УДК 517.11+517.98
ББК 22.162
К94

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 2. — 2-е изд., перераб. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. — viii+413 с.

ISBN 5–86134–116–8 (ч. 2).
ISBN 5–86134–111–7.

В монографии изложены основные результаты нового раздела функционального анализа — субдифференциального исчисления. Широко представлен новейший инструментарий этой области: техника пространств Канторовича, методы булевозначного и инфинитезимального анализа. Наряду с аналитическими вопросами большое место уделено технике вывода критериев оптимальности для выпуклых экстремальных задач, включая важные для приложений вопросы характеризации приближений к оптимальным решениям и значениям.

Первое издание вышло в 1992 г. в Сибирском отделении издательства «Наука». В 1995 г. издательсто Kluwer Academic Publishers выпустило в свет расширенный перевод книги, который и стал основой для настоящего издания.

Книга предназначена для математиков, интересуюшихся современным аппаратом негладкого анализа и его приложениями.

Библиогр. 593.

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

К $\frac{1602080000–03}{Я82(03)–03}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–116–8 (ч. 2)
ISBN 5–86134–111–7

© Кусраев А. Г.,
Кутателадзе С. С., 2003

© Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН, 2003

Содержание

Предисловие

Предмет настоящей книги — *субдифференциальное исчисление*. Главный источник этого раздела функционального анализа — теория экстремальных задач.

Поясним происхождение и постановку основных проблем субдифференциального исчисления. Для этого рассмотрим абстрактную задачу минимизации в виде

$$x \in X, \quad f(x) \to \inf .$$

Здесь X — некоторое векторное пространство, а $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — числовая функция, принимающая, быть может, бесконечные значения. Как обычно, в подобных обстоятельствах нас интересуют величина $\inf f(X)$ — *значение* задачи — и ее *решения* или *оптимальные планы*, иначе говоря, те $\bar{x} \in X$, для которых $f(\bar{x}) = \inf f(X)$ (если они существуют).

Решить задачу «в явном виде», т. е. предъявить значение и решение, удается крайне редко. В этой связи возникает необходимость упрощения исходной задачи, ее сведения к более обозримым модификациям, формулируемым с учетом деталей строения целевой функции f. Обычная гипотеза, принимаемая при поиске теоретических подходов к искомой редукции, состоит в следующем. Вводя дополнительную функцию l, рассматривают задачу:

$$x \in X, \quad f(x) - l(x) \to \inf .$$

При этом новая задача считается столь же сложной, как и исходная, при условии, что l — линейный функционал на X, т. е. элемент *алгебраически сопряженного* пространства $X^{\#}$. Содержательная обоснованность этой естественно-научной гипотезы представляется весьма высокой.

Таким образом, исходная задача минимизации функции f включается, как это характерно для «социологического» подхода функционального анализа, в параметрическое семейство вариантов этой же задачи. Иначе говоря, теоретический анализ принято начинать, считая изначально известным отображение $f^* : X^\# \to \overline{\mathbb{R}}$, определенное соотношением

$$f^*(l) := \sup_{x \in X} (l(x) - f(x)).$$

Введенную функцию f^* называют *преобразованием Юнга — Фенхеля* функции f. Заметим, что величина $-f^*(0)$ представляет собой значение первоначальной экстремальной задачи.

Описанная процедура сводит интересующую нас проблему к задаче о замене переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля, т. е. о вычислении агрегата $(f \circ G)^*$, где $G : Y \to X$ — некоторый оператор, действующий из Y в X.

Подчеркнем, что f^* — это выпуклая функция переменной l. Уже это обстоятельство подсказывает, что наиболее полные результаты в избранном направлении следует ожидать в принципиальном случае выпуклости исходной функции f. В самом деле, в этой ситуации, определяя *субдифференциал* f *в точке* $\bar{x}$ соотношением

$$\partial f(\bar{x}) := \{l \in X^\# : (\forall x \in X)\ l(x) - l(\bar{x}) \leqslant f(x) - f(\bar{x})\} =$$
$$= \{l \in X^\# : l(\bar{x}) = f(\bar{x}) + f^*(l)\},$$

мы видим следующее. Точка $\bar{x}$ — решение исходной задачи минимизации в том и только в том случае, если выполнен *критерий оптимальности Ферма*:

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Стоит отметить, что от приведенного критерия Ферма мало прока, если нет достаточно эффективных средств вычисления субдифференциала $\partial f(\bar{x})$. Иначе говоря, мы приходим к вопросу о нахождении правил для вычисления субдифференциалов сложных отображений $\partial(f \circ G)(\bar{y})$. При этом адекватное осмысление G как выпуклого отображения требует наличия в X структуры упорядоченного векторного пространства. Например, представление суммы выпуклых функций в виде композиции линейного и выпуклого операторов:

$$f_1 + f_2 = + \circ (f_1, f_2);$$
$$(f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2, \quad (f_1, f_2)(x) := (f_1(x), f_2(x)),$$

предполагает введение в $\mathbb{R}^2$ покоординатного сравнения векторов.

Таким образом, мы с необходимостью приходим к операторам, действующим в упорядоченные векторные пространства. Среди проблем, возникающих на указанном пути, центральные места занимают задачи обнаружения явных правил для вычисления преобразований Юнга — Фенхеля или субдифференциалов сложных отображений. Решение названных проблем и составляет основной предмет субдифференциального исчисления.

Важнейший случай выпуклых операторов представляется разработанным уже столь тщательно, что можно говорить о завершении определенного этапа теории субдифференциалов. Исследования настоящего времени ведутся главным образом в направлениях, связанных с поиском подходящих локальных аппроксимаций к произвольному не обязательно выпуклому оператору. Наиболее принципиальной представляется техника, основанная на концепции касательного конуса Ф. Кларка, которая была распространена Р. Т. Рокафелларом на случай общих отображений. Однако до состояния совершенства еще далеко. Все же стоит отметить, что основные технические приемы здесь также существенно опираются на субдифференциалы выпуклых операторов.

В этой связи основной объем мы отвели для выпуклого случая, оставив почти малоисследованной огромную территорию негладкого анализа. Повсюду остались зияющие пустоты. Слабым оправданием для нас может служить немалое количество прекрасных недавних книг, посвященных болевым точкам негладкого анализа. Запас технических приемов теории субдифференциалов весьма полон. Среди них принципы функционального анализа, методы теории упорядоченных векторных пространств, теория меры и тому подобное.

Многие задачи субдифференциального исчисления и негладкого анализа были решены в последние годы с помощью нестандартных методов математического анализа (в своих инфинитезимальной и булевозначной версиях). Работая над книгой, мы имели в виду намерение (и потребность) сделать новые идеи и методы доступными для широкого круга читателей. Рамки любой (в том числе и этой) книги слишком узки для свободного и независимого изложения всех необходимых фактов из перечисленных выше дисциплин. По этой причине мы выбрали компромиссный путь частичных пояснений. В их отборе мы руководствовались многолетним опытом, почерпнутым из лекционных курсов, прочитанных в Новосибирском и Владикавказском государственных университетах.

Еще одно обстоятельство требует явного разъяснения, именно, присутствие слова «приложения» в заголовке книги. Формально говоря, оно подразумевает многие применения теории субдифференцирования, получившие достаточное освещение в книге. В качестве таковых можно упомянуть вычисление составных преобразований Юнга — Фенхеля, обоснование принципа Лагранжа и вывод критериев оптимальности в задачах векторной оптимизации. Однако гораздо больше тем остались незатронутыми и заголовок отражает наши первоначальные намерения и фантазии, доставляя также известный вызов для будущих исследований.

Первый вариант этой книги появился в 1987 году под названием «Субдифференциальное исчисление». В 1992 году Сибирское отделение издательства «Наука» опубликовало переработанное издание, перевод которого на английский язык, осуществленный в 1995 году издательством Kluwer Academic Publishers, был в свою очередь модернизирован и значительно расширен по сравнению с русским оригиналом. Обновленный и дополненный вариант английского издания стал основой нынешней публикации.

При завершении работы над монографией по предложению издательства мы приняли решение о публикации книги в двух частях. Деление было осуществлено механически объявлением четвертой главы началом второй части книги. Каждая из частей снабжена собственными указателями и содержит общие для всего издания введение и список литературы, а также справочные материалы, делающие изложение менее зависимым от других источников.

В 1986 году один вслед за другим ушли из жизни Леонид Витальевич Канторович и Глеб Павлович Акилов, научившие нас функциональному анализу.

В 1999 году не стало Александра Даниловича Александрова, одного из основоположников геометрической теории выпуклых фигур и редактора первого варианта этой книги.

Памяти этих прекрасных людей и замечательных ученых мы посвящаем настоящую книгу с чувством безмерной признательности.

А. Г. Кусраев
С. С. Кутателадзе

Глава 4

Аппарат субдифференциального исчисления

Настоящая глава — кульминация книги. Здесь на основе ранее развитых методов описываются основные формулы субдифференциального исчисления и используемые при их получении технические приемы.

Мы начинаем с вывода правил замены переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля. Затем с их помощью для сложных функций находятся формулы вычисления ε-субдифференциалов, представляющих собой некоторое обобщение понятия субдифференциала, призванное учесть возможность приближенного с точностью до ε решения экстремальных задач. Следует подчеркнуть, что анализ ε-субдифференциалов, превращающихся формально при $\varepsilon = 0$ в обычные субдифференциалы, имеет свои особенности и тонкости. Остальные технические разъяснения будут даны в нужных местах. Сейчас достаточно отметить, что соответствующие различия, вообще говоря, связаны с тем, что элемент нуль мал в любом сколь-либо разумном смысле, а «*малое* ε» может обозначать весьма значительную невязку.

При изучении преобразования Юнга — Фенхеля встает вопрос об его инволютивности. На языке экстремальных задач речь в этом случае идет об условиях разрыва двойственности. Ввиду большой идейной и практической значимости названной проблемы мы обсуждаем несколько подходов и вариантов ее анализа.

Чрезвычайно важен вопрос о справедливости аналогов классического «цепного правила» исчисления: субдифференциал суперпозиции равняется суперпозиции субдифференциалов. Ясно, что в общем случае такое правило не выполняется. В то же время при суммировании, интегрировании, взятии конечного супремума аналог цепного правила справедлив. Техника изучения эффектов, управляющих названными явлениями, получила наименование *дезинтегрирование.* Аппарат дезинтегрирования тесно связан с положительными операторами, сохраняющими порядковые отрезки, т. е. удовлетворяющими условию Магарам (с которым мы уже сталкивались). Изучение порядково непрерывных операторов с этим свойством, называемых операторами Магарам, представляет и значительный самостоятельный интерес для общей теории K-пространств.

Всюду ниже под топологическим K-пространством понимается K-пространство, снабженное такой отделимой векторной топологией, что конус положительных элементов нормален. Напомним также, что понятие общего положения было введено только для непустых множеств (см. 3.1.11). Таким образом, в формулировках, содержащих условие общего положения, неявно предполагается непустота рассматриваемых множеств, хотя это часто не оговаривается. В точных формулах замены переменного в преобразовании Юнга — Фенхеля мы систематически используем знак $\rightleftharpoons$ вместо $=$. Как и в 3.4.4, знак $\rightleftharpoons$ означает равенство с тем дополнительным условием, что достигается точная (как правило, нижняя) граница в стоящем справа от него выражении.

4.1. Преобразование Юнга — Фенхеля

Текущий параграф посвящен правилам вычисления преобразований Юнга — Фенхеля составных выпуклых операторов.

4.1.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, E — топологическое K-пространство и $f : X \to \bar{E}$. *Преобразованием Юнга — Фенхеля* f или *сопряженным* к f называют оператор $f^* : \mathscr{L}(X, E) \to \bar{E}$, определенный соотношением

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) : x \in X\} \quad (T \in \mathscr{L}(X, E)).$$

С этим преобразованием мы сталкивались и ранее (см. 3.4.5). Повторяя указанную процедуру, с оператором f можно связать его *второе преобразование Юнга — Фенхеля — второй сопряженный оператор* f^{**}. Этот оператор для $x \in X$ определяется формулой

$$f^{**}(x) = \sup\{Tx - f^*(T) : T \in \mathscr{L}(X, E)\}.$$

С очевидными оговорками x можно рассматривать как элемент пространства $\mathscr{L}(\mathscr{L}(X,E),E)$ (точнее, $L(\mathscr{L}(X,E),E)$), если отождествить точку x из X с «δ-функцией» $\hat{x} : T \to Tx$ для $T \in \mathscr{L}(X,E)$. С точностью до указанного отождествления второе преобразование Юнга — Фенхеля f^{**} можно рассматривать как сужение повторного преобразования Юнга — Фенхеля $(f^*)^* : \mathscr{L}(\mathscr{L}(X,E),E) \to \bar{E}$ на пространство X.

Напомним, что для фиксированных $e \in E$ и $T \in \mathscr{L}(X,E)$ вводится оператор из X в E, действующий по формуле $T^e : x \mapsto Tx + e$ и называемый *аффинным.* Если $T^e x \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$ (в дальнейшем в таких ситуациях мы будем писать сокращенно: $T^e \leqslant f$), то T^e называют *аффинной минорантой* или *аффинным опорным* к f.

В соответствии с соглашениями из 3.2.3 мы будем отождествлять пространства $\mathscr{L}(X_1,E) \times \mathscr{L}(X_2,E)$ и $\mathscr{L}(X_1 \times X_2,E)$ путем сопоставления операторам $T_1 \in \mathscr{L}(X_1,E)$ и $T_2 \in \mathscr{L}(X_2,E)$ оператора $(T_1,T_2) \in \mathscr{L}(X_1 \times X_2,E)$, действующего по правилу:

$$(T_1,T_2)(x_1,x_2) := T_1x_1 - T_2x_2 \quad (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2).$$

4.1.2. *Для оператора $f : X \to \bar{E}$ справедливы утверждения:*

(1) *операторы f^* и f^{**} выпуклы;*

(2) *для $x \in X$ и $T \in \mathscr{L}(X,E)$ имеет место неравенство Юнга — Фенхеля $Tx \leqslant f(x) + f^*(T)$;*

(3) *аффинный оператор T^e является минорантой f в том и только в том случае, если $(T,-e) \in \mathrm{epi}(f^*)$;*

(4) *$f^{**} \leqslant f$, причем $f^{**} = f$ в том и только в том случае, если f представляет собой верхнюю огибающую (= поточечную точную верхнюю границу) некоторого семейства непрерывных аффинных операторов;*

(5) *если $f \leqslant g$, то $f^* \geqslant g^*$ и $f^{**} \leqslant g^{**}$;*

(6) *если $f^*(T) = -\infty$ хотя бы для одного $T \in \mathscr{L}(X,E)$, то $f \equiv +\infty$, и в этом случае $f^* \equiv -\infty$.*

$\triangleleft$ (1): Если $f^* \equiv +\infty$ или $f^{**} \equiv +\infty$, то выпуклость f^* или соответственно f^{**} не вызывает сомнений. Поэтому мы будем считать, что $f^* \not\equiv +\infty$ и $f^{**} \not\equiv +\infty$, т. е. $\mathrm{epi}(f^*)$ и $\mathrm{epi}(f^{**})$ — непустые множества. Для $x \in X$ и $T \in \mathscr{L}(X,E)$ положим по определению

$$l_x : S \mapsto Sx - f(x) \quad (S \in \mathscr{L}(X,E)),$$
$$l_T : y \mapsto Ty - f^*(T) \quad (y \in X).$$

Тогда, как без труда проверяется, l_T и l_y — линейные операторы и

$$\operatorname{epi}(f^*) = \bigcap \{\operatorname{epi}(l_x) :\ f(x) \in E\},$$
$$\operatorname{epi}(f^{**}) = \bigcap \{\operatorname{epi}(l_T) :\ f^*(T) \in E\}.$$

Указанные представления поясняют выпуклость f^* и f^{**}.

(2): Как видно из определений, если $f^*(T) = -\infty$, то $f \equiv +\infty$, а при $f(x) = -\infty$ будет $f^* \equiv +\infty$. В каждом из этих случаев неравенство Юнга — Фенхеля бесспорно. Если же $f^*(T) \neq -\infty \neq f(x)$, то указанное неравенство очевидно.

(3): Включение $(T, -e) \in \operatorname{epi}(f^*)$ означает, что $-e \geqslant c := f^*(T)$, значит, в силу неравенства Юнга — Фенхеля будет $T^e \leqslant T^{-c} \leqslant f$. Если же $T^e \leqslant f$, то $Tx - f(x) \leqslant -e$ $(x \in X)$, т. е. $f^*(T) \leqslant -e$.

(4): Если $f^*(T) \in E$, то $\operatorname{epi}(l_T) \supset \operatorname{epi}(f)$ и в силу указанного выше представления для $\operatorname{epi}(f^{**})$ видим, что $\operatorname{epi}(f^{**}) \supset \operatorname{epi}(f)$, т. е. $(f^{**}) \leqslant f$. Допустим теперь, что $(f^{**}) = f \not\equiv +\infty$. Несомненно, что в этом случае $f = \sup\{l_T : f^*(T) \in E\}$. Пусть $f = \sup\{T^e : T^e \leqslant f\}$. Если $T^e \leqslant f$, то $f^*(T) \leqslant -e$ и, следовательно, $f^{**}(x) \geqslant Tx - f^*(T) \geqslant T^e$ для $x \in X$. Итак, $f^{**} \geqslant \sup\{T^e : T^e \leqslant f\} = f$. Случай $f \equiv +\infty$ тривиален.

(5): Неравенства $f^* \geqslant g^*$ и $f^{**} \leqslant g^{**}$ при условии, что $f \leqslant g$, вытекают из представлений надграфиков из (1) соответствующих преобразований Юнга — Фенхеля.

(6): Если $f^*(T) = -\infty$, то по определению f^* будет $Tx' - f(x') = -\infty$ для всех $x' \in X$. Но это означает, что f тождественно равен $+\infty$, что влечет, в свою очередь, $f^*(T) = -\infty$ для любого $T \in \mathscr{L}(X, E)$. $\triangleright$

4.1.3. При исследовании преобразований Юнга — Фенхеля, как уже отмечалось, возникают две основные проблемы. Первая состоит в нахождении явных формул для вычисления преобразования Юнга — Фенхеля при замене переменной. Вторая заключается в поиске обозримых условий его инволютивности. Как станет ясно из дальнейшего, указанные проблемы мотивированы теорией экстремальных задач. Более того, их решения легко применять к таким классическим вопросам, как обоснование справедливости принципа Лагранжа, нахождение признаков решений экстремальных задач и выяснение условий справедливости критериев оптимальности для пар двойственных задач.

Займемся проблемой замены переменной. Для этого, прежде всего, с произвольным множеством C в X и K-пространством E свяжем *E-значную опорную функцию* C (ср. 3.3.8), т. е. отображение C^*, действующее на оператор S на $\mathscr{L}(X,E)$ по правилу

$$C^*(S) = \delta_E(C)^*(S) = \sup\{Sx : \ x \in C\}.$$

Отметим простые связи между опорной функцией надграфика отображения и его преобразованием Юнга — Фенхеля.

Пусть f — выпуклый оператор из X в $\bar{F}$, где F — упорядоченное топологическое векторное пространство. Пусть, далее, $T \in \mathscr{L}(X,F)$ и $S \in \mathscr{L}(F,E)$. Тогда справедливы утверждения:

(1) $(T,S) \in \operatorname{dom}((\operatorname{epi}(f))^*)$ *в том и только в том случае, когда* $S \geqslant 0$ *и* $T \in \operatorname{dom}((S \circ f)^*)$*;*

(2) *если* $S \geqslant 0$*, то имеет место равенство*

$$(\operatorname{epi}(f))^*(T,S) = (S \circ f)^*(T).$$

$\lhd$ Предположим, что $\operatorname{epi}(f) \neq \varnothing$, ибо в противном случае доказывать нечего. Если $c \in F^+$, $S \in \mathscr{L}(F,E)$ и $T \in \mathscr{L}(X,F)$, то для любых $(x,y) \in \operatorname{epi}(f)$ будет $(x,\ y+c) \in \operatorname{epi}(f)$. Иначе говоря, $-Sc + Tx - Sy = Ty - S(y+c) \leqslant (\operatorname{epi}(f))^*(T,S)$. Допуская, что правая часть этого неравенства конечна, нетрудно убедиться, переходя к точной верхней границе по $(x,y) \in \operatorname{epi}(f)$, что $-Sc \leqslant 0$. В силу произвольности $c \geqslant 0$ отсюда выводим, что $S \geqslant 0$. С другой стороны, если в указанном соотношении сначала перейти к точной верхней границе по $y \in (\operatorname{epi}(f))(x)$, полагая $e := 0$, а затем к точной верхней границе по $x \in \operatorname{dom}(f)$, то будет $(S \circ f)^*(T) \leqslant (\operatorname{epi}(f))^*(T,S)$. Последнее означает, что $T \in \operatorname{dom}((S \circ f)^*)$. Кроме того, при $S \geqslant 0$ очевидно выполняется:

$$\operatorname{epi}(f)^*(T,S) = \sup\{Tx - Se : \ (x,e) \in \operatorname{epi}(f)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\{Tx - S \circ f(x) : \ x \in X\} = (S \circ f)^*(T).$$

Установленные только что два неравенства обеспечивают требуемое для (1) и (2). $\rhd$

(3) *Если* Φ *— непустое выпуклое соответствие из* X *в* E *и* $f := \inf \circ \Phi$*, то* $f^*(T) = \Phi^*(T, I_E)$ *для любого* $T \in \mathscr{L}(X,E)$*.*

$\lhd$ Непосредственно из определений оператора (1.3.5) и преобразования Юнга — Фенхеля (4.1.1) выводим:

$$\begin{aligned} f^*(T) &= \sup\{Tx - \inf\{e \in E : e \in \Phi(x)\} : x \in X\} = \\ &= \sup\{Tx - e : x \in X,\, e \in E\, (x,e) \in \Phi\} = \\ &= \sup\{(T, I_E)(x,e) : (x,e) \in \Phi\} = \\ &= \Phi^*(T, I_E). \end{aligned}$$

Тем самым доказательство завершено. $\rhd$

(4) *Справедливы соотношения:*

$$\operatorname{epi}(f)^*(T, I_E) = f^*(T), \quad \operatorname{epi}(f)^*(T, 0) = \operatorname{dom}(f)^*(T).$$

$\lhd$ Если $\Phi := \operatorname{epi}(f)$, то $f = \inf \circ \Phi$ и первая формула следует из (3). Вторая формула — очевидное следствие первой. $\rhd$

(5) *Для сублинейного оператора $f := P : X \to \bar{E}$ справедливы соотношения:*

$$(P)^* = \delta_E(\pi P), \quad \operatorname{dom}(P^*) = \pi P.$$

$\lhd$ В самом деле, если $S \in \partial P$, то $Sx - P(x) \leqslant 0$ для всех $x \in X$ и $(S - P)(0) = 0$, поэтому $P^*(S) = 0$. Если же $Sx \nleqslant P(x)$, то последовательность $(S - P)(nx)$ не ограничена сверху, стало быть, $P^*(S) = +\infty$. $\rhd$

4.1.4. *Теорема.* *Пусть X и Y — топологические векторные пространства и $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — непустые выпуклые соответствия из X в Y такие, что множества $\sigma_n\left(\prod_{l=1}^n \Phi_l\right)$ и $\Delta_n(X) \times Y^n$ находятся в общем положении. Тогда для любого $T \in \mathscr{L}(Y, E)$ имеет место точная формула*

$$(\Phi_1 \dot{+} \dots \dot{+} \Phi_n)^*\ (\cdot, T)\ \rightleftharpoons \Phi_1^*(\cdot, T) \oplus \dots \oplus \Phi_n^*(\cdot, T).$$

Точность формулы означает, что конволюция в правой части точная, т. е. для каждого $S \in \mathscr{L}\,(X, E)$ такого, что

$$(S, T) \in \operatorname{dom}((\Phi_1 \dot{+} \dots \dot{+} \Phi)^*),$$

существуют линейные непрерывные операторы $S_1, \dots, S_n$ *из* X *в* E, *для которых*

$$(\Phi\dot{+} \dots \dot{+}\Phi_n)^* (S, T) = \Phi_1^* (S_1, T) + \dots + \Phi_n^* (S_n, T),$$
$$S = S_1 + \dots + S_n.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим $T \in \mathscr{L}(Y, E)$ и $S_1, \dots, S_n \in \mathscr{L}(X, E)$. Если $\Phi := \Phi_1\dot{+} \dots \dot{+}\Phi_n$ и $S := S_1 + \dots + S_n$, то

$$\begin{aligned}\Phi^* (S, T) &= \sup \{S_1 x + \dots + S_n x - Ty : \ (x, y) \in \Phi\} = \\ &= \sup \left\{ \sum_{l=1}^{n} (S_l x - T y_l) : \ (x, y_l) \in \Phi_l, \ y = \sum_{l=1}^{n} y_l \right\} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l=1}^{n} \sup \{S_l x - T y_l) : \ (x, y_l) \in \Phi_l\} = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \Phi_l^* (S_l, T).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, в частности, что при $\Phi^* (S, T) = +\infty$ доказываемое равенство справедливо. Пусть $(S, T) \in \operatorname{dom}(\Phi^*)$ и $e := \Phi^*(S, T)$. Ясно, что $\operatorname{dom}(\Phi_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(\Phi_n) \neq \varnothing$, а потому $e > -\infty$. Рассмотрим оператор $\mathscr{A}$, действующий из $X \times \mathbb{R}$ в E по правилу $\mathscr{A}(x, t) := Sx - te$. Легко видеть, что $(\mathscr{A}, T) \in \pi_E (\sigma_3(H(\Phi)))$, где σ_3 — перестановка координат, устанавливающая изоморфизм пространств $X \times Y \times \mathbb{R}$ и $X \times \mathbb{R} \times Y$. Отметим, что

$$\sigma_3 (H(\Phi)) = \sigma_3(H(\Phi_1))\dot{+} \dots \dot{+}\sigma_3 (H(\Phi_n)).$$

При этом в силу условий теоремы конусы $\sigma_n \left(\prod_{l=1}^{n} \sigma_3 (H(\Phi_l))\right)$ и $\Delta_n (X \times \mathbb{R}) \times Y^n$, где σ_n — подходящая перестановка координат в $(X \times \mathbb{R} \times Y)^n$, находятся в общем положении. В силу теоремы 3.2.7 существуют линейные непрерывные операторы $\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$ из $X \times \mathbb{R}$ в E такие, что $\mathscr{A} = \sum_{l=1}^{n} \mathscr{A}_l$ и $(\mathscr{A}_l, T) \in \pi_E (\sigma_3 (H(\Phi)))$ $(l := 1, 2, \dots, n)$. Отсюда вытекает, что для $S_l := \mathscr{A}_l (\cdot, 0)$ и $e_l := \mathscr{A}(0, 1)$ $(l := 1, \dots, n)$ будет $S = S_1 + \dots + S_n$, $e = e_1 + \dots + e_n$, кроме того, $\Phi_l^* (S_l, T) \leqslant e_l$ при всех l. Итак, $\Phi^* (S, T) = e = e_1 + \dots + e_n \geqslant \Phi_1^* (S_1, T) + \dots + \Phi_n^* (S_n, T)$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

4.1.5. Из теоремы 4.1.4 вытекают следующие следствия:

(1) *Пусть выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to \bar{E}$ не равны тождественно $+\infty$ и находятся в общем положении. Тогда справедлива точная формула*

$$(f_1 + \dots + f_n)^* \rightleftharpoons f_1^* \oplus \dots \oplus f_n^*.$$

$\triangleleft$ Доказательство получается совместным применением теоремы 4.1.4 и предложения 4.1.3 (2) к $\operatorname{epi}(f_1), \dots, \operatorname{epi}(f_n)$, поскольку

$$\operatorname{epi}(f_1 + \dots + f_n) = \operatorname{epi}(f_1) \dotplus \dots \dotplus \operatorname{epi}(f_n). \ \triangleright$$

(2) *Если непустые выпуклые множества $C_1, \dots, C_n$ находятся в общем положении, то справедлива точная формула*

$$(C_1 \cap \dots \cap C_n)^* \rightleftharpoons C_1^* \oplus \dots \oplus C_n^*.$$

$\triangleleft$ Нужно применить (1) к операторам $\delta_E(C_l)$ $(l := 1, \dots, n)$. $\triangleright$

(3) *Пусть пространство F является векторной решеткой, $S \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $f_1, \dots, f_n : X \to F^\bullet$ — выпуклые операторы. Если надграфики $\operatorname{epi}(f_1), \dots, \operatorname{epi}(f_n)$ непусты и находятся в общем положении, то имеет место точная формула*

$$(S \circ (f_1 \vee \dots \vee f_n))^* \rightleftharpoons \inf \left\{ \bigoplus_{l=1}^n (S_l \circ f_l)^* : \ S_l \in \mathscr{L}^+(F, E), \ \sum_{i=1}^n S_l = S \right\}.$$

$\triangleleft$ По следствию (2) и предложению 4.1.3 (2) для любого $T \in \mathscr{L}(X, E)$ будет

$$(S \circ (f_1 \vee \dots \vee f_n))^*(T) = (\operatorname{epi}(f_1 \vee \dots \vee f_n))^*(T, S) =$$

$$= (\operatorname{epi}(f_1) \cap \dots \cap \operatorname{epi}(f_n))^*(T, S) = (\operatorname{epi}(f_1)^* \oplus \dots \oplus \operatorname{epi}(f)^*)(T, S);$$

причем последняя конволюция точная. Отсюда, привлекая вновь предложение 4.1.3 (2), немедленно получаем требуемое. $\triangleright$

4.1.6. *Теорема о сэндвиче для соответствий.* *Пусть непустые выпуклые соответствия $\Phi \subset X \times F$ и $\Psi \subset X \times F$ удовлетворяют условиям:*

(1) *множества $\sigma_2\,(\Phi \times \Psi^-)$ и $\Delta_2\,(X) \times E^2$ находятся в общем положении ($\Psi^- := \{(x, y) \in X \times F : \ -y \in \Psi\,(x)\}$);*

(2) *для любого $x \in X$ из $d \in \Phi\,(x)$ и $c \in \Psi\,(x)$ следует $c \leqslant d$.*

Тогда для всякого непрерывного положительного оператора S из F в E существуют элемент $e \in E$ и линейный непрерывный оператор T из X в E такие, что

$$Tx - Sc \leqslant e \leqslant Ty + Sd$$

для всех $(x, c) \in \Psi$ и $(y, d) \in \Phi$.

