamma(e_n) + \Gamma(e'_n)) \subset \operatorname{cl}\left(\frac{1}{\mu_k}\Phi_k(X) + \frac{1}{\mu_k}\Phi_k(X)\right) \subset \\ \subset & \frac{2}{\mu_k}\operatorname{cl}(\Phi_k(X)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{cl}(\Phi_k(X))$ — окрестность нуля.

Рассмотрим последовательность $\big((x_k, y_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ в Φ_k и представим ее в виде

$$(x_k, y_k) = \frac{\alpha_k}{2}(x'_k, y'_k) + \frac{\beta_k}{2}(x''_k, y''_k),$$

где $\alpha_k,\ \beta_k \in [0, \mu_k]$, $(x'_k, y'_k) \in \Gamma$, $(x''_k, y''_k) \in \Gamma$, $x'_k \in e_k$, $x''_k \in e'_k$, причем можно считать, что $\alpha_k + \beta_k > 0$. В силу тканости множества $\operatorname{dom}(\Gamma)$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x'_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x''_k$ сходятся. Но тогда сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ к некоторому $x \in \operatorname{dom}(\Gamma)$. Допустим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ также сходится и обозначим через y его сумму. Тогда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\alpha_k}{2\lambda_k} y'_k + \frac{\beta_k}{2\lambda_k} y''_k \right), \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{\alpha_k}{2\lambda_k} x'_k + \frac{\beta_k}{2\lambda_k} x''_k \right),$$

где $\lambda_k := (\alpha_k + \beta_k)/2$.

Принимая во внимание неравенство $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \leqslant 1$ и идеальную выпуклость соответствия Γ, получим $(x, y) \in \Gamma$, т. е. выполнено (2). Наконец, предположим, что условие (4) не имеет места. Тогда существуют окрестности нуля $U \subset X$, последовательность (x_k) элементов X и возрастающие последовательности натуральных чисел (n_k) и (m_k) такие, что $x_k \in \operatorname{dom}(\Phi_k)$, $m_k \leqslant n_{k+1}$ при всех k и

$$\sum_{i=n_k}^{m_k} x_i \notin U \quad (k := 0, 1, \dots).$$

Это, однако, невозможно, поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ должен сходиться в силу (2). $\rhd$

3.6.8. *Теорема.* *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем Y метризуемо. Предположим, что выпуклое соответствие Γ из X в Y полуткано в точке $x_0 \in \operatorname{dom}(\Gamma)$, а $y_0 \in \Gamma(x_0)$ такова, что $(\Gamma(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma(X))$ — нетощее подмножество в Y. Тогда Γ открыто в точке (x_0, y_0).*

$\lhd$ Не умаляя общности, можно считать $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, так как общий случай сводится к этому посредством сдвига $(x, y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$. Применим предложение 3.6.7 к соответствию Γ. Пусть последовательность соответствий (Φ_k) удовлетворяет всем условиям из этого предложения. Виду 3.6.7 (3) и метризуемости Y существует порождающая нить (V_k) в пространстве Y, для которой $V_k \subset \operatorname{cl}(\Phi_k(X))$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда выводим

$$V_k \subset \Phi(X) + V_{k+1} \quad (k := 0, 1, \dots).$$

Далее, для произвольной окрестности нуля $U \subset X$ в соответствии с условием 3.6.7 (4) подберем такой номер m, чтобы

$$\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \sum_{k=m}^{n} \operatorname{dom}(\Phi_k) \subset U.$$

Покажем, что тогда $V_m \subset \Gamma(U)$. В самом деле, если $y \in V_m$, то существуют такие последовательности (y_n) и $\big((x_n, z_n)\big)$, что

$$y_m = y, \quad y_n \in V_n, \quad (x_n, z_n) \in \Phi_n, \quad y_n = z_n + y_{n+1} \quad (n \geqslant m).$$

Суммируя последнее равенство по n от m до $l > m$, получим

$$y_m = \sum_{k=m}^{l} z_k + y_{l+1},$$

а поскольку $y_{l+1} \to 0$, ряд $\sum_{n=m}^{\infty} z_n$ сходится к $y_m = y$. В силу условия 3.6.7 (2) и выбора окрестности U ряд $\sum_{k=m}^{\infty} x_k$ сходится к некоторому $x \in U$, причем $(x, y) \in \Gamma$. Итак, $V_m \subset \Gamma(U)$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

3.6.9. *Если бэровское топологическое векторное пространство допускает совершенную ткань, то оно полно и метризуемо.*

$\triangleleft$ Пусть X — бэровское и тканое топологическое векторное пространство, а $\Gamma := \Delta_2(X)$ — диагональное соответствие из X в $Y := X$. Поскольку соблюдены условия предложения 3.6.7, существует последовательность (Φ_k) соответствий из X в Y, обладающая свойствами 3.6.7 (1–4). Положим $U_k := \operatorname{cl}(\operatorname{dom}(\Phi_k))$ и заметим, что $\operatorname{dom}(\Phi_k) = \Phi_k(X)$ $(k \in \mathbb{N})$. В силу 3.6.7 (3) и 3.6.7 (4) из (U_k) можно извлечь подпоследовательность, являющуюся порождающей нитью. Следовательно, пространство X метризуемо. Далее, пространство X является нетощим множеством в своем пополнении $\widetilde{X}$. Действительно, если $X \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$ и V_k замкнуты в $\widetilde{X}$, то в силу бэровости пространства X имеем $V_m \supset U$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и подходящего открытого множества U в X. Но тогда $V \supset \overline{U}$, где $\overline{U}$ — замыкание U в $\widetilde{X}$. Тем самым ясно, что $\overline{U}$ имеет непустую внутренность в $\widetilde{X}$. Применив теорему 3.6.8 к $\Gamma := \Delta_2(X)$, рассматриваемому как соответствие из X в $\widetilde{X}$, получим, что $X = \Gamma(X)$ — окрестность нуля в $\widetilde{X}$, т. е. $X = \widetilde{X}$. $\triangleright$

3.6.10. *Теорема.* *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а Γ — выпуклое замкнутое соответствие из X в Y. Допустим, что $\mathrm{dom}(\Gamma)$ ткано в точке $x_0 \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ и множество $(\Gamma(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma(X))$ нетощее в Y для некоторого $y_0 \in \Gamma(x_0)$. Тогда Γ открыто в точке (x_0, y_0).*

$\lhd$ Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3.6.8, получим представление

$$y = y_m = \sum_{n=m}^{l} z_n = y_{l+1} \quad (l > m).$$

Однако нельзя уже утверждать, что $y_{l+1} \to 0$. Пусть $V \subset Y$ — произвольная окрестность нуля. Тогда

$$y_{l+1} \in V_{l+1} \subset \mathrm{cl}(\Phi_{l+1}(X)) \subset \Phi_{l+1}(X) + V,$$

стало быть, $y_{l+1} - z_{l+1} \in V$ и $z'_{l+1} \in \Phi_{l+1}(x'_{l+1})$ для некоторых z'_{l+1} и x'_{l+1}. Отсюда видно, что

$$y_m - \sum_{n=m}^{l} z_n - z'_{l+1} \in V \quad (l > m).$$

Ряд $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ по-прежнему сходится к некоторому $x \in U$, поэтому для произвольной окрестности нуля $U_0 \subset X$ номер l можно выбрать так, чтобы $x - \sum_{n=m}^{l} x_n \in U_0$ и $x'_{l+1} \in U_0$, откуда выводим

$$x - \sum_{n=m}^{l} x_n - x'_{l+1} \in 2U_0.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=m}^{l} (x_n, z_n) + (x'_{l+1}, z'_{l+1}) \in \Gamma \cap \big((x, y) + (2U_0) \times V\big),$$

что в силу замкнутости Γ и произвольности окрестностей U_0 и V влечет $(x, y) \in \Gamma$. $\rhd$

3.6.11. *Теорема.* *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем Y бэровское. Пусть (Γ_n) — возрастающая последовательность выпуклых соответствий из X в Y, тканых в точке (x_0, y_0). Если $y_0 \in \operatorname{core}(\bigcup\{\Gamma_n(X) : n \in \mathbb{N}\})$, то Y полно и метризуемо, а Γ_m открыто в точке (x_0, y_0) для некоторого номера m.*

$\lhd$ Так же, как и в 3.6.4, устанавливается, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ множество $(\Gamma_m(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma_m(X))$ нетощее. Положим $\Gamma := \Gamma_m - \Gamma_m$ и $\Phi := \bigcup\{n\Gamma : n \in \mathbb{N}\}$. В силу 3.6.2 Φ — тканое подпространство в $X \times Y$. Рассмотрим соответствие Ψ из $X \times Y$ в Y, определенное формулой

$$\Psi := \{(x, y, z) \in \Phi \times Y : y = z\}.$$

Тогда Ψ — замкнутое линейное соответствие и

$$\Phi(X) \supset \Gamma(X) \supset (\Gamma_m(X) - y_0) \cap (y_0 - \Gamma_m(X)),$$

так что $\Psi(X \times Y)$ — нетощее подпространство Y. Кроме того, $\operatorname{dom}(\Psi) = \Phi$ ткано в нуле. По теореме 3.6.10 Ψ открыто в нуле. Но тогда открыто также соответствие Φ и, в частности, $\Phi(X) = Y$. Таким образом, Y — бэровское пространство, а в силу 3.6.2 оно ткано. По теореме 3.6.9 Y метризуемо и полно. Теперь из 3.6.9 вытекает открытость Γ_m в точке (x_0, y_0). $\rhd$

3.6.12. Укажем несколько следствий изложенных результатов.

(1) *Теорема.* *Пусть Y — индуктивный предел бэровских топологических векторных пространств и Γ — выпуклое замкнутое соответствие из X в Y. Допустим, что эффективное множество $\operatorname{dom}(\Gamma)$ ткано в точке x_0. Тогда Γ открыто в точке (x_0, y_0) для любого $y_0 \in \Gamma(x_0) \cap \operatorname{core}(\Gamma(X))$.*

(2) *Теорема.* *Пусть Y — индуктивный предел бэровских метризуемых топологических векторных пространств, а Γ — выпуклое соответствие из X в Y, полутканое в точке $x_0 \in \operatorname{dom}(\Gamma)$. Тогда Γ открыто в точке (x_0, y_0) для любого $y_0 \in \Gamma(x_0) \cap \operatorname{core}(\Gamma(X))$.*

(3) *Теорема.* *Пусть X и Y — метризуемые топологические векторные пространства, причем Y бэровское. Допустим, что Γ — идеально выпуклое соответствие из X в Y, эффективное множество которого σ-выпукло. Тогда Γ открыто в любой точке (x_0, y_0), для которой $y_0 \in \Gamma(x_0) \cap \operatorname{core}(\Gamma(X))$.*

(4) *Теорема Де Вильде.* *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем Y ткано, а X есть индуктивный предел бэровских пространств. Тогда всякий линейный оператор из X в Y, имеющий замкнутый график, непрерывен.*

3.6.13. *Теорема.* *Пусть X и E — топологические векторные пространства, причем E упорядочено нормальным конусом. Выпуклый оператор $f : X \to E$ является непрерывным в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ в каждом из следующих случаев:*

(1) *X есть индуктивный предел бэровских топологических векторных пространств, $\operatorname{epi}(f)$ замкнуто, множество $f(X)$ и конус E^+ тканы в точке $f(x_0)$ и в нуле соответственно;*

(2) *X есть индуктивный предел полных метризуемых топологических векторных пространств, $\operatorname{epi}(f)$ — секвенциально борелевское соответствие, а множество $f(X)$ и конус E^+ суслинские;*

(3) *X есть индуктивный предел метризуемых бэровских топологических векторных пространств, $\operatorname{epi}(f)$ — это идеально выпуклое соответствие, а множество $f(X)$ и конус E^+ тканы в $f(x_0)$ и в нуле соответственно.*

$\triangleleft$ Нужно лишь собрать воедино 3.6.6 (1), 3.6.12 (1, 2) и 3.1.4. $\triangleright$

3.6.14. *Теорема.* *Пусть X и Y — упорядоченные топологические векторные пространства с нормальными положительными конусами. Предположим, что выпуклый оператор $f : X \to Y^\bullet$ удовлетворяет условиям:*

(а) *$x_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f))$, $f(x_0) \in \operatorname{Int}(\operatorname{Im}(f))$;*

(б) *сужение f на $\operatorname{dom}(f)$ инъективно и обратное к нему отображение возрастает.*

Тогда оператор f открыт в точке x_0 в каждом из следующих случаев:

(1) *Y — индуктивный предел бэровских метризуемых топологических векторных пространств, а соответствие $\operatorname{epi}(f)$ полуткано в точке x_0;*

(2) *Y — индуктивный предел бэровских топологических векторных пространств, $\operatorname{dom}(f)$ ткано и надграфик $\operatorname{epi}(f)$ замкнут;*

(3) *X гиперполно, Y бочечно и надграфик f замкнут.*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно предположить, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. В каждом из указанных трех случаев соответствие $\operatorname{epi}(f)$ открыто в нуле в силу 3.1.4, 3.6.12 (1) и 3.6.12 (2). Пусть $U \subset \operatorname{dom}(f)$ — нормальная симметричная окрестность нуля в X. Выберем симметричную окрестность нуля $V \subset Y$ так, чтобы $V \subset \operatorname{epi}(f)(U)$, а это равносильно включению $V \subset f(U) + Y^+$. Ввиду выпуклости f будет $-f(U) \subset f(U) - Y^+$, значит, верно также $V \subset -f(U) - Y^+ \subset f(U) - Y^+$. Итак, $V \subset \operatorname{nh}(f(U))$, где $\operatorname{nh}(Z)$ обозначает нормальную оболочку Z относительно Y^+. Привлекая изотонность отображения $\left(f|_{\operatorname{dom}(f)}\right)^{-1}$, легко проверить, что $\operatorname{nh}(f(U)) \subset f(\operatorname{nh}(U))$. Но $\operatorname{nh}(U) = U$, стало быть, $V \subset f(U)$. $\triangleright$

3.6.15. ***Теорема.*** *Пусть (K_n) — последовательность монотонно полных конусов в метризуемом топологическом векторном пространстве X. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K_1 + \ldots + K_n)$ *и X нетощее;*

(2) $X = K_1 + \ldots + K_m$ *для некоторого $m \in N$ и X полно;*

(3) $X = K_1 + \ldots + K_m$ *для некоторого $m \in N$ и для любой окрестности нуля $U \subset X$ существует такая окрестность нуля $V \subset X$, что всякий элемент $x \in V$ допускает представление $x = k_1 + \ldots + k_m$ при подходящих $k_i \in U \cap K_i$ $(i := 1, 2, \ldots)$.*

$\triangleleft$ Нужно применить теорему 3.6.11 к последовательности конических соответствий Γ_n из $Y := X^{\mathbb{N}}$ в X, где

$$\Gamma_n := \{(k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots, x) \in Y \times X : x = k_1 + \ldots + k_n\}.$$

Ясно, что $\Gamma_n(Y) = K_1 + \ldots + K_n$, а открытость Γ_n в нуле равносильна утверждению (3). Остается заметить, что Γ_n есть образ монотонно полного конуса $K_1 \times \ldots \times K_n \subset X^n$ относительно линейного непрерывного оператора $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto (k_1, \ldots, k_n, k_1 + \ldots + k_n)$ $(k_1, \ldots, k_n \in X)$, поэтому Γ_n ткано в нуле. $\triangleright$

3.6.16. ***Теорема.*** *Пусть (K_n) — последовательность суслинских конусов в бэровском топологическом векторном пространстве X, причем $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K_1 + \ldots + K_n)$. Тогда X — полное метризуемое сепарабельное топологическое векторное пространство и имеет место утверждение* 3.6.15 (3).

$\triangleleft$ Нужно применить теорему 3.6.4 к последовательности конических соответствий Γ_n из 3.6.15. $\triangleright$

3.7. Комментарии

Теория топологических векторных пространств с той или иной полнотой изложена в целом ряде превосходных монографий, см., например, книги Н. Бурбаки [15], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [67], А. П. Робертсона и В. Робертсона [187], У. Рудина [195], Х. Шеффера [210], Р. Эдвардса [212].

Общие сведения о борнологических векторных пространствах, необходимые в 3.2.17, см. в монографии Г. Хогбе-Нленда [324].

3.7.1. (1) Понятие несплющенности следует отнести к работе М. Г. Крейна [79]; для банахова пространства X и совпадающих конусов

$$K_1 = K_2$$

утверждение 3.1.20 — классическая теорема Крейна — Шмульяна [79].

Позже несплющенность появилась в работе Ф. Бонсола [250] под названием *локальной разложимости* нормированного пространства.

Дальнейшая история, а также различные сферы приложения отражены в монографиях Г. Джеймсона [341], М. А. Красносельского [76], М. А. Красносельского, Е. А. Лифшица и А. В. Соболева [78], Х. Шеффера [210], Б. З. Вулиха [23, 24], Ч. Вонга и К.-Ф. Нга [494].

(2) Принцип открытости 3.1.18 для замкнутых выпуклых соответствий в банаховых пространствах установили К. Урсеску [477] и С. М. Робинсон [440].

Относительно идеальной выпуклости см. работы Е. А. Лифшица [406] и Г. Джеймсона [341, 342].

Эта концепция дополняет возможности метода обкатывающего шара С. Банаха и имеет определенные методические преимущества (см. курсы функционального анализа Р. Холмса [325] и С. С. Кутателадзе [146]).

(3) Открытость выпуклого соответствия дает единообразный подход к ряду свойств выпуклых объектов: несплющенности конусов и выпуклых множеств, непрерывности и открытости выпуклых операторов, теореме о замкнутом графике и принципу открытости для выпуклых соответствий.

Все эти взаимосвязи были рассмотрены в работе А. Г. Кусраева [88], из которой в основном и позаимствован материал параграфа 3.1, см. также [104].

В этой же работе введено понятие топологического общего положения конусов и выпуклых множеств.

3.7.2. (1) Возможность продолжения линейных операторов с заданными свойствами исследована С. Мазуром и С. Орличем. Понятие алгебраического общего положения конусов мотивировано теоремой Мазура — Орлича 3.2.16. В связи с задачами субдифференцирования это понятие было развито С. С. Кутателадзе [125, 127], М. М. Фельдманом [205, 206] и подробно исследовано в книге Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [1] и в статьях С. С. Кутателадзе [132], С. С. Кутателадзе и М. М. Фельдмана [148].