◁ Действительно, из условия (2) вытекает, что $F^+ \supset \Phi\,(x) + \Psi^-(x)$ для всех $x \in X$. Следовательно, $(\Phi \dotplus \Psi^-)^*\,(0, -S) \leqslant 0$ для произвольного $S \in \mathscr{L}^+(F, E)$. В силу условия (1) можно применить теорему 4.1.4. Стало быть, существуют операторы T_1 и T_2 из $\mathscr{L}\,(X, E)$, для которых

$$T_1 + T_2 = 0,$$
$$\Phi^*(T_1, -S) + (\Psi^-)^*(T_2, -S) \leqslant 0.$$

Отметим, что величины $\Phi^*(T_1, -S)$ и $(\Psi^-)^*(T_2, -S)$ конечны и, кроме того, $(\Psi^-)^*(T_2, -S) = \Psi^*(T_2, S)$. Если теперь $T := T_2 = -T_1$ и элемент $e \in E$ удовлетворяет неравенствам

$$\Psi^*(T, S) \leqslant e \leqslant -\Phi^*(-T, S),$$

то T и e — искомые объекты. ▷

4.1.7. *Теорема о сэндвиче для выпуклых операторов.* *Допустим, что $f, g : X \to \bar{E}$ — выпуклые операторы, не равные тождественно $+\infty$, и при этом*

(1) *f и g находятся в общем положении;*

(2) *$f(x) + g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$.*

Тогда существуют элемент $e \in E$ и линейный непрерывный оператор T из X в E такие, что

$$-g(x) \leqslant Tx + e \leqslant f(x) \quad (x \in X).$$

◁ Нужно лишь применить 4.1.6 к соответствиям $\Phi := \mathrm{epi}(f)$ и $\Psi := \mathrm{epi}(g)$. ▷

4.1.8. Теорема. *Пусть X, Y и Z — топологические векторные пространства, E — топологическое K-пространство. Пусть, далее, $f_1 : X \times Y \to \bar{E}$ и $f_2 : Y \times Z \to \bar{E}$ — выпуклые операторы, не равные тождественно $+\infty$. Если множества $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ и $\operatorname{epi}(X, f_2)$ находятся в общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* \ \rightleftharpoons f_2^* \vartriangle f_1^*,$$

т. е. для $(T_1, T_2) \in \operatorname{dom}((f_1 \vartriangle f_2)^*)$ существует непрерывный линейный оператор T из Y в E такой, что

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* (T_1, T_2) = f_1^* (T_1, T) + f_2^* (T, T_2).$$

$\lhd$ Пусть $W := X \times Y \times Z$. Определим операторы g_1, $g_2 :\ W \to \bar{E}$ и $\Lambda :\ W \to X \times Z$ следующими соотношениями:

$$g_1 :\ (x, y, z) \mapsto f_1 (x, y),$$
$$g_2 :\ (x, y, z) \mapsto f_2 (y, z),$$
$$\Lambda :\ (x, y, z) \mapsto (x, z).$$

Тогда для произвольных $T_1 \in \mathscr{L}(X, E)$ и $T_2 \in \mathscr{L}(Z, E)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &(f_2 \vartriangle f_1)^*(T_1,\, T_2) = \\ &= \sup_{(x,z) \in X \times Z} (T_1 x - T_2 z) - \inf_{y \in Y} (f_1(x, y) + f_2(y, z)) = \\ &= \sup_{w := (x,y,z) \in X \times Y \times Z} ((T_1,\, T_2) \circ \Lambda w - (g_1 + g_2)(w)) = \\ &= (g_1 + g_2)^*((T_1,\, T_2) \circ \Lambda). \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{epi}(g_1) = \operatorname{epi}(f_1,\, Z)$ и $\operatorname{epi}(g_2) = \operatorname{epi}(X,\, f_2)$, то выполнены условия следствия 4.1.5 (1). Таким образом,

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* (T_1,\, T_2) = g_1^* \oplus g_2^*((T_1,\, T_2) \circ \Lambda);$$

причем конволюция в правой части этой формулы точная. Заметим, далее, что

$$g_1^*(T_1, T, T_2) = \begin{cases} f_1^*(T_1, T), & \text{если } T_2 = 0, \\ +\infty, & \text{если } T_2 \neq 0; \end{cases}$$

$$g_2^*(T_1, T, T_2) = \begin{cases} f_2^*(T, T_2), & \text{если } T_1 = 0, \\ +\infty, & \text{если } T_1 \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в конволюцию $g_1^* \oplus g_2^*$ и учитывая вид оператора Λ, приходим к требуемому. $\rhd$

4.1.9. Из теоремы 4.1.8 можно извлечь различные следствия о вычислении преобразования Юнга — Фенхеля составного отображения. Отметим сначала группу следствий, связанных с суперпозицией соответствий и отображений.

(1) *Пусть $\Gamma \subset X \times Y$ и $\Delta \subset Y \times Z$ — непустые выпуклые соответствия такие, что множества $\Gamma \times Z$ и $X \times \Delta$ находятся в общем положении. Тогда выполняется точная формула*

$$(\Delta \circ \Gamma)^* = \Delta^* \vartriangle \Gamma^*.$$

Точность формулы означает, что для любых $T_1 \in \mathscr{L}(X, E)$ и $T_2 \in \mathscr{L}(Z, E)$ найдется линейный непрерывный оператор $T \in \mathscr{L}(Y, E)$, обеспечивающий справедливость соотношения

$$\sup_{(x,z)\in\Delta\circ\Gamma}(T_1x - T_2z) = \sup_{(x,y)\in\Gamma}(T_1x - Ty) + \sup_{(y,z)\in\Delta}(Ty - T_2z).$$

$\lhd$ Для доказательства нужно применить теорему 4.1.8 к операторам $f_1 := \delta_E(\Gamma)$ и $f_2 := \delta_E(\Delta)$ и воспользоваться соотношениями $f_2 \vartriangle f_1 = \delta_E(\Delta \circ \Gamma)$, $\operatorname{epi}(f_1, Z) = \Gamma \times Z \times E^+$, $\operatorname{epi}(X, f_2) = X \times \Delta \times E^+$. $\rhd$

(2) *Пусть F — упорядоченное топологическое векторное пространство, $f : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор и $g : F \to E^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $\operatorname{epi}(f) \times E$ и $X \times \operatorname{epi}(g)$ находятся в общем положении, то для любого $T \in \mathscr{L}(X, E)$ имеет место точная формула*

$$(g \circ f)^*(T) \ \rightleftharpoons \inf\{(S \circ f)^*(T) + g^*(S) :\ S \in \mathscr{L}^+(F, E)\}.$$

$\lhd$ По определению композиции $\operatorname{epi}(g \circ f) = \operatorname{epi}(g) \circ \operatorname{epi}(f)$. В наших допущениях можно применить (1). Следовательно, $(\operatorname{epi}(g \circ f))^* = \operatorname{epi}(g)^* \vartriangle \operatorname{epi}(f)^*$, причем свертка в правой части точная. С учетом 4.1.3 (2) последнее можно переписать в виде

$$(g \circ f)^*(T) \ \rightleftharpoons \inf\{\operatorname{epi}(f)^*(T, S) + g^*(S) :\ S \in \mathscr{L}(F, E)\}.$$

При вычислении инфимума в правой части можно ограничиться положительными S и, вновь привлекая 4.1.3 (2), получим требуемую точную формулу. $\rhd$

(3) *Если выполнены все условия предложения* (2) *и, сверх того,* $g := P$ *— сублинейный оператор, то для каждого* $T \in \mathscr{L}(X, E)$ *верна точная формула*

$$(P \circ f)^*(T) \ \rightleftharpoons \inf\{\,(S \circ f)^*(T) : \ S \in \partial P\}.$$

$\lhd$ Это частный случай формулы (2), так как для сублинейного $g := P$ верно $P^*(S) < +\infty$ в том и только в том случае, когда $S \in \partial P$. $\rhd$

(4) *Пусть* Y *— еще одно топологическое векторное пространство и заданы выпуклый оператор* $f : X \to E^{\bullet}$*, оператор* $S \in \mathscr{L}(Y, X)$ *и точка* $x \in X$*. Пусть* $\mathrm{gr}(S^x) := \{(y, S^x y) : y \in Y\}$ *и множества* $\mathrm{gr}(S^{\,x}) \times E$ *и* $Y \times \mathrm{epi}(f)$ *находятся в общем положении. Тогда для каждого* $T \in \mathscr{L}(Y, E)$ *имеет место точная формула*

$$(f \circ S^{\,x})^*(T) \ \rightleftharpoons \ \inf\{f^*(U) - Ux : \ U \in \mathscr{L}(X, E), \ T = U \circ S\}.$$

$\lhd$ Как видно, $\mathrm{epi}(f \circ S^x) = \mathrm{epi}(f) \circ \mathrm{gr}(S^x)$. В силу наших допущений можно применить (1). Следовательно, $(\mathrm{epi}(f \circ S^x))^* = \mathrm{epi}(f)^* \vartriangle (\mathrm{gr}(S^x))^*$, причем свертка в правой части точная. В силу 4.1.3 (5) будет

$$\begin{gathered}(\mathrm{gr}(S^x))^*(T, U) = \big(\delta_E\,(\mathrm{gr}(S^x))\big)^*(T, U) = \\ = \sup\{Ty - Uz : \ Sy + x = z\} = \\ = \sup\{Ty - U \circ Sy - Ux : \ y \in Y\} = \\ = -Ux + \sup\{Ty - U \circ Sy : \ y \in Y\}.\end{gathered}$$

Таким образом, $(\mathrm{gr}(S^x))^*(T, U) = 0$, если $T = U \circ S$, и

$$(\mathrm{gr}(S^x))^*(T, U) = +\infty$$

— в противном случае. Отсюда с учетом 4.1.3 (2) выводим:

$$\begin{gathered}(f \circ S^{\,x})^*(T) \rightleftharpoons (\mathrm{epi}(f \circ S^x))^*(T, I_E) = \\ = \inf_{U \in \mathscr{L}(X,E)} \big(\,\mathrm{epi}(f)^*(U, I_E) + (\mathrm{gr}(S^x))^*(T, U)\big) = \\ = \inf\{(f)^*(U) - Ux : \ U \in \mathscr{L}(X, E)\, T = U \circ S\}. \ \rhd\end{gathered}$$

(5) *Пусть* $f:\ X \times Y \to E^{\bullet}$ — *выпуклый оператор,* $y_0 \in Y$ *и* $g : X \to E^{\bullet}$ — *частичный оператор,* $g(x) = f(x, y_0)$ $(x \in X)$. *Если множества* $\operatorname{epi}(f)$ *и* $X \times \{y_0\} \times E$ *находятся в общем положении, то выполняется точная формула*

$$g^*(\cdot) \rightleftharpoons \inf\{f^*(\cdot, T) - Ty_0 :\ T \in \mathscr{L}(Y, E)\}.$$

$\lhd$ Нужно применить (4) к f и аффинному оператору $S:\ X \to X \times Y$, действующему по правилу $x \mapsto (x, y_0)$. $\rhd$

4.1.10. Здесь уместно коротко остановиться на теоремах о векторном минимаксе. Рассмотрим непустые множества A и B, а также отображение $f : A \times B \to \bar{E}$. Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\inf_{x\in A} \sup_{y\in B} f(x, y) \geqslant \sup_{y\in B} \inf_{x\in A} f(x, y).$$

Предположения, утверждающие, что при определенных условиях указанное неравенство является равенством, называют *теоремами о минимаксе* (при $E = \mathbb{R}$) или *теоремами о векторном минимаксе* (при произвольном E). Простые достаточные условия минимакса связаны с понятием седловой точки.

Пару $(a, b) \in A \times B$ называют *седловой точкой* отображения f, если $f(a, y) \leqslant f(a, b) \leqslant f(x, b)$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Если (a, b) — седловая точка отображения f, то будет

$$\inf_{x\in A} \sup_{y\in B} f(x, y) = f(a, b) = \sup_{y\in B} \inf_{x\in A} f(x, y).$$

Приведем еще одну общую теорему о минимаксе, неявно содержащуюся в 4.1.9 (2).

(1) ***Теорема о векторном минимаксе.*** *Допустим, что* f *и* g *удовлетворяют условиям предложения* 4.1.9 (2) *и, кроме того,* $g = g^{**}$. *Тогда для отображения* $h : X \times \mathscr{L}^+(F, E) \to E$, *где* $h(x, \alpha) := \alpha \circ f(x) - g^*(\alpha)$, *верно равенство*

$$\inf_{x\in X} \sup_{\alpha\in\mathscr{L}^+(F,E)} h(x, \alpha) = \sup_{\alpha\in\mathscr{L}^+(F,E)} \inf_{x\in X} h(x, \alpha).$$

$\lhd$ В самом деле, положив $T := 0$ в 4.1.9 (2), заметим, что

$$(g \circ f)^*(0) = -\inf\{(g \circ f)(x) :\ x \in X\} =$$
$$= -\inf_{x\in X} (\sup\{\alpha \circ f(x) - g^*(\alpha) :\ \alpha \in \mathscr{L}^+(F, E)\}).$$

С другой стороны,

$$(\alpha \circ f)^*(0) = -\inf_{x \in X} (\alpha \circ f)(x).$$

Требуемое вытекает теперь из 4.1.9 (2). $\triangleright$

(2) *Если выполняются все условия из* (1) *и, сверх того, оператор g сублинеен, то*

$$\inf_{x \in X} \sup_{\alpha \in \partial g} (\alpha \circ f)(x) = \sup_{\alpha \in \partial g} \inf_{x \in X} (\alpha \circ f)(x).$$

$\triangleleft$ Следует непосредственно из (1), если воспользоваться тем, что для сублинейного $g := P$ будет $\operatorname{dom}(P^*) = \partial P$. $\triangleright$

Именно к последнему утверждению чаще всего относят наименование «*теорема о векторном минимаксе*» (ср. 1.3.10 (5)).

4.1.11. Рассмотрим теперь несколько следствий о вычислениях преобразования Юнга — Фенхеля образов и прообразов.

(1) *Пусть $\Phi \subset X \times Y$ — выпуклое соответствие, а C — выпуклое подмножество Y. Если Φ и $X \times C$ находятся в общем положении, то для каждого $T \in \mathscr{L}(X, E)$ имеет место точная формула*

$$\Phi^{-1}(C)^*(T) \ \rightleftharpoons \inf \{\Phi^*(T, S) + C^*(S) : \ S \in \mathscr{L}(Y, E)\}.$$

$\triangleleft$ К соответствиям Φ и $\Psi := C \times X$ можно применить предложение 4.1.9 (1). При этом $\Phi^{-1}(C)^* = (\Psi \circ \Phi)^*(T, 0)$ и $\Psi^*(S, 0) = C^*(S)$. $\triangleright$

(2) *Если $\Phi \subset X \times Y$ — выпуклое соответствие, причем для некоторого $y \in Y$ множества Φ и $X \times \{y\}$ находятся в общем положении, то для каждого $T \in \mathscr{L}(X, E)$ имеет место точная формула*

$$\Phi^{-1}(y)^*(T) \rightleftharpoons \inf\{\Phi^*(T, S) + Sy : S \in \mathscr{L}(Y, E)\}.$$

$\triangleleft$ Нужно лишь в (1) положить $C := \{y\}$. Эта формула уже отмечалась в 3.5.10. $\triangleright$

(3) *Предположим, что $f : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, а C — выпуклое подмножество F. Если $\operatorname{epi}(f)$ и $X \times C$ находятся* *в общем положении, то для множества* $B := f^{-1}(C - F^+) = \cup\{f \leqslant c\}$ *и оператора* $T \in \mathscr{L}(X, E)$ *верна точная формула*

$$B^*(T) \rightleftharpoons \inf\{(S \circ f)^*(T) + C^*(S) : S \in \mathscr{L}^+(F, E)\}.$$

$\lhd$ К соответствию $\Phi : + \operatorname{epi}(f)$ и выпуклому множеству C можно применить предложение (1). При этом следует иметь в виду, что $\Phi^{-1}(C) = f^{-1}(C - F^+)$, $(C - F^+)^*(S) = C^*(S)$ при $S \geqslant 0$ и $(C - F^+)^*(S) = +\infty$ в противном случае. $\rhd$

(4) *Пусть выпуклый оператор* $f : X \to F^\bullet$ *таков, что* $\operatorname{epi}(f)$ *и* $X \times (-F^+)$ *находятся в общем положении. Тогда для лебегова множества* $\{f \leqslant 0\} := \{x \in X : f(x) \leqslant 0\}$ *справедлива точная формула*

$$\{f \leqslant 0\}^*(T) \rightleftharpoons \inf\{(S \circ f)^*(T) : S \in \mathscr{L}^+(F, E)\}.$$

$\lhd$ Нужно применить (3) к выпуклому множеству $C := -F^+$, заметив при этом, что $(-F^+)^*$ — индикаторный оператор конуса $\mathscr{L}^+(F, E)$. $\rhd$

(5) *Рассмотрим выпуклый оператор* $f : X \times Y \to F^\bullet$ *и выпуклое множество* $C \subset Y$. *Допустим, что* $\operatorname{epi}(f)$ *и* $X \times C \times (-F^+)$ *находятся в общем положении. Тогда для выпуклого соответствия* $\Phi := \{f \leqslant 0\}$ *при каждом* $T \in \mathscr{L}(X, E)$ *верна точная формула*

$$\Phi^{-1}(C)^*(T) \rightleftharpoons \inf\big\{(\alpha \circ f)^*(T, S) + C^*(S) : \\ S \in \mathscr{L}(Y, E),\ \alpha \in \mathscr{L}^+(F, E)\big\}.$$

$\lhd$ Этот факт устанавливается последовательным применением (1) и (4). $\rhd$

4.1.12. (1) Если в 4.1.8 положить $f_1 := f$ и $f_2 := 0$, то получим формулу

$$h^*(T) = f^*(T, 0) \quad (T \in \mathscr{L}(X, E)),$$

где $h(x) = \inf\{f(x, y) : y \in Y\}$.

(2) ***Теорема.*** *Пусть* $h : X \times Y \to E^\bullet$ *и* $g : X \times Y \to F^\bullet$ — *выпуклые операторы и* $\Phi \subset X \times Y$ — *выпуклое соответствие. Положим*

$$f(x) := \inf\{h(x, y) : y \in \Phi(x),\ g(x, y) \leqslant 0\}.$$

При том условии, что в общем положении находятся тройка выпуклых множеств $\operatorname{epi}(h), \Phi \times E^+, \{g \leqslant 0\} \times E^+$, *а также пара* $\operatorname{epi}(g)$, $X \times Y \times (-F^+)$, *для каждого* $T \in \mathscr{L}(X,E)$ *верна точная формула*

$$f^*(T) \rightleftharpoons \inf(h^*(T_1,S_1) + \Phi^*(T_2,S_2) + (\alpha \circ g)^*(T_3,S_3)),$$

где инфимум берется по всем $\alpha \in \mathscr{L}^+(F,E)$ *и наборам* $T_1,T_2,T_3 \in \mathscr{L}(X,E)$ *и* $S_1,S_2,S_3 \in \mathscr{L}(Y,E)$ *таким, что* $T = T_1 + T_2 + T_3$ *и* $0 = S_1 + S_2 + S_3$.

$\lhd$ Прежде всего заметим, что

$$f(x) = \inf_{y \in Y}((h + \delta_E(\Phi) + \delta_E(-E^+) \circ g)(x,y)).$$

Следовательно, в соответствии с (1) будет

$$f^*(T) = (h + \delta_E(\Phi) + \delta_E(-F^+) \circ g)^*(T,0).$$

Применив 4.1.5 (1), получим точную формулу

$$\begin{aligned} f^*(T) \rightleftharpoons \inf \big\{ & h^*(T_1,S_1) + \Phi^*(T_2,S_2) + (\delta_E(-F^+) \circ g)^*(T_3,S_3) : \\ & T_l \in \mathscr{L}(X,E),\ S_l \in \mathscr{L}(Y,E)\ (l := 1,2,3); \\ & \qquad\qquad T_1 + T_2 + T_3 = T,\ S_1 + S_2 + S_3 = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Остается применить 4.1.9 (3) к суперпозиции $\delta_E(-F^+) \circ g$. $\rhd$

4.1.13. *Теорема.* *Пусть* $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ *и* $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ — *выпуклые операторы. Пусть, далее, множества* $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ *и* $\operatorname{epi}(X, f_2)$ *находятся в общем положении. Тогда для любых* $T_1 \in \mathscr{L}(X,E)$ *и* $T_2 \in \mathscr{L}(Z,E)$ *справедлива точная формула*

$$(f_2 \odot f_1)^*(T_1,T_2) \rightleftharpoons \inf((\alpha_1, \circ f_1)^*(T_1,\cdot) \oplus (\alpha_2 \circ f_2)^*(\cdot,T_2)),$$

где инфимум в правой части берется по всем $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}^+(E)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$.

$\lhd$ Рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.8, и сохранив те же обозначения, получаем соотношение

$$(f_2 \odot f_1)^*(T_1,T_2) = (g_1 \vee g_2)^*((T_1,T_2) \circ \Lambda).$$

Так как множества $\operatorname{epi}(g_1)$ и $\operatorname{epi}(g_2)$ находятся в общем положении, то применимо предложение 4.1.5 (3), в соответствии с которым имеет место точная формула

$$(f_2 \odot f_1)^*(T_1,T_2) \rightleftharpoons \inf\{\alpha_1 \circ g_1)^* \oplus (\alpha_2 \circ g_2)^*((T_1,T_2) \circ \Lambda)\},$$

где инфимум берется по всем $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \operatorname{Orth}^+(E)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$. Доказательство завершается так же, как и в 4.1.8. $\rhd$

4.1.14. Пусть $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство. Возьмем отображение $f : X \times \mathfrak{A} \to E^{\bullet}$ и положим

$$h(x) = \sup\{f(x,\alpha) : \ \alpha \in \mathfrak{A}\}.$$

Допустим, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ частичное отображение $f_\alpha : x \mapsto f(x,\alpha)$ $(x \in X)$ является выпуклым. Тогда $h : X \to E^{\bullet}$ также выпуклый оператор (см. 1.3.7 (1)). Пусть, кроме того, для каждого $x \in \cap\{\mathrm{dom}(f_\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ частичное отображение $f_x : \alpha \mapsto f(x,\alpha)$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$, является кусочно r-непрерывным (см. 2.1.12 (2)). Положим

$$\varphi(x) := \begin{cases} f_x, & \text{если } x \in \bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathrm{dom}(f_\alpha), \\ +\infty & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда при указанных предположениях φ — выпуклый оператор из X в $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ и выполняется равенство $h = \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\pi} \circ \varphi$, где $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ — ограничение канонического оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ на $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$.

(1) *Если f удовлетворяет всем указанным условиям, F — это K-пространство и $P : E \to F$ — возрастающий о-непрерывный сублинейный оператор, то для каждого $T \in \mathscr{L}(X,E)$ имеет место соотношение*

$$(P \circ h)^*(T) \rightleftharpoons \inf\left\{\left(\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\cdot,\alpha) d\mu(\alpha)\right)^*(T)\right\},$$

где инфимум берется по всем $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E,F))^+$, для которых $\mu(\mathfrak{A}) \in \partial P$.

$\lhd$ Нужно привлечь 4.1.9 (3) и описание $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ из 2.1.13 (3). $\rhd$

(2) *Если K-пространство E будет (σ,∞)-дистрибутивным, то также имеет место формула*

$$h^*(T) \rightleftharpoons \inf\left\{\left(\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\cdot,\alpha)\, d\mu(\alpha)\right)^*(T)\right\},$$

где инфимум берется по всем $\mu \in \mathrm{rca}(\mathfrak{A}, \mathrm{Orth}(E))^+$, для которых $\mu(\mathfrak{A}) = I_E$.

$\lhd$ Нужно привлечь 4.1.9 (3) и описание $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ из 2.1.13 (4). $\rhd$

4.2. Формулы субдифференцирования

В этом параграфе выводятся основные формулы для вычисления субдифференциалов составных выпуклых операторов. Всюду ниже E считается K-пространством.

4.2.1. Рассмотрим топологические векторные пространства X и E. Допустим, что E упорядочено посредством некоторого положительного конуса E^+. Символом $\mathscr{L}(X,E)$, как всегда, мы обозначаем множество всех непрерывных линейных операторов из X в E. Возьмем выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$, где $E^\bullet = E \cup \{+\infty\}$, а $+\infty$ — наибольший элемент $E^\bullet$. Зафиксируем элементы $\varepsilon \in E^+$ и $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,E)$ называется *ε-субградиентом* f в точке x_0, если $Tx - Tx_0 \leqslant f(x) - f(x_0) + \varepsilon$ для всех $x \in X$. Множество всех ε-субградиентов оператора f в точке x_0 называют *ε-субдифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\partial_\varepsilon f(x_0)$.

(1) Итак, ε-субдифференциал f в точке x_0 определяется формулой

$$\partial_\varepsilon f(x_0) := \{T \in \mathscr{L}(X,E) : Tx - Tx_0 \leqslant f(x) - f(x_0) + \varepsilon \ (x \in X)\}.$$

Заметим, что ε-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$ может быть пустым, состоять из единственного элемента или же содержать целые лучи. Будем считать также, что $\partial_\varepsilon f(x_0) = \varnothing$ при $x_0 \notin \mathrm{dom}(f)$.

Возьмем произвольный вектор $h \in X$. Если существует точная нижняя граница множества $\{\alpha^{-1}(f(x_0+\alpha h) - f(x_0)+\varepsilon) : \alpha > 0\}$, то ее называют *$\varepsilon$-производной* оператора f в точке x_0 по направлению h и обозначают символом $f^\varepsilon(x_0)h$.

(2) Следовательно, ε-производная по направлениям оператора f в точке x_0 определяется формулой

$$f^\varepsilon(x_0) : h \mapsto \inf_{\alpha>0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0) + \varepsilon}{\alpha}.$$

При $\varepsilon = 0$ пишут $\partial f(x_0) := \partial_0 f(x_0)$, $f'(x_0) := f^0(x_0)$ и говорят о *субградиентах*, *субдифференциале* и *производной по направлениям* оператора f. Введем обозначения $\Delta_\varepsilon(h,\alpha) := \alpha^{-1}(f(x_0+\alpha h) - f(x_0)+\varepsilon)$ и $\Delta := \Delta_0$. Полезно подчеркнуть, что при $\varepsilon = 0$ разностное отношение $\Delta_\varepsilon(h,\alpha)$, фигурирующее в определении ε-производной по направлению, возрастает по α.

(3) *Если* $x_0 + \gamma h \in \mathrm{dom}(f)$, *то для любых* $0 < \alpha \leqslant \beta < \gamma$ *выполняется неравенство* $\Delta(h, \alpha) \leqslant \Delta(h, \beta)$.

$\lhd$ В самом деле, для указанных α и β, благодаря выпуклости f, выполняется

$$\Delta(h, \beta) - \Delta(h, \alpha) =$$

$$= \Delta(h, \beta) - \alpha^{-1}(f((\beta - \alpha)\beta^{-1}x_0 + \alpha\beta^{-1}(x_0 + \beta h) - f(x_0)) \geqslant$$

$$\geqslant \Delta(h, \beta) - \alpha^{-1}(\beta^{-1}(\beta - \alpha)f(x_0) + \beta^{-1}\alpha f(x_0 + \beta h) - f(x_0)) =$$

$$= \Delta(h, \beta) - \alpha^{-1}(\beta^{-1}\alpha(f(x_0 + \beta h) - f(x_0))) = 0. \ \rhd$$

(4) *Для односторонней производной по направлениям выпуклого оператора* f *в точке* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ *имеет место формула*

$$f'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha}.$$

Отсюда видно принципиальное отличие ε-субдифференциалов и ε-производных в случае $\varepsilon \neq 0$ от аналогичных объектов при $\varepsilon = 0$. При последнем выборе параметра ε производная определена локальным поведением оператора; в то же время как при $\varepsilon > 0$ для вычисления ε-производной необходимо знать, вообще говоря, все значения исследуемого отображения.