(2) Общий топологический вариант метода общего положения, изложенный в параграфе 3.2, предложен А. Г. Кусраевым [88] и систематически развит в работах [14, 104, 111, 112, 114]. Существо дела состоит в том, что общее положение нужных конусов обеспечивает выполнение формулы Моро — Рокафеллара 3.2.8. Метод общего положения — одно из основных аппаратных средств, развиваемых в настоящей книге — ослабляет традиционное в выпуклом анализе условие внутренней точки и приводит к новым результатам даже в скалярном случае, ср. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров и С. В. Фомин [3], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомиров [58], Б. Н. Пшеничный [180], В. М. Тихомиров [200]. Следует подчеркнуть, что топологическое общее положение конусов дает лишь достаточное условие справедливости формулы Моро — Рокафеллара. Необходимые и достаточные условия, при которых имеет место равенство Моро — Рокафеллара, изучал А. Г. Бакан в [5].

(3) В связи с утверждением 3.2.2 (2) уместно затронуть вопрос о непустоте субдифференциала, имеющий самостоятельный интерес и свою историю. Дело в том, что если пространство значений E не является порядково полным, то этот вопрос значительно усложняется, ибо нельзя применить принцип продолжения 1.4.13. Используя известный пример Х. Корсона и Й. Линденштраусса (открытого непрерывного эпиморфизма, не допускающего линейных операторов усреднения), Ю. Э. Линке построил непрерывный сублинейный оператор в решетках непрерывных функций, имеющий пустой субдифференциал [401]. Проблема непустоты субдифференциала обсуждена Дж. Зовом в [507]. Непустота субдифференциала изучалась рядом авторов (см. М. М. Фельдман [205], Ю. Э. Линке [400], М. Валадье [479], Дж. Зов [505]) с использованием техники (непрерывных, аффинных, полулинейных) селекторов, геометрического понятия точки Штейнера и т. д. Следующий результат, полученный Ю. Э. Линке, содержит один из наиболее полных ответов на вопрос о непустоте субдифференциала для непрерывного сублинейного оператора (см. [400]).

Теорема. *Пусть X и Y — полные локально выпуклые пространства, причем Y упорядочено нормальным и замкнутым конусом. Тогда любой компактный сублинейный оператор $P : X \to Y$ имеет компактный опорный оператор, а если, сверх сказанного, X сепарабельно, то любой непрерывный сублинейный оператор имеет непрерывный опорный оператор.*

(4) Операторный вариант леммы Крейна, который мы поместили в 3.2.17, взят из диссертации Онно ван Гаанса [308], где приводится несколько иное доказательство. Оригинальная лемма М. Г. Крейна для линейных функционалов была установлена в [79] и утверждает фактически, что сопряженный положительный конус в упорядоченном нормированном пространстве является воспроизводящим, если норма монотонна. Аналогичное утверждение имеет место и для операторов с абстрактной нормой.

Теорема. *Пусть X — упорядоченное нормированное пространство, причем $\|x\| \leqslant \|y\|$, как только $-y \leqslant x \leqslant y$ и $y \in X^+$. Тогда для любого оператора с абстрактной нормой $T : X \to E$ существует положительный оператор с абстрактной нормой $S : X \to E$ такой, что $-S \leqslant T \leqslant S$ и $\lvert S\rvert \leqslant \lvert T\rvert$. В частности, каждый оператор с абстрактной нормой из X в E допускает представление в виде разности положительных операторов с абстрактной нормой.*

$\lhd$ Действительно, если положить $P(x) := \|x\| \, \lvert T\rvert$, то P — сублинейный оператор, монотонный в смысле 3.2.17, и $T \in \partial P$. Согласно 3.2.17 существует линейный оператор $S : X \to E$, для которого $S \in \partial P$ и $-S \leqslant T \leqslant S$. Из первого соотношения следует $\lvert S\rvert \leqslant \lvert T\rvert$, а из второго — $S \geqslant 0$. $\rhd$

3.7.3. (1) Понятия поляры (см. 3.3.3) и опорной функции (см. 3.3.8) ввел Г. Минковский. Свойства функционала Минковского, поляр и опорных функций, отмеченные в 3.3.8 (1–9), также восходят к Г. Минковскому. Формализм, представленный в 3.3.9–3.3.13, взят из работ А. Г. Кусраева [88, 104]. Он составляет аппаратную базу теории (скалярной) двойственности векторных пространств. Многие из этих формул в той или иной общности использовались ранее для различных целей. Так, например, первую из формул 3.3.9 (1) для симметричных выпуклых множеств получил Дж. Келли [71].

(2) В некоторых задачах выпуклого анализа возникают пространства, которые очевидным образом спарены с подходящим пространством операторов, тогда как естественного пространства линейных функционалов просто нет. В этой ситуации, типичной при изучении выпуклых операторов и операторно-выпуклых множеств, говорят о *векторнозначной* или, короче, *векторной двойственности.* Разработке этого круга вопросов посвящена недавняя монография А. Г. Кусраева [104]. В частности, установлены векторная теорема о биполяре, а также векторнозначные версии классических теорем Макки — Бурбаки, Макки — Аренса, критерия рефлексивности Какутани и т. п.

3.7.4. (1) Основной результат параграфа — теорема 3.4.4 — установлена А. Г. Кусраевым [88]. Следствия для линейных операторов 3.4.6 хорошо известны (см. [212]). Теорема Г. Джеймсона доказана в [343].

(2) Те же рассуждения, что и в 3.4.10, приводят к следующему результату.

Воспроизводящая пара конусов $\varkappa$ в произвольном локально выпуклом пространстве почти несплющена в том и только в том случае, если нормальная оболочка всякого эквинепрерывного множества относительно сопряженной пары $\varkappa^0$ также эквинепрерывна.

3.7.5. Необходимые нам в параграфе 3.5 сведения из теории равномерных пространств можно найти в книгах Н. Бурбаки [16], Дж. Келли [72], Р. Энгелькинга [214].

(1) В. Птак [178, 430] первый применил метод двойственности к анализу феномена автоматической открытости (непрерывности) в случае линейных соответствий и обнаружил связь принципа открытости с теоремой Крейна — Шмульяна (см. также [179, 210, 212, 429]). Дж. Келли [71] связал оба эти факта с полнотой тех или иных пространств замкнутых выпуклых множеств. Гиперполнота (см. 3.5.6) является естественным обобщением совершенной полноты (= B-полноты) В. Птака и гиперполноты в смысле Дж. Келли (см. 3.5.6 и 3.5.7). В случае линейных соответствий и операторов следует также отметить работы Г. С. Коллинза [277], В. Л. Левина [153], Д. А. Райкова [185], В. Робертсона [438], А. П. Робертсона и В. Робертсона [439]. Подробное изложение теории В. Птака и близкого круга вопросов имеется в монографиях Р. Эдвардса [212], Дж. Келли и И. Намиоки [177], А. П. Робертсона и В. Робертсона [187].

(2) Материал параграфа 3.5 взят в основном из работ А. Г. Кусраева [88, 104] и представляет собой обработку идей В. Птака и Дж. Келли с помощью аппарата двойственности, представленного в 3.3 и 3.4. Двойственность свойств Келли и Крейна — Шмульяна 3.5.8 и принцип открытости 3.5.10 установлены А. Г. Кусраевым в [88, 94]. Последний результат для случая банаховых пространств получен ранее К. Урсеску [477] и С. М. Робинсоном [440]. Теорему 3.5.11 (2) установил В. Птак в [179]. Теоремы Крейна — Шмульяна 3.5.9 (2) и Банаха — Гротендика 3.5.9 (3) относятся к математической классике.

(3) Локально выпуклое пространство X принято называть B_r-*полным*, если в нем нуль обладает линейным свойством Келли. В силу теоремы 3.5.8 B_r-полнота X равносильна тому, что всякое почти слабо замкнутое слабо плотное подпространство в X' совпадает с X' или, короче, что X' имеет свойство Крейна — Шмульяна. Обозначим через (C), (B_r), (B), (SHC), (CHC) и (HC) соответственно классы полных, B_r-полных, совершенно полных, гиперполных в смысле Келли, конически гиперполных и гиперполных локально выпуклых пространств. Тогда имеют место включения:

$$(HC) \subset (SHC) \subset (B) \subset (B_r) \subset (C), \quad (HC) \subset (CHC) \subset (B).$$

(4) Есть многие основания предполагать, что эти включения строгие. Однако мы не располагаем всеми необходимыми примерами. Нам известно только, что $(C) \neq (B_r)$ и $(B_r) \neq (B)$. Пример полного, но не B_r-полного пространства имеется в книге Р. Эдвардса [212]. Пример, показывающий, что $(B_r) \neq (B)$, построил М. Валдивиа [480].

(5) Для топологического пространства X рассмотрим топологию на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, введенную Л. Вьеторисом в 1921 году. Возьмем конечную последовательность открытых множеств $U_1, \dots, U_n$ в X и обозначим

$$[U_1, \ldots, U_n] :=$$
$$:= \left\{ A \in \mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X) : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k \ (\forall k := 1, \ldots, n)\, A \cap U_k \neq \varnothing \right\}.$$

Семейство множеств вида $[U_1, \ldots, U_n]$ образует базу некоторой топологии на множестве $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, которую называют *топологией Вьеториса* (Р. Энгелькинг [214, 2.7.20]) или *экспоненциальной топологией* (К. Куратовский [84]) на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$. Пусть $\mathscr{P}_{\mathrm{Comp}}(X)$ — множество всех непустых компактных подмножество X. Имеет место следующий факт (см. Р. Энгелькинг [214, 8.5.16]):

Для произвольного равномерного пространства X топология на $\mathscr{P}_{\mathrm{Comp}}(X)$, индуцированная хаусдорфовой равномерностью, совпадает с топологией Вьеториса.

(6) Топология, индуцированная хаусдорфовой метрикой на множество $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$, не определена метрической топологией на множестве X. Дж. Келли [72, с. 178] приводит пример двух метрик d и e на множестве всех неотрицательных чисел $X := \mathbb{R}^+$, которые порождают одну и ту же топологию в X, но топологии метрических пространств $(\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X), \bar{d})$ и $(\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X), \bar{e})$ различны. Кроме того, существует сепарабельное метрическое пространство (X, d) такое, что топология Вьеториса на $\mathscr{P}_{\mathrm{cl}}(X)$ и топология, индуцированная хаусдорфовой метрикой $\bar{d}$, несравнимы, см. Р. Энгелькинг [214, 4.5.22], Э. Майкл [396].

(7) Подпространство $\mathrm{Comp\,C}\,(X)$ в $\mathrm{ClC}(X)$, состоящее из непустых выпуклых компактов, с индуцированной топологией играет важную роль в теории выпуклых фигур. Пусть $\mathfrak{P}o(X)$ обозначает множество всех выпуклых многогранников. (*Выпуклым многогранником* называют выпуклую оболочку конечного множества.) Ясно, что $\mathfrak{P}o(X) \subset \mathrm{Comp\,C}\,(X)$. Здесь уместно упомянуть еще два классических результата, широко используемых при изучении свойств выпуклых фигур, см. книги В. Бляшке [7], К. Лейхтвейса [160], а также обзор В. М. Тихомирова [200].

Теорема выбора Бляшке. *Пространство $\mathrm{Comp\,C}\,(\mathbb{R}^n)$ является локально компактным. В частности, из любой равномерно* *ограниченной последовательности выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся (в метрике Хаусдорфа) подпоследовательность.*

Теорема аппроксимации Минковского. *Для любой выпуклой фигуры $A \in \operatorname{Comp}\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют многогранники $A', A'' \in \mathfrak{P}o(\mathbb{R}^n)$ такие, что $A' \subset A \subset A''$ и $h(A', A'') < \varepsilon$.*

3.7.6. (1) Понятие суслинского (аналитического) множества было введено М. Я. Суслиным и Н. Н. Лузиным в 1917 году. Понятие решета ввел Н. Н. Лузин. Теория суслинских (аналитических) множеств хорошо представлена в монографической литературе, см. книги Н. Бурбаки [17], К. Куратовского [84], Дж. Христенсена [271], М. Де Вильде [288].

(2) Концепция тканого пространства была предложена М. Де Вильде, см. [288]. Им же получены варианты (см. 3.6.12 (4)) принципа открытости и теоремы о замкнутом графике для линейных операторов, определенных в тканых топологических векторных пространствах [288]. Глубокий анализ методов гиперполноты и совершенных тканей с единых позиций дал В. Робертсон [438].

(3) Исследования автоматической непрерывности или открытости линейного оператора при тех или иных предположениях об измеримости в сочетании с методом категорий Р. Бэра восходит к Л. Шварцу, доказавшему 3.6.6 (2). Другие результаты в этом направлении см. в книге Дж. Христенсена [271].

(4) Оба подхода, упомянутых в (2) и (3), приспособлены к случаю выпуклых соответствий А. Г. Кусраевым в [94, 99, 104]. Варианты и частные случаи теорем об автоматической непрерывности или открытости выпуклых операторов 3.6.13 и 3.6.14 получены Дж. Бейкером [234] и Дж. Борвейном [253–255]. Теоремы 3.6.15 и 3.6.16 получены М. Нейманом [403]. Результаты о несплющенности 3.6.17 хорошо известны для случая совпадающих конусов, за исключением 3.6.17 (1, 2), см. Г. Джеймсон [341], Ч. Вонг и К.-Ф. Нг [494]. Другие обобщения принципа открытости, а также библиографию по этому вопросу см. в монографиях М. Де Вильде [288], Дж. Келли и И. Намиоки [177], Г. Кёте [362], А. Г. Кусраева [104], Ж.-П. Обэна и Е. Франковской [231], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [175], Дж. Христенсен [271], Р. Эдвардса [212].

Приложение 1.
Векторные решетки

Здесь эскизно представлены основные понятия теории векторных решеток. Более детализированное изложение можно найти в [1, 23, 67, 68, 222, 234, 348, 367, 388, 455, 500].

П1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченным векторным пространством над полем* $\mathbb{F}$ называют пару $(E, \leqslant)$, где E — векторное пространство над $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — порядок в E, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \leqslant y$ и $u \leqslant v$, то $x + u \leqslant y + v$ для любых $x, y, u, v \in E$;

(2) если $x \leqslant y$, то $\lambda x \leqslant \lambda y$ для всех $x, y \in E$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F}$.

Наделение векторного пространства E над $\mathbb{F}$ векторным порядком эквивалентно указанию множества $E^+ \subset E$, называемого *положительным конусом* в E и обладающего свойствами:

$$E^+ + E^+ \subset E^+, \quad \lambda E^+ \subset E^+ \ (0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F}), \quad E^+ \cap -E^+ = \{0\}.$$

При этом порядок $\leqslant$ и положительный конус E^+ связаны соотношением $x \leqslant y \leftrightarrow y - x \in E^+$ $(x, y \in E)$. Элементы E^+ именуют *положительными*. Если положительный конус E^+ не является *острым*, т. е. не выполнено условие $E^+ \cap -E^+ = \{0\}$, то E называют *предупорядоченным векторным пространством.*

Упорядоченное векторное пространство E называют *архимедовым*, если для любой пары элементов $x, y \in E$ из отношения $(\forall n \in \mathbb{N})$ $nx \leqslant y$ следует $x \leqslant 0$.

П1.2. *Векторная решетка* — это по определению упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, если рассматривать это пространство только как упорядоченное множество. Таким образом, в каждой векторной решетке существуют точная верхняя граница $\sup\{x_1, \dots, x_n\} := x_1 \vee \dots \vee x_n$ и точная нижняя граница $\inf\{x_1, \dots, x_n\} := x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ для каждого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$. В частности, каждый элемент x векторной решетки имеет *положительную часть* $x^+ := x \vee 0$, *отрицательную часть* $x^- := (-x)^+ := -x \wedge 0$ и *модуль* $|x| := x \vee (-x)$.

Пусть E — векторная решетка. Для произвольных $x, y, z \in E$ верны следующие соотношения:

(1) $x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^-$;

(2) $x \leqslant y \leftrightarrow x^+ \leqslant y^+ \,\&\, y^- \leqslant x^-$;

(3) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),\ x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;

(4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|),\ |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$;

(5) $x + y = x \vee y + x \wedge y,\ |x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

Предположим, что (x_α) и (y_α) — семейства в E, для которых $\sup(x_\alpha)$ и $\inf(y_\alpha)$ существуют. Тогда для любого $z \in E$ выполнены *бесконечные дистрибутивные законы*:

(6) $z \wedge \sup_\alpha(x_\alpha) = \sup_\alpha(z \wedge x_\alpha)$;

(7) $z \vee \inf_\alpha(y_\alpha) = \inf_\alpha(z \vee y_\alpha)$.

Для тех же (x_α), (y_α) и z имеют место следующие полезные равенства:

(8) $z + \sup_\alpha(x_\alpha) = \sup_\alpha(z + x_\alpha)$;

(9) $z + \inf_\alpha(y_\alpha) = \inf_\alpha(z + y_\alpha)$;

(10) $\sup_\alpha(x_\alpha) = -\inf_\alpha(-x_\alpha)$.

П1.3. *Порядковым интервалом* в E называют множество вида $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$, где $a, b \in E$. Рассмотрим два часто используемых свойства векторной решетки.

(1) В любой векторной решетке выполнено *декомпозиционное свойство Рисса*:

$$[0, x + y] = [0, x] + [0, y] \quad (x, y \in E^+).$$

(2) В любой векторной решетке выполнено *интерполяционное свойство Рисса*, т. е. для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$, удовлетворяющих неравенствам $x_k \leqslant y_l$ $(k, l := 1, 2)$, существует $z \in E$ такой, что $x_k \leqslant z \leqslant y_l$ $(k, l := 1, 2)$.

Можно показать, что в произвольном упорядоченном векторном пространстве декомпозиционное свойство Рисса равносильно интерполяционному свойству Рисса. Приведем несколько полезных следствий из (1). Следующее утверждение часто называют *леммой о двойном разбиении.*

(3) Пусть $x, y, z \in E^+$ и $x = y + z$. Если $x = x_1 + \ldots + x_n$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in E^+$, то существуют такие $y_k, z_k \in E^+$ $(k := 1, \ldots, n)$, что

$$x_k = y_k + z_k \quad (k := 1, \ldots, n),$$
$$y = y_1 + \ldots + y_n, \quad z = z_1 + \ldots + z_n.$$

Следующие два факта вытекают из леммы о двойном разбиении.

(4) Если $x_1, \ldots, x_n, y \in E^+$, то $(x_1 + \ldots + x_n) \wedge y \leqslant x_1 \wedge y + \ldots + x_n \wedge y$.