(5) Для выпуклого множества $C \subset X$ и точки $x \in C$ положим $\partial_\varepsilon C(x) := \partial_\varepsilon\big(\delta_E(C)\big)(x)$ и $\partial C(x) := \partial\big(\delta_E(C)\big)(x)$. Таким образом,

$$T \in \partial_\varepsilon C(x) \leftrightarrow (\forall x' \in C)\, Tx' \leqslant Tx + \varepsilon.$$

Если $x \notin C$, то согласно (1) $\partial_\varepsilon C(x) = \partial C(x) = \varnothing$. Обозначим также $C^\varepsilon(x) := \delta_E(C)^\varepsilon(x)$ и $C'(x) := \delta_E(C)'(x)$. Как видно из определения (2) для $x \in C$ верна формула $C^\varepsilon(x) = \varepsilon\mu(\mathrm{C} - x)$. В случае $\varepsilon = 0$ имеют место формулы $C'(x) = \delta_E\big(\mathrm{Fd}(C, x)\big)$ и $\partial C(x) = \{T \in \mathscr{L}(X, E) : (\forall h \in \mathrm{Fd}(C, x))\, Th \leqslant 0\}$.

4.2.2. (1) *ε-производная по направлениям выпуклого оператора* f *в точке* x_0 *есть сублинейный оператор. Опорное множество этого оператора совпадает с ε-субдифференциалом оператора* f *в точке* x_0*; символически:* $\partial_\varepsilon f(x_0) = \partial f^\varepsilon(x_0)$.

$\lhd$ Действительно, возьмем $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ и предположим, что $f(x) \in E$. Рассмотрим произвольные h и $k \in X$, и пусть α и β — строго положительные числа. Тогда при $\gamma := \alpha\beta(\alpha+\beta)^{-1}$ в силу выпуклости f будет

$$\Delta_\varepsilon(h,\alpha) + \Delta_\varepsilon(k,\beta) =$$

$$= \gamma^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,f\,(x+\alpha h) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,f\,(x+\beta k) - f(x) + \varepsilon\right) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma^{-1}(f(x+\gamma(h+k)) - f(x) + \varepsilon) \geqslant f^\varepsilon(x)(h+k).$$

Переходя к точной нижней границе по α и β в соотношении

$$\Delta_\varepsilon(h,\alpha) + \Delta_\varepsilon(k,\beta) \geqslant f^\varepsilon(x)(h+k),$$

получим: $f^\varepsilon(x)h + f^\varepsilon(x)k \geqslant f^\varepsilon(x) \times (h+k)$. С другой стороны, для любого $\alpha > 0$ выполнено

$$f^\varepsilon(x)(\alpha h) = \inf_{\beta>0} \alpha \cdot \frac{f(x+\beta\alpha h) - f(x) + \varepsilon}{\beta\alpha} = \alpha f^\varepsilon(x)h.$$

Ясно также, что $f^\varepsilon(x)0 = 0$. Тем самым оператор $f^\varepsilon(x)$ сублинеен. Оставшаяся часть предположения очевидна. $\rhd$

(2) *Пусть $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор, непрерывный в точке $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Тогда $\partial_\varepsilon f(x) \neq \varnothing$ и*

$$f^\varepsilon(x)h = \sup\{Th : T \in \partial_\varepsilon f(x)\} \quad (h \in X).$$

$\lhd$ Это вытекает из (1) в силу теоремы Хана — Банаха — Канторовича (см. 1.4.14 (2)), так как в рассматриваемой нами ситуации $\operatorname{dom}(f^\varepsilon(x)) = X$ и оператор $f^\varepsilon(x)$ непрерывен. $\rhd$

4.2.3. Напомним, что при рассмотрении элемента x из X мы условились отождествлять этот элемент с оператором $\hat{x} : T \mapsto Tx$, где $T \in \mathscr{L}(X,E)$. Так, в частности, запись $x \in \partial_\varepsilon f^*(T_0)$ означает выполнение соотношения

$$Tx - T_0 x \leqslant f^*(T) - f^*(T_0) + \varepsilon \quad (T \in \mathscr{L}(X,E)),$$

где, как обычно, f^* — преобразование Юнга — Фенхеля оператора f.

Пусть f — выпуклый оператор из X в $E^\bullet$ и $x \in \operatorname{dom}(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *для произвольных $\varepsilon \in E^+$ и $T \in \mathscr{L}(X, E)$ включение $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ имеет место в том и только в том случае, когда $f(x) + f^*(T) \leqslant Tx + \varepsilon$;*

(2) *если $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$, то $\partial_\delta f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$;*

(3) *если $\varepsilon, \delta \in E^+$, $\alpha, \beta \in \operatorname{Orth}(E)^+$ и $\alpha + \beta = I_E$, то*

$$\partial_{\alpha\varepsilon+\beta\delta} f(x) \supset \alpha \circ \partial_\varepsilon f(x) + \beta \circ \partial_\delta f(x);$$

(4) *из $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ следует, что $x \in \partial_\varepsilon f^*(T)$;*

(5) *если $f^{**}(x) = f(x)$, то $T \in \partial_\varepsilon f(x) \leftrightarrow x \in \partial_\varepsilon f^*(T)$;*

(6) *если $g : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор такой, что $f \leqslant g$ и $\delta := g(x) - f(x)$, то $\partial_\varepsilon f(x) \subset \partial_{\varepsilon+\delta} g(x)$.*

$\lhd$ (1): Если $f(x) + f^*(T) \leqslant Tx + \varepsilon$, то $f^*(T) < +\infty$, следовательно, $f(x') > -\infty$ для всех $x' \in X$. Кроме того, $x \in \operatorname{dom}(f)$ и, стало быть, f — собственная выпуклая функция. Если же $\partial_\varepsilon f(x) \neq \varnothing$, то по аналогичным соображениям f вновь будет собственной выпуклой функцией. Но для собственной выпуклой функции имеют место эквивалентности

$$T \in \partial_\varepsilon f(x) \leftrightarrow Tx' - Tx \leqslant f(x') - f(x) + \varepsilon \ (x' \in X) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow Tx' - f(x') \leqslant Tx - f(x) + \varepsilon \ (x' \in X) \leftrightarrow f(x) + f^*(T) \leqslant Tx + \varepsilon,$$

откуда и вытекает требуемое.

(2): Очевидно из определений.

(3): Пусть $S \in \partial_\varepsilon f(x)$ и $T \in \partial_\delta f(x)$. Тогда для S и T имеют место неравенства из определения 4.2.1 (1). Применив к этим неравенствам положительные операторы α и β соответственно и сложив затем полученные неравенства, с учетом равенства $\alpha + \beta = I_E$ приходим к соотношению

$$\alpha \circ S + \beta \circ T \leqslant f(x') - f(x) + \alpha\varepsilon + \beta\delta \quad (x' \in X),$$

которое равносильно требуемому включению.

(4): Если $T \in \partial_\varepsilon f(x)$, то согласно (1) $f(x) + f^*(T) \leqslant Tx + \varepsilon$. В то же время для $S \in \operatorname{dom}(f^*)$ имеем $Sx + f(x) \leqslant f^*(S) < +\infty$. Сложив эти два неравенства получим соотношение

$$Sx - Tx \leqslant f^*(S) - f^*(T) \quad (S \in \operatorname{dom}(f^*)),$$

равносильное включению $x \in \partial_\varepsilon f^*(T)$.

(5): Предположение $x \in \partial_\varepsilon f^*(T)$ дает в силу (4) $T \in \partial_\varepsilon f^{**}(x)$. Учитывая соотношения $f^{**}(x) = f(x)$ и $f^{**}(x) \leqslant f(x)$ (см. 4.1.2 (4)), приходим к требуемому включению $T \in \partial_\varepsilon f^{**}(x)$.

(6): Очевидно из определений. $\triangleright$

4.2.4. Приведем еще несколько утверждений, являющихся по существу переформулировками или частными случаями уже отмеченных свойств.

(1) *Включение $T \in \partial f(x)$ имеет место в том и только в том случае, если $f(x) + f^*(T) = Tx$.*

$\triangleleft$ Это следует из 4.2.4 (1) при $\varepsilon = 0$. $\triangleright$

(2) *Если $f = f^{**}$, то соответствие $\partial_\varepsilon f^*$ является обратным к соответствию $\partial_\varepsilon f$; символически: $(\partial_\varepsilon f)^{-1} = \partial_\varepsilon f^*$.*

$\triangleleft$ Это следует из 4.2.4 (5) и определения обратного соответствия 1.2.1 (2). $\triangleright$

(3) *Если $\partial f(x) \neq \varnothing$, то $f^{**}(x) = f(x)$ и $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.*

$\triangleleft$ Если $T \in \partial_\varepsilon f(x)$, то согласно (1) $f(x) = Tx - f^*(T)$, что вместе с неравенством $f^{**} \leqslant f$ дает $f^{**}(x) = f(x)$. $\triangleright$

Рассмотрим отображение $h : X \to E^\bullet$, действующее по формуле

$$h(y) := f(x+y) - f(x) \quad (y \in X).$$

Ясно, что h — выпуклый оператор.

(4) *Выпуклый оператор $h^* : \mathscr{L}(X, E) \to E^\bullet$ принимает положительные значения, и справедливо представление*

$$\partial f(x) = \{h^* = 0\} := \{T \in \mathscr{L}(X, E) : h^*(T) = 0\}.$$

$\triangleleft$ В силу (1) нужно лишь заметить, что сопряженный оператор h^* имеет вид

$$h^*(T) = f^*(T) + f(x) - Tx \quad (T \in \mathscr{L}(X, E)). \ \triangleright$$

(5) *ε-субдифференциал f в точке x совпадает с ε-лебеговым множеством оператора h^*, т. е.*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{h^* \leqslant \varepsilon\} := \{T \in \mathscr{L}(X, E) : h^*(T) \leqslant \varepsilon\}.$$

$\triangleleft$ Очевидно, что $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ тогда и только тогда, когда $Ty \leqslant h(y) + \varepsilon$ для всех $y \in X$. Но это то же, что и $h^*(T) \leqslant \varepsilon$. $\triangleright$

(6) *Пусть f — выпуклый оператор из X в $\bar{F}$, где F — упорядоченное топологическое векторное пространство. Пусть, далее, $T \in \mathscr{L}(X, F)$ и $S \in \mathscr{L}(F, E)$. Тогда $(T, S) \in \partial_\varepsilon(\mathrm{epi}(f))(x, f(x))$ в том и только в том случае, когда $S \geqslant 0$ и $T \in \partial_\varepsilon(S \circ f)(x)$.*

◁ Применив 4.2.3 (1) и 4.1.3 (1,2), а затем вновь 4.2.3 (1), выводим цепочку эквивалентностей

$$
\begin{gathered}
(T, S) \in \partial_\varepsilon(\mathrm{epi}(f))(x, f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\mathrm{epi}(f))^*(T, S) \leqslant \varepsilon + Tx - (S \circ f)(x) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (S \circ f)(x) + (S \circ f)^*(T) \leqslant \varepsilon + Tx \leftrightarrow T \in \partial_\varepsilon(S \circ f)(x),
\end{gathered}
$$

содержащую обоснование требуемого утверждения. ▷

4.2.5. Перейдем теперь к вычислению ε-производных и ε-субдифференциалов отображения f. Как уже отмечалось ранее, случаи $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = 0$ существенно отличаются друг от друга, несмотря на их внешнюю похожесть. Поэтому указанные случаи анализируются различными методами. Так, при $\varepsilon = 0$ сначала производят подсчет производных по направлениям, а затем применяют метод общего положения для нахождения соответствующих опорных множеств. В случае же $\varepsilon \neq 0$, привлекая правила замены переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля, находят формулы вычисления ε-субдифференциалов, которые после этого сворачивают в формулы для ε-производных на основе 4.2.1. На таком пути формально охватывается и случай $\varepsilon = 0$, причем возникающие формулы совпадают с уже найденными. Однако следует помнить, что условия, накладываемые на операторы при произвольных ε, существенно более жесткие, чем нужные для обслуживания ε, равного нулю. Ниже (см. 4.2.6 и 4.2.7) мы аккуратно оттеним указанное различие на (принципиальном!) примере ε-субдифференциала суммы, хотя в дальнейшем формулировать упрощающие условия при $\varepsilon = 0$ мы не будем.

Пусть C — (выпуклое) множество в X. Элемент $h \in X$ называют *допустимым направлением* для множества C в точке $x \in C$, если существует $t > 0$ такое, что $x + th \in C$ (при этом из-за выпуклости C будет $x + t'h \in C$ для всех $0 < t' < t$). Совокупность таких направлений обозначают символом $\mathrm{Fd}(C, x)$. При $x \notin C$ для удобства полагают $\mathrm{Fd}(C, x) = \varnothing$.

(1) *Множество допустимых направлений $\mathrm{Fd}(C, x)$ представляет собой выпуклый конус. При этом $\partial C(x) = \pi_E(\mathrm{Fd}(C, x))$.*

Если $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор и $x \in \operatorname{dom}(f)$, то вводят обозначение $\operatorname{Fd}(f, x) := \operatorname{Fd}(\operatorname{epi}(f), (x, f(x)))$. Следовательно, $\operatorname{Fd}(f, x)$ состоит из таких пар $(h, k) \in X \times E$, что $t^{-1}(f(x + th) - f(x)) \leqslant k$ при достаточно малом $t > 0$.

(2) *Односторонняя производная по направлениям $f'(x)$ и конус допустимых направлений $\operatorname{Fd}(f, x)$ связаны между собой соотношением $f'(x) = \inf \circ \operatorname{Fd}(f, x)$, т. е.*

$$f'(x) : h \mapsto \inf\{k \in E : (h, k) \in \operatorname{Fd}(f, x)\}.$$

$\triangleleft$ Это видно из определения односторонней производной по направлениям 4.2.1 (4). $\triangleright$

(3) *Пусть $f : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, а $S : F \to E$ — положительный оператор. Тогда $T \in \partial(S \circ f)(x)$ для некоторых $x \in \operatorname{dom}(f)$ и $T \in \mathscr{L}(X, E)$ в том и только в том случае, если $(T, S) \in \pi_E(\operatorname{Fd}(f, x))$. В частности, $T \in \partial f(x)$ и $(T, I_E) \in \pi_E(\operatorname{Fd}(f, x))$.*

$\triangleleft$ Выводится непосредственно из определений. $\triangleright$

4.2.6. *Теорема.* *Если выпуклые операторы $f_1, \ldots, f_n : X \to E^\bullet$ и точка $x \in X$ таковы, что конусы $\operatorname{Fd}(f_1 \times \ldots \times f_n, (x, \ldots, x))$ и $\Delta_n(X) \times E^n$ находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\partial(f_1 + \ldots + f_n)(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_n(x).$$

$\triangleleft$ Предположим, что $x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Если $f := f_1 + \ldots + f_n$, то для любого $h \in X$ имеем

$$f'(x)h = o\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \sum_{l=1}^{n} t^{-1}(f_l(x + th) - f_l(x)) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} o\text{-}\lim_{t \downarrow 0} f^{-1}(f_l(x + th) - f_l(x)) = \sum_{l=1}^{n} f_l'(x)h.$$

Следовательно, в силу 4.2.2 (1) будет

$$\partial(f_1 + \ldots + f_n)(x) = \partial(f_1'(x) + \ldots + f_n'(x)).$$

Рассмотрим конические соответствия $K_0 := \mathrm{Fd}\,(f_1 \times \ldots \times f_n, (x, \ldots, x))$ и $K := \mathrm{epi}(f_1'(x) \times \ldots \times f_n'(x))$. Заметим, что $\mathrm{dom}(K_0) = \mathrm{dom}(K)$. Кроме того, $K_0(x) + E^+ \subset K_0(x)$ для всех $x \in X$. Отсюда видно, что

$$K_0 - \Delta_n(X) \times E^n = K - \Delta_n(X) \times E^n = (\mathrm{dom}(K) - \Delta_n(X)) \times E^n.$$

По условию конусы K_0 и $\Delta_n(X) \times E^n$ находятся в общем положении. Но тогда в общем положении находятся K и $\Delta_n(X) \times E^n$, ибо $K_0 \subset K$. Последнее же означает, что сублинейные операторы $f_1'(x), \ldots, f_n'(x)$ находятся в общем положении. Остается привлечь формулу Моро — Рокафеллара (см. 3.2.8). $\rhd$

4.2.7. *Теорема.* *Если выпуклые операторы $f_1, \ldots, f_n : X \to E^\bullet$ находятся в общем положении и $x \in X$, то для произвольного $\varepsilon \in E^+$ справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon(f_1 + \ldots + f_n)(x) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \ldots, \varepsilon_n \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \varepsilon}} (\partial_{\varepsilon_1} f_1(x) + \ldots + \partial_{\varepsilon_n} f_n(x)).$$

$\lhd$ Вновь возьмем $f := f_1 + \ldots + f_n$ и $x \in \mathrm{dom}(f)$. Если $T \in \partial_\varepsilon f(x)$, то согласно 4.2.3 (1) будет

$$f^*(T) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) \leqslant Tx + \varepsilon.$$

В силу 4.1.5 (1) существуют операторы $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{L}(X, E)$ такие, что $T = T_1 + \ldots + T_n$ и $f^*(T) = f_1^*(T_1) + \ldots + f_n^*(T_n)$. Положим $\delta_l := f_l^*(T_l) + f_l(x) - T_l(x)$ $(l := 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $\delta_1 \geqslant 0, \ldots, \delta_n \geqslant 0$ и $\varepsilon \geqslant \delta_1 + \ldots + \delta_n$. Считая $\varepsilon_l := \delta_l$ при $l > 1$ и $\varepsilon_1 := \varepsilon - (\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$, получаем $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ и $f_l^*(T_l) + f_l(x) \leqslant T_l x + \varepsilon_l$ для всех $l := 1, 2, \ldots, n$. Отсюда в силу 4.2.3 (1) имеем $T_l \in \partial_{\varepsilon_l} f_l(x)$, значит, $T \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x) + \ldots + \partial_{\varepsilon_n} f_n(x)$. Противоположное включение очевидно. $\rhd$

Вновь подчеркнем, что при $\varepsilon = 0$ формула из теоремы 4.2.7 переходит в аналогичную формулу из теоремы 4.2.6. В то же время требование общности положения конусов $\mathrm{Fd}\,(\prod_{l=1}^n f_l, (x, \ldots, x))$ и $\Delta_n(X) \times E^n$ слабее требования общности положения операторов $f_1, \ldots, f_n$.

4.2.8. Теорема. *Пусть $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ и $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ — выпуклые операторы и $\delta, \varepsilon \in E^+$. Допустим, что свертка $f_2 \vartriangle f_1$ δ-точна в некоторой точке (x, y, z), т. е. $\delta + (f_2 \vartriangle f_1)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(y, z)$. Если, кроме того, выпуклые множества $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ и $\operatorname{epi}(X, f_2)$ находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon(f_2 \vartriangle f_1)(x, y) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta}} \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y).$$

$\vartriangleleft$ Доказательство можно провести по схеме 4.2.7 с учетом 4.1.8. Дадим иное доказательство, апеллирующее к результату 4.2.7.

Используя обозначения теоремы 4.1.8, для $(T_1, T_2) \in \partial_\varepsilon(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$ в силу точности свертки имеем $(T_1, T_2) \circ \Lambda \in \partial_{\varepsilon+\delta}(g_1 + g_2)(x, y, z)$. Для операторов g_1 и g_2 выполнены условия теоремы 4.2.7. Значит, существуют ε_1 и ε_2 из E^+, для которых $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$ и $(T_1, 0, T_2) \in \partial_{\varepsilon_1} g_1(x, y, z) + \partial_{\varepsilon_2} g_2(x, y, z)$. Таким образом, принимая во внимание представления

$$\partial_{\varepsilon_1} g_1(x, y) = (\partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y)) \times \{0\},$$
$$\partial_{\varepsilon_2} g_2(y, z) = \{0\} \times (\partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z)),$$

заключаем, что для некоторых $T_1', S_1 \in \mathscr{L}(X, E)$ и $T_2', S_2 \in \mathscr{L}(X, E)$ имеют место соотношения

$$(T_1', S_1) \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x,y), \quad (S_2, T_2') \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z),$$
$$(T_1, 0, T_2) = (T_1',\ S_1 - S_2,\ T_2').$$

Отсюда $T_l = T_l'$ $(l := 1, 2)$ и $S := S_1 = S_2$. Следовательно,

$$(T_1, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y).$$

противоположное включение очевидно. $\vartriangleright$

4.2.9. Теорема. *Пусть $\vee$-свертка $f_2 \odot f_1$ выпуклых операторов $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ и $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ δ-точна в некоторой точке $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$, т. е. $\delta + (f_2 \odot f_1)(x, z) = f_1(x, y) \vee f_2(y, z)$. Если при этом выпуклые множества $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ и $\operatorname{epi}(X, f_2)$ находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon(f_2 \odot f_1)(x, z) = \bigcup \big(\partial_{\varepsilon_2}(\alpha_2 \circ f_2)(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1}(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)\big),$$

где объединение берется по всем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E^+$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E^+)$ таким, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$.

$\lhd$ Допустим, что $(T_1, T_2) \in \partial_\varepsilon(f_2 \odot f_1)(x, y)$. Используя 4.2.3 (1) и 4.1.13, а также δ-точность $\vee$-свертки $f_2 \odot f_1$ в точке (x, y, z), можно найти такой оператор $S \in \mathscr{L}(X, E)$ и ортоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E)^+$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$, такие, что

$$\alpha_1 \circ f_1(x, y) + \alpha_2 \circ f_2(y, z) + (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) + \\ +(\alpha_2 \circ f_2)^*(S, T_2) \leqslant T_1 x - T_2 z + \varepsilon + \delta.$$

Положим $\varepsilon_1 := (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) + \alpha_1 \circ f_1(x, y) - T_1 x + Sy$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon + \delta - \varepsilon_1$. Тогда $(T_1, S) \in \partial_{\varepsilon_1}(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)$ и $(S, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2}(\alpha_2 \circ f_2)(y, z)$, т. е. (T_1, T_2) входит в правую часть требуемого равенства. Противоположное включение проверяется просто. $\rhd$

4.2.10. *Теорема.* *Предположим, что f, g, h и Φ удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1.12 (2). Пусть, сверх того, $h(x, y) = f(x) + \delta$ для некоторых $\delta \in E^+$ и $(x, y) \in \operatorname{dom}(h) \cap \Phi$, $g(x, y) \leqslant 0$. Тогда для каждого $\varepsilon \in E^+$ имеет место представление*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \Big\{T : (T, 0) \in \bigcup \big(\partial_{\varepsilon_1} h(x, y) + \partial_{\varepsilon_2}\Phi(x, y) + \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x, y)\big)\Big\},$$

где объединение берется по всем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in E^+$ и $\alpha \in \mathscr{L}(F, E)^+$, удовлетворяющим условиям

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqslant \alpha \circ g(x, y) + \varepsilon + \delta.$$

$\lhd$ В соответствии с 4.1.3 (1) при указанных условиях включение $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ означает существование операторов $\alpha \in \mathscr{L}^+(F, E)$, $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{L}(X, E)$ и $S_1, S_2, S_3 \in \mathscr{L}(Y, E)$ таких, что $T = T_1 + T_2 + T_3$, $0 = S_1 + S_2 + S_3$ и

$$f(x) + h^*(T_1, S_1) + \Phi^*(T_2, S_2) + (\alpha \circ g)^*(T_3, S_3)) \leqslant Tx + \varepsilon.$$

Пусть $y \in Y$ удовлетворяет условиям теоремы. Заменим в последнем равенстве $f(x)$ на $h(x, y) - \delta$ и обозначим

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 := h(x, y) + h^*(T_1, S_1) - T_1 x + S_1 y, \\ &\varepsilon_2 := \Phi^*(T_2, S_2) - T_2 x + S_2 y, \\ &\varepsilon_3 := (\alpha \circ g)(x, y) + (\alpha \circ g)^*(T_3, S_3) - T_3 x + S_3 y. \end{aligned}$$

Тогда $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqslant (\alpha \circ g)(x, y) + \varepsilon + \delta$ и, вновь привлекая 4.1.3 (1), получаем $(T_1, S_1) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x, y)$, $(T_2, S_2) \in \partial_{\varepsilon_2} \Phi(x, y)$ $(T_3, S_3) \in \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x, y)$. Тем самым

$$(T, 0) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x, y) + \partial_{\varepsilon_2} \Phi(x, y) + \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x, y),$$

и установлено включение слева направо. Противоположное включение доказывается проведением тех же рассуждений в обратном направлении. $\triangleright$

4.2.11. Следующие факты без труда выводятся из 4.2.7 и 4.2.8.

(1) *Пусть $\Gamma \subset X \times Y$ и $\Delta \subset Y \times Z$ — выпуклые соответствия и $y \in \Gamma(x) \cap \Delta^{-1}(z)$ для некоторых $x \in X, y \in Y, z \in Z$. Если при этом множества $\Gamma \times Z$ и $X \times \Delta$ находятся в общем положении, то*

$$\partial_\varepsilon(\Delta \circ \Gamma)(x, y) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \partial_{\varepsilon_2} \Delta(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} \Gamma(x, y).$$

$\triangleleft$ В 4.2.11 нужно положить $f_1 := \Gamma$ и $f_2 := \Delta$. $\triangleright$

(2) *Пусть $f : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, $g : F \to E^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор, причем в общем положении находятся выпуклые множества $\operatorname{epi}(f) \times E$ и $X \times \operatorname{epi}(g)$. Тогда*

$$\partial_\varepsilon(g \circ f)(x) = \bigcup_{\substack{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(x)) \\ \varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(x).$$

$\triangleleft$ Вытекает из (1) и 4.2.4 (6) с учетом равенства $\operatorname{epi}(g \circ f) = \operatorname{epi}(g) \circ \operatorname{epi}(f)$. $\triangleright$

(3) *Пусть $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор, T^x — непрерывный аффинный оператор, где $T \in \mathscr{L}(Y, X)$ и $x \in X$. Если выпуклые множества $T^x \times E$ и $Y \times \operatorname{epi}(f)$ находятся в общем положении, то*

$$\partial_\varepsilon(f \circ T^x)(y) = \partial_\varepsilon f(Ty + x) \circ T.$$

$\triangleleft$ Эта формула также следует из (1) и 4.2.4 (6) с учетом того, что при любом $\varepsilon \geqslant 0$ множество $\partial_\varepsilon(S \circ T^x)$ состоит из единственной точки $\{T\}$. $\triangleright$

(4) *Если выпуклые множества* $C_1, \ldots, C_n$ *находятся в общем положении и* $x \in C_1 \cap \ldots \cap C_n$, *то*

$$\partial_\varepsilon (C_1 \cap \ldots \cap C_n)(x) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \ldots, \varepsilon_n \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \varepsilon}} (\partial_{\varepsilon_1} C_1(x) + \ldots + \partial_{\varepsilon_n} C_n(x)).$$

$\lhd$ Следует из 4.2.7 с учетом обозначений из 4.2.1 (5). $\rhd$

(5) *Пусть* $C_1, \ldots, C_n$ — *заданные выпуклые множества и при этом* $x \in C_1 \cap \ldots \cap C_n$. *Если конусы* $\mathrm{Fd}(C_1, x), \ldots, \mathrm{Fd}(C_n, x)$ *находятся в общем положении, то*

$$\partial (C_1 \cap \ldots \cap C_n)(x) = \partial C_1(x) + \ldots + \partial C_n(x).$$

$\lhd$ Это следует из 4.2.6, если положить $f_l := \delta_E(C_l)$ $(l := 1, \ldots, n)$. Другое доказательство получится, если заметить, что $\mathrm{Fd}(C_1 \cap \ldots \cap C_n, x) = \mathrm{Fd}(C_1, x) \cap \ldots \cap \mathrm{Fd}(C_n, x)$ и применить 4.2.5 (1) и 3.2.5 (1). $\rhd$

(6) *Пусть* $f_1, \ldots, f_n : X \to F^\bullet$ — *выпуклые операторы и* $T \in \mathscr{L}^+(X, E)$. *Если* $x \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \mathrm{dom}(f_n)$ *и конусы* $\mathrm{Fd}(f_1, x)$ $(l := 1, \ldots, n)$ *находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\partial (S \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n))(x) = \bigcup \left(\partial (S_1 \circ f_1)(x) + \ldots + \partial (S_n \circ f_n)(x)\right),$$

где объединение берется по всем $S_1, \ldots, S_n$ *таким, что* $\sum_{l=1}^n S_l = S$.