(5) Пусть $x_{k,l} \in E^+$ при $k := 1, \ldots, n$ и $l := 1, \ldots, m$. Тогда

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} x_{k,l} \leqslant \sum_{j \in J} x_{1,j(1)} \wedge \ldots \wedge x_{n,j(n)},$$

где J — множество всех функций $j : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$.

П1.4. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$.

Следующие свойства отношения дизъюнктности легко следуют из П1.2:

(1) $x \perp y \leftrightarrow |x + y| = |x - y| \leftrightarrow |x| \vee |y| = |x| + |y|$;
(2) $x^+ \perp x^-$; $(x - x \wedge y) \perp (y - x \wedge y)$;
(3) $x \perp y \to |x + y| = |x| + |y|$, $(x + y)^+ = x^+ + y^+$, $(x + y)^- = x^- + y^-$.

Для непустого $M \subset E$ множество

$$M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M)\, x \perp y\}$$

именуют *дизъюнктным дополнением* M. Отметим некоторые простые свойства дизъюнктного дополнения:

(4) $M \subset N \to N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(5) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(6) $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$;

(7) $(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha})^{\perp} = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}^{\perp}$.

П1.5. Важнейшие структурные свойства каждой векторной решетки связаны с ее *базой* — полной булевой алгеброй *полос* или *компонент.* Непустое множество $K \subset E$, удовлетворяющее равенству $K = K^{\perp\perp}$, называют *полосой* или *компонентой* векторной решетки E. Полосу, имеющую вид $\{x\}^{\perp\perp}$, для некоторого $x \in E$ называют *главной.*

(1) *Упорядоченное по включению множество всех полос векторной решетки E (обозначаемое символом $\mathfrak{B}(E)$) представляет собой полную булеву алгебру. Булевы операции в $\mathfrak{B}(E)$ имеют вид:*

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^{\perp} \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$ именуют *базой* E. Пусть K — полоса векторной решетки E. Если существует элемент $\sup\{u \in K : 0 \leqslant u \leqslant x\}$ в E, то его называют *проекцией* элемента x на полосу K и обозначают символом $[K]x$ (или $\pi_K x$). Для произвольного $x \in E$ положим $[K]x := [K]x^+ - [K]x^-$. Проекция элемента $x \in E$ на полосу K существует тогда и только тогда, когда x представим как $x = y + z$, где $y \in K$, а $z \in K^{\perp}$. Более того, в этом случае будет $y = [K]x$ и $z = [K^{\perp}]x$. Предположим, что у каждого элемента $x \in E$ имеется проекция на полосу K. Тогда оператор $x \mapsto [K]x$ $(x \in E)$ линеен, идемпотентен и $0 \leqslant [K]x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$. Этот оператор называют *проектором на полосу* или *порядковым проектором.* Проектор на главную полосу называют *главным*.

(2) *Множество $\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов, упорядоченное правилом $\pi \leqslant \rho \leftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$, является булевой алгеброй. Булевы операции в $\mathfrak{P}(E)$ имеют вид*

$$\pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

(3) *Главный проектор $\pi_u := [u] := [u^{\perp\perp}]$, где $0 \leqslant u \in E$, можно вычислить по следующему правилу:*

$$\pi_u x = \sup\{x \wedge (nu) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Векторную решетку E называют *решеткой с проекциями* (*решеткой с главными проекциями*), если каждая полоса (каждая главная полоса) в $\mathfrak{B}(E)$ допускает порядковый проектор. Каждое K-пространство является решеткой с проекциями, а каждое K_σ-пространство — решеткой с главными проекциями (см. определения в П1.9).

Пусть $u \in E^+$ и $e \wedge (u - e) = 0$ для некоторого $0 \leqslant e \in E$. Тогда e называют *осколком* или *фрагментом* элемента u. Говорят также, что e — *единичный элемент относительно* u.

(4) *Множество $\mathfrak{E}(u)$ всех осколков элемента u с порядком, индуцированным из E, является булевой алгеброй. Решеточные операции в $\mathfrak{E}(u)$ индуцированы из E, а булево дополнение имеет вид $e^* := u - e$ $(e \in \mathfrak{E}(u))$.*

П1.6. (1) Линейное подпространство J векторной решетки E называют *порядковым идеалом* или *o-идеалом* (или, наконец, просто *идеалом*, когда понятно из контекста, о чем идет речь), если для произвольных $x \in E$ и $y \in J$ из неравенства $|x| \leqslant |y|$ следует $x \in J$.

Каждый порядковый идеал векторной решетки сам является векторной решеткой. Если идеал J удовлетворяет условию $J^{\perp\perp} = E$ (или, что то же самое, $J^\perp = \{0\}$), то J именуют *порядково плотным идеалом* или *фундаментом* E.

Идеал $J \subset E$ называют *максимальным*, если в E не существует идеала, отличного от E и содержащего J. Пересечение непустого множества порядковых идеалов будет порядковым идеалом. Поэтому существует наименьший порядковый идеал $I(M)$, содержащий непустое множество $M \subset E$, которое называют *порядковым идеалом, порожденным* M.

(2) *Векторной подрешеткой* (или просто *подрешеткой*, если ясно из контекста, о чем идет речь) именуют векторное подпространство $E_0 \subset E$ такое, что $x \wedge y, x \vee y \in E_0$ для любых $x, y \in E_0$. Скажем, что подрешетка E_0 является *минорирующей*, если для каждого $0 \neq x \in E^+$ существует элемент $x_0 \in E_0$, удовлетворяющий неравенствам $0 < x_0 \leqslant x$. Назовем E_0 *мажорирующей* или *массивной* подрешеткой, если для каждого $x \in E$ существует $x_0 \in E_0$ такой, что $x \leqslant x_0$. Таким образом, E_0 — минорирующая или мажорирующая подрешетка в том и только в том случае, когда соответственно $E^+ \setminus \{0\} = E^+ + E_0^+ \setminus \{0\}$ или $E = E^+ + E_0$.

(3) Множество в векторной решетке называют (*порядково*) *ограниченным* (или *o-ограниченным*), если оно содержится в некотором порядковом интервале. Порядковый идеал, порожденный элементом $0 \leqslant u \in E$, обозначают символом $E(u)$, т. е. $E(u) := I(\{u\})$. Ясно, что $E(u) := \bigcup_{n=1}^{\infty}[-nu, nu]$. Если $E(u) = E$, то элемент u называют *сильной единицей* или *сильной порядковой единицей*, а E — *векторной решеткой ограниченных элементов*.

(4) Элемент $x \geqslant 0$ векторной решетки называют *дискретным*, если $[0, x] = [0, 1]x$, т. е. если из $0 \leqslant y \leqslant x$ следует, что $y = \lambda x$ для некоторого скаляра $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Векторную решетку E именуют *дискретной* или *атомической*, если для каждого $0 \neq y \in E^+$ существует дискретный элемент $x \in E$ такой, что $0 < x \leqslant y$. В случае, когда в E нет ненулевых дискретных элементов, векторную решетку E именуют *непрерывной* или *диффузной*.

П1.7. Отношение порядка в векторной решетке порождает разные виды сходимости сетей и последовательностей. Пусть $(\mathrm{A}, \leqslant)$ — направленное множество. Сеть $(x_\alpha) := (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в E называют *возрастающей* (*убывающей*), если $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (соответственно $x_\beta \leqslant x_\alpha$) при $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$. Будем говорить, что сеть (x_α) в векторной решетке E *порядково сходится* или *o-сходится* к $x \in E$, если существует убывающая сеть $(e_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ в E такая, что $\inf\{e_\beta : \beta \in \mathrm{B}\} = 0$ и для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ существует индекс $\alpha(\beta) \in \mathrm{A}$, для которого $|x_\alpha - x| \leqslant e_\beta$ при всех $\alpha(\beta) \leqslant \alpha \in \mathrm{A}$. В этом случае элемент x называют *порядковым пределом* или *o-пределом* сети (x_α) и пишут $x = o\text{-}\lim x_\alpha$ или $x_\alpha \overset{(o)}{\to} x$.

Если в этом определении сеть (e_β) заменить последовательностью $(\lambda_n e)_{n\in\mathbb{N}}$, где $0 \leqslant e \in E^+$, а $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — числовая последовательность с пределом $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, то говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *сходится с регулятором*, или, более точно, *сходится с регулятором* e к $x \in E$. Элементы e и x называют соответственно *регулятором сходимости* и *r-пределом* сети (x_α). При этом используют обозначения $x = r\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha$ и $x_\alpha \overset{(r)}{\to} x$.

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называют r-фундаментальной, если $(x_n - x_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ — это r-сходящаяся к нулю последовательность.

Векторную решетку называют *полной* относительно сходимости с регулятором или *r-полной*, если каждая r-фундаментальная последовательность в ней r-сходится.

Наличие порядковой сходимости в векторной решетке позволяет определить также сумму бесконечного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, для данных $\theta := \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ положим $y_\theta := x_{\xi_1} + \dots + x_{\xi_n}$. Тем самым получаем сеть $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$, где множество конечных подмножеств $\Theta := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ упорядочено по включению. Если существует o-предел $x := o\text{-}\lim_{\theta\in\Theta} y_\theta$, то семейство (x_ξ) назовем *порядково суммируемым* или *o-суммируемым*. Элемент x называют при этом *o-суммой* семейства (x_ξ) и пишут $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Очевидно, если $x_\xi \geqslant 0$ $(\xi \in \Xi)$, то для существования o-суммы семейства (x_ξ) необходимо и достаточно наличие точной верхней границы сети $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$. В этом случае $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\theta\in\Theta} y_\theta$.

П1.8. Векторные решетки называют *изоморфными*, если между ними существует взаимнооднозначное отображение, сохраняющее алгебраические операции и отношение порядка.

Теорема Крейнов — Какутани. *Векторная решетка ограниченных элементов, полная относительно сходимости с регулятором, порядково изоморфна решетке непрерывных функций $C(Q)$ на некотором компакте Q.*

П1.9. Векторную решетку называют (*условно*) *порядково полной*, если каждое непустое порядково ограниченное множество в нем имеет точные границы. Порядково полную векторную решетку принято называть *пространством Канторовича* или, короче, *K-пространством*. Если в векторной решетке точные границы существуют у произвольных счетных порядково ограниченных множеств, то ее называют *σ-полной* векторной решеткой или чаще *K_σ-пространством.*

(1) ***Теорема.*** *Пусть E — произвольное K-пространство. Тогда E — решетка с проекциями и отображение $K \mapsto [K]$ $(K \in \mathfrak{B}(E))$ определяет изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если существует порядковая единица $\mathbb{1}$ в E, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

Приведем полезные признаки порядковой сходимости в K-пространстве. Рассмотрим порядково ограниченную сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в K-пространстве E, и пусть $e \in E$.

(2) *Порядково ограниченная сеть* $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *о-сходится к* e *в том и только в том случае, когда в булевой алгебре* $\mathfrak{P}(E)$ *выполнено соотношение* $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}[d][(|e_\alpha - e| - d)^+] = 0$ *для любого положительного* $d \in E$.

(3) *Предположим, что* E *— это* K*-пространство с порядковой единицей* $\mathbb{1}$. *Если* $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *— ограниченная сеть в* E *и* $e \in E$, *то* $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ *в том и только в том случае, когда в булевой алгебре* $\mathfrak{P}(E)$ *выполнено соотношение* $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}\big[(|e_\alpha - e| - \mathbb{1}/n)^+\big] = 0$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$.

П1.10. К архимедовой векторной решетке можно применить процедуру пополнения по Дедекинду.

(1) ***Теорема.*** *Для любой архимедовой векторной решетки* E *существуют единственное с точностью до порядкового изоморфизма* K*-пространство* $\widehat{E}$ *и порядковый изоморфизм* $\iota : E \to \widehat{E}$, *сохраняющий точные границы любых непустых множеств, такие, что любой элемент* $\widehat{x} \in \widehat{E}$ *допускает представление* $x = \sup_\alpha \iota(u_\alpha)$ *и* $x = \inf_\beta \iota(v_\beta)$ *для подходящих семейств* $(u_\alpha) \subset E$ *и* $(v_\beta) \subset E$.

Пространство $\widehat{E}$ называют *порядковым пополнением* E. Приняты также названия *дедекиндово пополнение* и K*-пополнение*.

(2) *Порядковое пополнение* E *допускает представление* $\widehat{E} = rd(E)$, *где*

$$r(U) := \Big\{y = br\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n : \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset U\Big\},$$
$$d(U) := \Big\{y = bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi y_\xi : \ (y_\xi)_{\xi\in\Xi} \ \subset U\Big\}.$$

(В последней формуле (π_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\widehat{E})$).

П1.11. Пусть E — произвольное K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Проекцию порядковой единицы на полосу $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* x и обозначают символом e_x. Из П1.5 (3) видно, что $e_x := \sup\{\mathbb{1} \wedge (n|x|) : n \in \mathbb{N}\}$. След e_x является порядковой единицей в полосе $\{x\}^{\perp\perp}$, а также единичным элементом в E. Для данного вещественного числа λ символом e^x_λ обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbb{1} - x$, т. е. полагают $e_\lambda^x := e_{(\lambda\mathbb{1}-x)^+}$. Так возникающую функцию $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой* элемента x.

Сформулируем один из наиболее фундаментальных фактов теории векторных решеток — теорему о разложении любого элемента K_σ-пространства в интеграл типа Стилтьеса по булевозначной мере.

Спектральная теорема Фрейденталя. *Пусть E — произвольное K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Каждый элемент $x \in E$ допускает интегральное представление*

$$x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x,$$

где интеграл понимают как предел с регулятором $\mathbb{1}$ интегральных сумм

$$x(\beta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_n (e_{t_{n+1}}^x - e_{t_n}^x), \quad t_n \leqslant \tau_n \leqslant t_{n+1},$$

соответствующих разбиениям действительной прямой

$$\beta := (t_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \ \ t_n < t_{n+1}, \ \ \lim_{n \to \infty} t_n = +\infty, \ \ \lim_{n \to -\infty} t_n = -\infty,$$

при $\delta(\beta) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} (t_{n+1} - t_n) \to 0$.

В частности, спектральная теорема Фрейденталя утверждает, что если E — это K_σ-пространство и $e \in E^+$, то каждый элемент $x \in E(e)$ может быть аппроксимирован с регулятором e (т. е. e-равномерно) линейными комбинациями осколков e, т. е. элементами вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{E}(e)$.

П1.12. *Упорядоченной алгеброй* над полем $\mathbb{F}$ называют упорядоченное векторное пространство E над $\mathbb{F}$, которое одновременно является алгеброй над этим полем и удовлетворяет следующему условию: если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $xy \geqslant 0$ для всех $x, y \in E$. Положительный конус E^+ упорядоченной алгебры E обладает свойствами, указанными в П1.1, но сверх того выполнено $E^+ \dots E^+ \subset E^+$. Будем говорить, что E — *решеточно упорядоченная алгебра*, если E — векторная решетка и упорядоченная алгебра одновременно. Решеточно упорядоченную алгебру именуют *f-алгеброй*, если для любых $a, x, y \in E^+$

из условия $x \perp y$ следует, что $(ax) \perp y$ и $(xa) \perp y$. Если для произвольных элементов $x, y \in E$ равенство $xy = 0$ влечет $x \perp y$, то f-алгебру называют *точной.*

Легко показать, что f-алгебра является точной в том и только в том случае, когда в ней нет ненулевых нильпотентных элементов. Точность f-алгебры эквивалентна также отсутствию строго положительных элементов, являющихся делителями нуля.

П1.13. Пространство Канторовича (K_σ-пространство) называют *расширенным*, если в нем каждое множество (соответственно каждое счетное множество) попарно дизъюнктных элементов ограничено.

(1) Пример расширенного K-пространства представляет пространство $C_\infty(Q)$ всех непрерывных функций $x : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, определенных на экстремально несвязном компакте Q и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на разреженных (= нигде не плотных) множествах. Сложение, умножение и порядок в $C_\infty(Q)$ вводятся поточечно. Поясним, например, способ введения суммы. Возьмем $x, y \in C_\infty(Q)$ и положим $Q_0 := \{|x| < +\infty\} \cap \{|y| < +\infty\}$. По определению, каждое из множеств $\{|x| < +\infty\}$ и $\{|y| < +\infty\}$ открыто и плотно в Q, поэтому Q_0 открыто и плотно в Q. Существует единственная непрерывная функция $z : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $z(t) = x(t) + y(t)$ для $t \in Q_0$. Эту функцию z и принимают за сумму элементов x и y, т. е. $x + y := z$. Аналогично определяют произведение xy.

(2) *Расширенное K-пространство E порядково изоморфно K-пространству $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$.*

(3) *Для любого K-пространства E имеется единственное с точностью до порядкового изоморфизма расширенное K-пространство mE такое, что E изоморфно (линейно и порядково) некоторому фундаменту в mE.*

Приложение 2. Положительные операторы

Здесь представлен круг понятий, систематически используемый в книге. Более развернутые изложения теории положительных операторов см. в [1, 23, 67, 68, 222, 234, 367, 388, 455, 500].

П2.1. Пусть E и F — векторные решетки. Символом $L(E,F)$ мы будем обозначать пространство всех линейных операторов из E в F. Линейный оператор $T : E \to F$ именуют: *положительным*, если $T(E^+) \subset F^+$; *регулярным*, если его можно представить в виде разности двух положительных операторов; *порядково ограниченным* или, короче, *o-ограниченным*, если T отображает каждое порядково ограниченное подмножество E в порядково ограниченное подмножество F. Говорят, что оператор $S \in L(E,F)$ является *мажорантой* оператора $T \in L(E,F)$, если $|Tx| \leqslant S(|x|)$ при всех $x \in E$. Оператор, имеющий положительную мажоранту, называют *мажорируемым* или *доминируемым*.

(1) *Линейный оператор мажорируем в том и только в том случае, когда он регулярен.*

Множество всех регулярных, порядково ограниченных и положительных операторов из E в F обозначают соответственно символами $L^r(E,F)$, $L^\sim(E,F)$ и $L^+(E,F) := L^\sim(E,F)^+$. Классы $L^r(E,F)$ и $L^\sim(E,F)$ являются векторными подпространствами векторного пространства $L(E,F)$ всех линейных операторов из E в F. Отношение порядка в пространствах регулярных и порядково ограниченных операторов вводят с помощью конуса положительных операторов $L^+(E,F)$, т. е. формулами $T \geqslant 0 \leftrightarrow T \in L^+(E,F)$ и $S \geqslant T \leftrightarrow S - T \geqslant 0$.

Ясно, что каждый положительный оператор порядково ограничен. Следовательно, порядково ограниченной будет и разность порядково ограниченных операторов. Таким образом, каждый регулярный оператор порядково ограничен. Обратное утверждение в общем случае неверно, но выполнено при условии порядковой полноты F. Последнее следует непосредственно из основополагающей теоремы Рисса — Канторовича.

(2) *Пусть E — векторная решетка, F — произвольное действительное векторное пространство и пусть U — аддитивное и положительно однородное отображение из E^+ в F, т. е. отображение $U : E^+ \to F$ удовлетворяет условиям*

$$U(x+y) = Ux + Uy, \quad U(\lambda x) = \lambda Ux \quad (0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R};\, x, y \in E^+).$$

Тогда U имеет единственное линейное продолжение T на всю векторную решетку E. Если, сверх того, F — векторная решетка и $U(E^+) \subset F^+$, то оператор T положителен.

П2.2. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть E — векторная решетка, а F — некоторое K-пространство. Множество всех порядково ограниченных операторов $L^\sim(E,F)$, упорядоченное конусом положительных операторов $L^\sim(E,F)^+$, является K-пространством.*

Известны явные формулы для вычисления решеточных операций в K-пространстве $L^\sim(E,F)$. Именно, для любых $x \in E^+$, $S, T \in L^\sim(E,F)$ и порядково ограниченного множества $\mathscr{T} \subset L^\sim(E,F)$ имеют место представления:

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(3) $S^+x = \sup\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(4) $S^-x = -\inf\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(5) $|S|x = \sup\{|Sy| : |y| \leqslant x\}$;

(6) $|S|x = \sup\{\sum_{k=1}^n |Sx_k| : x_1, \dots, x_n \geqslant 0,$ $x = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}\}$;

(7) $|Sx| \leqslant |S|(|x|)$ $(x \in E)$;

(8) $(\sup \mathscr{T})x = \sup\{\sum_{k=1}^n T_k x_k : T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},$ $x_1, \dots, x_n \in E^+,\ x = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}\}$;

$$\textbf{(9)}\ \ (\inf \mathscr{T})x = \inf\{\textstyle\sum_{k=1}^{n} T_k x_k : T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},\ x_1, \dots, x_n \in E^+,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

П2.3. Пусть X и E — векторные решетки. Линейный оператор T из X в E называют *решеточным гомоморфизмом*, если T сохраняет точные верхние границы непустых конечных множеств, т. е.

$$T(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = Tx_1 \vee \ldots \vee Tx_n \quad (x_1, \dots, x_n \in X).$$

Легко понять, что линейный оператор $T : X \to E$ будет решеточным гомоморфизмом, если выполнено одно из следующих соотношений (и в этом случае имеют место все эти соотношения):

$$\begin{gathered} T(x \vee y) = Tx \vee Ty \quad (x, y \in E), \\ T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad (x, y \in E), \\ x \wedge y = 0 \to Tx \wedge Ty = 0 \quad (x, y \in E), \\ T(x^+) = (Tx)^+ \quad (x \in E), \\ T(|x|) = |Tx| \quad (x \in E). \end{gathered}$$

Векторные решетки называют *изоморфными*, если между ними имеется биекция, являющаяся решеточным гомоморфизмом. *Порядковым пополнением* векторной решетки E называют пару $(\widehat{E}, \iota)$, где $\widehat{E}$ — некоторое K-пространство, а ι — решеточный изоморфизм из E на минорирующую подрешетку в $\widehat{E}$. При этом вложение ι будет порядково непрерывным, см. П2.4. Порядковое пополнение называют также K-*пополнением* или *дедекиндовым пополнением*.

Теорема. *Для любой архимедовой векторной решетки существует единственное с точностью до решеточного изоморфизма K-пополнение.*

П2.4. Оператор $T : E \to F$ называют *порядково непрерывным* (*порядково σ-непрерывным*), если Tx_α порядково сходится к Tx для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (любой последовательности $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$) в E, порядково сходящейся к x. Множество всех порядково непрерывных регулярных операторов (всех порядково σ-непрерывных регулярных операторов) с индуцированной из $L^\sim(E, F)$ векторной и порядковой структурой обозначают символом $L_n^\sim(E, F)$ (соответственно $L_{n\sigma}^\sim(E, F)$).

(1) *Положительный оператор $T \in L^{\sim}(E,F)$ порядково непрерывен (порядково σ-непрерывен) в том и только в том случае, когда $Tx_\alpha \overset{(o)}{\to} 0$ для каждой убывающей сети (последовательности) (x_α) в E, такой что $\inf_\alpha x_\alpha = 0$.*

Оператор $T \in L^{\sim}(E,F)$ называют *сингулярным*, если он обращается в нуль на некотором порядково плотном идеале $G \subset E$. Множество сингулярных операторов обозначают символом $L^{\sim}_{s\sigma}(E,F)$,

(2) ***Теорема.*** *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Оператор $T \in L^{\sim}(E,F)$ порядково непрерывен тогда и только тогда, когда T дизъюнктен всем сингулярным операторам:*

$$L^{\sim}_n(E,F) = L^{\sim}_s(E,F)^{\perp}.$$

(3) *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Пространства $L^{\sim}_n(E,F)$ и $L^{\sim}_{n\sigma}(E,F)$ являются полосами в $L^{\sim}(E,F)$.*

(4) *Пусть $\widehat{E}$ — порядковое пополнение векторной решетки E, а F — некоторое K-пространство. Тогда регулярный порядково непрерывный оператор $T : E \to F$ имеет единственное регулярное порядково непрерывное продолжение $\widehat{T} : \widehat{E} \to F$. Отображение $T \mapsto \widehat{T}$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между пространствами $L^{\sim}_n(E,F)$ и $L^{\sim}_n(\widehat{E},F)$. В частности, операторы T и $\widehat{T}$ положительны или нет одновременно.*

П2.5. Рассмотрим векторную решетку E и некоторую ее подрешетку $D \subset E$. Говорят, что линейный оператор T из D в E *сохраняет полосы* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из следующих равенств:

$$\begin{gathered} Te \in \{e\}^{\perp\perp} \quad (e \in D), \\ e \perp f \to Te \perp f \quad (e \in D,\ f \in E), \\ T(K \cap D) \subset K \quad (K \in \mathfrak{B}(E)), \end{gathered}$$

где дизъюнктные дополнения вычисляются в E. Нерасширяющий оператор может не быть порядково ограниченным.

(1) *Пусть E — векторная решетка с главными проекциями. Тогда линейный оператор T из фундамента $D \subset E$ в E будет* *нерасширяющим в том и только в том случае, когда для любого порядкового проектора* $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ *выполнено* $\pi T x = T \pi x$ $(x \in D)$.

Множество всех порядково ограниченных нерасширяющих операторов из D в некоторую векторную подрешетку $D' \subset E$ обозначают символом $\operatorname{Orth}(D, D')$. Порядково ограниченный нерасширяющий оператор $\alpha : D \to E$, определенный на фундаменте $D \subset E$, именуют *расширенным ортоморфизмом* в E. Расширенный ортоморфизм регулярен. Более того, множество всех расширенных ортоморфизмов $\operatorname{Orth}(D, E)$, определенных на фиксированном порядково плотном идеале D, является векторной решеткой. При этом формула для вычисления решеточных операций в $\operatorname{Orth}(D, E)$ имеет вид $(S \vee T)x = Sx \vee Tx$, $(S \wedge T)x = Sx \wedge Tx$ $(x \in E^+)$.

(2) *Каждый расширенный ортоморфизм в векторной решетке порядково непрерывен.*

Теперь можно определить пространство всех расширенных ортоморфизмов $\operatorname{Orth}^\infty(E)$ на векторной решетке E. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех пар (D, π), где D — фундамент в E и $\pi \in \operatorname{Orth}(D, E)$. Элементы (D, π) и (D', π') в $\mathfrak{M}$ назовем эквивалентными (в символах $(D, \pi) \sim (D', \pi')$), если ортоморфизмы π и π' совпадают на пересечении $D \cap D'$. Такое отношение в $\mathfrak{M}$ действительно будет эквивалентностью из-за (2). Фактор-множество $\mathfrak{M}/\sim$ по модулю этой эквивалентности обозначают $\operatorname{Orth}^\infty(E)$. Множество $\operatorname{Orth}^\infty(E)$ относительно поточечного сложения, скалярного умножения и решеточных операций становится векторной решеткой. Это утверждение легко обосновать, привлекая (2), так как множества $\operatorname{Orth}(D, E)$ являются векторными решетками. Элемент $\alpha \in \operatorname{Orth}^\infty(E)$, определенный на всем пространстве E, называют *ортоморфизмом.* Множество всех ортоморфизмов в E обозначают символом $\operatorname{Orth}(E)$.

(3) *Если* E — *порядково полная векторная решетка, то* $\operatorname{Orth}(E)$ *совпадает с полосой в* $L^\sim(E)$, *порожденной тождественным оператором в* E.

(4) *Ядро расширенного ортоморфизма* $T \in \operatorname{Orth}(D, E)$ *является полосой в* D. *Если два расширенных ортоморфизма из* $\operatorname{Orth}(D, E)$ *совпадают на некотором подмножестве* D, *то они совпадают на полосе, порожденной этим множеством в* D.

В векторной решетке $\operatorname{Orth}^\infty(E)$ можно ввести структуры решеточно упорядоченной алгебры, используя для этой цели композицию. В самом деле, если (π, D_π) и (ρ, D_ρ) входят в $\mathfrak{M}$, то идеал $\pi^{-1}(D_\rho)$ будет фундаментом в E и можно определить произведение $(\sigma, D_\sigma) := (\pi, D_\pi)(\rho, D_\rho)$, полагая $D_\sigma := \pi^{-1}(D_\rho)$ и $\sigma x := \rho(\pi x)$. Так как решеточные операции в $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ вычисляются поточечно на E^+, то легко понять, что $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ будет f-алгеброй.

(5) *Всякая (архимедова) f-алгебра A коммутативна. В частности, расширенные ортоморфизмы коммутируют.*

Пусть $\mathscr{Z}(E)$ — это o-идеал, порожденный тождественным оператором I_E в $L^\sim(E)$. Пространство $\mathscr{Z}(E)$ часто называют *идеальным центром* векторной решетки E. Будем считать, что $\mathrm{Orth}(E) \subset \mathrm{Orth}^\infty(E)$, сопоставив каждому ортоморфизму $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ соответствующий ему класс эквивалентности в $\mathrm{Orth}^\infty(E)$.

(6) *Пространство $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ является дизъюнктно полной точной f-алгеброй с единицей I_E. Более того, $\mathrm{Orth}(E)$ — это f-подалгебра $\mathrm{Orth}^\infty(E)$, а $\mathscr{Z}(E)$ — это f-подалгебра $\mathrm{Orth}(E)$.*

(7) *Каждая архимедова f-алгебра E с единицей $\mathbb{1}$ алгебраически и решеточно изоморфна f-алгебре ортоморфизмов в E. Более того, идеал в E, порожденный $\mathbb{1}$, отображается при этом изоморфизме на $\mathscr{Z}(E)$.*

(8) *Если E — порядково полная векторная решетка, то $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ — расширенное K-пространство, а $\mathrm{Orth}(E)$ и $\mathscr{Z}(E)$ — фундаменты в нем.*

(9) *Пусть E и F — фундаменты в расширенном K-пространстве G с фиксированной порядковой и кольцевой единицей. Тогда для каждого ортоморфизма $\pi \in \mathrm{Orth}(E, F)$ существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $\pi x = g \cdot x$ $(x \in E)$.*

(10) *Для каждого ортоморфизма α и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдутся конечнозначные элементы (= «ступенчатые» ортоморфизмы) π_ε и ρ_ε такие, что $0 \leqslant \alpha - \pi_\varepsilon \leqslant \varepsilon I_E$, $0 \leqslant \rho_\varepsilon - \alpha \leqslant \varepsilon I_E$.*

Оператор $\pi \in L(E)$ называют *конечнозначным элементом*, если найдутся проекторы $\pi_1, \dots, \pi_n$ и числа $t_1, \dots, t_n$ такие, что $\pi = t_1\pi_1 + \dots + t_n\pi_n$.

Приложение 3. Векторные меры

Рассмотрим коротко несколько фактов о мерах со значениями в векторных решетках. Подробности можно найти в [23, 122, 367].

П3.1. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная булева алгебра. Отображение μ, определенное на $\mathscr{A}$ и действующее в произвольное векторное пространство Z, называют (*конечно аддитивной векторной*) *мерой*, если $\mu(a_1 \vee a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$ для любой пары дизъюнктных элементов $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$. Пусть $Z = E$ — векторная решетка. Меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *ограниченной*, если $\mu(\mathscr{A})$ — порядково ограниченное множество в E. Если же $\mu(a) \geqslant 0$ для всех $a \in \mathscr{A}$, то μ именуют *положительной мерой.* Обозначим символом $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ ($\mathrm{ba}^+(\mathscr{A}, E)$) пространство всех ограниченных (положительных) векторных мер. Алгебраические операции $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ индуцированы из $F(\mathscr{A})$, т. е. если $\mu, \nu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$ и $t \in \mathbb{R}$, то полагают по определению

$$(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A) \quad (A \in \mathscr{A});$$
$$(t\mu)(A) := t\mu(A) \quad (A \in \mathscr{A});$$
$$\mu \geqslant \nu \leftrightarrow \mu - \nu \geqslant 0.$$

Пространство $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ с положительным конусом $\mathrm{ba}^+(\mathscr{A}, E)$ будет упорядоченным векторным пространством. Меру μ называют *счетно аддитивной*, если для любой последовательности (a_n) попарно дизъюнктных элементов $a_n \in \mathscr{A}$ выполнено соотношение

$$\mu\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\bigg) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n) := o\text{-}\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(a_k).$$

Множество всех E-значных счетно аддитивных мер на алгебре $\mathscr{A}$ обозначим символом $\mathrm{bca}(\mathscr{A}, E)$.

Если E — произвольное K-пространство, то $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ *также будет K-пространством; множество* $\mathrm{bca}(\mathscr{A}, E)$ *является полосой K-пространства* $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$.

В частности, для каждой векторной меры $\mu : \mathscr{A} \to E$ существуют *положительная часть* $\mu^+ := \mu \vee 0$, *отрицательная часть* $\mu^- := (-\mu)^+ = -\mu \wedge 0$ и *модуль* $|\mu| := \mu \vee (-\mu)$. Нетрудно проверить, что для любых $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ и $a \in \mathscr{A}$ имеют место следующие формулы:

$$(\nu_1 \vee \nu_2)(a) = \sup\{\nu_1(a_1) + \nu_2(a_2) : \, a_1 \vee a_2 = a, \, a_1 \wedge a_2 = 0\};$$
$$(\nu_1 \wedge \nu_2)(a) = \inf\{\nu_1(a_1) + \nu_2(a_2) : \, a_1 \vee a_2 = a, \, a_1 \wedge a_2 = 0\};$$
$$\nu^+(a) = \sup\{\nu(a') : \, a' \leqslant a\};$$
$$\nu^-(a) = -\inf\{\nu(a') : \, a' \leqslant a\};$$
$$|\nu|(a) = \sup\{|\nu(a')| : \, a' \leqslant a\}.$$

П3.2. Предположим теперь, что $\mathfrak{A}$ — (компактное) топологическое пространство и $\mathscr{A}$ — борелевская σ-алгебра. Сформулируем векторнозначный вариант теоремы Рисса — Маркова, полученный М. Райтом.

Счетно аддитивную меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *регулярной* (или *квазирегулярной*), если для любого $C \in \mathscr{A}$ (соответственно для каждого открытого $C \in \mathscr{A}$) выполнено $\mu(C) = o\text{-}\lim\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_C\}$, где $\mathscr{K}_C$ — множество всех замкнутых подмножеств множества C. Это определение равносильно данному в 2.1.12. Как и в 2.1.12 $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ — соответственно множества регулярных и квазирегулярных E-значных борелевских мер.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ дано направленное множество $\mathrm{A}(n)$. Возьмем последовательность убывающих сетей $(e_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathrm{A}(n)} \subset [0, e]$ в K-пространстве E таких, что $\inf\{e_{\alpha,n} : \alpha \in \mathrm{A}(n)\} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если для каждой такой последовательности выполнено

$$\inf_{\varphi \in \mathrm{A}} \sup_{n \in \mathbb{N}} e_{\varphi(n),n} = 0, \quad \mathrm{A} := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}(n),$$

то говорят, что K-пространство E является (σ, ∞)-*дистрибутивным.* В K-пространствах счетного типа условие (σ, ∞)-дистрибутивности равносильно *регулярности* базы. Последнее означает, что в булевой алгебре $\mathscr{B}(E)$ выполнен *принцип диагонали*: если двойная последовательность $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{B}(E)$ такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ убывает и o-сходится к нулю, то существует некоторая строго возрастающая последовательность $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$, для которой $o\text{-}\lim_{n\to\infty} x_{n,m(n)} = 0$.

(1) ***Теорема Райта.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство, а E — произвольное K-пространство. Отображение $\mu \mapsto I_\mu$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм между K-пространствами $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ и $L^r(C(\mathfrak{A}), E)$.*

(2) ***Теорема.*** *Пусть K-пространство E является (σ,∞)-дистрибутивным. Тогда*

$$\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E) = \mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E).$$

При этом отображение $\mu \mapsto I_\mu$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм K-пространств $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $L^r(C(\mathfrak{A}), E)$.

П3.3. Опишем некоторые необходимые нам пространства непрерывных вектор-функций.

Положим $E(e) := \bigcup\{[-ne, ne] : n \in \mathbb{N}\}$ для $e \in E^+$. Как видно, $E(e)$ — это K-пространство с сильной единицей e. В $E(e)$ можно ввести норму

$$\|u\|_e := \inf\{\lambda > 0 : |u| \leqslant \lambda e\} \quad (u \in E(e)).$$

Хорошо известно, что $(E(e), \|\cdot\|_e)$ — банахова решетка.

Пусть $C(\mathfrak{A}, E(e))$ — пространство всех непрерывных по норме $\|\cdot\|_e$ отображений из $\mathfrak{A}$ в $E(e)$. Положим, далее,

$$C_r(\mathfrak{A}, E) := \bigcup \big\{C(\mathfrak{A}, E(e)) : e \in E^+)\big\}$$

и назовем элементы этого множества *r-непрерывными функциями.*

Понятно, что $C_r(\mathfrak{A}, E)$ содержится в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, ибо в $E(e)$ ограниченность по норме совпадает с порядковой ограниченностью. Более того, $C_r(\mathfrak{A}, E)$ есть векторная подрешетка в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$.