$\lhd$ Достаточно применить (5) к множествам $C_1 := \mathrm{epi}(f_1)$, $\ldots$, $C_n := \mathrm{epi}(f_n)$ с учетом 4.2.5 (3). $\rhd$

(7) *Пусть* F — *векторная решетка,* $f_1, \ldots, f_n : X \to F^\bullet$ — *выпуклые операторы и* $T \in \mathscr{L}^+(X, E)$. *Если* $\mathrm{epi}(f_1)$ $(l := 1, \ldots, n)$ *находятся в общем положении, то имеет место представление*

$$\partial_\varepsilon (T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n))(x) = \bigcup (\partial_{\varepsilon_1} (T_1 \circ f_1)(x) + \ldots + \partial_{\varepsilon_n} (T_n \circ f_n)(x)),$$

где объединение берется по всем $T_1, \ldots, T_n$ *и* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *таким, что*

$$\varepsilon_l \in E^+,\ T_l \in \mathscr{L}^+(F, E) \quad (l := 1, 2, \ldots, n);$$

$$\varepsilon_{n+1} := \varepsilon - \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \geqslant 0, \quad \sum_{l=1}^{n} T_l = T;$$

$$(T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n))(x) \leqslant \sum_{l=1}^{n} (T_l \circ f_l)(x) + \varepsilon_{n+1}.$$

$\lhd$ Достаточно обосновать включение $\subset$, так как обратное включение проверяется непосредственно. Пусть $g := T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n))$ и $S \in \partial_\varepsilon g(x)$. Тогда $g(x) + g^*(S) \leqslant Sx + \varepsilon$ и согласно 4.1.5 (3) можно подобрать операторы $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{L}^+(X, E)$ такие, что $T_1 + \ldots + T_n = T$, $S_1 + \ldots + S_n = S$ и $g^*(S) = (T_1 \circ f_1)^*(S_1) + \ldots + (T_n \circ f_n)^*(S_n)$. Положим $\varepsilon_l := (T_l \circ f_l)(x) + (T_l \circ f_l)^*(S_1) - S_1 x$. Тогда $\varepsilon_l \geqslant 0$ $(l := 1, \ldots, n)$ и

$$\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l = g(x) + g^*(S) - Sx - \delta \leqslant \varepsilon - \delta,$$

$\delta := g(x) - \sum_{l=1}^{n} T_l \circ f_l(x)$. Как видно, $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon_{n+1}$ и $S_l \in \partial_{\varepsilon_l}(T_l \circ f_l)(x)$ $(l := 1, \ldots, n)$, что и требовалось. $\rhd$

4.2.12. *Пусть $g : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, $g(x) \leqslant e$ для некоторых $x \in X$ и $e \in F$. Если множества* $\operatorname{epi}(g - e)$ *и* $-(X \times F^+)$ *находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon(\{g \leqslant e\})(x) = \bigcup_{\substack{T \in \mathscr{L}^+(F,E) \\ 0 \leqslant \delta \leqslant T(g(x) - e) + \varepsilon}} \partial_\delta(T \circ g)(x).$$

$\lhd$ Пусть $f := g - e$ и $h := \delta_E(-F^+)$. Ясно, что

$$\delta_E(\{g \leqslant e\}) = h \circ f.$$

Более того, учитывая равенство $\operatorname{epi}(h) = -F^+ \times E^+$, заключаем, что выполнены условия следствия, а потому

$$\partial_\varepsilon(\{g \leqslant e)\} = \partial_\varepsilon(h \circ f) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} h(f(x))} \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(x).$$

Видно, что $T \in \partial_{\varepsilon_1}(h(f(x)) \leftrightarrow (\forall y \in -F^+) Ty \leqslant T(g(x) - e) + \varepsilon_1$. Раз $g(x) \leqslant e$ по условию, то

$$T \in \partial_{\varepsilon_1} h(f(x)) \leftrightarrow T \in \mathscr{L}^+(F, E) \wedge 0 \leqslant T\,(g(x) - e) + \varepsilon_1.$$

Осталось заметить, что

$$S \in \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(x) \leftrightarrow S \in \partial_{\varepsilon_2}(T \circ g)(x). \ \rhd$$

4.2.13. *Пусть $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $f : X \times \mathfrak{A} \to E^\bullet$. Допустим, что выполнены все условия из 4.1.14. Тогда для выпуклого оператора*

$$h(x) := \sup\{f(x, \alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (x \in X)$$

при любых $\varepsilon \in E^+$ и $x \in \operatorname{dom}(h)$ будет

$$\partial_\varepsilon h(x) = \bigcup \left(\partial_\delta \left(\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\cdot, \alpha) d\mu(\alpha)\right)(x)\right),$$

где объединение берется по всем μ и δ, удовлетворяющим условиям

$$0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon;\ \mu \in \operatorname{rca}(\mathfrak{A}, E)^+,\ \mu(\bar{e}) = e \quad (e \in E);$$
$$\delta + \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(x, \alpha) \leqslant \varepsilon + \int\limits_{\mathfrak{A}} f(x, \alpha)\, d\,\mu\,(\alpha).$$

$\lhd$ В самом деле, если выполнены условия из 4.1.14, то $h = \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\pi} \circ \varphi$, где $\varphi : X \to C_\pi(\mathfrak{A}, E^\bullet)$ имеет вид $\varphi(x) = (\alpha \mapsto f(x, \alpha))_{\alpha \in \mathfrak{A}} (x \in X)$. В силу этого достаточно использовать 4.2.12 (2) и данное в 2.1.13 (3) описание субдифференциала $\partial(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\pi})$. $\rhd$

4.3. Инволютивность преобразования Юнга — Фенхеля

Всякое замкнутое выпуклое множество в локально выпуклом пространстве есть пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Применительно к надграфикам этот результат утверждает, что всякая полунепрерывная снизу выпуклая функция, определенная на локально выпуклом пространстве, является верхней огибающей всех своих непрерывных аффинных минорант. Отсюда вытекает, что оператор сопряжения инволютивен на классе выпуклых полунепрерывных снизу функций. Распространение последнего факта на общие выпуклые операторы представляет собой важную и нетривиальную проблему, для решения которой указанный выше геометрический подход оказывается малоэффективным. В текущем параграфе излагается один возможный вариант решения этой проблемы, основанный на новой концепции полунепрерывности снизу выпуклого оператора.

4.3.1. В пределах данного параграфа $X := (X, \tau)$ — локально выпуклое пространство, а E — это K-пространство со слабой единицей $\mathbb{1}$. Напомним, что *разбиением единицы* в булевой алгебре $\mathfrak{Pr}\,(E)$ проекторов (на компоненты E) называют семейство $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{Pr}\,(E)$, для которого $\pi_\xi \circ \pi_\eta = 0$ для всех $\xi, \eta \in \Xi$, $\xi \neq \eta$, и $\sup\{\pi_\xi : \xi \in \Xi\} = I_E$. Символами $\{e\}^{dd}$ и $[e]$ обозначаются соответственно компонента, порожденная элементом $e \in E$, и проектор на эту компоненту. Для a, $b \in E^\bullet$ мы будем писать $a \ll b$, если либо $a \in E$ и $b = +\infty$, либо $a, b \in E$, $a \leqslant b$ и $\{b-a\}^{dd} = \{a\}^{dd} \vee \{b\}^{dd}$. Последнее соотношение равносильно тому, что проектор $[b-a]$ совпадает с точной верхней границей проекторов $[a]$ и $[b]$, т. е. $[b-a] = [b] \vee [a] = [b] + [a] - [b] \circ [a]$.

Пусть $e := |a| + |b|$. Соотношение $a \ll b$ равносильно каждому из следующих утверждений:

(a) $e = \sup\{e \wedge n(b-a) : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) *для любого $x \in E^+$ равенство $(x \wedge (b-a) = 0$ влечет $x \wedge e = 0$;*

(c) *для любого ненулевого проектора $\rho \in \mathfrak{Pr}\,(E)$, $\rho \leqslant [e]$, существуют число $\varepsilon > 0$ и ненулевой проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(E)$ такие, что $\pi \leqslant \rho$ и $\pi(a + \varepsilon\mathbb{1}) \leqslant \pi b$;*

(d) *существуют разбиение $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{Pr}\,(E)$ проектора $[e]$ и семейство строго положительных чисел $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$, для которых $\pi_\xi\,(a + \lambda_\xi\mathbb{1}) \leqslant \pi_\xi b$.*

Для удобства мы будем считать, что $\{+\infty\}^{dd} = E$ и $[+\infty] = I_E$.

4.3.2. *Пусть f — отображение из X в $E^\bullet$, фиксирован элемент $x_0 \in X$ и $\mathscr{F}$ — какой-нибудь базис фильтра $\tau(x_0)$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *для любых $e \leqslant f(x_0)$, $e \in E$, и ненулевого проектора $\rho \leqslant [f(x_0) - e]$ существуют ненулевой проектор $\pi \leqslant \rho$ и окрестность $\alpha \in \mathscr{F}$ такие, что $\pi e \leqslant \pi \circ f(x)$ при $x \in \alpha$;*

(2) *для любого $e \in E$, $e \leqslant f(x_0)$, существует разбиение $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ проектора $[f(x_0)-e]$ такое, что $\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha \circ f(x_0)$ при каждом $x \in \alpha$, $\alpha \in \mathscr{F}$;*

(3) *для любого $e \in E$, $e \ll f(x_0)$, существует разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \subset \mathfrak{Pr}\,(E)$ такое, что $\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha \circ f(x)$ для всех $x \in \alpha$ и $\alpha \in \mathscr{F}$;*

(4) *для фиксированного $c \in E^+$, $[c] \geqslant [f(x_0)]$, при любом числе $\varepsilon > 0$ найдется разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \subset \mathfrak{Pr}\,(E)$ такое, что для всех $x \in \alpha$ и $\alpha \in \mathscr{F}$ выполняется*

(a) $-\varepsilon\pi_\alpha c \leqslant \pi_\alpha(f(x) - f(x_0))$, *если* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ *и*

(b) $(1/\varepsilon)\pi_\alpha c \leqslant \pi_\alpha(f(x))$, *если* $x_0 \notin \mathrm{dom}(f)$.

Если какое-нибудь из условий (1)–(4) выполняется для $\mathscr{F}$, то это же условие справедливо и для любого другого базиса того же фильтра $\tau(x_0)$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пользуясь леммой Куратовского — Цорна, выберем максимальное семейство $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ попарно дизъюнктных проекторов таких, что $\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha(f(x))$ при $x \in \alpha$ и $\alpha \in \mathscr{F}$. Максимальность понимается относительно следующего упорядочения в множестве всех попарно дизъюнктных семейств порядковых проекторов:

$$(\pi'_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \leqslant (\pi''{}_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \leftrightarrow (\forall\alpha \in \mathscr{F})(\pi'{}_\alpha \leqslant \pi''{}_\alpha).$$

Положим $\rho := [f(x_0) - e] \wedge (I_E - \bigwedge\{\pi_\alpha : \alpha \in \mathscr{F}\})$. Если $\rho \neq 0$, то в силу (1) существуют ненулевой проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(E)$, $\pi \leqslant \rho$, и окрестность $\beta \in \mathscr{F}$ точки x_0, для которых $\pi e \leqslant \pi f(x)$ при всех $x \in \beta$. Полагая $\pi_\beta := \pi_\beta \vee \pi$, получим противоречие с максимальностью $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$. Значит, $\rho = 0$, а это означает, что $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ — разбиение проектора $[f(x_0) - e]$.

(2) $\to$ (3): Если $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ — разбиение проектора $[f(x_0) - e]$, удовлетворяющее (2), то из него можно получить требуемое разбиение единицы, прибавив к какому-нибудь π_α проектор $\pi := I_E - \bigwedge\{\pi_\alpha : \alpha \in \mathscr{F}\}$.

(3) $\to$ (4): Если $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, то в (3) следует положить $e := f(x_0) - \varepsilon c$, в противном случае $e := (1/\varepsilon)c$.

(4) $\to$ (1): Предположим, что $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. Если $\rho \leqslant [f(x_0) - e]$ и $\rho \neq 0$, то $\rho e \ll \rho f(x_0)$. Поэтому существуют ненулевой проектор $\pi_0 \leqslant \rho$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $\pi_0 e \leqslant \pi_0 f(x_0) - \varepsilon\pi_0 c$. Согласно (4) имеется разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$, для которого $-\varepsilon\pi_\alpha c \leqslant \pi_\alpha(f(x) - f(x_0))$ при $x \in \alpha$, $\alpha \in \mathscr{F}$. Выберем $\alpha \in \mathscr{F}$ так, чтобы $\pi := \pi_\alpha \wedge \pi_0 \neq 0$. Тогда для $x \in \alpha$ будет $\pi e \leqslant \pi f(x_0) - \varepsilon\pi c \leqslant \pi f(x)$.

Допустим теперь, что выполняется (1) и $\mathscr{F}'$ — какой-нибудь базис фильтра $\tau(x)$. Для $e \leqslant f(x_0)$ и ненулевого проектора $\rho \leqslant [f(x_0) - e]$ возьмем ненулевой проектор π и окрестность $\alpha \in \mathscr{F}$ так, чтобы $\pi e \leqslant f(x)$ $(x \in \alpha)$. Поскольку $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ — базисы одного и того же фильтра, существует $\beta \in \mathscr{F}'$ такой, что $\beta \subset \alpha$. Ясно, что неравенство $\pi e \leqslant \pi f(x)$ верно при всех $x \in \beta$. $\rhd$

4.3.3. Отображение $f : X \to E^\bullet$ называют *полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если выполняется одно (а значит, и любое) из условий 4.3.2 (1–4). Обращаем внимание читателя на схожесть разных определений 3.4.7 и 4.3.3. Эти понятия встречаются в разных контекстах, и мы надеемся, что путаницы не возникнет. Сразу же отметим простейшие свойства полунепрерывных снизу отображений. Будем говорить, что отображение f *полунепрерывно снизу*, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке $x_0 \in X$.

(1) *Если отображение $f : X \to E^\bullet$ полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$ и $\alpha \in \operatorname{Orth}(E)^+$, то отображение $\alpha\circ f$ полунепрерывно снизу в той же точке.*

(2) *Сумма конечного числа отображений из X в $E^\bullet$, полунепрерывных снизу в точке, полунепрерывна снизу в той же точке.*

$\lhd$ Допустим, что отображения $f_1, f_2 : X \to E^\bullet$ полунепрерывны снизу в точке x_0. Если $e \leqslant f_1(x_0) + f_2(x_0)$, то имеет место представление $e = e_1 + e_2$, где $e_l \leqslant f_l(x_0)$ $(l := 1, 2)$. Пусть $f := f_1 + f_2$ и $0 \neq \rho \leqslant [f(x_0) - e] \leqslant [f_1(x_0) - e_1] \vee [f_2(x_0) - e_2]$. Тогда для ρ также получаем представление $\rho = \rho_1 + \rho_2$, где $\rho_l \leqslant [f_l(x_0) - e_l]$ $(l := 1, 2)$, причем можно считать, что $\rho_1 \circ \rho_2 = 0$. Подберем теперь не равные одновременно нулю проекторы $\pi_l \leqslant \rho_l$ и окрестности $\alpha_1 \in \mathscr{F}$ так, чтобы $\pi_l e \leqslant \pi_l f_l(x)$ $(x \in \alpha_1)$. Полагая $\pi := \pi_1 + \pi_2$, $\alpha := \alpha_1 \cap \alpha_2$, получим $\pi e \leqslant \pi f(x)$ $(x \in \alpha)$. $\rhd$

(3) *Точная верхняя граница непустого множества отображений из X в $E^\bullet$, полунепрерывных снизу в точке, полунепрерывна снизу в той же точке.*

$\triangleleft$ Рассмотрим семейство отображений $(f_\xi : X \to E^\bullet)_{\xi\in\Xi}$, полунепрерывных снизу в точке $x_0 \in X$. Положим $f := \sup\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$. Пусть $e \leqslant f(x_0)$. Если $0 \neq \rho \leqslant [f(x_0) - e]$, то существуют $\xi \in \Xi$ и $0 \neq \pi_0 \leqslant \rho$ такие, что $\pi_0 e \ll \pi_0 f_\xi(x_0) \leqslant \pi_0 f(x_0)$. Ввиду полунепрерывности снизу f_ξ найдутся ненулевой проектор $\pi \leqslant \pi_0$ и окрестность $\alpha \in F$, для которых $\pi e \leqslant f_\xi(x)$ $(x \in \alpha)$. Но тогда для тех же x будет $\pi e \leqslant f(x)$. $\triangleright$

4.3.4. Введем теперь (интересный сам по себе) класс проскалярных аффинных операторов, связанный с указанной выше концепцией полунепрерывности. Ниже будет показано, что полунепрерывные снизу выпуклые операторы и только они являются верхними огибающими семейств проскалярных аффинных операторов. Предварительно приведем два простых факта.

(1) *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство, а E — произвольное K-пространство. Тогда для произвольного оператора $T \in \mathscr{L}(X, E)$ равносильны утверждения:*

(a) $\limsup_{x\to 0} |Tx| = \inf_{V\in\tau(0)} \sup_{x\in V} |Tx| = 0$ *(супремумы вычисляются, как обычно, в $E^\bullet$);*

(b) *существуют окрестность нуля $V \subset X$ и элемент $e \in E^+$ такие, что $T(V) \subset [-e, e]$;*

(c) *существуют непрерывная полунорма $p : X \to \mathbb{R}$ и элемент $e \in E^+$ такие, что $|Tx| \leqslant ep(x)$ для всех $x \in X$.*

$\triangleleft$ Если выполнено (1), то $e = \sup T(V) < +\infty$ для некоторой симметричной окрестности нуля $V \in \tau(0)$. Но тогда $T(V) \subset [-e, e]$. Если же верно последнее включение, причем V абсолютно выпукло, то условие (3) справедливо для $p := \mu(V)$. Наконец, из (3) вытекает, что $\limsup\limits_{x\to 0} Tx = e \cdot \limsup\limits_{x\to 0} p(x) = 0$ ввиду непрерывности p. $\triangleright$

Оператор $T \in \mathscr{L}(X, E)$ мы будем называть *о-ограниченным*, если он удовлетворяет любому из равносильных условий (a)–(c) предыдущего предложения. Символом $\mathscr{L}_0(X, E)$ обозначим множество всех *о*-ограниченных линейных операторов из X в E.

(2) *Оператор $T \in L(X, E)$ полунепрерывен снизу в какой-нибудь точке в том и только в том случае, если найдется разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{Pr}(E)$ такое, что $\pi_\xi \circ T \in \mathscr{L}_0(X, E)$ для всех $\xi \in \Xi$.*

$\triangleleft$ Ясно, что если линейный оператор полунепрерывен снизу в какой-нибудь точке, то он полунепрерывен снизу в любой точке.

Пусть T полунепрерывен снизу в нуле. Возьмем $e \in E^+$. Согласно 4.3.2 (2) существует разбиение $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ проектора $[e]$ такое, что $-\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha \circ Tx$ $(x \in \alpha,\ \alpha \in \mathscr{F})$. Здесь $\mathscr{F}$ — базис фильтра $\tau(0)$. Заменив x на $-x$ в последнем неравенстве, получим $|\pi_\alpha \circ Tx| \leqslant \pi_\alpha e \leqslant e$. В силу (1) это означает, что $\pi_\alpha \circ T \in \mathscr{L}_0\,(X, E)$.

Пусть $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — такое семейство в E^+, что $([e_\xi])$ — разбиение единицы. Для каждого $\xi \in \Xi$ подберем разбиение $(\pi_{\alpha,\xi})_{\alpha\in\mathscr{F}}$ проектора π_ξ так, чтобы $|\pi_{\alpha,\xi} \circ Tx| \leqslant \pi_{\alpha,\xi}\, e$ $(x \in \alpha)$. Это означает согласно (1), что $\pi_{\alpha,\xi} \circ T \in \mathscr{L}_0\,(X, E)$. Остается заметить, что $(\pi_{\alpha,\xi})_{(\alpha,\xi)\in\mathscr{F}\times\Xi}$ — разбиение единицы. $\triangleright$

4.3.5. Линейный оператор $T : X \to E$ мы будем называть *проскалярным*, если он удовлетворяет любому из эквивалентных условий предложения 4.3.4 (2). Множество всех проскалярных линейных операторов обозначим символом $\mathscr{L}_\pi(X, E)$. Понятно, что $T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)$ в том и только в том случае, если T линеен и выполнено одно из условий:

(a) T и $-T$ полунепрерывны снизу в нуле;

(b) $Tx = \text{o-}\sum \pi_\xi \circ T_\xi x$, где (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}\,(E)$ и $T_\xi \in \mathscr{L}_0\,(X, E)$ для всех ξ.

Под *аффинным оператором* $A : X \to E$ так же, как и в 4.1, мы будем понимать оператор вида $Ax = T^e x := Tx + e$ $(x \in X)$, где $T \in \mathscr{L}\,(X, E)$ и $e \in E$. Аффинный оператор $A := T^e$ называют *o-ограниченным* или *проскалярным*, если $T \in \mathscr{L}_0\,(X, E)$ или $T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)$ соответственно. Множество всех проскалярных минорант отображения $f : X \to E^\bullet$ обозначим символом $\mathscr{A}_\pi(f)$, т. е.

$$\mathscr{A}_\pi(f) := \{T^e : T^e \leqslant f,\ T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)\}.$$

4.3.6. Рассмотрим теперь три вспомогательных факта.

(1) *Пусть P — сублинейный оператор из векторного пространства X в $E^\bullet$, где E — это K-пространство. Допустим, что точка $x_0 \in \operatorname{dom}(P)$ и поглощающий конический отрезок $C \subset X$ таковы, что*

$$e := \inf\{P\,(x + x_0) : x \in C\} > -\infty.$$

Тогда для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\mu(C)(x)(e - P(x_0)) \leqslant P(x).$$

$\lhd$ Действительно, для $c \in C$ будет $e \leqslant P(x_0 + c) \leqslant P(x_0) + P(c)$ или $e - P(x_0) \leqslant P(c)$. Если элемент $x \in X$ таков, что $x \in tC$ при некотором $t > 0$, то $c := x/t \in C$ и, значит, $e - P(x_0) \leqslant P(x/t)$ или $t(e - P(x_0)) \leqslant P(x)$. Переходя к супремуму в левой части последнего неравенства по указанным t, получим требуемую оценку. Если множество таких t пусто, то супремум равен $-\infty$. Но в этом случае также верно равенство $\mu\,(C)x = +\infty$, поэтому $\mu\,(C)(x)(e - P(x_0)) = -\infty$ при $e \neq P(x_0)$ и $\mu\,(C)(e - P(x_0)) = 0$ при $e = P(x_0)$. В обоих случаях нужные неравенства выполняются. $\rhd$

(2) *Пусть f — выпуклый оператор из векторного пространства X в $E^\bullet$. Предположим, что точка $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ и конический отрезок $C \subset X$ таковы, что*

$$e := \inf\{f(x_0 + x) : x \in C\} > -\infty.$$

Тогда для каждого $0 < \varepsilon < 1$ при всех $x \in X$ верно

$$f(x_0) + (1 + \varepsilon)\ (e - f(x_0)) \cdot \max\left\{\frac{\mu\,(C)(x - x_0)}{1 - \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right\} \leqslant f(x).$$

$\lhd$ Положим $g(x) := f(x + x_0) - f(x_0)$, $d := e - f(x_0)$. Тогда $-\infty < \inf\{g(x) : x \in C\} = d \leqslant 0$. Пусть $P := H(g)$ — преобразование Хёрмандера оператора g. Если $|t| < \varepsilon$ и $x \in (1-\varepsilon)C$, то $x/(1+t) \in C$, поэтому

$$P((0,1) + (x,t)) = (1 + t)\,f(x/(1 + t)) \geqslant (1 + t)d \geqslant (1 + \varepsilon)d.$$

В силу (1) для всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется

$$P(x,t) \geqslant (1 + \varepsilon)d \cdot \mu((1 - \varepsilon)C \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = (1 + \varepsilon)d \cdot \max\left\{\frac{\mu(C)x}{1 - \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

При $t = 1$ отсюда получаем

$$g(x) \geqslant (1 + \varepsilon)d \cdot \max\left\{\frac{\mu(C)x}{1 - \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Воспользовавшись соотношениями $f(x) = g(x - x_0) + f(x_0)$ и $d = e - f(x_0)$, приходим к требуемой оценке

$$f(x) \geqslant (1 + \varepsilon)(e - f(x_0)) \cdot \max\left\{\frac{1}{1 - \varepsilon}\mu(C)(x - x_0), \frac{1}{\varepsilon}\right\} + f(x_0). \ \rhd$$

(3) *Если f, C и e те же, что и в (2), то при $\varepsilon := 1/2$ будет* $f(x) \geqslant 3(e - f(x_0)) \cdot \max\{\mu(C)(x - x_0), 1\} + f(x_0)$.

$\lhd$ Очевидное следствие (2). $\rhd$

4.3.7. Рассмотрим вопрос о существовании аффинных минорант у выпуклого оператора.

(1) *Допустим, что f — выпуклый оператор, действующий из локально выпуклого пространства X в $E^{\bullet}$ и ограниченный снизу элементом $a \in E$ на некотором открытом множестве U. Тогда для любой точки $x_0 \in U \cap \mathrm{dom}(f)$ существуют аффинный оператор $A : X \to E$ и окрестность нуля V такие, что*

$$A \leqslant f;\ 3(a - f(x_0)) + f(x_0) \leqslant Ax_0;$$

$$|Ax - Ax_0| \leqslant 3(f(x_0) - a) \quad (x \in V).$$

$\lhd$ Если выполнены указанные условия, то для некоторой непрерывной полунормы p на X будет

$$e := \inf \{f(x_0 + x) :\ p(x) \leqslant 1\} > -\infty.$$

Положим

$$g(x) := -3(e - f(x_0)) \cdot \max\{p(x - x_0), 1\} - f(x_0) \quad (x \in X).$$

Полагая $C := \{p \leqslant 1\}$ в 4.3.6 (3), получим $f(x) + g(x) \geqslant 0\,(x \in X)$. По теореме о сэндвиче (см. 3.2.15) найдется аффинный оператор $A : X \to E$ такой, что

$$-g(x) \leqslant Ax \leqslant f(x) \quad (x \in X).$$

В частности,

$$Ax_0 \geqslant -g(x_0) = 3(e - f(x_0)) + f(x_0) \geqslant 3(a - f(x_0)) + f(x_0).$$

Если $Th := A(x_0 + h) - Ax_0$, то $Th \geqslant -g(x_0 + h) - f(x_0)$ для всех $h \in X$. Подстановка в это неравенство выражения для g приводит к оценке

$$Th \geqslant -3(f(x_0 - e)) \cdot \max\{p(h), 1\} \quad (x \in X).$$

Если $h \in V := \{p \leqslant 1\}$, то $Th \geqslant -3(f(x_0) - e)$. Ввиду симметричности множества V отсюда выводим, что $|Th| \leqslant 3(f(x_0) - e)$ для всех $h \in V$. $\rhd$

(2) *Если выпуклый оператор $f : X \to m(E)^\bullet$ полунепрерывен снизу в некоторой точке $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, то $\mathscr{A}_\pi(f) \neq \varnothing$, т. е. существует хотя бы одна проскалярная аффинная миноранта оператора f.*

$\lhd$ Пусть $e \ll f(x_0)$ и пусть разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}}$ в $\mathfrak{Pr}\,(E)$, где $\mathscr{F}$ — базис фильтра окрестностей точки x_0, таково, что $\pi_\alpha(f(x) - e) \geqslant 0$ для всех $x \in \alpha$ и $\alpha \in \mathscr{F}$. Оператор $\pi_\alpha \circ f$ ограничен снизу (элементом $\pi_\alpha e \in E$) на множестве α. Поэтому согласно (2) существует o-ограниченная аффинная миноранта A_α оператора $\pi_\alpha \circ f$, удовлетворяющая условию

$$|A_\alpha x - A_\alpha x_0| \leqslant c := f(x_0) - e \quad (x \in \beta),$$

где β — окрестность нуля, содержащаяся в $\alpha - x_0$, и элемент $c \in E^+$ не зависит от α. Отсюда видно, что формулы

$$T_\alpha h := A_\alpha(h) - A_\alpha(0), \quad a := \sum \pi_\alpha A_\alpha(0);$$

$$A := T^\alpha, \quad Th := \sum \pi_\alpha \circ T_\alpha h \quad (h \in X)$$

корректно определяют аффинный оператор $A : X \to m(E)$, причем если $Th := Ah - A0$, то $\pi_\alpha \circ T \in \mathscr{L}_0\,(X, E)$ для всех $\alpha \in \mathscr{F}$, т. е. T является проскалярным. Далее, просуммировав по $\alpha \in \mathscr{F}$ неравенства $\pi_\alpha \circ A_\alpha \leqslant \pi_\alpha \circ f$, получим $A \in \mathscr{A}_\pi(f)$. $\rhd$

4.3.8. Обратимся теперь непосредственно к вопросу об инволютивности преобразования Юна — Фенхеля. Пусть X — локально выпуклое пространство, а E — расширенное K-пространство.