(1) *Для любых $f \in C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $\varepsilon > 0$ существуют $e \in E^+$ и конечные наборы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(\mathfrak{A})$ и $e_1, \dots, e_n \in E$ такие, что*

$$\left| f - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\cdot) e_k \right| = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left| f(\alpha) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\alpha) e_k \right| \leqslant \varepsilon e.$$

$\triangleleft$ По условию, $f \in C(\mathfrak{A}, E(e))$ для некоторого $e \in E^+$. По теореме Крейнов — Какутани $E(e)$ линейно изометрично и решеточно изоморфно $C(Q)$ для некоторого экстремального компакта Q. Поэтому можно считать, что $f \in C(\mathfrak{A}, C(Q))$. Однако пространства $C(\mathfrak{A}, C(Q))$ и $C(\mathfrak{A} \times Q)$ изоморфны как банаховы решетки. Остается заметить, что в силу теоремы Стоуна — Вейерштрасса в $C(\mathfrak{A} \times Q)$ плотно подпространство функций вида

$$(\alpha, q) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\alpha) e_k(q),$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(\mathfrak{A})$ и $e_1, \dots, e_n \in C(Q)$. $\triangleright$

(2) Обозначим временно через $C(\mathfrak{A}) \odot E$ множество всех отображений $f : \mathfrak{A} \to E$ вида

$$f(\alpha) = o\text{-}\sum_{\xi} \varphi_\xi(\alpha) e_\xi \quad (\alpha \in \mathfrak{A}),$$

где (φ_ξ) — равномерно ограниченное семейство непрерывных функций на $\mathfrak{A}$, а (e_ξ) — порядково ограниченное семейство попарно дизъюнктных элементов в E. Отображение $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ назовем *кусочно r-непрерывным*, если для любого ненулевого проектора π в E найдутся проектор $0 \neq \rho \leqslant \pi$ и элемент $e \in E^+$ такие, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует элемент $h \in C(\mathfrak{A}) \odot E$, для которого $\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \rho |f(\alpha) - h(\alpha)| \leqslant \varepsilon e$. Пусть $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ — пространство всех кусочно r-непрерывных отображений из $\mathfrak{A}$ в E. Как видно, $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ также векторная подрешетка в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Можно дать описание пространства $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$, используя реализацию E в виде фундамента $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт K-пространства E. Именно, отображение $f : \mathfrak{A} \to E \subset C_\infty(Q)$ входит в $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ в том и только в том случае, если существуют *котощее* (= дополнительное к тощему) множество $Q_0 \subset Q$ и элемент $e \in E$ такие, что соотношение

$$g(t) : \alpha \mapsto f(\alpha)(t) \quad (\alpha \in \mathfrak{A},\, t \in Q_0)$$

определяет непрерывную вектор-функцию $g : Q_o \to C(\mathfrak{A})$, причем $\|g(t)\|_{C(\mathfrak{A})} \leqslant e(t)$ $(t \in Q_0)$.

П3.4. Интеграл по векторной мере $\mu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$ можно распространить на пространства вектор-функций $C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$.

(1) Пусть F — еще одно K-пространство и

$$\mu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, L^r(E, F)),$$

где, как обычно, $L^r(E, F)$ — пространство регулярных операторов из E в F. Тогда интеграл $I_\mu : C(\mathfrak{A}) \to E$ допускает продолжение на $C_r(\mathfrak{A}, E)$.

Отождествим алгебраическое тензорное произведение $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ с подпространством $C_r(\mathfrak{A}, E)$, сопоставив элементу $\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes e_k$, где $e_k \in E$ и $\varphi_k \in C(\mathfrak{A})$, отображение $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi_k(\alpha) e_k$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$. Определим I_μ на $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ по формуле

$$I_\mu \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes e_k \right) := \sum_{k=1}^n I_\mu(\varphi_k) e_k.$$

Если $f \in C_r(\mathfrak{A}, E)$, то согласно 2.1.12 (1) существуют $e \in E^+$ и последовательность $(f_n) \subset C(\mathfrak{A}) \otimes E$ такие, что

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} |f(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{n} e.$$

Положим по определению $I_\mu(f) := o\text{-}\lim I_\mu(f_n)$. Корректность приведенных определений проверяется без труда.

Для любой конечно аддитивной меры $\mu : \mathscr{A} \to L^r(E, F)$ отображение $I_\mu : C_r(\mathfrak{A}, E) \to F$ является регулярным оператором. Если $\mu \geqslant 0$, то $I_\mu \geqslant 0$.

(2) Наконец, рассмотрим меру μ со значениями в пространстве $L^n(E, F)$, составленном из o-непрерывных (= нормальных) линейных операторов. Тогда I_μ можно распространить на пространство $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$.

Пусть вновь интеграл I_μ определен на $C(\mathfrak{A})$ как в (1). Тогда I_μ — регулярный оператор из $C(\mathfrak{A})$ в $L^n(E, F)$. Возьмем отображение $f \in C(\mathfrak{A}) \odot E$ вида

$$f(\alpha) = \sum_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(\alpha) e_\xi \quad (\alpha \in \mathfrak{A}),$$

где $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — ограниченное множество попарно дизъюнктных элементов в E, а $(\varphi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — равномерно ограниченное семейство непрерывных функций на $\mathfrak{A}$. Положим

$$I_\mu(f) := \sum\nolimits_{\xi\in\Xi} I_\mu(\varphi_\xi)e_\xi.$$

Это определение корректно, ибо для любого ограниченного семейства попарно дизъюнктных $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и произвольного $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ в силу o-непрерывности $I_\mu(\varphi)$ будет

$$I_\mu\left(\varphi \sum_{\xi\in\Xi} e_\xi\right) = I_\mu(\varphi)\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi.$$

Дальнейшее распространение I_μ на $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ можно осуществить с помощью 2.1.12 (2). Действительно, если $f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)$, то существует такое *разбиение единицы* (= семейство попарно дизъюнктных элементов, точная верхняя граница которых есть тождественный элемент) (π_ξ) в алгебре проекторов $\mathfrak{P}(E)$ пространства E, что каждое из отображений $\pi_\xi f$ равномерно аппроксимируется элементами из $C(\mathfrak{A}) \odot E$. Точнее, для каждого $\xi \in \Xi$ существуют $e \in E$ и последовательность $(f_n) \subset C(\mathfrak{A}) \odot E$ такие, что

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |\pi_\xi f(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{n}e.$$

Положим $I_\mu(\pi_\xi f) := o\text{-}\lim I_\mu(f_n)$ и вновь $I_\mu(f) := \sum_\xi I_\mu(\pi_\xi f)$.

Легко проверить, что I_μ — регулярный оператор из $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ в F, причем соотношения $I_\mu \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$ равносильны.

Заметим, что в определениях (1) и (2) нигде не использована счетная аддитивность меры μ. Однако она с необходимостью появляется при аналитическом описании интересующих нас классов операторов.

П3.5. Сформулируем теперь несколько результатов об аналитическом представлении линейных операторов, которые приводят к новым формулам субдифференцирования.

(1) *Для любого регулярного оператора*

$$T : C(\mathfrak{A}) \to L^r(E, F)$$

существует единственный регулярный оператор $'T : C_r(\mathfrak{A}, E) \to F$ *такой, что* $'T(\varphi \otimes e) = (T\varphi)e$ *для всех* $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ *и* $e \in E$. *Сопоставление* $T \mapsto {}'T$ *осуществляет линейный и решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L^r(C(\mathfrak{A}), L^r(E, F))$ *и* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$.

$\lhd$ Это можно установить с помощью П3.4 по схеме распространения интеграла на пространство $C_r(\mathfrak{A}, E)$ (см. П3.3 (1)). $\rhd$

(2) ***Теорема.*** *Для любого регулярного оператора*

$$T : C(\mathfrak{A}) \to L^n(E, F)$$

существует единственный оператор $'T \in L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *такой, что* $'T(\varphi \otimes e) = T(\varphi)e$ *для всех* $e \in E$ *и* $\varphi \in C(\mathfrak{A})$. *Отображение* $T \mapsto {}'T$ *является линейным и решеточным изоморфизмом* K*-пространств* $L^r(C(\mathfrak{A}), L^n(E, F))$ *и* $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$.

$\lhd$ Этот факт устанавливают так же, как и (1), с привлечением П3.4, П3.3 (2) и следующего утверждения. Регулярный оператор $S : E \to F$ порядково непрерывен в том и только в том случае, когда $Se = \sum_{\xi \in \Xi} S(\pi_\xi e)$ для любого $e \in E$ и разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{P}(E)$. $\rhd$

Подводя итог сказанному, сформулируем нужные факты об общем виде линейных операторов.

(3) ***Теорема.*** *Для любого оператора* T *из* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ *существует единственная квазирегулярная борелевская мера* $\mu := \mu_T$ *такая, что*

$$Tf = \int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)\, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_r(\mathfrak{A}, E)).$$

Отображение $T \mapsto \mu_T$ *осуществляет решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ *и* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^r(E, F))$.

(4) ***Теорема.*** *Для оператора* $T \in L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *существует единственная квазирегулярная борелевская мера* $\mu := \mu_T$ *из* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$ *такая, что*

$$Tf = \int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)\, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)).$$

Отображение $T \mapsto \mu_T$ *осуществляет решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *и* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$.

Приложение 4. Булевозначные модели

Здесь мы эскизно представим основные приемы нестандартного моделирования на основе булевозначных моделей теории множеств. Более полное изложение имеется в [119, 121, 241, 468].

П4.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. *Булевозначной интерпретацией* n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X.

Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяют элемент $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!]$ из B, называемый *оценкой истинности* φ.

Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*,$$

$$[\![\, (\forall x)\, \varphi \,]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$

$$[\![(\exists x)\,\varphi]\!] := \bigvee_{x\in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $(\,\cdot\,)^*$, $\bigwedge$, $\bigvee$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

П4.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m \in X$, а $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ — формула, *истинно* (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1, \dots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — наибольший элемент полной булевой алгебры B.

Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 представляет собой равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

П4.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \quad [\![\in (x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполнены все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам П4.1 справедливость аксиомы экстенсиональности $x = y \leftrightarrow (\forall z)\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{z\in X} ([\![z \in x]\!] \Leftrightarrow [\![z \in y]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

П4.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x, y) \in X^2 : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [240]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\cdot = \cdot]\!]', [\![\cdot \in \cdot]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![x = y]\!] = [\![\beta x = \beta y]\!]$ и $[\![x \in y]\!] = [\![\beta x \in \beta y]\!]$ при всех $x, y \in X$.

П4.5. ***Теорема.*** *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) *$\mathbb{X}$ — отделимая B-система;*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности и фундирования истинны в $\mathbb{X}$;*

(4) *если функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такова, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$ и $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(f)} f(z) \wedge [\![z = y]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такая, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$, $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

П4.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям П4.5 (1–5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)} := (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ именуют также *булевозначным универсумом*. Основные свойства $\mathbb{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Каждая теорема теории множеств ZFC истинна в $\mathbb{V}^{(B)}$; символически $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.*

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, а $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют *перемешиванием семейства* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *относительно* $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и обозначают $\mathrm{mix}_{\xi \in \Xi} b_\xi x_\xi$.

Для $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$ обозначим символом bx перемешивание x с вероятностью b и $\varnothing$ с вероятностью $b^* := \mathbb{1} - b$, т. е. $b \leqslant [\![bx = x]\!]$ и

$b^* \leqslant [\![bx = \varnothing]\!]$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено

$$[\![x \in by]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!];$$
$$[\![bx = by]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!];$$
$$[\![x = bx]\!] = [\![b'x = \varnothing]\!] = b' \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!].$$

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(u)$ теории* ZFC *(возможно, с константами из $\mathbb{V}^{(B)}$) существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![\,(\exists u)\varphi(u)\,]\!] = [\![\,\varphi(x_0)\,]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\,(\exists! x)\,\varphi(x)\,]\!] = \mathbb{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого выполнено $[\![\,\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$.

П4.7. Существует единственное отображение $x \mapsto x^\wedge$ из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее требованиям:

(1) $x = y \leftrightarrow [\![\,x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{1}$;
$x \in y \leftrightarrow [\![\,x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V})$,

(2) $[\![\,z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![\,x^\wedge = z\,]\!] \quad (z \in \mathbb{V}^{(B)},\ y \in \mathbb{V})$.

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид $(\forall u)(u \in v \to \dots)$ и $(\exists u)(u \in v \wedge \dots)$, или же в сокращенной записи $(\forall u \in v)$ и $(\exists u \in v)$. Тогда для произвольных $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ выполнено*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

П4.8. Для элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\,x \in X\,]\!] = \mathbb{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

П4.9. *Пусть F — соответствие из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что для любого множества $A \subset X{\downarrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$. При этом $[\![F$ — отображение из X в $Y]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $F{\downarrow}$ — отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$.*

В частности, отображение $f : Z^{\wedge} \to Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbb{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^{\wedge})$ для всех $z \in Z$.

П4.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Определим функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ формулами: $\mathrm{dom}(f) = X$ и $\mathrm{im}(f) = \{\mathbb{1}\}$. Согласно П4.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![y \in X]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad (y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbb{V}^{(B)})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)}))$,

где $\mathrm{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}\, b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

П4.11. *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что имеет место равенство $\mathrm{dom}(F{\uparrow}) = \mathrm{dom}(F){\uparrow}$ и для каждого подмножества A множества $\mathrm{dom}(F)$ выполнено*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow};$$

(2) *соответствие F экстенсионально т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$.

В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^{\wedge} \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

П4.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-*структура*, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x,y) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) \vee d(z,y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x,y) = [\![\, \iota(x) \neq \iota(y) \,]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \operatorname{mix} b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

П4.13. Сформулируем сейчас полезный признак перемешивания функций внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть Ξ — *множество,* $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейство элементов* $\mathbb{V}^{(B)}$, *являющихся функциями из непустого множества* X *в* Y *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *и* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы в* B. *Тогда перемешивание* $f := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi$ *является функцией из* X *в* Y *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *причем*

$$\left[\!\!\left[(\forall x \in X) f(x) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi(x) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

П4.14. Рассмотрим теперь факты, связанные с переводом понятий, возникающих при изображении поля вещественных чисел.

(1) В силу принципа максимума имеется объект $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого верно

$$[\![\mathscr{R} \ \text{— это } K\text{-пространство вещественных чисел} \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Здесь подразумевают, что $\mathscr{R}$ — это несущее множество пространства вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отметим здесь же, что $\mathbb{R}^\wedge$ (= стандартное имя поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел), будучи архимедово упорядоченным полем внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, является плотным подполем в $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (с точностью до изоморфизма).

Осуществим спуск структур из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$ по общим правилам П4.8 и П4.9:

$$
\begin{gathered}
x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1}; \\
xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1}; \\
x \leqslant y \leftrightarrow [\![x \leqslant y]\!] = \mathbb{1}; \\
\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^\wedge x = y]\!] = \mathbb{1} \\
(x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow}, \lambda \in \mathbb{R}).
\end{gathered}
$$

(2) ***Теорема Гордона.*** *Множество $\mathscr{R}{\downarrow}$ со спущенными структурами представляет собой расширенное K-пространство с базой $\mathfrak{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$ (= булева алгебра проекторов в $\mathscr{R}{\downarrow}$), изоморфной B. Такой изоморфизм осуществляется отождествлением B со спуском поля $\{0^\wedge, 1^\wedge\}$, т. е. отображением $\chi : B \to \mathfrak{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, определенным правилом*

$$
[\![\chi(b) = 1^\wedge]\!] = b,\ [\![\chi(b) = 0^\wedge]\!] = b' \quad (0, 1 \in \mathbb{R}).
$$

При этом для каждых $x, y \in \mathscr{R}$ выполнено

$$
\begin{gathered}
[\![\chi(b)x = \chi(b)y]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!]; \\
b\chi(b)x = bx, \quad b'\chi(b)x = \mathbb{0}.
\end{gathered}
$$

В частности, справедливы эквивалентности:

$$
\begin{gathered}
\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow [\![x = y]\!] \geqslant b; \\
\chi(b)x \geqslant \chi(b)y \leftrightarrow [\![x \geqslant y]\!] \geqslant b.
\end{gathered}
$$

П4.15. Используя те же обозначения, что и в П4.14, выясним смысл некоторых утверждений в терминах K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$.

(1) Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда

$$
\operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \chi(b_\xi) x_\xi.
$$

(2) Для множества $A \subset \mathscr{R}{\downarrow}$ и произвольных $a \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ справедлива эквивалентность

$$
\chi(b)a = \sup(\chi(b)(A)) \leftrightarrow b \leqslant [\![a = \sup(A{\uparrow})]\!].
$$

(3) Рассмотрим сеть $s : \mathrm{A} \to \mathscr{R}{\downarrow}$, где A — направленное множество. Тогда подъем $s{\uparrow} : \mathrm{A}^{\wedge} \to \mathscr{R}$ является сетью внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем для любых $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ выполнено

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ s) \leftrightarrow b \leqslant [\![x = \lim(s{\uparrow})]\!].$$

(4) Пусть элементы s и $\mathrm{A} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что имеет место равенство $[\![s : \mathrm{A} \to \mathscr{R} — \text{сеть}]\!] = \mathbb{1}$. Тогда спуск $s{\downarrow}$: $\mathrm{A}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ является сетью, причем для всяких $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ верно

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ (s{\downarrow})) \leftrightarrow b \leqslant [\![x = \lim(s)]\!].$$

(5) Для каждого элемента $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеют место равенства

$$e_x = \chi([\![x \neq 0]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

П4.16. ***Теорема.*** *Пусть X — архимедова векторная решетка с базой $B := \mathfrak{B}(X)$. Пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath$ из X в расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что выполнены условия:*

(1) *изоморфизм $\imath$ сохраняет точные границы произвольных непустых ограниченных множеств;*

(2) *порядковый идеал $J(\imath(X))$, порожденный множеством $\imath(X)$, есть фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$;*

(3) *для любого $y \in J(\imath(X))$ справедливы равенства*

$$\inf\{\imath(x) : x \in X \wedge \imath(x) \geqslant y\} = \\ = y = \sup\{\imath(x) : x \in X \wedge \imath(x) \leqslant y\};$$

(4) *для $x \in X$ и $b \in B$ выполнено $b \leqslant [\![\imath(x) = 0]\!]$ в том и только в том случае, если $x \in b^\perp$.*

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

2. Александров А. Д. Выпуклые многогранники.—М.-Л.: ГТТИ, 1950.—428 с.

3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—430 с.

4. Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.

5. Бакан А. Г. Равенство Моро — Рокафеллара.—Киев, 1986.—40 с.—(Препринт/Ин-т математики АН УССР; 86.48).

6. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960.—400 с.

7. Бляшке В. Круг и шар.—М.: Наука, 1967.—232 с.

8. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование.—М.: Изд-во МГУ, 1977.—196 с.

9. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды.—М.: Наука, 1983.—447 с.

10. Берже М. Геометрия. Т. 1, 2.—М.: Мир, 1984.—559 с.; 366 с.

11. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1981.—568 с.

12. Болтянский В. Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, вып. 3.—С. 3–55.

13. Буземан Г. Выпуклые поверхности.—М.: Наука, 1964.—238 с.

14. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства.—Л.: Наука, 1980.—288 с.

15. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.—410 с.

16. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.—М.: Наука, 1968.—272 с.

17. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.—М.: Наука, 1975.—408 с.

18. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

19. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

20. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.—М.: Наука, 1977.—624 с.

21. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.—М.: Наука, 1981.—340 с.

22. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

23. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

24. Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Калининск. ун-т, 1977.—84 с.

25. Вулих Б. З. Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Калининск. ун-т, 1978.—84 с.

26. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах // Мат. сб.—1971.—Т. 84, № 3.—С. 331–354.

27. Галеев Э., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—204 с.

28. Гамкрелидзе Р. В. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР Сер. мат.—1969.—Т. 33, № 4.—С. 781–839.

29. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления.—Тбилиси: Тбилисск. ун-т, 1977.

30. Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л. Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1971.—Т. 112.—С. 152–180.

31. Гирсанов И. В. Математическая теория экстремальных задач. —М.: Изд-во МГУ, 1970.—118 с.

32. Глазырина И. П. Об интегральном представлении субдифференциала // Тр. VIII Школы по теории операторов в функциональных пространствах.—Рига, 1983.—Т. 1.—С. 55–56.

33. Гольдштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.—М.: Наука, 1971.—352 с.

34. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

35. Гордон Е. И. Измеримые функции и интеграл Лебега в булевозначных моделях теории множеств с нормированными булевыми алгебрами.—Деп. в ВИНИТИ в 1979, № 291–80.

36. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

37. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

38. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

39. Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации.—Минск: Навука i тэхнiка, 1990.—239 с.

40. Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач.—Киев: Наукова думка, 1979.—150 с.

41. Гусейнов Ф. В. О неравенстве Йенсена // Мат. заметки.—1987.—Т. 41, № 6.—С. 798–806.

42. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—895 с.

43. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.— М.: Мир, 1968.—159 с.

44. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

45. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация—М.: Наука, 1981.—384 с.

46. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 250, № 1.—С. 21–25.

47. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.—432 с.

48. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы.—Киев: «Вища школа», 1980.—214 с.

49. Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, вып. 6.—С. 11–46.

50. Дубовицкий А. Я. Отделимость и трансляция уравнений Эйлера в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 1.—С. 200–211.

51. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1965.—Т. 5, № 3.—С. 395–453.

52. Дэй М. Нормированные линейные пространства.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—232 с.

53. Ерёмин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.—М.: Наука, 1976.—192 с.

54. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. —М.: Наука, 1976.—259 с.

55. Заславский А. Я. Описание некоторых классов опорных множеств // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 2.—С. 270–277.

56. Иоффе А. Д., Левин В. Л. Субдифференциалы выпуклых функций// Тр. Московск. мат. о-ва.—1972.—Т. 26.—С. 3–72.

57. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций // Успехи мат. наук.—1968.—Т. 23, № 6.—С. 51–116.

58. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.

59. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

60. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

61. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

62. Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

63. Канторович Л. В. О проблеме моментов для конечного интервала // Докл. АН СССР.—1937.—Т. 14, № 9.—С. 531–536.

64. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.—68 с.

65. Канторович Л. В. Функциональный анализ (Основные идеи) // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 7–16.

66. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, вып. 6. —С. 3–50.

67. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

68. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

69. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.—М.: Мир, 1964.—839 с.

70. Карманов В. Г. Математическое программирование.—М.: Наука, 1980.—256 с.

71. Келли Дж. Гиперполные линейные топологические пространства // Математика.—1960.—Т. 4, № 6.—С. 80–92.

72. Келли Дж. Общая топология.—М.: Наука, 1981.—432 с.

73. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР, Сибирское отделение, Ин-т математики, № 26).

74. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М: Наука, 1981.—542 с.

75. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

76. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.—394 с.

77. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматгиз, 1958.—271 с.

78. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—256 с.

79. Крейн М. Г. О минимальном разложении функционала на положительные составляющие// Докл. АН СССР.—1940.—Т. 28, № 1.—С. 18–21.

80. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, № 1.—С. 3–95.

81. Кругер А. Я. Субдифференциалы невыпуклых функций и обобщенные производные по направлениям.—Деп. в ВИНИТИ в 1977, № 2661–77.

82. Кругер А. Я. Обобщенные дифференциалы негладких функций и необходимые условия экстремума // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 3.—С. 78–90.

83. Кругер А. Я. О свойствах обобщенных дифференциалов // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 6.—С. 54–66.

84. Куратовский К. Топология.—М.: Мир, 1966.—Т. 1.—594 с.

85. Кусраев А. Г. О необходимых условиях экстремума для негладких векторнозначных отображений // Докл. АН СССР.—1978. —Т. 242, № 1.—С. 44–47.

86. Кусраев А. Г. О субдифференциальных отображениях выпуклых операторов // Оптимизация.—1978.—Вып. 21.—С. 36–40.

87. Кусраев А. Г. Субдифференцирование негладких операторов и необходимые условия экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями // Оптимизация.—1980.—Вып. 24.—С. 75–117.

88. Кусраев А. Г. Некоторые применения несплющенности в выпуклом анализе // Сиб. мат. журн.—1981.—Т. 22, № 6.—С. 102–125.

89. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 257, № 4.—С. 822–826.

90. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

91. Кусраев А. Г. Некоторые правила подсчета касательных конусов // Оптимизация.—1982.—Вып. 29.—С. 48–55.

92. Кусраев А. Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе.—Новосибирск, 1982. — 42 с. — (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).

93. Кусраев А. Г. О субдифференциалах композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 116–127.

94. Кусраев А. Г. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике для выпуклых соответствий // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 3.—С. 526–529.

95. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

96. Кусраев А. Г. О дискретном принципе максимума // Мат. заметки.—1983.—Т. 34, № 2.—С. 267–272.

97. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2. — С. 283–286.

98. Кусраев А. Г. Об одном классе выпуклых соответствий // Оптимизация.—1983.—Вып. 32.—С. 20–33.

99. Кусраев А. Г. Об открытости измеримых выпуклых соответствий // Мат. заметки.—1983.—Т. 33, № 1.—С. 41–48.

100. Кусраев А. Г. Абстрактное дезинтегрирование в пространствах Канторовича // Сиб. мат. журн.—1984.—Т. 25, № 5.—С. 79–89.

101. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы // Сиб. мат. журн. —1984.—Т. 25, № 4.—С. 107–110.

102. Кусраев А. Г. Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.— 1984.—Т. 25, № 1.—С. 69–79.

103. Кусраев А. Г. Рефлексивность решеточно-нормированных пространств // Труды сем. Ин-т прикл. мат. — 1984. — № 18. — Р. 55–57.

104. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

105. Кусраев А. Г. О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.

106. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. Т. 9.—Новосибирск: Наука, 1987. —С. 84–123.

107. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 1: Булевы алгебры. Векторные решетки.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2000.—86 с.

108. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 2: Решеточно нормированные пространства.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2000. — 87 с.

109. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 3: Положительные операторы.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2001.—110 с.

110. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 4: Мажорируемые операторы.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2001.—100 с.

111. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы в псевдотопологических векторных пространствах // Оптимизация. —1980.—Вып. 25.—С. 5–41.

112. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Свёртка Рокафеллара и характеристика оптимальных траекторий // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 290, № 2.—С. 280–283.

113. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

114. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Локальный выпуклый анализ // Современные проблемы математики.—М.: ВИНИТИ, 1982.—Т. 19.—С. 155–206

115. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1983.—Т. 24, № 5.—С. 109–132.

116. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1984.—80 с.

117. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы и их применения.—Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1985.—88 с.

118. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление.—Новосибирск: Наука, 1987.—224 с.

119. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—286 с.

120. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна —Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация. — 1992. — Т. 51 (68). — С. 5–18.

121. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

122. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.—190 с.

123. Кусраев А. Г., Незе Р. О продолжении выпуклых операторов // Оптимизация.—1983.—Вып. 33.—С. 5–16.

124. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157. (Тр. Ин-та математики АН СССР, Сиб. отд-ние. Т. 7.)

125. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.

126. Кутателадзе С. С. Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 231, № 1. — С. 28–31.

127. Кутателадзе С. С. Субдифференциалы выпуклых операторов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 5.—С. 1057–1064.

128. Кутателадзе С. С. Формулы для вычисления субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 232, № 4.—С. 770–772.

129. Кутателадзе С. С. Крайние точки субдифференциалов //Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.

130. Кутателадзе С. С. Линейные задачи выпуклого анализа // Оптимизация.—1978.—Вып. 22.—С. 38–52.

131. Кутателадзе С. С. Выпуклое ε-программирование // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 245, № 5.—С. 1048–1050.

132. Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. —1979.—Т. 34, № 1.—С. 167–196.

133. Кутателадзе С. С. О признаках крайних операторов // Оптимизация.—1979.—Вып. 23.—С. 5–8.

134. Кутателадзе С. С. Модули, допускающие выпуклый анализ // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 252, № 4.—С. 789–791.

135. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.

136. Кутателадзе С. С. ε-субдифференциалы и ε-оптимальность // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 3.—С. 120–130.

137. Кутателадзе С. С. О выпуклом анализе в модулях // Сиб. мат. журн.—1981.—Т. 22, № 4.—С. 118–128.

138. Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 3.—С. 521–524.

139. Кутателадзе С. С. Шапки и грани множеств операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 2.—С. 285–288.

140. Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ касательных конусов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 284, № 3.—С. 525–527.

141. Кутателадзе С. С. Признаки субдифференциалов, изображающих шапки и грани // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 134–141.

142. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. — С. 84–92.

143. Кутателадзе С. С. Инфинитезимали и исчисление касательных // Исследование геометрии «в целом» и математический анализ.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 123–135.

144. Кутателадзе С. С. Эпипроизводные, определяемые набором инфинитезималей // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 4.—С. 140–144.

145. Кутателадзе С. С. Субдифференциал выпуклого оператора в обобщенной точке // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 3.—С. 591–597.

146. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева, 2001.—354 с.

147. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—254 с.

148. Кутателадзе С. С., Фельдман М. М. Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации // Докл. АН СССР.—1976. —Т. 231, № 1.—С. 28–31.

149. Левашов В. А. Внутренняя характеризация классов опорных множеств // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 3.—С. 131–143.

150. Левашов В. А. Операторные аналоги теоремы Крейна — Мильмана // Функцион. анализ и его приложения.—1980.—Т. 14, № 2.—С. 61–62.

151. Левашов В. А. Об операторных ортогональных дополнениях // Мат. заметки.—1980.—Т. 28, № 1.—С. 127–130.

152. Левашов В. А. Субдифференциалы сублинейных операторов в пространствах непрерывных функций // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 252, № 1.—С. 33–36.

153. Левин В. Л. Условия B-полноты ультрабочечных и бочечных пространств // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 145, № 2.—С. 273–276.

154. Левин В. Л. О некоторых свойствах опорных функционалов // Мат. заметки.—1968.—Т. 4, № 6.—С. 685–696.

155. Левин В. Л. О субдифференциале составного функционала // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 194, № 2.—С. 268–269.

156. Левин В. Л. Субдифференциалы выпуклых отображений и сложных функций // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 6.—С. 1295–1303.

157. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

158. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Об условиях локального минимума в задачах с ограничениями // Математическая экономика и функциональный анализ.—М.: Наука, 1974.—С. 139–202.

159. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, вып. 6.—С. 85–148.

160. Лейхтвейс К. Выпуклые множества.—М.: Наука, 1985.—335 с.

161. Лифшиц Е. А. Идеально выпуклые множества // Функциональный анализ и его приложения. — 1970. — Т. 4, № 4. — С. 76–77.

162. Линке Ю. Э. Сублинейные операторы со значениями в пространствах непрерывных функций // Докл. АН СССР.—1976. —Т. 228, № 3.—С. 540–542.

163. Линке Ю. Э. Проблема существования субдифференциала для непрерывных и компактных сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 315, № 4.—С. 784–787.

164. Линке Ю. Э., Толстоногов А. А. О свойствах пространств сублинейных операторов // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 4. —С. 792–806.

165. Лозановский Г. Я. О дискретных функционалах в пространствах Марцинкевича и Орлича // Исследования по теории функций многих вещественных переменных / Межвуз. тематич. сб.—Ярославль: Изд-во Ярославск. ун-та, 1987.—Вып. 2—С. 132–147.

166. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.—М.: Мир, 1975. —496 с.

167. Магарил-Ильяев Г. Г. Теорема о неявной функции для липшицевых отображений // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 1.— С. 221–222.

168. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 27, вып. 5.—С. 125–169.

169. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.—М.: Наука, 1973.—335 с.

170. Малюгин С. А. О квазирадоновых мерах // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 101–111.

171. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.—М.: Наука, 1978.—352 с.

172. Никишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 25, вып. 6.—С. 129–191.

173. Никкайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.—М.: Мир, 1972.—518 с.

174. Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач.—Киев: Наукова думка, 1979.—159 с.

175. Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.

176. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения.—М.: Мир, 1989.—492 с.

177. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.—М.: Наука, 1983.—384 с.

178. Птак В. Полнота и теорема об открытом отображении // Математика.—1960.—Т. 4, № 6.—С. 39–67.

179. Птак В. Теорема о замкнутом графике // Математика.—1960.—V. 4, № 6.—P. 69–72.

180. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.

181. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума.—М.: Наука, 1982.—144 с.

182. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.—М.: Наука, 1975.—320 с.

183. Раднаев В. А. О решеточно безатомных субдифференциалах // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 853–859.

184. Раднаев В. А. О метрической n-неразложимости в упорядоченных решеточно нормированных пространствах и ее приложения: Дис...канд. физ.-мат. наук.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997.

185. Райков Д. А. Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. журн.—1966.—Т. 7, № 2.—С. 353–372.

186. Ржевский С. В. О структуре метода условного ε-субградиента одновременного решения прямой и двойственной задач выпуклого программирования // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1055–1059.

187. Робертсон А. П., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.

188. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.

189. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами // Математическая экономика. — М.: Мир, 1974. — С. 170–204.

190. Рокафеллар Р. Выпуклые интегральные функционалы и двойственность // Математическая экономика.—М.: Мир, 1974.— С. 222–237.

191. Рубинов А. М. Сублинейные операторы и операторно-выпуклые множества // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 2.—С. 370–380.

192. Рубинов А. М. Сублинейные операторы и их приложения // Успехи мат. наук.—1977.—Т. 32, вып. 4.—С. 113–174.

193. Рубинов А. М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.— Л.: Наука, 1980.—166 с.

194. Рубинштейн Г. Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 25, вып. 5.—С. 171–201.

195. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.—443 с.

196. Смейл С. Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, вып. 3.—С. 177–187.

197. Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. —Кишинев: Штиинца, 1984.—223 с.

198. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.—306 с.

199. Тихомиров В. М. Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления.—М.: Изд-во МГУ, 1982.—110 с.

200. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Анализ II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 14.—С. 5–102.

201. Тихомиров В. М. Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 19.—С. 103–260.

202. Толстоногов А. А. О некоторых свойствах пространств сублинейных функционалов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 2.— С. 429–443.

203. Федоренко Р. П. О минимизации негладких функций // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1981.—Т. 21, № 3.—С. 572–584.

204. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке.—М.: Мир, 1968.—112 с.

205. Фельдман М. М. О достаточных условиях существования опорных к сублинейным операторам // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 1.—С. 132–138.

206. Фельдман М. М. О сублинейных операторах, определенных на конусе // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 6.—С. 1308–1321.

207. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.

208. Шамаев И. И. О разложении и представлении регулярных операторов //Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 2.—С. 192–202.

209. Шашкин Ю. А. Выпуклые множества, экстремальные точки, симплексы // Итоги науки. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1972.—Т. 11.—С. 5–51.

210. Шеффер Х. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.—359 с.

211. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.—Киев: Наукова думка, 1979.

212. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.

213. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Мир, 1979.—400 с.

214. Энгелькинг Р. Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.

215. Эрроу К., Гурвиц Дж., Удзава Ж. Исследования по линейному и нелинейному программированию.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—234 с.

216. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования.—М.: Сов. радио, 1979.—392 с.

217. Яковенко С. Ю. О понятии бесконечной экстремали в стационарных задачах динамической оптимизации // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 308, № 4.—С. 798–812.

218. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.

219. Achilles A., Elster K.-H., and Nehse R. Bibliographie zur Vectoroptimierung // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1972.—V. 10, No. 2.—P. 227–321.

220. Alfsen E. M. Compact Convex Sets and Boundary Integrals.—Berlin etc.: Springer, 1971.—ix+210 p.
221. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York: Academic Press, 1978.—198 p.
222. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—359 p.
223. Andenaes P. R. Hahn–Banach extensions which are maximal on a given cone // Math. Ann.—1970.—V. 188.—P. 90–96.
224. Arrow K. J., Hurwicz L., and Uzawa H. Studies in Linear and Non-Linear Programming.—Stanford: Stanford University Press, 1958.—229 p.
225. Asimow L. Extremal structure of well-capped convex sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—V. 138.—P. 363–375.
226. Asimow L. and Ellis A. S. Convexity Theory and Its Applications in Functional Analysis.—London: Academic Press, 1980.—266 p.
227. Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators.—Boston etc.: Pitman, 1984.
228. Attouch H. and Wets R. J.-B. Isometries for the Legendre–Fenchel transform // Trans. Amer. Math. Soc.—1986.—V. 296, No. 1.—P. 33–60.
229. Aubin J.-P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory. —Amsterdam: North-Holland, 1979.
230. Aubin J.-P. Graphical Convergence of Set-Valued Maps.—Laxenburg: IIASA, 1987.
231. Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis.—Boston etc.: Birkhäuser, 1990.
232. Aubin J.-P. and Vinter R. B. (eds.) Convex Analysis and Applications.—London: Imperial College, 1980.—210 p.
233. Aubin J.-P. and Wets R. J.-B. Stable approximations of set-valued maps // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.—1988.—V. 5, No. 6.—P. 519–535.
234. Baker J. W. Continuity in ordered spaces // Math. Z.—1968.—V. 104, No. 3.—P. 231–246.
235. Barbu V. and Precupanu Th. Convexity and Optimization in Banach Spaces.—Bucureşti: Acad. R. S. R., Nordkoff etc., Int. Publ., 1978.—316 p.
236. Bazaraa M. S. and Goode J. J. Necessary optimality criteria in mathematical programming in normed linear spaces // J. Optim. Theory Appl.—1973.—V. 11, No. 3.—P. 235–244.