(1) *Выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$ полунепрерывен снизу в точке $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ в том и только в том случае, если*

$$f(x_0) = \sup\{Ax_0 : A \in \mathscr{A}_\pi(f)\}.$$

$\lhd$ Допустим, что f полунепрерывен снизу в точке $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. В силу 4.3.7 существует оператор $A \in \mathscr{A}_\pi(f)$. Если $g := f - A$, то g полунепрерывен снизу в точке x_0 и $\mathscr{A}_\pi(g) + A = \mathscr{A}_\pi(f)$. Поэтому требуемое означает, что $g(x_0) = \sup\{Ax_0 : A \in \mathscr{A}_\pi(g)\}$. В силу этих рассуждений можно считать с самого начала, что $f \geqslant 0$. Положим

$$g(x_0) := \sup\{Ax_0 : A \in \mathscr{A}_\pi(f)\}.$$

Нужно показать, что $g(x_0) = f(x_0)$. Допустим, что это не так, т. е. $g(x_0) < f(x_0)$. Тогда найдутся ненулевой проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ и число $\delta > 0$ такие, что $f(x_0) - \delta\pi\mathbb{1} \geqslant g(x_0) + 3\delta\pi\mathbb{1}$. Поскольку f полунепрерывен снизу в точке x_0, то существует разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \subset \mathfrak{Pr}(E)$, где $\mathscr{F}$ — базис фильтра окрестностей x_0, такое, что

$$\pi_\alpha f(x_0) \geqslant e_\alpha,\ e_\alpha := \pi_\alpha(f(x_0) - \delta\pi\mathbb{1}) \quad (x \in \alpha,\ \alpha \in \mathscr{F}).$$

Так как $\sup\{\pi_\alpha : \alpha \in \mathscr{F}\} = I_E$, то $\rho := \pi_\beta \circ \pi \neq 0$ для некоторого $\beta \in \mathscr{F}$. Применим теперь предложение 4.3.7 (1) к оператору $\pi_\beta f$ в точке $x_0 \in U \cap \operatorname{dom}(f)$, где $U := \operatorname{int}(\beta)$. Тем самым найдем аффинный оператор $A_\beta \in \mathscr{A}_0(\pi_\beta f) \subset \mathscr{A}_0(f)$ $(f \geqslant 0)$, удовлетворяющий оценкам

$$\begin{gathered}\pi_\beta f(x_0) + 3(e_\beta - \pi_\beta f(x_0)) \leqslant A_\beta x_0;\\ |A_\beta x - A_\beta x_0| \leqslant 3(\pi_\beta f(x_0) - e_\beta) \quad (x \in V),\end{gathered}$$

где V — некоторая окрестность нуля, а $\mathscr{A}_0(f)$ — множество всех аффинных минорант оператора f. Подставляя в эти выражения $e_\beta = \pi_\beta(f(x_0) - \delta\rho\mathbb{1})$, получим

$$\begin{gathered}A_\beta x_0 \geqslant \pi_\beta f(x_0) - 3\delta\rho\mathbb{1} \geqslant \pi_\beta g(x_0) + \delta\rho\mathbb{1},\\ |A_\beta x - A_\beta x_0| \leqslant 3\delta\rho\mathbb{1} \leqslant \pi_\beta(3\delta\mathbb{1}) \quad (x \in V).\end{gathered}$$

Первое неравенство дает $A_\beta x_0 \gg \pi_\beta g(x_0)$, а из второго вытекает, что A_β — проскалярный оператор, т. е. $A_\beta \in \mathscr{A}_\pi(f)$. Таким образом, приходим к противоречию:

$$\pi_\beta g(x_0) \geqslant \sup\{\pi_\beta A x_0 : A \in \mathscr{A}_\pi(f) \geqslant A_\beta x_0 > \pi_\beta g(x_0)\},$$

доказывающему равенство $f(x_0) = g(x_0)$. $\triangleright$

(2) *Если оператор f полунепрерывен снизу, то утверждение* (1) *верно для всех $x_0 \in X$.*

$\triangleleft$ Возьмем $x_0 \in \operatorname{cl}(\operatorname{dom}(f)) \setminus \operatorname{dom}(f)$ и подберем сеть $(x_\nu) \subset \operatorname{dom}(f)$, сходящуюся к x_0. Если $a := g(x_0) < +\infty$, то для любого $e \gg 0$ найдется такое разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}} \subset \mathfrak{Pr}(E)$, что $\pi_\alpha f(x) \geqslant \pi_\alpha(a + e)$ для всех $x \in \alpha$. Пусть $\pi_\beta \neq 0$ и $x_\nu \in \beta$ для всех

$\nu \geqslant \nu(0)$, где $\nu(0)$ — подходящим образом фиксированный индекс. Тогда для таких ν при $0 < t < 1$ и $z_{t,\nu} := tx_0 + (1-t)x_\nu$ будет

$$\pi_\beta g(z_{t,\nu}) \leqslant \pi_\beta(ta + (1-t)g(x_\nu)) \leqslant t\pi_\beta(g(x_\nu) - e) + (1-t)\pi_\beta g(x_\nu),$$

$$\pi_\beta g(z_{t,\nu}) \leqslant \pi_\beta g(x_\nu) - t\pi_\beta e,$$

ибо $f(x_\nu) = g(x_\nu)$ в силу уже доказанного. Далее, для фиксированного $\nu \geqslant \nu(0)$ имеем $\lim\limits_{t\to 0} z_{t,\nu} = x_\nu$. Ввиду полунепрерывности снизу g в точке x_ν найдется разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{F}(\nu)}$, для которого

$$\rho_\alpha g(x) \geqslant \rho_\alpha g(x_\nu) - (1/2)e \quad (x \in \alpha,\ \alpha \in \mathscr{F}(\nu) \subset \tau(x_\nu)).$$

Найдем такой индекс $\gamma \in \mathscr{F}(\nu)$, чтобы $\pi := \rho_\gamma \circ \pi_\beta \neq 0$. Для достаточно малых $t > 0$ имеем $z_{t,\nu} \in \gamma$, следовательно,

$$\pi(g(x_\nu) - te) \geqslant \pi g(z_{t,\nu}) \geqslant \pi(g(x_\nu) - (1/2)e).$$

Отсюда при $t \to 0$ получаем противоречивое соотношение $e \leqslant 0$. Тем самым должно быть $g(x_0) = +\infty = f(x_0)$.

Предположим, наконец, что $x_0 \notin \operatorname{cl}\operatorname{dom}(f)$. Подберем функционал $x' \in X'$ так, чтобы

$$t := \sup\{\langle x|x'\rangle :\ x \in \operatorname{dom}(f)\} < \langle x_0|x'\rangle.$$

Рассмотрим аффинный оператор $A : X \to E$, действующий по правилу $A : x \mapsto \varepsilon e(\langle x|x'\rangle - t)$, где $e \in E^+$ и $\varepsilon := 1/(\langle x_0|x'\rangle - t)$. Если $x \in \operatorname{dom}(f)$, то $Ax \leqslant 0 \leqslant f(x)$. Если $x \notin \operatorname{dom}(f)$, то $Ax < +\infty = f(x)$. Кроме того, $Ax_0 = \varepsilon(\langle x_0|x'\rangle - t)e = e$. Следовательно, $g(x_0) = \sup\{Ax_0 : A \in \mathscr{A}_\pi(x_0)\} \geqslant \sup(E^+) = +\infty = f(x_0)$. $\triangleright$

4.3.9. Отметим простые следствия из установленных фактов. Допустим, что X и E такие же, как и в 4.3.8.

(1) *Выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$ полунепрерывен снизу в точке $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ тогда и только тогда, когда*

$$f(x_0) = \sup\{Tx_0 - f^*(T) : T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)\}.$$

$\triangleleft$ Этот факт выводится из 4.3.8 так же, как и 4.1.2 (4). $\triangleright$

(2) *Для выпуклого оператора $f : X \to E^{\bullet}$ равносильны утверждения:*

(a) *f полунепрерывен снизу;*

(b) *f является верхней огибающей множества всех своих проскалярных аффинных минорант;*

(c) $f(x) = \sup\{Tx - f^*(T) : T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)\} \quad (x \in X)$.

(3) *Пусть f^* и f^{**} определены относительно двойственности $X \leftrightarrow \mathscr{L}_\pi(X, E)$, т. е.*

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) : \ x \in X\} \quad (T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)).$$

$$f^{**}(x) = \sup\{Tx - f^*(T) : \ T \in \mathscr{L}_\pi(X, E)\} \quad (x \in X).$$

Для того чтобы $f^{**} = f$, необходимо и достаточно, чтобы отображение f было выпукло и полунепрерывно сверху.

(4) *Сублинейный оператор $P : X \to E^{\bullet}$ полунепрерывен снизу в том и только в том случае, если*

$$P(x) = \sup\{Tx : T \in \partial^a P \cap \mathscr{L}_\pi(X, E)\} \quad (x \in X).$$

4.3.10. Теперь мы откажемся от предположения о расширенности E. Пусть E — локально выпуклое K-пространство. Это означает, что E является K-пространством и снабжено отделимой локально выпуклой топологией, в которой конус E^+ нормален. Обозначим символом $\mathscr{A}(f)$ множество всех непрерывных аффинных минорант отображения $f : X \to E^{\bullet}$, т. е.

$$\mathscr{A}(f) := \{T^e : \ T^e \leqslant f, \ T \in \mathscr{L}(X, E)\}.$$

Из нормальности конуса E^+ легко следует, что $\mathscr{L}_0(X, E) \subset \mathscr{L}(X, E)$. Однако результаты 4.3.9 показывают, что полунепрерывный снизу выпуклый оператор лишь «кусочно» является верхней огибающей множества своих o-ограниченных аффинных минорант. В этой связи введем такое определение. Для множества $A \subset (E^{\circ})^X$ мы будем писать $f(x) = \pi\text{-}\sup\{l(x) : l \in A\}$, если для любого $e \in E$, $e < f(x)$, найдутся ненулевой проектор $\rho \in \mathfrak{Pr}(E)$ и отображение $l \in A$ такие, что $\rho e \leqslant \rho l(x) \leqslant \rho f(x)$. При этом полагаем $\rho(+\infty) = +\infty$.

(1) *Теорема.* *Пусть X — локально выпуклое пространство, E — локально выпуклое K-пространство. Тогда если выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ полунепрерывен снизу в точке $x_0 \in$ $\operatorname{dom}(f)$, то*

$$f^{**}(x_0) = f(x_0) = \pi\text{-}\sup\{Ax_0 :\ A \in \mathscr{A}(f)\}.$$

(2) *Если X и E те же, что и в (1), то для любого полунепрерывного снизу сублинейного оператора $P : X \to E^{\bullet}$ имеет место представление*

$$P(x) = \pi\text{-}\sup\{Tx : T \in \partial P\} \quad (x \in X).$$

4.3.11. В заключение данного параграфа приведем результат о булевозначной реализации полунепрерывных снизу отображений, дающий новый взгляд на изложенное выше. Так же, как и в 2.4 фиксируем булеву алгебру B, и пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Напомним, что по теореме Гордона 2.4.3 спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ является расширенным K-пространством. Положим $E := \mathscr{R}{\downarrow}$.

Возьмем локально выпуклое пространство (X, τ). Легко проверить, что $(X^{\wedge}, \imath^{\wedge})$ есть топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В силу принципа переноса П4.6 (1) и принципа максимума П4.6 (3) существует элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\mathscr{X}$ — пополнение $(X^{\wedge}, \tau^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$. Как обычно, мы будем считать, что выполнено соотношение $[\![X^{\wedge}$ — плотное $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейное подмножество $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Вновь используя принцип переноса, замечаем, что $[\![\mathscr{X}$ — полное локально выпуклое пространство$]\!] = \mathbb{1}$.

Теорема. *Пусть $\Phi : X \to E^{\bullet}$ — полунепрерывное снизу отображение. Тогда существует единственный элемент $\bar{\Phi} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![\,\bar{\Phi} : \mathscr{X} \to \mathscr{R}^{\bullet} \text{ — полунепрерывная снизу функция}\,]\!] = \mathbb{1}$$

и

$$[\![\Phi\,(x) = \bar{\Phi}\,(x^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$$

для всех $x \in X$. Наоборот, если $\varphi \in \mathbb{V}^{(B)}$ и

$$[\![\,\varphi : \mathscr{X} \to \mathscr{R}^{\,\bullet} \text{ — полунепрерывная снизу функция}\,]\!] = \mathbb{1},$$

причем для каждого $x \in X$ *либо* $[\![\varphi(x^\wedge) = +\infty]\!] = \mathbb{1}$, *либо* $[\![\varphi(x^\wedge) < +\infty]\!] = \mathbb{1}$, *то существует единственное полунепрерывное снизу отображение* $\Phi : X \to E^\bullet$, *для которого* $\bar{\Phi} = \varphi$. *Соответствие* $\Phi \to \bar{\Phi}$ *обладает следующими свойствами:*

(1) Φ *выпукло (сублинейно или линейно)* $\leftrightarrow$ $[\![\bar{\Phi}$ *выпукла (сублинейна или линейна)*$]\!] = \mathbb{1}$;

(2) $\Phi \in \mathscr{L}_\pi(X, E) \leftrightarrow [\![\bar{\Phi} \in \mathscr{X}']\!] = \mathbb{1}$;

(3) $T^e \in \mathscr{A}_\pi(\Phi) \leftrightarrow [\![\bar{T}^e \in \mathscr{A}(\bar{\Phi})]\!] = \mathbb{1}$;

(4) $\Phi \in \mathscr{L}_0(X, E) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists C \in \mathbb{R}^+)\ (\exists U \in \tau)\ \Big([\![\sup\limits_{x \in U^\wedge} \{\bar{\Phi}(x)\} \leqslant C^\wedge]\!] = \mathbb{1}\Big)$.

$\lhd$ Покажем, что отображение $\Phi : X \to E^\bullet$ полунепрерывно снизу, если и только если $\Phi{\uparrow} : X^\wedge \to \mathscr{R}^\bullet$ — полунепрерывная снизу функция внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Последнее означает, что выполняется равенство

$$[\![(\forall x_0 \in X^\wedge)(\forall e \in \mathscr{R})(e < \Phi{\uparrow}(x_0) \to$$
$$\to (\exists \alpha \in \tau^\wedge)(\forall x \in \alpha)(e \leqslant \Phi{\uparrow}(x^\wedge)))]\!] = \mathbb{1}.$$

Вычисление оценок для первых двух кванторов общности приводит к следующей эквивалентной формулировке: для любых $x_0 \in X$ и $e \in E$ должно быть

$$[\![e < \Phi(x_0) \to (\exists \alpha \in \tau^\wedge)\ (\forall x \in \alpha)\ (e \leqslant \Phi{\uparrow}(x^\wedge))]\!] = \mathbb{1}$$

или

$$[\![e < \Phi(x_0)]\!] = \bigvee_{\alpha \in \tau} \bigwedge_{x \in \alpha} [\![e \leqslant \Phi(x^\wedge)]\!].$$

Заметим, что $\rho \leqslant [\![e < \Phi(x_0)]\!]$ в том и только в том случае, если $\rho e \ll \rho\Phi(x_0)$. Следовательно, используя принцип перемешивания, можно найти разбиение $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ проектора π на компоненту $\{\Phi(x_0) - e\}^{dd}$ такое, что $\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha \Phi(x)$ для всех $x \in \alpha$. Суммируя сказанное, заключаем, что $[\![\Phi{\uparrow}$ полунепрерывна снизу$]\!] = \mathbb{1}$ лишь в том случае, если выполнено условие: для всех $x_0 \in X$ и $e \in E$, $e \leqslant f(x_0)$, существует разбиение (π_α) проектора $\pi := [\Phi(x_0) - e]$ такое, что $\pi_\alpha e \leqslant \pi_\alpha \Phi(x)$ при $x \in \alpha$. Последнее же есть условие полунепрерывности снизу отображения Φ ввиду 4.3.2. Пусть $\mathrm{cl}\,(\mathrm{epi}\,(\Phi{\uparrow}))$ — замыкание надграфика $\mathrm{epi}(\Phi{\uparrow}) \subset X^\wedge \times \mathbb{R}^\wedge$ в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{R}$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственная полунепрерывная снизу функция $\bar{\Phi} : \mathfrak{X} \to \mathscr{R}^{\bullet}$, определяемая условием $\mathrm{epi}(\bar{\Phi}) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{epi}\,(\Phi\uparrow))$. При этом будет $[\![(\forall x \in x^{\wedge})\ (\bar{\Phi}(x) = \Phi\uparrow(x))]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\Phi(x) = \bar{\Phi}\,(X^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X$. Так как полунепрерывная снизу функция однозначно восстанавливается по своим значениям на плотном множестве, то верно и обратное, т. е. для полунепрерывной снизу функции $\varphi : \mathscr{X} \to \mathscr{R}^{\bullet}$ при указанном условии имеется и притом единственное полунепрерывное снизу отображение $\Phi : X \to E^{\bullet}$ (а именно, $\Phi := (\varphi \restriction X^{\wedge})\downarrow$) такое, что $\bar{\Phi}\uparrow = \varphi \restriction X^{\wedge}$, и тем самым $\bar{\Phi} = \varphi$. Оставшиеся утверждения сводятся к несложным вычислениям. $\triangleright$

4.4. Операторы Магарам

Субдифференцирование интегральных функционалов или операторов играет в выпуклом анализе такую же важную роль, какая в вариационном исчислении принадлежит правилу дифференцирования интеграла по параметру. Однако явление перестановочности операций субдифференцирования и интегрирования оказывается сложнее своего классического аналога и требует привлечения довольно тонких функционально-аналитических методов. Исследование указанного явления неразрывно связано с анализом специального класса сублинейных операторов, которому и посвящен настоящий параграф.

4.4.1. Пусть X и E — некоторые K-пространства и P — возрастающий сублинейный оператор из X в E. Говорят, что P удовлетворяет *условию Магарам* (= обладает *свойством Магарам*), если для любых $x \in X^{+}$ и $e_1, e_2 \in E^{+}$ из равенства $P(x) = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X^{+}$, что $x = x_1 + x_2$ и $P(x_l) = e_l$ ($l := 1, 2$). Возрастающий порядково непрерывный сублинейный оператор, удовлетворяющий условию Магарам, называют *сублинейным оператором Магарам.* Заметим, что для линейного положительного оператора $T : X \to E$ указанное здесь условие Магарам выполняется лишь в том случае, если $T([0, x]) = [0, Tx]$ для всех $x \in X^{+}$. Итак, линейный оператор Магарам — это порядково непрерывный положительный оператор, сохраняющий порядковые отрезки.

Символом X_P обозначим *носитель* P, т. е.

$$X_P := \{x \in X : P\,(|x|) = 0\}^{d}.$$

Пусть, кроме того, $E_p := \{P(|x|) : x \in X\}^{dd}$ и $\mathscr{D}_m(P)$ — наибольший фундамент в максимальном расширении $m(X)$ пространства X (см. 2.4.8), на который распространяется P по o-непрерывности. Таким образом, $z \in \mathscr{D}_m(P)$ в том и только в том случае, если $z \in m(X)$ и множество $\{P(x) : 0 \leqslant x \leqslant |z|\}$ ограничено в E. Будем говорить, что сублинейный оператор $Q : X \to E$ *абсолютно непрерывен относительно* P, если $Q(x) \in \{P(x)\}^{dd}$ для всех $x \in X$. Обозначим символом $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ множество всех упорядоченных пар $(\alpha, \mathscr{D}(\alpha))$ таких, что $\alpha \in \mathrm{Orth}(m(E))$ и $\mathscr{D}(\alpha) := \{e \in E : \alpha e \in E\}$. Заметим, что алгебра ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(m(E))$ является расширенным K-пространством. Кроме того, сопоставление $\alpha \mapsto (\alpha, \mathscr{D}(\alpha))$ осуществляет биекцию $\mathrm{Orth}(m(E))$ на $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$. Таким образом, на множестве $\mathrm{Orth}(E)$ имеется естественная структура f-алгебры и расширенного K-пространства.

4.4.2. Примеры.

(1) Всякий возрастающий сублинейный функционал удовлетворяет условию Магарам.

(2) Оператором Магарам является любой сублинейный ортоморфизм, т. е. возрастающий сублинейный оператор, действующий в K-пространстве и оставляющий инвариантной всякую компоненту.

(3) Пусть E — произвольное K-пространство, $\mathfrak{A}$ — произвольное множество. Обозначим символом $l_1(\mathfrak{A}, E)$ совокупность всех o-суммируемых семейств элементов E, индексированных посредством $\mathfrak{A}$:

$$l_1(\mathfrak{A}, E) := \left\{ (e_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in E^{\mathfrak{A}} : \ o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} |e_\alpha| \in E \right\}.$$

Определим операторы P и T из $l_1(\mathfrak{A}, E)$ в E формулами

$$P(u) := o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} e_\alpha^{+}, \quad Tu := o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} e_\alpha$$

$$(u := (e_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in l_1(\mathfrak{A}, E)).$$

Тогда $l_1(\mathfrak{A}, E)$ с естественными линеаризацией и упорядочением есть K-пространство, а P и T — соответственно сублинейный и линейный операторы Магарам. Как видно, $T \in \partial P$.

(4) Пусть $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ — пространство всех порядково ограниченных отображений из $\mathfrak{A}$ в E. Нетрудно убедиться, что канонический сублинейный оператор $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ удовлетворяет условию Магарам. Однако $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ не является оператором Магарам для бесконечного $\mathfrak{A}$, так как в этом случае нарушается условие порядковой непрерывности. Тем не менее сужение $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ на $l_1(\mathfrak{A}, E)$ есть оператор Магарам. В частности, оператором Магарам является конечно-порожденный канонический оператор $\varepsilon_n := \varepsilon_{\{1,\dots,n\},E} : E^n \to E, \varepsilon_n : (e_1, \dots, e_n) \mapsto e_1 \vee \dots \vee e_n$.

(5) Пусть (Q, Σ, μ) — вероятностное пространство, а E — банахова решетка. Рассмотрим пространство $X := L_1(Q, \Sigma, \mu, E)$ интегрируемых по Бохнеру E-значных функций, и пусть $P : X \to E$ — интеграл Бохнера от положительной части

$$P(f) := \int\limits_Q f^+ d\mu \quad (f \in X).$$

Если банахова решетка E порядково полна и имеет порядково непрерывную норму ($x_\alpha \downarrow 0 \to \|x_\alpha\| \to 0$), то X является K-пространством при естественном упорядочении ($f \geqslant 0 \leftrightarrow f(t) \geqslant 0$ для почти всех $t \in Q$), P — сублинейный оператор Магарам.

4.4.3. *Теорема.* *Пусть X и E — некоторые K-пространства, а P — сублинейный оператор Магарам из X в E. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм h расширенного K-пространства $\mathrm{Orth}^\infty(E_P)$ на правильное K-подпространство $\mathrm{Orth}^\infty(X_P)$ такой, что выполнены условия:*

(1) *$h(\mathfrak{Pr}(E_P))$ является правильной подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(X_P)$;*

(2) *$h(Z(E_P))$ — подрешетка и подкольцо в $Z(X_P)$;*

(3) *для любого возрастающего о-непрерывного сублинейного оператора $Q : X \to E$, абсолютно непрерывного относительно P, выполняется $\pi \circ Q(x) = Q \circ h(\pi)(x)$ для всех $\pi \in \mathrm{Orth}^\infty(E_P)^+$ и $x \in \mathscr{D}(\pi)$; при этом Q есть оператор Магарам.*

$\lhd$ Не ограничивая общности, можно предположить, что $X = X_p$ и $E = E_p$. Для каждой компоненты L K-пространства E положим $h(L) := \{x \in X : P(|x|) \in L\}$. Ввиду сублинейности P множество $h(L)$ есть векторное подпространство в X, причем $h(\{0\}) = 0$

и $h(E) = X$. Более того, $h(L)$ есть компонента в X для любого $L \in \mathfrak{B}(E)$. (Везде $\mathfrak{B}(E)$ — булева алгебра компонент в E.)

В самом деле, если $x \in h(L)$ и $|y| \leqslant x$, то $P(|y|) \leqslant P(x) \in L$, т. е. $y \in L$, что и доказывает нормальность подпространства $h(L)$. Пусть множество $A \subset h(L) \cap X^+$ направлено вверх и ограничено сверху элементом $x_0 \in X^+$. Тогда множество $P(A) \subset L$ ограничено сверху элементом $P(x_0)$ и, учитывая o-непрерывность оператора P, получаем

$$P(\sup(A)) = \sup\{P(x) : x \in A\} \in L.$$

Тем самым $\sup(A) \in L$. Отсюда заключаем, что $h(L)$ есть компонента в X.

Легко заметить, что отображение $h : \mathfrak{B}(E) \to \mathfrak{B}(X)$ изотонно: $L_1 \subset L_2$ влечет $h(L_1) \subset h(L_2)$. Покажем, что h инъективно. Предположим для этого, что $h(L_1) = h(L_2)$ для некоторых $L_1, L_2 \in \mathfrak{B}(E)$ и тем не менее $L_1 \neq L_2$. Возьмем элемент $0 < e \in L_1$ такой, что edL_2. Так как $e \in L_1 \subset E = P(X)^{dd}$, то найдутся $0 < c_1 \in E$ и $0 < x \in X$ такие, что $c_1 \leqslant e \wedge P(x)$. Если $e_2 := P(x) - e_1$, то, благодаря условию Магарам, $x = x_1 + x_2$ и $P(x_l) = e_l$ $(l := 1, 2)$ для некоторых $0 < x_l \in X$ $(l := 1, 2)$. Но тогда $x_1 \in h(L_1)$ и $x_1 \notin h(L_2)$, что противоречит предположению $h(L_1) = h(L_2)$. Это доказывает инъективность h.

Пусть $\mathscr{B}'$ — упорядоченное по включению множество компонент в X, совпадающее с образом h, т. е. $\mathscr{B}' := \{h(L) : L \in \mathfrak{B}(E)\}$. Установленное выше означает, что h — изоморфизм упорядоченных систем $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathscr{B}'$. Выясним, какие операции в $\mathscr{B}'$ соответствуют булевым операциям в $\mathfrak{B}(E)$ при изоморфизме h. Прежде всего отметим, что

$$h(\inf(\mathfrak{U})) = h\Big(\bigcap(\mathfrak{U}) = \bigcap\{h(L) : L \in \mathfrak{U}\} \quad (\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}(E)\Big).$$

Далее, пусть $L_1 \oplus L_2$ — дизъюнктное разложение K-пространства E. Тогда $h(L_1) \cap h(L_2) = \{0\}$. Если же $x \in X$, то $P(x) = e_1 + e_2$, где $e_l := \mathrm{Pr}_{L_l}(e)$ $(l := 1, 2)$, стало быть, в силу условий Магарам для P существуют такие x_1' и x_2' из X^+, что $|x| = x_1' + x_2'$ и $P(x_l') = e_l$ $(l := 1, 2)$. Далее, для некоторых $x_1, x_2 \in X$ имеем $x = x_1 + x_2$ и $|x_l| = x_l'$ $(l := 1, 2)$. Последнее дает $x_1 \in h(L_1)$ и $x_2 \in h(L_2)$. Следовательно, X есть алгебраическая прямая сумма подпространств $h(L_1)$ и $h(L_2)$. Более того, если $x_l \in h(L_l)$ $(l := 1, 2)$, то $P(|x_1| \wedge |x_2|) \leqslant$

$P(|x_1|) \wedge P(|x_2|) \in L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Значит, $P(|x_1| \wedge |x_2|) = 0$ и, благодаря существенной положительности $P(X = X_P)$, получим $x_1 d x_2$. Итак, компоненты $h(L_1)$ и $h(L_2)$ образуют дизъюнктное разложение K-пространства X. Тем самым $h(L^d) = h(L)^d$ для всех $L \in \mathfrak{B}(E)$. Поскольку отображение $h : \mathfrak{B}(E) \to \mathscr{B}'$ сохраняет точные нижние границы и дополнения, оно является o-непрерывным мономорфизмом $\mathfrak{B}(E)$ на o-замкнутую (правильную) подалгебру $\mathscr{B}'$ базы $\mathfrak{B}(X)$. Пусть $\mathscr{B}$ — булева алгебра проекторов на компоненты из $\mathscr{B}'$, и обозначим тем же символом h соответствующий изоморфизм из $\mathfrak{Pr}(E)$ на $\mathscr{B}' \subset \mathfrak{Pr}(X)$. Тогда по определению изоморфизма h будет $h(\pi)x = 0$ при $x \in h(\pi(E)^d)$ и $h(\pi)x = x$ при $x \in h(\pi(E))$ для каждого $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$.