237. Bazaraa M. S., Goode J. J., and Nashed M. Z. On the cones of tangent with applications to mathematical programming // J. Optim. Theory Appl.—1974.—V. 13, No. 4.—P. 389–426.

238. Beer G. On Mosco convergence of convex sets // Bull. Austral. Math. Soc.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 239–253.

239. Beer G. On the Young–Fenchel transform for convex functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—V. 104, No. 4.—P. 1115–1123.

240. Beer G. Conjugate convex functions and the epi-distance topology // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 108, No. 1. — P. 117–126.

241. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—Oxford: Clarendon Press, 1979.—126 p.

242. Benko I. and Scheiber E. Monotonic linear extensions for ordered modules, their extremality and uniqueness // Mathematica.—1989. —V. 25, No. 2.—P. 119–125.

243. Berger M. Nonlinearity and Functional Analysis.—New York: Academic Press, 1977.

244. Bernau S. J. Sums and extensions of vector lattice homomorphisms // Acta Appl. Math.—1992.—V. 27, No. 1–2.—P. 33–45.

245. Bernau S. J., Huijsmans C. B., and de Pagter B. Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 115, No. 1.—P. 151–156.

246. Bigard A. Modules ordonnes injectifs // Mathematica.—1973.— V. 15, No. 1.—P. 15–24.

247. Bishop E. and Phelps R. R. The support functional of a convex set // V. L. Klee, ed., Convexity.— AMS Proc. Symp. Pure Math.— 1963.—V. 4.—P. 27–35.

248. Bonnesen T. and Fenchel W. Theorie der konvexen Körper.—Berlin etc.: Springer, 1974.—164 p.

249. Bonnice W. and Silvermann R. The Hahn–Banach extension and the least upper bound properties are equivalent // Proc. Amer. Math. Soc.—1967.—V. 18, No. 5.—P. 843–850.

250. Bonsall F. F. Endomorphisms of partially ordered spaces without order unit // J. London Math. Soc. — 1955. — V. 30, No. 2. — P. 144–153.

251. Bonsall F. F., Lindenstrauss J., and Phelps R. R. Extreme positive operators on algebras of functions // Math. Scand.—1966.—V. 18, No. 2.—P. 161–182.

252. Borwein J. M. A multivalued approach to the Farkas lemma // Math. Programming Stud.—1979.—V. 10, No. 1.—P. 42–47.

253. Borwein J. M. A Lagrange multiplier theorem and sandwich theorems for convex relations // Math. Scand.—1981.—V. 48, No. 2.—P. 189–204.

254. Borwein J. M. Convex relations in analysis and optimization // Generalized Concavity.—New York etc.: Academic Press, 1981.—P. 336–377.

255. Borwein J. M. Continuity and differentiability properties of convex operators // Proc. London Math. Soc. — 1982. — V. 44. — P. 420–444.

256. Borwein J. M. Subgradients of convex operators // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization. — 1984. — V. 15. — P. 179–191.

257. Borwein J. M. and Preiss D. A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 303, No. 2. —P. 517–527.

258. Borwein J. M. and Strojwas H. M. Tangential approximations // Nonlinear Anal.—1985.—V. 9.—P. 1347–1366.

259. Borwein J. M. and Strojwas H. M. Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. Part I: Theory // Canad. J. Math.—1986.—V. 38.—P. 431–452 ; Part II: Applications // Canad. J. Math.—1987.—V. 39.—P. 428–472.

260. Borwein J. M., Penot J. P., and Thera M. Conjugate convex operators // J. Math. Anal. Appl.—1989.—V. 102.—P. 399–414.

261. Breckner W. W. and Orban G. Continuity Properties of Rationally s-Convex Mappings with Values in Ordered Topological Linear Spaces.—Cluj-Napocoi: Babes-Bolyai University, 1978.—92 p.

262. Breckner W. W. and Scheiber E. A Hahn–Banach type extension theorem for linear mappings into ordered modules // Mathematica. —1977.—V. 19, No. 1.—P. 13–27.

263. Brfinsted A. Conjugate convex functions in topological vector spaces // Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.—1962.—V. 34, No. 2.—P. 1–26.

264. Brfinsted A. and Rockafellar R. T. On the subdifferentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1965.—V. 16.—P. 605–611.

265. Bouligand G. Introduction a la Géometrie Infinitésimale Directe.—Paris: Gautie-Villars, 1932.

266. Buskes G. Extension of Riesz homomorphisms // Austral. Math. Soc. Ser. A.—1987.—V. 43.—P. 35–46.

267. Buskes G. The Hahn–Banach Theorem Surveyed // Dissertationes Math.—1993.—49 p.

268. Buskes G. and van Rooij A. Hahn–Banach extensions for Riesz homomorphisms // Indag. Math. (N.S.)—1989.—V. 51, No. 1.—P. 25–34.

269. Carathéodory K. Uber den Variabilitätsbereich Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Functionen // Rend. Circ. Mat. Palermo.—1911.—V. 32.—P. 193–217.

270. Castaing Ch. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer, 1977.—278 p.—(Lectures Notes in Math.; **580**.)

271. Christensen J. P. R. Topology and Borel Structure.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1974.—138 p.

272. Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 205, No. 2.—P. 247–262.

273. Clarke F. H. A new approach to Lagrange multipliers // Math. Oper. Res.—1976.—V. 1, No. 2.—P. 165–174.

274. Clarke F. H. On the inverse function theorem // Pacific J. Math.—1976.—V. 64, No. 1.—P. 97–102.

275. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.—New York, Wiley, 1983.

276. Clarke F. H. Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization. —Philadelphia: SIAM, 1989.—(CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics; **57**).

277. Collins H. S. Completeness and compactness in linear topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79.—P. 256–280.

278. Cooper J. L. B. Coordinated spaces // Proc. London Math. Soc.—1953.—V. 3, No. 3.—P. 305–327.

279. Cooper J. L. B. On generalization of the Köthe coordinate spaces // Math. Ann.—1966.—V. 162, No. 3.—P. 351–363.

280. Convexity and Related Combinatorial Geometry.—New York etc.: Dekker, 1982.

281. Crenshaw J. A. Extreme positive linear operators // Math. Scand. —1969.—V. 25, No. 2.—P. 195–217.

282. Dales H. G. Automatic continuity: a survey // Bull. London Math. Soc.—1978.—V. 10, No. 29.—P. 129–183.
283. Debieve C. On Banach spaces having a Radon–Nikodým dual // Pacific J. Math.—1985.—V. 120, No. 2.—P. 327–330.
284. Demulich R. and Elster K.-H. F-conjugation and nonconvex optimization (Part 3) // Optimization. — 1985. — V. 16, No. 6. — P. 789–804.
285. Demulich R., Elster K.-H., and Nehse R. Recent results on the separation of convex sets // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1978.—V. 9.—P. 273–296.
286. Dem′yanov V. F. and Rubinov A. M., Quasidifferential Calculus.—New York: Optimization Software, 1986.
287. Deville R., Godefroy G., and Zizler V. Un principle variationel utilisant des fonctions bosses // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1991.—V. 312, No. 1.—P. 281–286.
288. De Wilde M. Closed-Graph Theorems and Webbed Spaces.— London: Pitman, 1978.—150 p.
289. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.—(Series: Mathematical Surveys; **15**).
290. Dieudonné J. History of Functional Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—312 p.
291. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
292. Dolecki S. A general theory of necessary optimality conditions // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 78, No. 12.—P. 267–308.
293. Dolecki S. Tangency and differentiation: Some applications of convergence theory // Ann. Mat. Pura Appl.—1982.—V. 130.—P. 223–255.
294. Dolecki S. Tangency and differentiation: Marginal functions // Adv. in Appl. Math.—1990.—V. 11, No. 4.—P. 388–411.
295. Dulst van D. Characterization of Banach Spaces Not Containing l_1.—Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1969.
296. Egglestone H. G. Convexity.—Cambridge: Cambridge Univ., 1958. —136 p.
297. Ekeland I. On a variational principle // J. Math. Anal. Appl.—1974.—V. 47.—P. 324–353.
298. Ekeland I. Nonconvex optimization problems // Bull. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 1, No. 3.—P. 443–474.

299. Elster K.-H. and Nehse R. Konjugierte operatoren und Subdifferentiale // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1975.—V. 6.—P. 641–657.

300. Elster K.-H. and Nehse R. Necessary and sufficient conditions for the order completeness of partially ordered vector spaces // Math. Nachr.—1978.—V. 81.—P. 301–311.

301. Elster K.-H. and Thierfelder J. Abstract cone approximations and generalized differentiability in nonsmooth optimization // Optimization.—1983.—V. 19, No. 3.—P. 315–341.

302. Essays on Nonlinear Analysis and Optimization Problems. — Hanoi: Not. Center Ser. Res., Inst. of Math., 1987.

303. Evers J. and Maaren H. Duality principles in mathematics and their relations to conjugate functions // Nieuw Arch. Wisk.—1985.—V. 3, No. 1.—P. 23–68.

304. Fenchel W. Convex Cones, Sets and Functions.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1953.

305. Floret K. Weakly Compact Sets.—Berlin etc.: Springer, 1980.—(Lecture Notes in Math.; **81**).

306. Fuchssteiner B. and Lusky W. Convex Cones.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1981.—x+428 p.

307. Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics. —New York etc.: Oxford Univ. Press, 1990.

308. van Gaans O. W. Seminorms on Ordered Vector Spaces—Nijmegen: Univ. Nijmegen, 1999.—115 p. (Ph. D. Thesis University of Nijmegen.)

309. Georgiev P. G. Locally Lipschitz and regular functions are Fréchet differentiable almost everywhere in Asplund spaces // C. R. Acad. Bulgare Sci.—1989.—V. 2, No. 5.—P. 13–15.

310. Giles J. R. Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions.—Boston etc.: Pitman, 1982.—x+ 278 p.

311. Giles J. R. On the characterization of Asplund spaces // J. Austral. Math. Soc.—1982.—V. 32.—P. 134–144.

312. Godefroy G. and Suphar P. Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces // Illinois J. Math.—1988.—V. 32, No. 4.—P. 672–695.

313. Groussoub N. Perturbation Methods in Critical Point Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

314. Gruber P. M. Results of Baire category type in convexity // Discrete Geometry and Convexity, Proc. Conf., Ann. N. Y. Acad. Sci.—1985.—V. 440.—P. 163–169.

315. Gruder S. and Schroeck F. Generalized convexity // SIAM J. Math. Anal.—1980.—V. 11, No. 6.—P. 984–1001.

316. Grünbaum B. Convex Polytopes.—New York: Wiley, 1967.

317. Halkin H. Nonlinear nonconvex programming in infinite-dimensional spaces // Mathematical Theory of Control.—New York: Academic Press, 1967.—P. 10–25.

318. Handbook on Convex Geometry. Vol. A and B / Eds. Gruber P. M., Wills J. M.—Amsterdam: Elsevier, 1993.

319. Helly E. Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinschaflichen Punkten // Iber. Deutsch. Math. Verein. — 1923. — V. 32. — P. 175–176.

320. Hiriart-Urruty J.-B. On optimality conditions in nondifferentiable programming // Math. Programming.—1978.—V. 14, No. 1.—P. 73–86.

321. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Res.—1979.—V. 4, No. 1.—P. 79–97.

322. Hiriart-Urruty J.-B. and Seeger B. The second order subdifferential and the Dupin indicatrices of a nondifferentiable convex function // Proc. London Math. Soc.—1989.—V. 58, No. 2.—P. 351–365.

323. Hochstadt H. Edward Helly, father of the Hahn–Banach theorem // Math. Intelligencer.—1980.—V. 2, No. 3.—P. 123–125.

324. Hogbe-Nlend H. Theorie des Bornologie et Applications.— Berlin etc.: Springer, 1971.—168 p.

325. Holmes R. B. Geometric Functional Analysis and Its Applications. — Berlin etc.: Springer, 1975.—239 c.

326. Hörmander L. Notions of Convexity.—Boston etc.: Birkhäuser, 1994.

327. Ioffe A. D. Differentielles generalisees d'applications localement lipschitziennes d'un espace de Banach dans un autre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1979.—V. 289.—P. 637–640.

328. Ioffe A. D. Necessary and sufficient conditions for a local minimum. I–III // SIAM J. Control Optim. — 1979. — V. 17, No. 2. — P. 245–288.

329. Ioffe A. D. On foundations of convex analysis // Ann. New York Acad. Sci.—1980.—V. 337.—P. 103–117.

330. Ioffe A. D. A new proof of the equivalence of the Hahn–Banach extension and the least upper bound properties // Proc. Amer. Math. Soc.—1981.—V. 82, No. 3.—P. 385–389.

331. Ioffe A. D. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings // Trans. Amer. Math. Soc.—1981.—V. 266, No. 1.—P. 1–56 .

332. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. I: The finite-dimensional case // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 281.—P. 389–416.

333. Ioffe A. D. Necessary conditions in nonsmooth optimization // Math. Oper. Res.—1984.—V. 9, No. 2.—P. 159–189.

334. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. II // Mathematika.—1986.—V. 33.—P. 111–128.

335. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. III: The metric theory // Mathematika.—1989.—V. 36, No. 1.—P. 1–38.

336. Ioffe A. D. On some recent developments in the theory of second order optimality conditions // Optimization (Ed.: S. Dolecki).—New York etc.: Springer, 1989.—(Lecture Notes in Math.; **1405**).

337. Ioffe A. D. Proximal analysis and approximate subdifferentials // J. London Math. Soc.—1990.—V. 41, No. 1.—P. 175–192.

338. Ioffe A. D. Variational analysis of a composite function: a formula for the lower second order epi-derivative // J. Math. Anal. Appl.—1991.—V. 160, No. 2.—P. 379–405.

339. Jahn J. Duality in vector optimization // Math. Programming.—1983.—V. 25.—P. 343–355.

340. Jahn J. Zur vektoriellen linearen Tschebyscheff-Approximation // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14, No. 4.—P. 577–591.

341. Jameson G. J. O. Ordered Linear Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1970.—194 p.—(Lecture Notes in Math.; **141**.)

342. Jameson G. J. O. Convex series // Proc. Cambridge Philos. Soc.—1972.—V. 72, No. 1.—P. 37–47.

343. Jameson G. J. O. The duality of pairs of wedges // Proc. London Math. Soc.—1972.—V. 24, No. 3.—P. 531–547.

344. Jarchow H. Locally Convex Spaces.—Stuttgart: Teubner, 1981.

345. Jarosz K. Nonlinear generalizations of the Banach–Stone theorem // Studia Math.—1989.—V. 93, No. 2.—P. 97–107.

346. Jofre A. and Thibault L. D-representation of subdifferentials of directionally Lipschitz functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—V. 110, No. 1.—P. 117–123.
347. Johnson W. B. and Zippin M. Extension of operators from subspaces of $c_0(E)$ into $C(K)$ spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 107, No. 1.—P. 751–754.
348. de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.—ix+229 p.
349. Jourani A. and Thibault L. The use of metric graphical regularity in approximate subdifferential calculus rules in finite dimensions // Optimization.—1990.—V. 21, No. 4.—P. 509–520.
350. Jürg M. Konvexe Analysis.—Stuttgart etc.: Birkhäuser Verlag, 1977. —xi+273 p.
351. Kantorovich L. V., The method of successive approximation for functional equations // Acta Math.—1939.—V. 71.—P. 63–97.
352. Kelley J. and Namioka I. Linear Topological Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1976.—256 p.
353. Kindler J. Sandwich theorems for set functions // J. Math. Anal. Appl.—1988.—V. 133, No. 2.—P. 529–542.
354. Kirov N. K. Generalized monotone mappings and differentiability of vector-valued convex mappings // Serdica.—1983.—V. 9.—P. 263–274.
355. Kirov N. K. Generic Fréchet differentiability of convex operators // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 94, No. 1.—P. 97–102.
356. Kollatz L. Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.—Berlin etc.: Springer, 1964.
357. Komuro N. On basic properties of convex functions and convex integrands // Hokkaido Math. J.—1989.—V. 18, No. 1.—P. 1–30.
358. Konig H. On the abstract Hahn–Banach theorem due to Rodé // Aequationes Math.—1987.—V. 34, No. 1.—P. 89–95.
359. Koshi Sh. and Komuro N. A generalization of the Fenchel–Moreau theorem // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.—1983.—V. 59.—P. 178–181.
360. Koshi Sh., Lai H. C., and Komuro N. Convex programming on spaces of measurable functions // Hokkaido Math. J.—1985.—V. 14.—P. 75–84.
361. Köthe G. Topological Vector Spaces.—Berlin etc., Springer, 1969.
362. Köthe G. Topological Vector Spaces. II.—Berlin etc.: Springer, 1980.—331 p.

363. Krein M. G. and Mil′man D. P. On the extreme points of regularly convex sets // Studia Math.—1940.—V. 9.—P. 133–138.
364. Kuhn H. Nonlinear programming: a historical view // Nonlinear Programming.—Providence: Amer. Math. Soc., 1976.—P. 1–26.
365. Kurepa G. Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés // C. R. Acad. Sci.—1934.—V. 198.—P. 1563–1565.
366. Kusraev A. G. Boolean-valued convex analysis // Mathematische Optimierung. Theorie und Anvendungen.—Eisenach: Wartburg, 1983.—P. 106–109.
367. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000. —446 p.
368. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2.—P. 114–152.
369. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl.—1992.—V. 151, No. 2.—P. 91–105.
370. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Subdifferentials: Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer, 1995.—398 p.
371. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1975.—247 p.
372. Levi F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity // J. Indian Math. Soc.—1951.—V. 7, No. 4.—P. 44–78.
373. Lifshitz E. A. Ideally convex sets // Funct. Anal. Appl.—1970.—V. 4, No. 4.—P. 76–77.
374. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1979.—243 p.
375. Lipecki Z. Extension of positive operators and extreme points. II, III // Colloq. Math.—1979.—V. 42, No. 2.—P. 285–289; 1982.—V. 46, No. 2.—P. 263–268.
376. Lipecki Z. Extension of vector lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 79.—P. 247–248.
377. Lipecki Z. Maximal-valued extensions of positive operators // Math. Nachr.—1984.—V. 117.—P. 51–55.
378. Lipecki Z. and Thomsen W. Extension of positive operators and extreme points. IV // Colloq. Math.—1982.—V. 46.—P. 267–273.
379. Lipecki Z., Plachky D., and Thomsen W. Extension of positive operators and extreme points. I // Colloq. Math.—1979.—V. 42, No. 2.—P. 279–284.