Рассмотрим какой-либо сублинейный оператор $Q : X \to E$, абсолютно непрерывный относительно P. По определению изоморфизма h для $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ и $x \in X$ выполнено

$$Q \circ h(\pi)x \in \{P \circ h(\pi)x\}^{dd} \subset \pi(E).$$

Следовательно, $\pi^d \circ Q \circ h(\pi) = 0$ или $Q \circ h(\pi) = \pi \circ Q \circ h(\pi)$. Заменив в предыдущих рассуждениях π на π^d, получим $\pi \circ Q \circ h(\pi^d) = 0$. Отсюда

$$0 = \partial(\pi \circ Q \circ h(\pi^d)) = \pi \circ (\partial Q) \circ (I_x - \pi).$$

Поэтому $\pi \circ T = \pi \circ T \circ h(\pi)$ для всех $T \in Q$. Но тогда $\pi \circ Q = \pi \circ Q \circ h(\pi)$. Тем самым мы приходим к требуемому соотношению $\pi \circ Q = Q \circ h(\pi)$. Изоморфизм h продолжается единственным образом до изоморфизма пространства $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ на правильное подпространство в $\mathrm{Orth}^\infty(X)$, образованное теми элементами из $\mathrm{Orth}^\infty(X)$, спектры которых принимают свои значения в булевой алгебре $\mathscr{B} = h(\mathfrak{Pr}(E))$. Этот изоморфизм обозначим тем же символом h. Если $\alpha := \sum_{l=1}^n \alpha_l \pi_l$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ и $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{Pr}(E)$, то, очевидно, $\pi_l \circ \alpha \circ Q = \pi_l \circ Q(\lambda_l h(\pi_l)) = \pi_l \circ Q \circ h(\alpha)$ для всех l. Суммирование по l дает $\alpha \circ Q = Q \circ h(\alpha)$. Наконец, если $\alpha \in \mathrm{Orth}^\infty(E)^+$, то $\alpha = \sup(\alpha_\xi)$ для некоторого фильтрованного вверх семейства (α_ξ) в $Z(E)$. Элементы же $Z(E)$ являются r-пределами ортоморфизмов вида $\sum_{l=1}^n \lambda_l \pi_l$. Таким образом, для завершения доказательства остается лишь привлечь o-непрерывность оператора Q. $\triangleright$

4.4.4. *Пусть X и E — некоторые K-пространства и $T : X \to E$ — регулярный оператор такой, что $|T|$ — оператор Магарам. Тогда если $(Tx)^+ > 0$ для некоторого $x \in X^+$, то существует такой проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(X)$, что $T(\pi x) > 0$ и оператор $T \circ \pi$ положителен.*

$\triangleleft$ Пусть $Tx \ngeqslant 0$, и рассмотрим множество Π всех проекторов $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(X)$, удовлетворяющих неравенству $0 \geqslant T \circ \pi x$. Легко видеть, что $\Pi \neq \varnothing$ и в силу порядковой непрерывности оператора T всякая цепь в Π ограничена сверху. Следовательно, по лемме Куратовского — Цорна существует максимальный элемент π_0 множества Π. Если проектор $0 < \pi_1 \leqslant \pi_0^d$ таков, что $T \circ \pi_1 x \leqslant 0$, то

$$T \circ (\pi_1 + \pi_0)x \leqslant T \circ \pi_1 x + T \circ \pi_0 x \leqslant 0,$$

и приходим к противоречию: $\pi_0 < \pi_0 + \pi_1 \in \Pi$. Значит, $T \circ \pi_1 x \nleqslant 0$ для любого $0 \neq \pi_1 \in [0, \pi_0^d]$. Покажем, что всякий такой проектор на самом деле удовлетворяет неравенству $T \circ \pi_1 x \geqslant 0$. Для этого предположим, что $\pi_1 \neq 0$, $\pi_1 d \pi_0$ и $(T \circ \pi_1 x)^- > 0$. Пусть ρ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(T \circ \pi_1 x)^-$. Тогда $0 > \rho \circ T \circ \pi_1 x$ и в силу теоремы 4.3.3 имеем $T \circ h(\rho)\pi_1 x < 0$. Отсюда вытекает, в частности, что $h(\rho) \circ \pi_1 > 0$, а поскольку $h(\rho) \circ \pi_1 d \pi_0$, то, благодаря упомянутому выше свойству проектора π_0, получаем $T \circ h(\rho) \circ \pi_1 x \nleqslant 0$. Это противоречие показывает, что $T \circ \pi_1 x > 0$ для всех $\pi_1 \neq 0$, $\pi_1 d \pi_0$. Пусть, наконец, $[x]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом x. Тогда $\pi := \pi_0^d \circ [x]$ — искомый проектор. В самом деле, $T \circ \pi x = T \circ \pi_0^d x$ и $Tx = T \circ \pi_0^d x - (-T \circ \pi_0 x)$. Отсюда видно, что $T \circ \pi_0^d x \geqslant (Tx)^+ > 0$. С другой стороны, если $0 \leqslant y \in \{x\}^{dd}$ и $(e_\lambda^y)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — характеристика (или спектр) элемента y относительно x, то $e_\lambda^y = 0$ при $\lambda < 0$, а при $\lambda \geqslant 0$ имеем $T \circ \pi(e_\lambda^y) = T \circ \pi_0^d(e_\lambda^y) = T \circ \pi_0^d \circ [e_\lambda^y]x \geqslant 0$. Привлекая спектральную теорему Фрейденталя, известную из теории K-пространств, окончательно получим:

$$T \circ \pi(y) = T \circ \pi \biggl(\int\limits_0^\infty \lambda \, de_\lambda^y \biggr) \int\limits_0^\infty \lambda \, d(T \circ \pi(e_\lambda^y)) \geqslant 0. \ \triangleright$$

4.4.5. *Теорема.* *Пусть X и E — некоторые K-пространства и $T : X \to E$ — существенно положительный оператор Магарам. Тогда существует изоморфизм φ булевой алгебры $\mathfrak{G}\,(T)$ единичных элементов $\{T\}^{dd}$ на $\mathfrak{Pr}\,(X)$ такой, что $T \circ \varphi(S) = S$ для всех $S \in \mathfrak{G}\,(T)$.*

$\lhd$ Пусть T_0 — единственное o-непрерывное продолжение оператора T на $\mathscr{D}_m(T)$. Тогда сопоставление каждому оператору $S \in \mathfrak{G}(T_0)$ его сужения на X есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{G}(T_0)$ и $\mathfrak{G}(T)$. Булевы алгебры $\mathfrak{Pr}(X)$ и $\mathfrak{Pr}(\mathscr{D}_m(T))$ также изоморфны. Тем самым, не ограничивая общности, мы можем предполагать $X = \mathscr{D}_m(T)$. Всякому проектору $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$ поставим в соответствие оператор $\psi(\pi) := T \circ \pi$. Тогда ψ — возрастающее отображение из $\mathfrak{Pr}(T)$ в $\{T\}^{dd}$, причем $\psi(0) = 0$ и $\psi(I_X) = T$. Ясно, что если проекторы π и ρ дизъюнктны, то носители операторов $\psi(\pi)$ и $\psi(\rho)$ также дизъюнктны, поэтому $\psi(\pi)d\psi(\rho)$. Кроме того, для $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$ справедливы равенства

$$\psi(I_X - \pi) = T \circ (I_X - \pi) = T - T \circ \pi = T - \psi(\pi),$$

следовательно, $\psi(\pi^d) = \psi(\pi)^d$. Итак, $\psi(\pi) \in \mathfrak{G}(T)$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$.

Рассмотрим два произвольных проектора π_1 и π_2 из $\mathfrak{Pr}(X)$. Поскольку проекторы $\rho_l := \pi_l - \pi_1 \circ \pi_2$ $(l := 1, 2)$ дизъюнктны, то операторы $\psi(\rho_1)$ и $\psi(\rho_2)$ также дизъюнктны. С другой стороны,

$$\psi(\pi_1) \wedge \psi(\pi_2) - \psi(\pi_1 \wedge \pi_2) = T \circ \pi_1 \wedge T \circ \pi_2 - T \circ \pi_1 \circ \pi_2 =$$

$$= (T \circ \pi_1 - T \circ \pi_1 \circ \pi_2) \wedge (T \circ \pi_2 - T \circ \pi_1 \circ \pi_2) = \psi(\rho_1) \wedge \psi(\rho_2) = 0.$$

Значит, $\psi(\pi_1 \wedge \pi_2) = \psi(\pi_1) \wedge \psi(\pi_2)$. Таким образом, ψ — гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(X)$ в булеву алгебру $\mathfrak{G}(T)$. Из существенной положительности оператора T следует, что если $\psi(\pi) = 0$ для некоторого $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$, то $\pi = 0$. Это означает, что ψ на самом деле является мономорфизмом, и осталось установить его сюръективность.

Пусть $S \in \mathfrak{G}(T)$, и рассмотрим множество

$$\Pi := \{\pi \in \mathrm{Orth}(X)^+ : T \circ \pi \leqslant S\}.$$

Пользуясь леммой Куратовского — Цорна, покажем, что Π содержит максимальный элемент. В самом деле, Π непусто и для линейно упорядоченного множества $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в Π множество $(T \circ \pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ ограничено, так как оно содержится в $[0, S]$. Но тогда из предположения

$X = \mathscr{D}_m(T)$ вытекает, что $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — ограниченное множество. Если $\pi_0 := \sup\{\pi_\xi : \xi \in \Xi\}$, то $\pi_0 = o\text{-}\lim \pi_\xi$ и благодаря порядковой непрерывности оператора T имеем:

$$T \circ \pi_0 = T \circ (o\text{-lim } \pi_\xi) = o\text{-lim } T \circ \pi_\xi \leqslant S,$$

т. е. $\pi_0 \in \Pi$. Таким образом, в множестве Π имеется максимальный элемент $\pi \in \Pi$. Покажем, что $T \circ \pi = S$. Для этого предположим противное, и пусть оператор $S_1 := S - T\circ\pi$ принимает строго положительное значение на некотором $0 < x_0 \in X$. Тогда при подходящих $0 < \varepsilon < 1$ и $0 \neq \rho \in \mathfrak{Pr}(E)$ имеем $\rho(S_1 x_0 - \varepsilon\rho \circ Tx_0) > 0$. Оператор $\rho \circ |S_1 - \varepsilon T|$ абсолютно непрерывен относительно T и по теореме 4.4.3 является оператором Магарам. Согласно предложению 4.4.4 существует такой проектор $\pi_\varepsilon \in \mathfrak{Pr}(X)$, что $(S_1 - \varepsilon T) \circ \pi_\varepsilon x_0 > 0$ и $(S_1 - \varepsilon T) \circ \pi_\varepsilon \geqslant 0$. Первое из этих соотношений влечет $\pi_\varepsilon > 0$, а из второго имеем $T(\pi + \varepsilon\pi_\varepsilon) \leqslant S$. Итак, $\pi < \pi + \varepsilon\pi_\varepsilon \in \Pi$, что противоречит максимальности π в Π. Этим обосновано соотношение $S = T \circ \pi$. Далее, по условию, $S \wedge (T - S) = 0$, значит, $0 = (T\circ\pi)\wedge(T\circ(I_x - \pi)) \geqslant T(\pi\wedge(I_x - \pi)) \geqslant 0$. Последнее ввиду существенной положительности T приводит к равенству $\pi \wedge (I_X - \pi) = 0$, равносильному включению $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$. Сюръективность ψ тем самым доказана. Осталось заметить, что $\varphi := \psi^{-1}$ и есть искомый изоморфизм, ибо $T \circ \varphi(S) = \psi \circ \varphi(S) = S$. $\triangleright$

4.4.6. Отметим следующие следствия теорем 4.4.3 и 4.4.5.

(1) *Пусть X, E и T те же, что и в теореме* 4.4.3. *Тогда операторы S_1 и S_2 из компоненты $\{T\}^{dd}$ дизъюнктны в том и только в том случае, если дизъюнктны их носители X_{S_1} и X_{S_2}.*

$\triangleleft$ Дизъюнктность носителей X_{S_1} и X_{S_2} влечет, очевидно, дизъюнктность операторов S_1 и S_2 (этот факт не зависит от условия Магарам и верен для любых регулярных операторов). Для доказательства обратного заметим сначала, что если T_1 и T_2 — положительные o-непрерывные операторы и $T_1 \in \{T_2\}^{dd}$, то $X_{T_1} \subset X_{T_2}$. В самом деле, допустив противное, можно подобрать такой проектор π, что $0 < T_1 \circ \pi \leqslant T_1$ и $X_{T_1\circ\pi} d X_{T_2}$, а это в силу предыдущего замечания противоречит включению $T_1 \in \{T_2\}^{dd}$.

Пусть теперь S_1 и S_2 дизъюнктны. Тогда дизъюнктны также проекторы T_1 и T_2 оператора T на компоненты $\{S_1\}^{dd}$ и $\{S_2\}^{dd}$. С другой стороны, $X_{S_l} = X_T$ в силу сделанных выше замечаний. По теореме 4.4.5 должно быть $X_{T_1} d X_{T_2}$, поэтому $X_{S_1} d X_{S_2}$. $\triangleright$

(2) *Пусть $P : X \to E$ — возрастающий o-непрерывный сублинейный оператор. Тогда равносильны условия:*

(a) *P удовлетворяет условию Магарам;*

(b) *существует изоморфизм h булевой алгебры $\mathfrak{Pr}\,(E_P)$ на правильную подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{Pr}\,(X_P)$ такой, что $\pi \circ P = P \circ h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(E_P)$;*

(c) *на X_p можно определить структуру упорядоченного модуля над кольцом $Z(E_P)$ так, что естественное линейное представление $Z(E_P)$ в X_P есть кольцевой и решеточный изоморфизм $Z(E_P)$ на подкольцо и подрешетку в $Z(X_P)$, а оператор P является $Z(E_P)^+$-однородным.*

4.4.7. *Теорема.* *Для любого o-непрерывного сублинейного оператора $P : X \to E$ равносильны утверждения:*

(1) *P есть оператор Магарам;*

(2) *множество ∂P состоит из операторов Магарам.*

$\lhd$ В силу 1.4.14 (2) P возрастает тогда и только тогда, когда $\partial P \subset L^+(X, E)$. Если P — оператор Магарам, то согласно 4.4.6 (2) он будет модульно сублинейным, а по 2.3.15 любой оператор $T \in \partial P$ является модульным гомоморфизмом. Допустив, что $0 \leqslant e \leqslant Tx$, можно подобрать такой ортоморфизм $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$, что $e = \alpha\,(Tx) = T \circ h(\alpha)x$. Следовательно, T сохраняет отрезки, ибо $0 \leqslant h(\alpha) \leqslant I_X$. Порядковая непрерывность $T \in \partial P$ очевидна.

Предположим, что ∂P состоит из операторов Магарам. Не ограничивая общности, положим $X = X_P$. Обозначим $Q(x) := P(x^+)$ для $x \in X$. Ясно, что Q — сублинейный оператор.

Поскольку $\partial Q = \bigcup\{[0, T] : T \in \partial P\}$, то ∂Q также состоит из операторов Магарам. Если покажем, что Q — оператор Магарам, то это же самое, разумеется, верно и для P. Пусть $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — максимальное семейство попарно дизъюнктных элементов ∂Q, которое существует в соответствии с леммой Куратовского — Цорна. Если $S \in (\partial Q)^{dd}$, $S > 0$, то $0 < S_0 \leqslant S$ для некоторого $S_0 \in \partial Q$. Следовательно, S не может быть дизъюнктным всем T_ξ. Таким образом, $(\partial Q)^{dd} = \{T_\xi : \xi \in \Xi\}^{dd}$. Для произвольных индексов ξ и $\eta \in \Xi$ рассмотрим оператор $T := (1/2)T_\xi + (1/2)T_\eta$. Так как $T \in \partial Q$, то по условию T — оператор Магарам, причем T_ξ и T_η абсолютно непрерывны относительно T. В силу 4.4.6 (1) носители X_{T_ξ} и X_{T_η} операторов T_ξ и T_η дизъюнктны. Нетрудно видеть, что $(X_\xi := X_{T_\xi})$ — полная система компонент в X. По теореме 4.4.3 для каждого $\xi \in \Xi$ существует o-непрерывный гомоморфизм h_ξ булевой алгебры $\mathfrak{Pr}\,(E_P)$ на правильную подалгебру $\mathscr{B}_\xi$ булевой алгебры $\mathfrak{Pr}\,(X_\xi)$ такой, что $\pi \circ T_\xi = T_\xi \circ h(\pi)$ при $\pi \in \mathfrak{Pr}\,(E_P)$. При этом считаем всякий проектор $\pi \in \mathscr{B}_P$ действующим на всем X, т. е. считаем, что $\mathfrak{Pr}\,(X_\xi) \subset \mathfrak{Pr}\,(X)$.

Определим отображение $h : \mathfrak{Pr}\,(E_P) \to \mathfrak{Pr}\,(X)$ по формуле

$$h : \pi \mapsto \{h_\xi\,(\pi) : \xi \in \Xi\}.$$

Нетрудно видеть, что h — изоморфизм $\mathfrak{Pr}\,(E_P)$ на некоторую правильную подалгебру в $\mathfrak{Pr}\,(X)$. Пусть теперь $S \in \partial Q$ и $S_\xi := S \circ \rho_\xi$, где ρ_ξ — проектор на компоненту X_ξ. Тогда $S = \sup\,(S_\xi)$ и, кроме того, справедливы равенства

$$\pi \circ S = \sup\,(\pi \circ S_\xi) = \sup\,(S_\xi \circ h_\xi(\pi)) =$$

$$= \sup\,(S \circ \rho_\xi \circ h_\xi\,(\pi)) = S \circ\ (\sup\,(h_\xi\,(\pi))) = S \circ h(\pi).$$

Наконец, учитывая, что Q есть верхняя огибающая своего опорного множества ∂Q, получаем

$$\pi \circ Q(x) = \sup\,\{\pi \circ Sx : S \in \partial Q\} =$$

$$= \sup\,\{S \circ h(\pi)x : S \in \partial Q\} = Q \circ h(\pi)x.$$

Остается сослаться на 4.4.6 (2). $\triangleright$

4.4.8. В дальнейшем нам потребуется еще один факт о представлении порядково непрерывных операторов. Пусть X и E — некоторые K-пространства, а $m(X)$, как обычно, — максимальное расширение пространства X с фиксированной алгебраической и порядковой единицей $\mathbb{1}$. Предположим, что на некотором фундаменте $\mathscr{D}\,(\Phi) \subset m(X)$ определен существенно положительный оператор Магарам Φ, действующий в E, причем $\mathscr{D}\,(\Phi) = \mathscr{D}_m\,(\Phi)$. Пусть $X_0 := X \cap \mathscr{D}\,(\Phi)$, Φ_0 — сужение оператора Φ на фундамент X_0 и примем Φ_0 за единицу в компоненте $\{\Phi_0\}^{dd} \subset L^r\,(X_0, E)$.

Обозначим символом $\mathscr{L}_\Phi\,(X, E)$ множество всех регулярных o-непрерывных операторов из X в E, ограничение которых на X_0 входит в компоненту $\{\Phi_0\}^{dd}$, т. е.

$$\mathscr{L}_\Phi\,(X, E) := \{S \in L^n\,(X, E) : S \restriction X_0 \in \{\Phi_0\}^{dd}\}.$$

Как видно, оператор S входит в $\mathscr{L}_\Phi\,(X,E)$, если и только если он есть продолжение по o-непрерывности некоторого $S_0 \in \{\Phi_0\}^{dd}$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathscr{L}_\Phi\,(X,E)$ — компонента в $L^n\,(X,E)$.

Рассмотрим множество $X' \subset m(X)$, определенное соотношением

$$X' := \{x' \in m(X) : \, x' \cdot X \subset \mathscr{D}\,(\Phi)\}.$$

4.4.9. *Теорема.* *Множество X' является фундаментом в пространстве $m(X)$, линейно и решеточно изоморфным пространству $\mathscr{L}_\Phi\,(X,E)$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $x' \in X'$ оператора $S_{x'} \in \mathscr{L}_\Phi\,(X,E)$ по формуле*

$$S_{x'}\,(x) = \Phi\,(x \cdot x') \quad (x \in X).$$

$\lhd$ Тот факт, что X' — нормальное подпространство в $m(X)$, виден непосредственно из определений. С другой стороны, базы пространств $\mathscr{L}_\Phi(X,E)$ и $m(X)$ изоморфны согласно 4.4.5. Поэтому X' будет фундаментом $m(X)$, если только установить требуемый изоморфизм пространств $m(X)$ и $\mathscr{L}_\Phi(X,E)$.

Очевидно, что если $x' \in X'$, то $S_{x'}$ — регулярный порядково непрерывный оператор из X в E. Заметим, что Φ_0 — оператор Магарам. Следовательно, если $e \in \mathfrak{G}\,(\mathbb{1})$, т. е. e — единичный элемент относительно $\mathbb{1}$, то по теореме 4.4.5 оператор S_e является единичным элементом относительно Φ_0, а потому $S_e \in \{\Phi_0\}^{dd}$. Пусть $(e_\lambda^{x'})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — характеристика элемента x'. Тогда по спектральной теореме Фрейденталя

$$x' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de_\lambda^{x'},$$

где интеграл в правой части есть r-предел интегральных сумм вида $\sum_{-\infty}^{\infty} l_n\,(e_{\lambda_{n+1}} - e_{\lambda_n}),\ l_n \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}), \lambda_n \to +\infty$, и $\lambda_{-n} \to -\infty$ при $n \to +\infty$. Отсюда видно, что оператор $S_{x'}$ имеет представление

$$S_{x'}\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,(\Phi\,(x \cdot e_\lambda^{x'})),$$

т. е. оператор $S_{x'}$ получается из операторов вида $S_e,\ e := e_\lambda^{x'}$, посредством операций суммирования и o-предельного перехода. Так как всякая компонента замкнута относительно этих операций, то должно быть $S_{x'} \in \{\Phi_0\}^{dd}$. Таким образом, $S_0 \in \{\Phi_0\}^{dd}$ и $S_{x'} \in \mathscr{L}_\Phi(X, E)$. Ясно также, что сопоставление $x' \mapsto S_{x'}$ есть инъективный линейный оператор из X' в $\mathscr{L}_\Phi(X, E)$ и при этом $x' \geqslant 0$ в том и только в том случае, если $S_{x'} \geqslant 0$.

Осталось показать, что для любого $S \in \mathscr{L}_\Phi(X, E)$ найдется $x' \in X'$ такой, что $S = S_{x'}$. В самом деле, пусть T — сужение S на X_0, и рассмотрим характеристику $(e_\lambda^T)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ оператора T (относительно единицы Φ_0). В силу 4.4.5 семейство $(h(e_\lambda^T))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ есть разложение единицы в $\mathfrak{G}(\mathbb{1})$, следовательно, для некоторого $x' \in m(E)$ имеем $e_\lambda^{x'} = h(e_\lambda^T)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Более того,

$$e_\lambda^T(x) = \Phi(x \cdot e_\lambda^{x'})$$

для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in X_0$. Отсюда, привлекая спектральную теорему Фрейденталя и элементарные свойства o-суммируемых семейств, получаем для любого $x \in X^+$ соотношения

$$Tx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(e_\lambda^T) \right) x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(e_\lambda^T(x)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\Phi(x \cdot e_\lambda^{x'}) = \Phi\left(x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d e_\lambda^{x'} \right) = \Phi(x \cdot x').$$

Допустим теперь, что $x \in X^+$, $(x_\alpha) \subset X'$ и $\sup(x_\alpha) = x$. Тогда $\Phi(x_\alpha \cdot x') \leqslant S(x)$, а поскольку $\mathscr{D}(\Phi) = \mathscr{D}_m(\Phi)$, то семейство $(x_\alpha \cdot x')$ ограничено в $\mathscr{D}(\Phi)$. Значит, $x \cdot x' \in \mathscr{D}(\Phi)$ и $Sx = \Phi(x \cdot x')$. Таким образом, $x' \in X'$ и справедливо требуемое представление. $\triangleright$

4.4.10. Изложенного в этом параграфе достаточно для того, чтобы подметить некоторую аналогию между операторами Магарам и o-непрерывными изотонными сублинейными функционалами и заподозрить справедливость положения: любой факт о функционалах указанного вида должен иметь свой параллельный вариант и для операторов Магарам. Теория булевозначных моделей вскрывает всю глубину такой аналогии и позволяет превратить высказанное эвристическое соображение в точный последовательный метод. Приведем без доказательства лишь один результат в этом направлении. Так же, как и в 2.4.3 предполагаем, что B — полная булева алгебра и $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема. *Пусть X — произвольное K-пространство, а E — расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$. Допустим, что $P : X \to E$ — сублинейный оператор Магарам, причем $X = X_P = \mathscr{D}_m(P)$ и $E = E_P$. Тогда существуют такие $\mathscr{X}$ и $p \in \mathbb{V}^{(B)}$, что справедливы утверждения:*

(1) *$[\![\mathscr{X}$ — это K-пространство, а $p : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ — некоторый o-непрерывный изотонный сублинейный функционал, причем $\mathscr{X} = \mathscr{X}_p = \mathscr{D}_m(p)]\!] = \mathbb{1}$;*

(2) *если $X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $P' = p{\downarrow}$, то X' — это K-пространство, а $P' : X' \to E$ — сублинейный оператор Магарам;*

(3) *существует линейный и решеточный изоморфизм h из X на X' такой, что $P = P' \circ h$;*

(4) *оператор P линеен в том и только в том случае, если внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ линеен функционал p;*

(5) *для линейного оператора Φ верно включение $\Phi \in \partial P$ в том и только в том случае, если существует $\varphi \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![\varphi \in \partial P]\!] = \mathbb{1}$ и $\Phi = (\varphi{\downarrow}) \circ h$.*

4.5. Дезинтегрирование

В этом параграфе мы будем интересоваться равенством $\partial(T \circ P) = T \circ \partial P$, а также родственными формулами для вычисления опорных множеств, сопряженных операторов, ε-субдифференциалов и т. п. Явление, выраженное этими формулами, называют *дезинтегрированием*, а сами эти формулы — *формулами дезинтегрирования*. Общие приемы дезинтегрирования унифицируют в привычной форме правил исчисления разнообразные факты теории K-пространств, в основе которых лежит теорема Радона — Никодима. Здесь легко установить аналогию с тем, что исчисление опорных множеств дает единый подход к различным вариантам принципов продолжения, основанный на применении теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

4.5.1. Рассмотрим K-пространства E и F, а также векторное пространство X. Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор и $T : E \to F$ — положительный оператор. Тогда оператор $T \circ P$ сублинеен и выполнено очевидное включение $\partial(T \circ P) \subset T \circ \partial T$. Простые примеры убеждают, что это включение часто оказывается строгим.

Так, если $X = E$ и оператор $P : E \to E$ действует по правилу $e \mapsto e^+$, то

$$\partial(T \circ P) = [0, T] := \{S \in L(E, F) : 0 \leqslant S \leqslant T\}$$

и

$$\partial P = [0, I_E] := \{\pi \in L(E) : 0 \leqslant \pi \leqslant I_E\}.$$

Однако равенство $[0, T] = T \circ [0, I_E]$ есть не что иное, как ограниченная версия *теоремы Радона — Никодима*: для всякого оператора $0 \leqslant S \leqslant T$ существует ортоморфизм $0 \leqslant \pi \leqslant I_E$ в E такой, что $S = T \circ \pi$.

Последнее утверждение неверно уже для оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx := (f(x), f(x))$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, где $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — линейный положительный функционал.

Если для положительного оператора $T : E \to F$ выполняется соотношение $[0, T] = T \circ [0, I_E]$, то T удовлетворяет условию Магарам.

$\lhd$ В самом деле, допустим, что $0 \leqslant f \leqslant Te$ для некоторого $e \in E^+$. Если $P(e) = T(e^+)$, то P — сублинейный оператор, причем $-P(-e) = 0 \leqslant f \leqslant P(e) = Te$. В силу 1.4.14 (3) существует $S \in \partial P = [0, I_E]$ такой, что $f = Se$. По условию $S = T \circ \alpha$ для подходящего ортоморфизма $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$, поэтому $f = T \circ \alpha e$ и $0 \leqslant \alpha e \leqslant e$. Тем самым T сохраняет порядковые отрезки. $\rhd$

4.5.2. *Теорема.* *Пусть E и F — некоторые K-пространства и Q — сублинейный оператор Магарам из E в F. Тогда для любого векторного пространства X и произвольного сублинейного оператора P из X в E имеет место формула*

$$\partial(Q \circ P) = \partial Q \circ \partial P.$$

$\lhd$ Напомним, что имеет место следующее правило линеаризации (см. 2.1.6 (3)):

$$\partial(Q \circ P) = \bigcup\{\partial(T \circ P) : T \in \partial Q\}.$$

Поэтому, принимая в расчет теорему 4.4.9, достаточно показать справедливость представления $\partial(T \circ P) = T \circ \partial P$ для произвольного линейного оператора Магарам T из E в F. Пусть D — стоуновский компакт базы K-пространства E, а $\mathfrak{B}\,(D)$ — алгебра открыто-замкнутых подмножеств D. Не ограничивая общности, можно предположить, что E является фундаментом в K-пространстве $C_\infty\,(D)$ и функция, равная тождественно единице, входит в E. Рассмотрим пространство $\mathrm{St}(D,X)$ всех X-значных ступенчатых функций на D, т. е. $u\in\mathrm{St}(D,X)$ в том и только в том случае, если $u:=\sum_{l=1}^n x_l\chi_{e_l}$ для некоторых $x_1,\dots,x_n\in X$ и $e_1,\dots,e_n\in\mathfrak{B}\,(D)$ (как обычно, χ_e — характеристическая функция множества $e\subset D$). Обозначим символом $[e]$ проектор в E, соответствующий открыто-замкнутому множеству e. Легко видеть, что соотношение

$$\mathscr{P}:u\to\sum_{l=1}^n T\circ[e_l]\circ Px_l\quad\left(u:=\sum_{l=1}^n x_l\chi_{e_l}\in\mathrm{St}(D,X)\right)$$

корректно определяет сублинейный оператор $\mathscr{P}$ из $\mathrm{St}(D,X)$ в F.

Предположим, что $A\in\partial(T\circ P)$, и рассмотрим оператор $\mathscr{A}_0: x\cdot\chi_D\mapsto Ax$ на подпространстве постоянных X-значных функций $L:=\{x\cdot\chi_D:x\in X\}$. Тогда $\mathscr{A}_0u\leqslant\mathscr{P}(u)$ для любого $u\in L$. По теореме Хана — Банаха — Канторовича существует линейный оператор $\mathscr{A}:\mathrm{St}(D,X)\to F$ такой, что $\mathscr{A}\in\partial\mathscr{P}$ и $\mathscr{A}$ — продолжение $\mathscr{A}_0$ на все $\mathrm{St}(D,X)$.

Теперь для любого $x\in X$ определим функцию $\varphi_x:\mathfrak{B}\,(D)\to F$, полагая $\varphi_x(e):=\mathscr{A}(x\chi_e)$. Из определения φ_x и из очевидного неравенства

$$|\varphi_x(e)|\leqslant T\circ[e](P(x)\vee P(-x))\quad(e\in\mathfrak{B}\,(D),\ x\in X)$$

следует, что φ_x — аддитивная o-непрерывная функция.

Пусть $\mathscr{D}_m(T)\subset C_\infty(D)$ — максимальная область определения оператора T, а $E\subset E_1\subset C_\infty(D)$ и $E_2\subset C_\infty(D)$ таковы, что $y\in E_k$ в том и только в том случае, если $y\cdot E_l\subset\mathscr{D}_m(T)$ $(k\neq l;k,l:=1,2)$.

Определим оператор $S_x:E_2\to F$ равенством

$$S_x(y):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d\varphi_x(e_\lambda^y),$$

где (e_λ^y) — характеристика элемента $y\in E_2$.

Ограниченность φ_x и существование интеграла для любого $y \in E_2$ следуют из указанного выше неравенства для φ_x, стало быть, S_x — порядково непрерывный регулярный оператор, причем $|S_x| \leqslant T \circ \pi$, где $\pi : E_2 \to \mathscr{D}_m(T)$, $\pi : y \mapsto y \cdot (P(x) \vee P(-x))$. Таким образом, $S_x \in \mathscr{L}_T(E_2, F)$ для любого $x \in X$. Пусть теперь $U : \mathscr{L}_T(E_2, F) \to E_1$ — изоморфизм из теоремы 4.4.9 и $V : x \to S_x$ $(x \in X)$. Положим $S := U \circ V$. Тогда $S : X \to E_1$ — линейный оператор и для любых $x \in X$ и $e \in \mathfrak{B}(D)$ имеем

$$T \circ [e] \circ Sx = T(\chi_e U(S_x)) = T(x \cdot \chi_e) = \varphi_x.$$

С другой стороны, по определению φ_x выполняются неравенства

$$-T \circ [e] \circ P(-x) \leqslant T \circ [e] \circ Sx \leqslant T \circ [e] \circ P(x).$$

Из этих соотношений следует, что $T \circ S = A$ и $S \in \partial P$. В частности, $S \in L(X, E)$, что и доказывает требуемое, так как оставшееся неустановленным противоположное включение очевидно. $\triangleright$

Комбинируя теорему 4.5.2 с техникой замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля, можно получить целый ряд формул дезинтегрирования для сопряженных операторов, ε-субдифференциалов. Приведем несколько примеров.

Сначала введем необходимые понятия. Выпуклый оператор $f : X \to E$ называют *регулярным*, если существуют элементы $e_1, e_2 \in E$ и сублинейный оператор $P : X \to E$ такие, что

$$P(x) + e_1 \leqslant f(x) \leqslant P(x) + e_2 \quad (x \in X).$$

Если, кроме того, X также K-пространство, оператор f возрастает и o-непрерывен, а P — оператор Магарам, то говорят, что f — *выпуклый оператор Магарам*.

Нетрудно видеть, что выпуклый оператор f регулярен в том и только в том случае, если он допускает представление $f = \varepsilon_{\mathfrak{A},E} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^u$, где $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, E), u \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, а $\langle \mathfrak{A} \rangle^u$ — аффинный оператор из X в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, действующий по правилу

$$\langle \mathfrak{A} \rangle^u : x \mapsto (\alpha(x) + u(\alpha))_{\alpha \in \mathfrak{A}}.$$

4.5.3. *Теорема.* *Пусть $f : X \to E$ — регулярный выпуклый оператор, а $g : E \to F$ — выпуклый оператор Магарам. Тогда для любого $S \in L(X, F)$ имеет место точная формула*

$$(g \circ f)^*(S) \rightleftharpoons \inf \{T \circ f^*(U) + g^*(T) : U \in L(X, E), \\ T \in L^+(E, F),\ S = T \circ U\}.$$

$\lhd$ Заметим прежде всего, что если $T \in L^+(E, F)$, $S \in L(X, E)$ и $S = T \circ U$, то $(g \circ f)^*(S) \leqslant T \circ f^*(U) + g^*(T)$. В частности, если $(g \circ f)^*(S) = +\infty$, то требуемая формула справедлива. Предположим, что $S \in \operatorname{dom}((g \circ f)^*)$. Тогда в соответствии с правилом вычисления преобразования Юнга — Фенхеля, установленного в 4.1.9 (2), существует оператор $T \in \operatorname{dom}(g^*)$ такой, что

$$(g \circ f)^*(S) = (T \circ f)^*(S) + g^*(T).$$

По условию существуют сублинейный оператор Магарам P и элементы $e_1, e_2 \in E$, для которых $P(e) + e_1 \leqslant g(e) \leqslant P(e) + e_2$. Отсюда вытекает включение $\operatorname{dom}(g^*) \subset \partial P$, и в силу теоремы 4.4.5 заключаем, что T — оператор Магарам.

Воспользуемся представлением $f = \varepsilon_{\mathfrak{A},E} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^u$, где $\mathfrak{A}$ и u те же, что и в 4.5.2. Применив формулу 4.1.9 (4) к сублинейному оператору $T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ и аффинному оператору $\langle \mathfrak{A} \rangle^u$ и принимая во внимание соотношение $\partial(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}) = T \circ \partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$, получим:

$$(T \circ f)^*(S) = \inf\{\beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^u)^*(S) : \beta \in \partial(T \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E})\} = \\ = \inf\{-T \circ \alpha(u) : \alpha \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E} T \circ \alpha \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = S\}.$$

Поскольку последняя формула точная, найдется оператор $\bar{\alpha} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$ такой, что $T \circ \bar{\alpha} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = S$ и $(T \circ f)^*(S) = -T \circ \bar{\alpha}(u)$. Пусть $U := \bar{\alpha} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle$, и снова воспользуемся правилом замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля, на этот раз для суперпозиции $\varepsilon_{\mathfrak{A},E} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^u$. Тогда

$$f^*(U) = \inf \{(\alpha \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^u)^*(U) : \alpha \in \partial_{\mathfrak{A},E}\} = \\ = \inf \{-\alpha(u) : \alpha \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A},E},\ \alpha \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = U\} \leqslant -\bar{\alpha}(u),$$

следовательно,

$$T \circ f^*(U) \leqslant -T \circ \bar{\alpha}(u) = (T \circ f)^*(S).$$

Из всего сказанного следует, что $T \circ U = S$ и $T \circ f^*(U) + g^*(T) \leqslant (g \circ f)^*(S)$, а это означает справедливость требуемого представления. $\rhd$

4.5.4. Стоит отметить два частных случая установленной теоремы.

(1) *Если $f : X \to E$ — регулярный выпуклый оператор, а $P : E \to F$ — сублинейный оператор Магарам, то для любого $S \in L(X, F)$ имеет место точная формула*

$$(P \circ f)^*(S) \rightleftharpoons \inf\{T \circ f^*(U) : T \in \partial P, T \circ U = S\}.$$

(2) *Если f то же, что и в* (1), *а $T : E \to F$ — линейный оператор Магарам, то для каждого $S \in L(X, E)$ верна точная формула*

$$(T \circ f)^*(S) \rightleftharpoons \inf\{T \circ f^*(U) : T \circ U = S\}.$$

В частности, если $T : E^2 \to E$ — операция суммы, то вновь получаем точную формулу

$$(f_1 + f_2)^* \rightleftharpoons f_1^* \oplus f_2^*,$$

но при более жестком требовании о регулярности операторов f_1 и f_2, чем в 4.1.5 (1).

4.5.5. Приведем теперь несколько простых следствий, соответствующих примерам 4.4.2.

(1) Будем говорить, что семейство выпуклых операторов $f_\alpha : X \to E\,(\alpha \in A)$ *равномерно регулярно*, если найдутся $c := (c_\alpha)_{\alpha \in A}$, $e := (e_\alpha)_{\alpha \in A} \in l_1(A, E)$ и семейство сублинейных операторов $P_\alpha : X \to E$ $(\alpha \in A)$ такие, что существует сумма $\sum_{\alpha \in A} P_\alpha(x)$ для всех $x \in X$ и

$$P_\alpha(x) + c_\alpha \leqslant f_\alpha(x) \leqslant P_\alpha(x) + e_\alpha \quad (x \in X)$$

при всех $\alpha \in A$. Очевидно, что если $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — равномерно регулярное семейство выпуклых операторов (при этом $(f_\alpha(x))_{\alpha \in A} \in l_1(A, E)$), то корректно определен оператор

$$f(x) := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \quad (x \in X),$$

причем f — регулярный выпуклый оператор. В этой ситуации для каждого $S \in L(X, E)$ справедлива точная формула

$$f^*(S) \rightleftharpoons \inf\left\{\sum_{\alpha \in A} f_\alpha^*(S_\alpha) : S_\alpha \in L(X, E)\ (\alpha \in A),\ \sum_{\alpha \in A} S_\alpha = S\right\},$$

где равенство $\sum_{\alpha\in A} S_\alpha = S$ здесь и всегда в дальнейшем означает, что $\sum_{\alpha\in A} S_\alpha x = Sx$ для всех $x \in X$.

(2) Пусть вновь (f_α) — равномерно регулярное семейство выпуклых операторов. Так как $l_1(A,E) \subset l_\infty(A,E)$, то $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ входит в $l_\infty(A,E)$. Значит, можно определить регулярный выпуклый оператор $f : X \to E$ формулой

$$f(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\} \quad (x \in X).$$

При этом для каждого $S \in L(X,E)$ имеет место точная формула

$$f^*(S) \rightleftharpoons \inf\Bigg\{\sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha \circ f^*_\alpha(S_\alpha) : S_\alpha \in L(X,E),$$
$$\pi_\alpha \in \operatorname{Orth}(E)^+ \ (\alpha \in A),\ \sum_{\alpha\in A} S_\alpha = S,\ \sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha = I_E\Bigg\}.$$

(3) Пусть X — векторное пространство, а (Q,Σ,μ) и E те же, что и в 4.4.2 (5). Пусть $\Phi : X \to L_1(Q,\Sigma,\mu,E)$ — регулярный выпуклый оператор и

$$f(x) := \int_Q \Phi(x)d\mu \quad (x \in X).$$

Тогда для любого $S \in L(X,E)$ имеет место точная формула

$$f^*(S) \rightleftharpoons \inf\Bigg\{\int_Q \Phi^*(U)\,d\mu : \ U \in L(X, L_1(Q,\Sigma,\mu,E)),$$
$$Sx = \int_Q Ux\,d\mu \ (x \in X)\Bigg\}.$$

4.5.6. *Теорема.* *Пусть $f : X \to E$ — регулярный выпуклый оператор и $g : E \to F$ — выпуклый оператор Магарам. Тогда для любых $x \in X$ и $\varepsilon \in F^+$ имеет место представление*

$$\partial_\varepsilon(g \circ f)(x) =$$
$$= \bigcup\{T \circ \partial_\delta f(x) : T \in \partial_\lambda g(f(x)), \delta \in E^+, \lambda \in F^+, T\delta + \lambda = \varepsilon\}.$$

$\lhd$ Если $U \in \partial_\delta(x)$, $T \in \partial_\lambda g(f(x))$ и $\varepsilon = T\delta + \lambda$, где $\lambda \in F^+$ и $\delta \in E^+$, то по определению

$$Ux' - Ux \leqslant f(x') - f(x) + \delta,$$
$$Te - Tf(x) \leqslant g(e) - g(f(x)) + \lambda.$$

В частности, $T \in \mathrm{dom}(g^*)$, поэтому $T \geqslant 0$. Применив T к первому из указанных неравенств и воспользовавшись вторым, получим

$$T \circ Ux' - T \circ Ux \leqslant T \circ f(x') - T \circ f(x) + T\delta \leqslant$$
$$\leqslant g(f(x')) - g(f(x)) + T\delta + \lambda.$$

Отсюда, благодаря произвольности $x' \in X$, имеем $T \circ U \in \partial_\varepsilon(g \circ f)(x)$. Покажем обратное включение. Для этого рассмотрим оператор $S \in \partial_\varepsilon(g \circ f)(x)$. По формуле ε-субдифференцирования суперпозиции (см. 4.2.11 (2)) найдутся $\nu, \mu \in F^+$, а также оператор $T \in \partial_\nu g(f(x))$ такие, что $\varepsilon = \nu + \mu$ и $S \in \partial_\mu(T \circ f)(x)$. Последнее означает, что $(T \circ f)^*(S) + T \circ f(x) \leqslant Sx + \mu$. В силу 4.5.4 (2) существует оператор $U \in L(X, E)$ такой, что $S = T \circ U$ и $(T \circ f)^*(S) = T \circ f^*(U)$. Тем самым

$$T \circ f^*(U) + T \circ f(x) \leqslant T \circ Ux + \mu$$

или, что то же самое,

$$T(f^*(U) + f(x) - Ux) \leqslant \mu.$$

Положим $\delta := f^*(U) + f(x) - Ux$ и $\lambda := \varepsilon - T\delta$. Тогда $\delta \geqslant 0$, $\lambda = \mu - T\delta + \nu \geqslant \nu$, и $T\delta + \lambda = \varepsilon$. Понятно также, что $U \in \partial_\delta f(x)$ и $T \in \partial_\lambda g(f(x))$. Следовательно, S входит в правую часть требуемого равенства. $\rhd$

4.5.7. Приведем несколько следствий теоремы 4.5.6, несложные доказательства которых оставляем читателю.

(1) *Если f, x и ε те же, что и в теореме* 4.5.6, *а $T : E \to F$ — линейный оператор Магарам, то справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon(T \circ f)(x) = \bigcup \{T \circ \partial_\delta f(x) : \delta \in E^+,\ T\delta = \varepsilon\}.$$

(2) *Пусть* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *то же, что и в* 4.5.5 (1), $f := \sum_{\alpha\in A} f_\alpha$, $\varepsilon \in E^+$ *и* $x \in X$. *Тогда имеет место представление*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \bigcup \left\{ \sum_{\alpha\in A} \partial_{\varepsilon_\alpha} f_\alpha(x) : \varepsilon_\alpha \in E^+ \ (\alpha \in A),\ \sum_{\alpha\in A} \varepsilon_\alpha = \varepsilon \right\}.$$

Здесь же уместно отметить, что при $A = \mathbb{N}$ и $\varepsilon = 0$ получается субдифференциальный вариант классического правила почленного дифференцирования рядов:

$$\partial\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(x).$$

(3) *Пусть* (f_α) *то же, что и в* 4.5.5 (2), *а* $f := \sup\{f_\alpha : \alpha \in A\}$. *Тогда для любых* $x \in X$ *и* $\varepsilon \in E^+$ *справедливо представление*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \bigcup \left(\sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha \circ \partial_{\varepsilon_\alpha} f_\alpha(x) \right),$$

где объединение берется по всем $\delta \in E$ *и семействам* $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in A} \subset E$ *и* $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathrm{Orth}(E)$, *удовлетворяющим условиям:*

$$0 \leqslant \delta; \quad 0 \leqslant \varepsilon_\alpha \ (\alpha \in A), \quad \delta + \sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha \varepsilon_\alpha = \varepsilon;$$

$$0 \leqslant \pi_\alpha \ (\alpha \in A), \quad \sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha = I_E, \quad f(x) \leqslant \sum_{\alpha\in A} \pi_\alpha \circ f_\alpha(x) + \delta.$$

(4) *Пусть* Φ, f *и* E *удовлетворяют условиям из* 4.5.5 (2). *Тогда для каждых* $x \in X$ *и* $\varepsilon \in E^+$ *выполняется представление*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \left\{ \int_Q S(\cdot)d\mu : \delta \in L_1(Q, \Sigma, \mu, E)^+,\ S \in \partial_\delta \Phi(x), \int_Q \delta d\mu = \varepsilon \right\}.$$

(5) *Пусть* $f_1, \dots, f_n : X \to E$ — *регулярные выпуклые операторы, а* $S : E \to F$ — *линейный оператор Магарам. Тогда верно представление*

$$\partial_\varepsilon (S \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n))(x) = \bigcup (S_1 \circ \partial_{\delta_1} f_1(x) + \ \ldots + S_n \circ \partial_{\delta_n} f_n(x)),$$

где объединение взято по наборам $S_1,\dots,S_n \in L(E,F)$ и $\delta_1,\dots,\delta_n \in E$ таким, что

$$0 \leqslant \delta_l \ (l := 1,\dots,n), \quad \delta := \varepsilon - \sum_{l=1}^{n} S_l\delta_l \geqslant 0;$$

$$0 \leqslant S_l \ (l := 1,\dots,n), \quad S = \sum_{l=1}^{n} S_l;$$

$$S \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n)(x) \leqslant \sum_{l=1}^{n} S_l \circ f_l(x) + \delta.$$

4.5.8. Можно получить более специальные формулы дезинтегрирования, используя теорию лифтинга или измеримых селекторов. Мы воздержимся от подобных детализаций. В заключение отметим только одно прямое обобщение оригинальной теоремы Штрассена о дезинтегрировании, которое можно легко получить из 4.5.7 (1) при $\varepsilon = 0$. Если X и E — нормированные пространства, то для непрерывного сублинейного оператора $P : X \to E$ положим $\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$.

Теорема. *Пусть (Q,Σ,μ) — пространство с полной конечной мерой и E — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Рассмотрим сепарабельное банахово пространство X и семейство $(P_t)_{t\in Q}$ непрерывных сублинейных операторов $P_t : X \to E$. Предположим, что для каждого $x \in X$ отображение $t \mapsto P_l(x)$ входит в $L_1(Q,\Sigma,\mu,E)$ и функция $t \to \|P_t\|$ $(t \in Q)$ суммируема. Тогда для любого $\Phi \in \mathscr{L}(X,E)$ такого, что*

$$\Phi(x) \leqslant \int\limits_Q P_t(x)\,d\mu(t) \quad (x \in X),$$

существует семейство $(\Phi_t)_{t\in Q}$ линейных операторов $\Phi_t \in \mathscr{L}(X,E)$, для которого $\Phi_t \in \partial P_t$ при всех $t \in Q$ $\Phi_{(\cdot)}x \in L_1(Q,\Sigma,\mu,E)$ для каждого $x \in X$ и

$$\Phi x = \int\limits_Q \Phi_t x\,d\mu(t) \quad (x \in X).$$

$\triangleleft$ Из 4.5.7 (1) следует существование линейного оператора $T : X \to L_1(Q, \Sigma, \mu, E)$, для которого

$$\Phi x = \int_Q Tx\, d\mu \quad (x \in X)$$

и $Tx \leqslant P_{(\cdot)}(x)$ при всех $x \in X$. Пусть X_0 — это счетное $\mathbb{Q}$-линейное подпространство в X (где, как обычно, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел). Используя счетность X_0, можно построить множество полной меры $Q_0 \subset Q$ и отображение $T_0 : X \to E^{Q_0}$ такие, что для всех $x \in X_0$ будет $T_0 x \leqslant P_{(\cdot)}(x)$ поточечно на Q_0 и $[T_0 x] = Tx$, где $[u]$ — класс эквивалентности измеримой вектор-функции u. Для фиксированного $t \in Q_0$ оператор $x \mapsto (T_0 x)(t)$ $(x \in X_0)$ линеен и непрерывен. Пусть Φ_t — единственное продолжение этого оператора по непрерывности на все X. Тогда $\Phi_t \in \partial P_t$ для каждого $t \in Q_0$. Привлекая теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (Бохнера), получим остальные требуемые свойства семейства (Φ_t). $\triangleright$

4.5.9. Рассмотрим те же (Q, Σ, μ) и X, что и в теореме 4.5.8, а E — банахова решетка. Предположим, что для каждого $t \in Q$ задан выпуклый оператор $f_t : X \to E^{\bullet}$, причем существует открытое множество $G \subset X$ такое, что $G \subset \mathrm{dom}(f_t)$ $(t \in Q)$ и для каждой точки $x \in G$ вектор-функция $f_{(\cdot)}(x) : t \mapsto f_t(x)$ интегрируема по Бохнеру. Положим по определению

$$f(x) := \int_Q f_t(x)\, d\mu(t),$$

если вектор-функция $f_{(\cdot)}(x)$ конечна при почти всех $t \in Q$ и интегрируема по Бохнеру и $f(x) = +\infty$ во всех остальных случаях. Тогда $f : X \to E^{\bullet}$ — выпуклый оператор и $G \subset \mathrm{dom}(f)$. Возьмем фиксированную точку $x_0 \in G$ и займемся вычислением субдифференциала $\partial f(x_0)$. Обозначим символом $\int_Q \partial f_t(x_0)\, d\mu(t)$ множество всех линейных операторов Φ из X в E, представимых в виде

$$\Phi x = \int_Q \Phi_t x\, d\mu(t) \quad (x \in X),$$

где $(\Phi_t)_{t\in Q}$ — семейство линейных операторов $\Phi_t \in \mathscr{L}(X,E)$, для которого $\Phi_t \in \partial P_t$ при всех $t \in Q$ и $\Phi_{(\cdot)}x \in L_1(Q,\Sigma,\mu,E)$ для каждого $x \in X$. В этих обозначениях теорему 4.5.8 можно переформулировать следующим образом.

(1) *Теорема.* *В условиях теоремы* 4.5.8 *формула*

$$P(x) = \int\limits_Q P_t(x)\,d\mu(t) \quad (x \in X)$$

определяет сублинейный оператор из X в E и имеет место формула

$$\partial P = \int\limits_Q \partial P_t\,d\mu(t).$$

$\lhd$ Включение $\supset$ очевидно, а противоположное включение представляет собой иную запись утверждения теоремы 4.5.8. $\rhd$

(2) *Теорема.* *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, E — банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Предположим, что операторы f_t $(t \in Q)$ и f непрерывны в точке x_0. Тогда имеет место представление*

$$\partial f(x_0) = \int\limits_Q \partial f_t(x_0)\,d\mu(t).$$

$\lhd$ В силу наших предположений для всякого $h \in X$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что $x_0 + \lambda h \in G$ при всех $0 < \lambda < \delta$. Таким образом, при указанных λ все значения $f_t(x_0+\lambda h)$ $(t \in Q)$ и $f(x_0+\lambda h)$ конечны и имеет место равенство

$$\lambda^{-1}\big(f(x_0+\lambda h) - f(x_0)\big) = \lambda^{-1}\int\limits_Q \big(f_t(x_0+\lambda h) - f_t(x_0)\big)\,d\mu(t).$$

Осуществим переход к o-пределу в этом соотношении при $\lambda \to 0$. Так как норма в E порядково непрерывна, то из o-сходимости вытекает сходимость по норме, следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла Бохнера. Тем самым возникает равенство

$$f'(x_0)h = \int\limits_Q f'_t(x_0)h\,d\mu(t) \quad (h \in X).$$

Остается применить теорему (1) к операторам $P := f'(x_0)$ и $P_t := f'_t(x_0)$ $(t \in Q)$. $\rhd$

4.5.10. Как видно из изложенных результатов, дезинтегрирование возможно лишь в классе операторов, подчиненных весьма жесткому ограничительному условию Магарам. Тем не менее имеется настоятельная потребность в вычислении субдифференциала $\partial(Q \circ P)$ и в том случае, когда Q не есть оператор Магарам. Правило линеаризации 4.2.11 (2) позволяет ограничиться случаем линейного положительного оператора $Q := T$. Итак, возникает следующая проблема: как выразить явно субдифференциал $\partial(T \circ f)$ через положительный оператор T и выпуклый оператор f? Подход к решению этой проблемы намечен по существу в 4.5.5 (2). Пусть $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — равномерно регулярное семейство выпуклых операторов из X в E и $f := \sup(f_\alpha)$. Положим

$$\Phi(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha \in \mathrm{A}} \quad (x \in X).$$

Тогда $\Phi : X \to l_\infty(\mathrm{A}, E)$ — выпуклый оператор и $f = \varepsilon_{\mathrm{A},E} \circ \Phi$. Однако $\varepsilon_{\mathrm{A},E} : l_\infty(\mathrm{A}, E) \to E$ не есть оператор Магарам и, вообще говоря, $\partial f(x) \neq \partial\varepsilon_{\mathrm{A},E} \circ \partial\Phi(x)$. С другой стороны, ограничение $Q := \varepsilon_{\mathrm{A},E}{\upharpoonright} l_1(\mathrm{A}, E)$ есть оператор Магарам. Значит, если $\Phi(X) \subset l_1(\mathrm{A}, E)$, то $f = Q \circ \Phi$ и $\partial f(x) = \partial Q(\Phi(x)) \circ \partial\Phi(x)$. Стало быть, решение поставленной задачи связано с такой модификацией оператора T, чтобы он превратился в оператор Магарам.

4.5.11. Опишем теперь общий прием, позволяющий всякий положительный оператор превратить в оператор Магарам. Пусть X — архимедова векторная решетка, E — по-прежнему K-пространство, а $T : X \to E$ — произвольный положительный оператор. Обозначим через V множество всех отображений $v : X \to \mathfrak{Pr}(E)$ таких, что $v(X)$ — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(E)$. Если D — стоуновский компакт E, то V можно отождествить с множеством всех отображений $u : D(u) \to X$ вида $u(t) = \sum x_\xi \chi_{D\xi}$, где (D_ξ) — семейство попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств, объединение $D(u) = \bigcup D_\xi$ плотно в D, а (x_ξ) — такое семейство элементов в X, что $x_\xi = x_\eta$ влечет $D_\xi = D_\eta$. Отсюда видно, что V естественным образом превращается в векторную решетку. Определим $m(E)$-значную монотонную полунорму p на V по формуле

$$p(v) := \sum_{x \in X} v(x) \circ T(|x|).$$

Монотонность p означает, что из $|v| \leqslant |u|$ следует $p(v) \leqslant p(u)$. Положим $V_0 := \{v \in V : p(v) = 0\}$ и на фактор-пространстве $Y = V/V_0$

определим $m(E)$-значную норму

$$|y| := \inf\{p(v) : v \in y\} \quad (y \in Y).$$

Тогда Y — векторная решетка, а $|\cdot|$ — монотонная $m(E)$-значная норма. Введем в Y структуру топологической группы, принимая за базис фильтра окрестностей нуля семейство множеств

$$\{y \in Y : |y| \leqslant \varepsilon\mathbb{1}\} \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0),$$

где $\mathbb{1}$ — фиксированная единица в $m(E)$. Пополнение топологической группы Y обозначим через $\widetilde{Y}$. Векторная норма $|\cdot|$ по непрерывности продолжается с Y на $\widetilde{Y}$. Положим, наконец,

$$E_T(X) := \{z \in \widetilde{Y} : |z| \in E\},$$

$$\Phi z := |z^+| - |z^-| \quad (z \in E_T(X)).$$

Можно показать, что $E_T(X)$ — это K-пространство, $\Phi : E_T(X) \to E$ — существенно положительный оператор Магарам и для любых $x \in X$ и $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ выполняется $\pi \circ Tx = \Phi \circ i(x \otimes \pi)$, где i — фактор-отображение из V в Y. В частности,

$$Tx = \Phi \circ jx \quad (x \in X),$$

где $f(x) := i(x \otimes I_E)$. Следовательно, для любого сублинейного оператора $P : Z \to X$ будет

$$\partial(T \circ P) = \partial(\Phi \circ j \circ P) = \Phi \circ \partial(j \circ P).$$

Тем самым задача дезинтегрирования для произвольного положительного оператора T сводится к вычислению субдифференциала $\partial(j \circ P)$ для оператора $f \circ P : Z \to E_T(X)$.

4.6. Инфинитезимальные субдифференциалы

В 4.2 мы познакомились с правилами подсчета ε-субдифференциалов. Эти правила, доставляющие формальный аппарат учета границ точности при вычислениях с субдифференциалами (например, при анализе выпуклых экстремальных задач, см. 5.2 и 5.3), не в полной мере коррелируют с практическими приемами «отбрасывания малых», применяемых в большом количестве прикладных работ. Так, например, «приближенный» градиент суммы рассматривают как сумму «приближенных» субградиентов слагаемых. Разумеется, это не соответствует точному правилу ε-субдифференцирования суммы, представленному теоремой 4.2.7.

Правила приближенного подсчета скорее отвечают обычным инфинитезимальным представлениям о том, что сумма двух бесконечно малых бесконечно мала. Иначе говоря, практические приемы использования ε-субградиентов соответствуют взглядам на ε как на актуальную бесконечно малую величину — *инфинитезималь*.