380. Loewen P. The proximal subgradient formula in Banach space // Canad. J. Math.—1988.—V. 31, No. 3.—P. 353–361.
381. Loewen P. D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.—ix+153 p.
382. Loridan R. ε-solutions in vector minimization problems // J. Optim. Theory Appl.—1984.—V. 43, No. 2.—P. 256–276.
383. Lucchetti R. and Malivert C. Variational convergences and level sets of multifunctions // Ricerche Mat.—1989.—V. 38, No. 2.—P. 223–237.
384. Luc Dinh The. On duality theory in multiobjective programming // J. Optim. Theory Appl.—1984.—V. 43, No. 4.—P. 557–582.
385. Luenberger P. G. Optimization by Vector Methods.—New York: Wiley, 1969.
386. Luxemburg W. A. J. and Schep A. R. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.—1978.—V. 40, No. 3.—P. 357–375.
387. Luxemburg W. A. J. and Schep A. An extension theorem for Riesz homomorphisms // Indag. Math. (N.S.). — 1979. — V. 41. — P. 145–154.
388. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1971.—514 p.
389. Maharam D. The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, No. 1.—P. 154–184.
390. Maharam D. On positive operators // Contemp. Math.—1984.—V. 26.—P. 263–277.
391. Martin R. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces.—New York: Wiley, 1976.
392. Martinez-Legaz J.-E. Weak lower subdifferentials and applications // Optimization.—1990.—V. 21, No. 3.—P. 321–341.
393. Martinez Maurica J. and Perez Garsia C. A new approach to the Krein–Milman theorem // Pacific J. Math.—1985.—V. 120, No. 2.—P. 417–422.
394. McShane E. J. The calculus of variations from the beginning through optimal control theory // SIAM J. Control Optim.—1989.—V. 27, No. 5.—P. 916–939.
395. McShane E. J. Jensen's inequality // Bull. Amer. Math. Soc.—1937.—V. 43.—P. 521–527.
396. Michael E. Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc.—1951.—V. 71.—P. 152–182.

397. Moreau J.-J. Fonctions Convexes en Dualite, Multigraph, Seminaires Mathematique, Faculte des Sciences, Univ. de Montpellier, 1962.

398. Motzkin T. S. Endovectors in convexity // Proc. Symp. Pure Math.—1963.— V. 7.—P. 361–387.

399. Nehse R. The Hahn–Banach property and equivalent conditions // Comment. Math. Univ. Carolin.—1978.—V. 19, No. 1.—P. 165–177.

400. Nemeth A. B. On the subdifferentiability of convex operators // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 552–558.

401. Nemeth A. B. Between Pareto efficiency and Pareto ε-efficiency // Optimization.—1989.—V. 20, No. 5.—P. 615–637.

402. Neumann M. On the Strassen disintegration theorem // Arch. Math.—1977.—V. 29, No. 4.—P. 413–420.

403. Neumann M. Continuity of sublinear operators on F-spaces // Manuscripta Math.—1978.—V. 26, No. 1–2.—P. 37–61.

404. Neustadt L. W. Optimization — A Theory of Necessary Conditions. —Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.

405. Ng K.-F. and Law C. K. Monotonic norms in ordered Banach spaces // J. Austral. Math. Soc. — 1988. — V. 45, No. 2. — P. 217–219.

406. Noll D. Generic Fréchet-differentiability of convex functions on small sets // Arch. Math.—1990.—V. 54, No. 5.—P. 487–492.

407. Nondifferentiable Optimization.—Amsterdam etc.:North-Holland, 1975.—(Math. Programming Stud. 3/eds. M. L. Balinski and P. Wolfe.)

408. Nondifferential and Variational Techniques in Optimization.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1982.—(Math. Programming Stud. 17/eds. D. C. Sorensen and R. J.-B. Wets).

409. Nonlinear Analysis and Optimization.—Amsterdam: North-Holland, 1987.—(Math. Program. Stud. 30/eds. B. Cornet, V. Nguen, and J. P. Vial).

410. Nonlinear and Convex Analysis. Proceedings in Honor of Ky Fan.—New York etc.: Dekker, 1987.

411. Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

412. Nowakowski A. Sufficient conditions for ε-optimality // Control Cybernet.—1988.—V. 17, No. 1.—P. 29–43.

413. Nozicka F., Grygorova L., and Lommatzsch K. Geometrie, Konvexer Mengen und Konvexe Analysis.—Berlin: Academic Verlag, 1988.

414. Oates D. K. A non-compact Kreĭn–Mil′man theorem // Pacific J. Math.—1971.—V. 36, No. 3.—P. 781–788.

415. Orhon M. On the Hahn–Banach theorem for modules over $C(S)$ // J. London Math. Soc.—1969.—V. 1, No. 2.—P. 363–368.

416. Pagter B. de and Wnuk W. Some remarks on Banach lattices with nonatonic duals // Indag. Math. (N.S.)—1990.—V. 1, No. 3.—P. 391–394.

417. Pales Z. A generalization of the Dubovitskiĭ–Milyutin separation theorem for commutative semigroups // Arch. Math.—1989.—V. 52, No. 4.—P. 384–392.

418. Papageorgiou N. Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces. Part 1: Convex case // Pacific J. Math.—1983.—V. 107, No. 2.—P. 403–458.

419. Papageorgiou N. Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces. Part 2: Nonconvex case, Clarke's theory // Pacific J. Math.—1983.—V. 109, No. 2.—P. 469–491.

420. Papagiotopulos T. D. Nonconvex energy functions // Acta Mech. —1983.—V. 48.—P. 160–183.

421. Patrone F. and Tijs S. H. Unified approach to approximations in games and multiobjective programming // J. Optim. Theory Appl.—1987.—V. 52, No. 2.—P. 273–278.

422. Penot J.-P. Calculus sous-differentiel et optimization // Funct. Anal.—1978.—V. 27, No. 2.—P. 248–276.

423. Penot J.-P. and Thera M. Polarite des applications convexes a valeurs vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1979.—V. 288, No. 7.—P. 419–422.

424. Penot J.-P. and Volle M. On quasi-convex duality // Math. Oper. Res.—1990.—V. 15, No. 4.—P. 597–625.

425. Phelps R. R. Extreme positive operators and homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc.—1963.—V. 108.—P. 265–274.

426. Phelps R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.—Berlin etc.: Springer, 1993.—117 p.

427. Pourciau B. H. Analysis and optimization of Lipschitz continuous mappings // J. Optim. Theory Appl.—1977.—V. 22, No. 3.—P. 311–351.

428. Preiss D. Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces // J. Funct. Anal.—1990.—V. 91.—P. 312–345.

429. Pták V. The principle of uniform boundedness and the closed graph theorem // Czechoslovak. Math. J.—1962.—V. 12.—P. 523–528.

430. Pták V. On complete topological vector spaces // Amer. Math. Soc. Transl.—1977.—V. 110.—P. 61–106.

431. Quasidifferential Calculus.—Amsterdam: North-Holland, 1986.

432. Radnaev V. A. On n-disjoint operators // Siberian Adv. Math.—1997.—V. 7, No. 4.—P. 44–78.

433. Raffin C. Sur les programmes convexes definis dans des espaces vectoriels topologiques // Ann. Inst. Fourier.—1970.—V. 20, No. 1.—P. 457–491.

434. Reiland T. W. Nonsmooth analysis and optimization for a class of nonconvex mappings // Proc. Internat. Conf. of Infinite-Dimensional Programming (eds. E. J. Anderson and A. B. Philot).—Berlin etc.: Springer, 1985.

435. Reiland T. W. Nonsmooth analysis and optimization on partially ordered vector spaces // Internat. J. Math. Math. Sci.—1991.—V. 15, No. 1.—P. 65–81.

436. Riccen B. Sur les multifonctions a graphe convexe // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1984.—V. 229, 1, No. 5.—P. 739–740.

437. Ritter K. Optimization theory in linear spaces. Part 3: Mathematical programming in linear ordered spaces // Math. Anal.—1970.—V. 184, No. 2.—P. 133–154.

438. Robertson W. Closed graph theorems and spaces with webs // Proc. London Math. Soc.—1972.—V. 24, No. 4.—P. 692–738

439. Robertson A. P. and Robertson W. On the closed graph theorem // Proc. Glasgow Math. Assoc.—1956.—V. 3.—P. 9–12.

440. Robinson S. M. Regularity and stability for convex multivalued functions // Math. Oper. Res.—1976.—V. 1, No. 2.—P. 130–143.

441. Rockafellar R. T. Monotone Processes of Convex and Concave Type.—Providence: Rhode Island, 1967.—74 p. (Mem. Amer. Math. Soc., V. 77).

442. Rockafellar R. T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Canad. J. Math.—1980.—V. 32.—P. 157–180.

443. Rockafellar R. T. Proximal subgradients, marginal values, and augmented Lagrangians in nonconvex optimization // Math. Oper. Res.—1981.—V. 6.—P. 424–436.

444. Rockafellar R. T. The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions.—Berlin etc.: Springer, 1981.

445. Rockafellar R. T. Extensions of subgradient calculus with applications to optimization // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.—1985.—V. 9.—P. 665–698.

446. Rockafellar R. T. First- and second-order epi-differentiability in nonlinear programming // Trans. Amer. Math. Soc.—1988.—V. 307, No. 1.—P. 75–108.

447. Rockafellar R. T. Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.—1989.—V. 6.—P. 449–482.

448. Rockafellar R. T. Generalized second order derivatives of convex functions and saddle functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1990.—V. 322, No. 1.—P. 51–77.

449. Rockafellar R. T. and Wets R. J.-B. Variational Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1998.—733 p.

450. Rodriguez-Salinas B. and Bou L. A Hahn–Banach theorem for an arbitrary vector space // Boll. Un. Mat. Ital.—1974.—V. 10, No. 4.—P. 390–393.

451. Rolewicz S. Analiza Functionala i Theoria Steravania.—Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.

452. Rosenthal H. L_1-convexity // Funct. Anal.—1988.—P. 156 –174. —(Lecture Notes in Math.; **1332**).

453. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators— Berlin etc.: Springer, 1974.

454. Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1965.—V. 66.—P. 111–116.

455. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

456. Shapiro A. On optimality conditions in quasidifferentiable optimization // SIAM J. Control Optim. — 1984. — V. 22, No. 4. — P. 610–617.

457. Slater M. Lagrange multipliers revisited: a contribution to nonlinear programming // Cowles Commission Discussion Paper; Math. —1950.—V. 403.

458. Smale S. Global analysis and economics. III: Pareto optima and price equilibria // J. Math. Econom.—1974.—V. 1, No. 2.—P. 107–117.

459. Smith P. Convexity Methods in Variational Calculus.—New York: Wiley, 1985.

460. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. — 1972. — V. 94, No. 2. — P. 201–245.

461. Sonntag Y. and Zalinescu C. Scalar convergence of convex sets // J. Math. Anal. Appl.—1992.—V. 164, No. 1.—P. 219–241.

462. Stadler W. A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problems. I: 1776–1960 // J. Optim. Theory Appl.—1979.—V. 29, No. 1.—P. 1–52.

463. Strodiot J. J., Nguyen V. H., and Heukemes N. ε-optimal solutions in nondifferentiable convex programming and some related questions // Math. Programming.—1983.—V. 25.—P. 307–328.

464. Strodiot J. J., Nguyen V. H., and Heukemes N. A note on the Chebyshev ε-approximation problem // Optimization. Theory and Algorithms.—New York: Dekker, 1983.—P. 103–110.

465. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York: Academic Press, 1976.

466. Takeuti G., Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo; Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—viii+137 p.

467. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theoryto Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Berlin etc.: Springer, 1979.—P. 714–731.—(Lecture Notes in Math.; **753**.)

468. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer, 1973.—viii+238 p.

469. Thera M. Calcul epsilon-sous-differentiel des applications convexes vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290.—P. 549–551.

470. Thera M. Subdifferential calculus for convex operators // J. Math. Anal. Appl.—1981.—V. 80, No. 1.—P. 78–91.

471. Thibault L. Fonctions compactement Lipschitziennes et programmation mathematique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1978.—V. 287, No. 4.—P. 213–216.

472. Thibault L. Sous-differentiels de fonctions vectorielles compactement lipschitziennes // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1978.—V. 286, No. 21.—P. 995–999.

473. Thibault L. Epidifferentiels de fonctions vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290, No. 2.—P. 87–90.

474. Thibault L. Subdifferentials of nonconvex vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl.—1982.—V. 86, No. 2.—P. 319–344.

475. To T.-O. The equivalence of the least upper bound property in ordered vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1970.—V. 30, No. 2.—P. 287–296.

476. Treiman J. Clarke's gradients and epsilon-subgradients in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1986.—V. 294, No. 1.—P. 65–78.

477. Ursescu C. Multifunctions with convex closed graph // Czechoslovak. Math. J.—1975.—V. 25, No. 3.—P. 438–441.

478. Ursescu C. Tangency and openness of multifunctions in Banach spaces // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Sect. I a Mat. (N.S.).—1988.—V. 34, No. 3.—P. 221–226.

479. Valadier M. Sous-differentiabilite de fonctions convexes a valeurs dans un espace vectoriel ordonne // Math. Scand.—1972.—V. 30, No. 1.—P. 65–74.

480. Valdivia M. B_r-complete spaces which are not B-complete // Math. Z.—1984.—V. 185, No. 2.—P. 253–259.

481. Valentine F. A. Convex Sets.—New York etc.: McGraw-Hill, 1964.—ix+238 p.

482. Valyi Is. Strict approximate duality in vector spaces // Appl. Math. Comput.—1988.—V. 25, No. 3.—P. 227–246.

483. Verona M. E. More on the differentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—V. 103, No. 1.—P. 137–140.

484. Vincent-Smith G. The Hahn–Banach theorem for modules // Proc. London Math. Soc.—1967.—V. 17, No. 3.—P. 72–90.

485. Vuza D. The Hahn–Banach extension theorem for modules over ordered rings // Rev. Roumanie Math. Pures Appl.—1982.—V. 27.—P. 989–995.

486. Ward D. E. Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, No. 2.—P. 661–682.

487. Ward D. E. The quantification tangent cones // Canad. J. Math.—1988.—V. 40, No. 3.—P. 666–694.

488. Ward D. E. Corrigendum to “Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization” // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 311, No. 1.—P. 429–431.

489. Ward D. E. and Borwein J. M. Nonsmooth calculus in finite dimensions // SIAM J. Control Optim.—V. 25.—1987.—P. 1312–1340.

490. Warga J. Derivative containers, inverse functions and controllability // Calculus of Variations and Control Theory (ed. D. L. Russel), Academic Press, 1976, No. 4, pp. 33–46.

491. White D. I. Epsilon efficiency // J. Optim. Theory Appl.—1986.—V. 49, No. 2.—P. 319–337.

492. Whitfield J. H. M. and Zizler V. E. Extremal structure of convex sets in spaces not containing c_0 // Math. Z.—1988.—V. 197, No. 2.—P. 219–221.

493. Wittmann R. Ein neuer Zugang zu den Hahn–Banach Satzen von Anger und Lembcke // Exposition. Math.—1985.—V. 3, No. 3.—P. 273–278.

494. Wong Y. Ch. and Ng K.-F. Partially Ordered Topological Vector Spaces.—Oxford: Clarendon Press, 1973.—217 p.

495. Wright J. D. M. A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—V. 139.—P. 75–94.

496. Wright J. D. M. Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—V. 19, No. 3.—P. 107–122.

497. Wright J. D. M. Measures with values in a partially ordered vector space // Proc. London Math. Soc. — 1972. — V. 25, No. 3. — P. 675–688.

498. Wright J. D. M. An algebraic characterization of vector lattices with the Borel regularity property // J. London Math. Soc—1973.—V. 7.—P. 277–285.

499. Yongxin L. and Shuzhong S. A Generalization of Ekeland’s ε- and of Borwein–Preiss’ Smooth ε-Variational Principle.—Preprint, 1992.

500. Zaanen A. C. Riesz Spaces. II.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

501. Zagrodny D. Approximate mean value theorem for upper subderivatives // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.—1988.—V. 12, No. 12.—P. 1413–1428.

502. Zalinescu C. The Fenchel–Rockafellar Duality Theory for Mathematical Programming in Order Complete Vector Lattices and

Applications.—Bucureşti, 1980.

503. Zalinescu C. Duality for vectorial nonconvex optimization by convexification and applications // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Sect. I a Mat. (N.S.).—1983.—V. 39, No. 1.—P. 16–34.

504. Zalinescu C. Duality for vectorial convex optimization, conjugate operators and subdifferentials. The continuous case // Mathematische Optimierung. Theorie und Anvendungen, Eisenach.—1984.—P. 135–138.

505. Zowe J. Subdifferentiability of convex functions with values in an ordered vector space // Math. Scand.—1974.—V. 34, No. 1.—P. 69–83.

506. Zowe J. A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—1975.—V. 50, No. 2.—P. 273–287.

507. Zowe J. Linear maps majorized by a sublinear map // Arch. Math.—1975.—V. 36.—P. 637–645.

508. Zowe J. The saddle point theorem of Kuhn and Tucker in ordered vector spaces // J. Math. Anal. Appl.—1977.—V. 57, No. 1.—P. 41–55.

509. Zowe J. Sandwich theorems for convex operators with values in an ordered vector space // J. Math. Anal. Appl.—1978.—V. 66, No. 2.—P. 282–296.

Авторский указатель

Указатель обозначений

Предметный указатель

Кусраев Анатолий Георгиевич
Кутателадзе Семён Самсонович

Субдифференциалы
Теория и приложения
Часть 1

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX, разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX, the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 19.09.02. Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,3. Уч.-изд. л. 21. Тираж 300 экз. Заказ № 65.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.