В современной математике подобные концепции оформлены в рамках инфинитезимального анализа, к которому иногда применяют выразительный, но несколько эпатажный термин — «нестандартный анализ». Используя указанный подход, удается развить удобный аппарат приближенных — инфинитезимальных — субдифференциалов, адекватно отражающий правила подсчета «практического» оптимума. Необходимые для дальнейшего сведения из инфинитезимального анализа приведены в Приложении 5.

4.6.1. Пусть X — векторное пространство, $E^\bullet$ — упорядоченное векторное пространство с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Рассмотрим выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$ и точку $\overline{x}$ из эффективного множества $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ оператора F. Напомним, что для элемента $\varepsilon \geqslant 0$ (из конуса положительных элементов E^+ пространства E) *ε-субдифференциал* f в точке $\overline{x}$ представляет собой множество $\delta_\varepsilon f(\overline{x})$, определяемое формулой

$$\delta_\varepsilon f(\overline{x}) := \{T \in L(X,E) : (\forall\, x \in X)(Tx - Tx \leqslant f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon)\},$$

где $L(X,E)$ — пространство линейных операторов, действующих из X в E.

4.6.2. Пусть в E выделено фильтрованное по убыванию семейство $\mathscr{E}$ положительных элементов. Считая E и $\mathscr{E}$ стандартными множествами, определим *монаду* $\mu(\mathscr{E})$ соотношением

$$\mu(\mathscr{E}) := \cap\{[0,\varepsilon] : \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}\}.$$

Элементы $\mu(\mathscr{E})$ называют положительными *бесконечно малыми* или *инфинитезимальными* (*относительно* $\mathscr{E}$).

В дальнейшем без особых оговорок подразумевается, что E — это K-пространство, а монада $\mu(\mathscr{E})$ — это внешний конус над ${}^\circ\mathbb{R}$ и, кроме того, $\mu(\mathscr{E})\cap{}^\circ E = 0$. (В приложениях, как правило, $\mathscr{E}$ — фильтр единиц в E.) Будет использоваться также отношение *бесконечной близости* между элементами E, т. е.

$$e_1 \approx e_2 \leftrightarrow e_1 - e_2 \in \mu(\mathscr{E}) \wedge e_2 - e_1 \in \mu(\mathscr{E}).$$

4.6.3. *Имеет место равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для $T \in L(X, E)$ последовательно выводим:

$$\begin{gathered}
T \in \bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \leqslant f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})\; f^*(T) := \sup_{x\in\mathrm{dom}(f)} (Tx - f(x)) \leqslant T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E}) 0 \leqslant f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \leqslant -\varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \approx 0 \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, \varepsilon \in E^+)\, \varepsilon \approx 0 \wedge f^*(T) = T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow T \in \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}),
\end{gathered}$$

что и требуется. $\rhd$

4.6.4. Внешнее множество, фигурирующее в обеих частях равенства 4.6.3, называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в точке $\overline{x}$ и обозначают $Df(\overline{x})$. Элементы $Df(\overline{x})$ называют *инфинитезимальными субградиентами* f в точке $\overline{x}$. Специальных указаний на множество $\mathscr{E}$ при этом не делают, так как вероятность недоразумений незначительна.

4.6.5. *Пусть выполнено предположение стандартности антуража, т. е. параметры X, f, $\overline{x}$ — стандартные множества. Стандартизация инфинитезимального субдифференциала отображения f в точке $\overline{x}$ совпадает с (нулевым) субдифференциалом f в точке $\overline{x}$, т. е.*

$${}^*Df(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для стандартного $T \in {}^{\circ}L(X,E)$ в силу принципа переноса выполнено

$$\begin{gathered} T \in {}^{*}Df(\overline{x}) \leftrightarrow T \in Df(\overline{x}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \leqslant f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \leqslant f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow T \in \partial f(\overline{x}), \end{gathered}$$

ибо $\inf \mathscr{E} = 0$ на основании соотношения $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^{\circ}E = 0$. $\rhd$

4.6.6. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g : E \to F^{\bullet}$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(g)$ и $\operatorname{epi}(f) \times F$ находятся в общем положении, то*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} D(T \circ f)\ (\overline{x}).$$

Если, кроме того, параметры (за исключением, быть может, точки $\overline{x}$) стандартны, то для стандартных ядер справедливо представление

$${}^{\circ}D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in {}^{\circ}Dg(f(\overline{x}))} {}^{\circ}D(T \circ f)(\overline{x}).$$

$\lhd$ Отметим, что по условию монада $\mu(\mathscr{E})$ — это нормальная внешняя подполугруппа в F, т. е.

$$\varepsilon \in \mu(\mathscr{E}) \to [0, \varepsilon] \subset \mu(\mathscr{E}), \quad \mu(\mathscr{E}) + \mu(\mathscr{E}) \subset \mu(\mathscr{E}).$$

Учитывая это обстоятельство и привлекая как 4.6.3, так и правила вычисления ε-субдифференциалов, последовательно получаем

$$\begin{gathered} D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \partial_{\varepsilon}(g \circ f)(\overline{x}) = \\ = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0}} \bigcup_{T \in \partial \varepsilon_1 g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x}) = \\ = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0}} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x}) = \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_1 \approx 0} \ \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \ \bigcup_{\varepsilon_2 \geqslant 0, \varepsilon_2 \approx 0} \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x}) = \\
&= \bigcup_{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_1 \approx 0} \ \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} D(T \circ f)(\overline{x}).
\end{aligned}
$$

Пусть теперь выполнено предположение о стандартности антуража и $S \in {}^{\circ}D(g \circ f)(\overline{x})$. Тогда для некоторого бесконечно малого ε будет

$$
(g \circ f)^*(S) = \sup_{x \in \mathrm{dom}(g \circ f)} (Sx - g \circ f(x)) \leqslant S\overline{x} - g(f(\overline{x})) + \varepsilon.
$$

По формуле замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля с учетом принципа переноса имеется стандартный оператор $T \in {}^{\circ}L(E, F)$ такой, что T положителен, т. е. $T \in L^+(E, F)$ и, кроме того,

$$
(g \circ f)^*(S) = (T \circ f)^*(S) + g^*(T).
$$

Отсюда следует

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \geqslant \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - T \circ f(x)) + \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - g(e)) - S\overline{x} + g(f(\overline{x})) = \\
= \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))+ \\
+ \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))).
\end{aligned}
$$

Положим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &:= \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))), \\
\varepsilon_2 &:= \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))).
\end{aligned}
$$

Ясно, что $S \in \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x})$, т. е. $S \in {}^{\circ}D(T \circ f)(\overline{x})$ и $T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))$, т. е. $T \in {}^{\circ}Dg(f(\overline{x}))$, ибо $\varepsilon_1 \approx 0$ и $\varepsilon_2 \approx 0$. $\triangleright$

4.6.7. *Пусть $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное натуральное число. Если $f_1, \dots, f_n$ находятся* *в общем положении, то для точки* $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$ *выполнено*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)(\overline{x}) = Df_1(\overline{x}) + \ldots + Df_n(\overline{x}).$$

$\lhd$ Доказательство состоит в применении 4.6.3 и правила ε-субдифференцирования суммы с учетом того, что сумма стандартного числа бесконечно малых слагаемых вновь бесконечно мала. $\rhd$

4.6.8. *Пусть* $f_1, \ldots, f_n : X \to E^\bullet$ *— выпуклые операторы, причем* n *— стандартное число. Допустим, что* $f_1, \ldots, f_n$ *находятся в общем положении,* E *— это векторная решетка и* $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f_1 \vee \ldots \vee f_n)$. *Если* F *— стандартное* K*-пространство и* $T \in L^+(E, F)$ *— положительный линейный оператор, то элемент* $S \in L(X, F)$ *служит инфинитезимальным субградиентом оператора* $T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n)$ *в точке* $\overline{x}$ *в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T_k \in L^+(E, F) \quad (k := 1, \ldots, n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k \overline{x} \approx T(f_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee f_n(\overline{x})); \quad S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ f_k)(\overline{x}).$$

$\lhd$ Определяем следующие операторы:

$$(f_1, \ldots, f_n) : X \to (E^n)^\bullet, \quad (f_1, \ldots, f_n)(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x));$$
$$\varkappa : E^n \to E, \quad \varkappa(e_1, \ldots, e_n) := e_1 \vee \ldots \vee e_n.$$

Тогда справедливо представление:

$$T \circ f_1 \vee \ldots \vee f_n = T \circ \varkappa \circ (f_1, \ldots, f_n).$$

Отсюда, учитывая 4.6.5 и вспоминая, что $T \circ \varkappa$ — сублинейный оператор, выводим требуемое. $\rhd$

4.6.9. Пусть X — векторное пространство, E — некоторое K-пространство и $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в пространстве $L(X, E)$. Рассмотрим регулярный выпуклый оператор $f := \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle^e$, где, как обычно, $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ — *канонический сублинейный оператор*,

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E, \quad \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f) := \sup f(\mathfrak{A})$$

и аффинный оператор $\langle\mathfrak{A}\rangle^\varepsilon$ для $e \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ действует по правилу $\langle\mathfrak{A}\rangle^e x := \langle\mathfrak{A}\rangle x + e$, $\langle\mathfrak{A}\rangle x : T \in \mathfrak{A} \mapsto Tx$.

4.6.10. *Если* $g : E \to F^{\bullet}$ *— возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартное* K*-пространство* F*, причем в образе* $f(X)$ *имеется алгебраически внутренняя точка* $\operatorname{dom}(g)$*, а элемент* $\overline{x}$ *из* X *таков, что* $f(\overline{x}) \in \operatorname{dom}(g)$*, то справедливо представление*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \Big\{T \circ \langle\mathfrak{A}\rangle : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x})),\\ T \geqslant 0,\ T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle\mathfrak{A}\rangle^{e} \overline{x}\Big\}.$$

$\lhd$ Если $S \in D(g \circ f)(\overline{x})$, то по 4.6.3 $S \in \partial_{g}(g \circ f)(\overline{x})$ при некотором $\varepsilon \approx 0$. Остается привлечь соответствующее правило ε-субдифференцирования.

Если же $T \geqslant 0$, $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x}))$ и $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle\mathfrak{A}\rangle^{e}\overline{x}$, то для некоторого $\varepsilon \approx 0$ будет, конечно же, $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_{\varepsilon} g(f(\overline{x}))$. Положим, кроме того, $\delta := T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) - T \circ \langle\mathfrak{A}\rangle^{e}\overline{x}$. Тогда $\delta \geqslant 0$ и $\delta \approx 0$ по условию. Значит, $T \circ \langle\mathfrak{A}\rangle \in \partial_{\varepsilon+\delta}(g \circ f)(\overline{x})$. Остается заметить, что $\varepsilon + \delta \approx 0$. $\rhd$

4.6.11. *Пусть в условиях* 4.6.10 *отображение* g *— это сублинейный оператор Магарам. Тогда*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} \ \bigcup_{\delta \geqslant 0, T\delta \approx 0} T(\partial_{\delta} f(\overline{x})).$$

$\lhd$ В силу 4.6.5 можно считать, что $g := T$. Если для всякого $x \in X$ выполнено $Cx - C\overline{x} \leqslant f(x) - f(\overline{x}) + \delta$ и $T\delta \approx 0$, то бесспорно $TC \in \partial_{T\delta}(T \circ f)(\overline{x}) \subset D(T \circ f)(\overline{x})$. Для завершения доказательства возьмем $S \in D(T \circ f)(\overline{x})$. В силу 4.6.3 имеется бесконечно малое ε такое, что $S \in \partial_{\varepsilon}(T \circ f)(\overline{x})$. Привлекая соответствующее правило ε-субдифференцирования, найдем $\delta \geqslant 0$ и $C \in \partial_{\delta} f(\overline{x})$ такие, что $T\delta \leqslant \varepsilon$ и $S = TC$. Это и требовалось. $\rhd$

4.6.12. *Пусть* Ξ *— некоторое множество и* $(f_{\xi})_{\xi \in \Xi}$ *— равномерно регулярное семейство выпуклых операторов. Справедливы представления:*

$$D\Big(\sum_{\xi \in \Xi} f_{\xi}\Big)(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\delta \in l_1(\Xi, E) \\ \delta \geqslant 0, \delta \approx 0}} \sum_{\xi \in \Xi} \partial_{\delta(\xi)} f_{\xi}(\overline{x});$$

$$D\Big(\sup_{\xi\in\Xi} f_\xi\Big)(\overline{x}) \cup \Big\{ \sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \partial_{\delta(\xi)} f_\xi(\overline{x}) : 0 \leqslant \alpha_\xi \leqslant \mathbb{1}_E,$$

$$\sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi = \mathbb{1}_E, \quad \sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi f_\xi(\overline{x}) \approx \sup_{\xi\in\Xi} f_\xi(\overline{x}), \quad \sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \delta(\xi) \approx 0 \Big\}.$$

$\lhd$ Доказательство немедленно вытекает из 4.6.11 с учетом правил дезинтегрирования 4.5.7 (1). $\rhd$

4.6.13. Полезно отметить, что формулы 4.6.7–4.6.12 допускают уточнения, аналогичные 4.6.6 в случае стандартности антуража (в который, быть может, не включена точка $\overline{x}$). Подчеркнем также, что по приведенным образцам выводится полный спектр всевозможных формул субдифференциального исчисления (свертки, лебеговы множества и т. п.). Сформулируем некоторые их них.

4.6.14. ***Теорема.*** *Пусть* $f_1 : X \times Y \to E^\bullet$ *и* $f_2 : Y \times Z \to E^\bullet$ — *выпуклые операторы и* $\delta, \varepsilon \in E^+$. *Допустим, что в некоторой точке* (x, y, z) *свертка* $f_2 \vartriangle f_1$ *инфинитезимально точна, т. е. выполнено приближенное равенство* $(f_2 \vartriangle f_1)(x, y) \approx f_1(x, y) + f_2(y, z)$. *Если, кроме того, выпуклые множества* $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ *и* $\operatorname{epi}(X, f_2)$ *находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y) = Df_2(y, z) \circ Df_1(x, y).$$

$\lhd$ Положим $\delta := f_1(x, y) + f_2(y, z) - (f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$. По условию δ — бесконечно малая величина.

Сначала докажем, что правая часть доказываемого равенства содержится в левой. Возьмем $(T_1, T) \in Df_1(x, y)$ и $(T, T_2) \in Df_2(y, z)$. Тогда для некоторых бесконечно малых положительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ будет $(T_1, T) \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y)$ и $(T, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z)$. Можно считать, не нарушая общности, что $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \geqslant \delta$. В силу 4.2.8 оператор (T_1, T_2) попадает в $\partial_\varepsilon(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$, как только $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \delta$. Следовательно, $(T_1, T_2) \in D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$.

Установим противоположное включение. Для этого возьмем какой-нибудь положительный бесконечно малый элемент ε и оператор (T_1, T_2) из $D(f_2 \vartriangle f_1)(x, y)$. В силу 4.2.8 найдутся положительные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ такие, что $(T_1, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y)$ и при этом $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$. Ясно, что величины ε_1 и ε_2 бесконечно малы. $\rhd$

4.6.15. Теорема. *Пусть* $\vee$*-свертка* $f_2 \odot f_1$ *выпуклых операторов* $f_1 : X \times Y \to E^{\bullet}$ *и* $f_2 : Y \times Z \to E^{\bullet}$ *инфинитезимально точна в некоторой точке* $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$, *т. е.* $(f_2 \odot f_1)(x, z) \approx f_1(x, y) \vee f_2(y, z)$. *Если при этом выпуклые множества* $\operatorname{epi}(f_1, Z)$ *и* $\operatorname{epi}(X, f_2)$ *находятся в общем положении, то справедливо представление*

$$D(f_2 \odot f_1)(x, z) = \bigcup (D(\alpha_2 \circ f_2)(y, z) \circ D(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)),$$

где объединение берется по всем $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E^+)$ *таким, что* $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$.

$\lhd$ Положим $\delta := f_1(x, y) \vee f_2(y, z) - (f_2 \odot f_1)(x, z)$. По условию δ — бесконечно малая величина. Допустим, что $(T_1, T_2) \in \partial_\varepsilon(f_2 \odot f_1)(x, z)$ для некоторого бесконечно малого ε. В силу δ-точности $\vee$-свертки $f_2 \odot f_1$ в точке (x, y, z) можно найти оператор $S \in \mathscr{L}(X, E)$ и ортоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Orth}(E)^+$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_E$, такие, что

$$\alpha_1 \circ f_1(x, y) + \alpha_2 \circ f_2(y, z) + (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) + \\ +(\alpha_2 \circ f_2)^*(S, T_2) \leqslant T_1 x - T_2 z + \varepsilon + \delta.$$

Положим $\varepsilon_1 := (\alpha_1 \circ f_1)^*(T_1, S) + \alpha_1 \circ f_1(x, y) - T_1 x + S y$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon + \delta - \varepsilon_1$. Тогда $(T_1, S) \in \partial_{\varepsilon_1}(\alpha_1 \circ f_1)(x, y)$ и $(S, T_2) \in \partial_{\varepsilon_2}(\alpha_2 \circ f_2)(y, z)$. Ясно, что величины ε_1 и ε_2 бесконечно малы, т. е. (T_1, T_2) входит в правую часть требуемого равенства. Противоположное включение проверяется столь же просто. $\rhd$

4.6.16. Теорема. *Пусть* $h : X \times Y \to E^{\bullet}$ *и* $g : X \times Y \to F^{\bullet}$ — *выпуклые операторы и* $\Phi \subset X \times Y$ — *выпуклое соответствие. Положим*

$$f(x) := \inf\{h(x, y) : \ y \in \Phi(x), \ g(x, y) \leqslant 0\}.$$

Допустим, что в общем положении находятся тройка выпуклых множеств $\operatorname{epi}(h), \Phi \times E^+, \{g \leqslant 0\} \times E^+$, *а также пара* $\operatorname{epi}(g), X \times Y \times (-F^+)$. *Пусть, сверх того,* $h(x, y) \approx f(x)$ *для некоторых* $(x, y) \in \operatorname{dom}(h) \cap \Phi$, $g(x, y) \leqslant 0$. *Тогда имеет место представление*

$$Df(x) = \Big\{T : (T, 0) \in Dh(x, y) + D\Phi(x, y) + \bigcup \big(D(\alpha \circ g)(x, y)\big)\Big\},$$

где объединение берется по всем $\alpha \in \mathscr{L}(F, E)^+$.

◁ Пусть ε — некоторая положительная инфинитезималь. Ясно, что включение $T \in \partial_\varepsilon f(x)$ означает существование операторов $\alpha \in \mathscr{L}^+(F, E)$, $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{L}(X, E)$ и $S_1, S_2, S_3 \in \mathscr{L}(Y, E)$ таких, что $T = T_1 + T_2 + T_3$, $0 = S_1 + S_2 + S_3$ и

$$f(x) + h^*(T_1, S_1) + \Phi^*(T_2, S_2) + (\alpha \circ g)^*(T_3, S_3)) \leqslant Tx + \varepsilon.$$

Пусть $y \in Y$ удовлетворяет условиям теоремы. Положим $\delta := f(x) - h(x, y)$ и обозначим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &:= h(x, y) + h^*(T_1, S_1) - T_1 x + S_1 y, \\ \varepsilon_2 &:= \Phi^*(T_2, S_2) - T_2 x + S_2 y, \\ \varepsilon_3 &:= (\alpha \circ g)(x, y) + (\alpha \circ g)^*(T_3, S_3) - T_3 x + S_3 y. \end{aligned}$$

Тогда $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqslant (\alpha \circ g)(x, y) + \varepsilon + \delta$ и, привлекая 4.1.3 (1), получаем $(T_1, S_1) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x, y)$, $(T_2, S_2) \in \partial_{\varepsilon_2} \Phi(x, y)$, $(T_3, S_3) \in \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x, y)$. Тем самым

$$(T, 0) \in \partial_{\varepsilon_1} h(x, y) + \partial_{\varepsilon_2} \Phi(x, y) + \partial_{\varepsilon_3}(\alpha \circ g)(x, y).$$

Поскольку величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ бесконечно малы, то установлено включение левого множества из доказываемого равенства в правое. Обратное включение проверяется аналогичными рассуждениями. ▷

4.6.17. Пусть, как и выше, $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор, действующий в стандартное K-пространство E, и $\mathscr{X} := \mathscr{X}(\,\cdot\,)$ — *обобщенная точка в* $\operatorname{dom}(f)$, т. е. сеть элементов $\operatorname{dom}(f)$. Говорят, что оператор $T \in L(X, E)$ — это *инфинитезимальный субградиент* f в обобщенной точке $\mathscr{X}$, если для некоторого бесконечно малого положительного ε выполнено

$$f^*(T) \leqslant \liminf(T\mathscr{X} - f(\mathscr{X})) + \varepsilon$$

(здесь, конечно, действует правило $T\mathscr{X} := T \circ \mathscr{X}$). Таким образом, в предположении стандартности антуража инфинитезимальный субградиент — это обычный опорный оператор в обобщенной точке (см. [1, 138]). Условимся обозначать символом $Df(\mathscr{X})$ совокупность всех инфинитезимальных субградиентов f в $\mathscr{X}$. Это множество по понятным причинам называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в $\mathscr{X}$. Приведем выводы двух основных правил субдифференцирования в обобщенной точке, представляющие интерес в связи с тем, что точные формулы для соответствующих ε-субдифференциалов неизвестны.

4.6.18. *Пусть* $f_1, \dots, f_n$ — *стандартный набор выпуклых операторов в общем положении и обобщенная точка* $\mathscr{X}$ *лежит в пересечении* $\operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$. *Тогда*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)\ (\mathscr{X}) = Df_1(\mathscr{X}) + \ldots + Df_n(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Пусть $T_k \in Df_k(\mathscr{X})$ для $k := 1, \dots, n$, т. е.

$$f_k^*(T_k) \leqslant \liminf (T_k \mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k$$

при подходящих бесконечно малых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. При этом

$$(f_1 + \ldots + f_n)^*(T_1 + \ldots + T_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k^*(T_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\liminf (T_k \mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k) \leqslant$$
$$\leqslant \liminf \sum_{k=1}^{n} (T_k \mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

в силу обычных свойств преобразования Юнга — Фенхеля и нижнего предела. Остается заметить, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \approx 0$, и сделать вывод о справедливости включения $\supset$ для множеств, рассматриваемых в интересующем нас равенстве.

Для проверки противоположного включения, сведя дело к $n = 2$, возьмем $T \in D(f_1 + f_2)(\mathscr{X})$. Тогда при некоторых $\varepsilon \approx 0$ и T_1, T_2 таких, что $T_1 + T_2 = T$, будет

$$(f_1 + f_2)^*(T) = f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2),$$
$$f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2) - \liminf (T\mathscr{X} - (f_1 + f_2)(\mathscr{X})) \leqslant \varepsilon.$$

Положим по определению

$$\delta_1 := f_1^*(T_1) - \liminf (T_1 \mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})),$$
$$\delta_2 := f_2^*(T_2) - \liminf (T_2 \mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})).$$

Видно, что при $k := 1, 2$ выполнено

$$0 \leqslant \sup_{x \in \operatorname{dom}(f_k)} (T_k x - f_k(x)) - \limsup\, (T_k \mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) \leqslant \delta_k.$$

Значит, остается убедиться в бесконечной малости δ_1 и δ_2. Имеем

$$\begin{gathered}\delta_1+\delta_2 \leqslant \varepsilon+\liminf(T\mathscr{X}-(f_1+f_2)(\mathscr{X}))-\\ -\sum_{k=1}^{2}\liminf(T_k\mathscr{X}-f_k(\mathscr{X}))\leqslant\\ \leqslant(\varepsilon+\limsup(T_1\mathscr{X}-f_1(\mathscr{X}))-\liminf(T_1\mathscr{X}-f_1(\mathscr{X})))\wedge\\ \wedge(\varepsilon+\limsup(T_2\mathscr{X}-f_2(\mathscr{X}))-\liminf(T_2\mathscr{X}-f_2(\mathscr{X}))\leqslant\\ \leqslant\big(\varepsilon+f_1^*(T_1)-\liminf(T_1\mathscr{X}-f_1(\mathscr{X}))\big)\wedge\\ \wedge\big(\varepsilon+f_2^*(T_2)-\liminf(T_2\mathscr{X}-f_2(\mathscr{X}))\big)\leqslant\\ \leqslant\varepsilon+\delta_1\wedge\delta_2.\end{gathered}$$

Отсюда $0\leqslant\delta_1\vee\delta_2\leqslant\varepsilon$, что и завершает доказательство. $\rhd$

4.6.19. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g: E\to F'$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X\times\operatorname{epi}(g)$ и $\operatorname{epi}(f)\times F$ находятся в общем положении, то для обобщенной точки $\mathscr{X}$ в $\operatorname{dom}(g\circ f)$ выполнено*

$$D(g\circ f)(\mathscr{X})=\bigcup_{T\in Dg(f(\mathscr{X}))}D(T\circ f)(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Если известно, что

$$\begin{gathered}(T\circ f)^*(S)\leqslant\liminf(S\mathscr{X}-T\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon_1,\\ g^*(T)\leqslant\liminf(T\circ f(\mathscr{X})-g\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon_2\end{gathered}$$

для некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2, то

$$\begin{gathered}(g\circ f)^*(S)\leqslant(T\circ f)^*(S)+g^*(T)\leqslant\\ \leqslant\liminf(S\mathscr{X}-T\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon_1+\liminf(T\circ f(\mathscr{X})-g\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon_2\leqslant\\ \leqslant\liminf(S\mathscr{X}-g\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon_1+\varepsilon_2.\end{gathered}$$

Следовательно, $S\in D(g\circ f)(\mathscr{X})$ и правая часть анализируемой формулы символизирует множество, входящее в ее левую часть.

Для завершения доказательства возьмем $S\in D(g\circ f)(\mathscr{X})$. Тогда найдутся бесконечно малое ε и оператор T такие, что

$$(g\circ f)^*(S)=(T\circ f)^*(S)+g^*(T)\leqslant\liminf(S\mathscr{X}-g\circ f(\mathscr{X}))+\varepsilon.$$

Положим

$$\delta_1 := (T \circ f)^*(S) - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})),$$
$$\delta_2 := g^*(T) - \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})).$$

Учитывая свойства верхних и нижних пределов, выводим, во-первых,

$$\delta_1 \geqslant (T \circ f)^*(S) - \limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \geqslant 0,$$
$$\delta_2 \geqslant g^*(T) - \limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \geqslant 0$$

и, во-вторых,

$$\begin{gathered}\delta_1 + \delta_2 \leqslant \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon - \\ - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) - \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leqslant \\ \leqslant (\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon) \wedge \\ \wedge (\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) - \\ - \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g f(\mathscr{X})) + \varepsilon) \leqslant \delta_1 \wedge \delta_2 + \varepsilon,\end{gathered}$$

ибо справедливы очевидные неравенства

$$\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leqslant g^*(T),$$
$$\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \leqslant (T \circ f)^*(S).$$

Таким образом, $0 \leqslant \delta_1 \vee \delta_2 \leqslant \varepsilon$ и $\delta_1 \approx 0$, $\delta_2 \approx 0$. Это означает, что $T \in Dg(f(\mathscr{X}))$ и $S \in D(T \circ f)(\mathscr{X})$. $\triangleright$

4.6.20. Дадим теперь некоторое обобщение понятия инфинитезимального субдифференциала, апеллирующее к предельно широкому спектру внешних возможностей.

Пусть, как и прежде, F — выпуклый оператор и B — возможно внешнее подмножество $\operatorname{dom}(F)$. Полагаем

$$DF(B) := \bigcap_{\overline{x} \in B} DF(\overline{x}).$$

Внешнее множество $DF(B)$ называют *инфинитезимальным субдифференциалом F вдоль множества B.*

Пусть теперь $\mathscr{B}$ — (вообще говоря, внешний) базис фильтра в эффективной области определения $\operatorname{dom}(F)$ выпуклого оператора F. Иногда такой базис называют *обобщенной точкой.* Определим *инфинитезимальный субдифференциал* F вдоль базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в обобщенной точке $\mathscr{B}$) соотношением

$$DF(\mathscr{B}) := \bigcup_{B\in\mathscr{B}} DF(B).$$

4.6.21. *Для оператора T из $L(X,Y)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $T \in DF(\mathscr{B})$;

(2) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial^{\,\varepsilon} F(\overline{x})$;

(3) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E})(\forall \overline{x} \in B)\, T \in \partial^{\,\varepsilon} F(\overline{x})$;

(4) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(F^*(T) \leqslant T\overline{x} - F\overline{x} + \varepsilon)$, *где F^*— это преобразование Юнга — Фенхеля оператора F;*

(5) *найдется $B \in \mathscr{B}$ такое, что* $(\forall \overline{x} \in B) \sup\limits_{x\in\operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$

◁ Привлекая определения, видим:

$$DF(\mathscr{B}) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x}\in B} DF(\overline{x}) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x}\in B} \bigcap_{\varepsilon\in{}^{\circ}\mathscr{E}} \partial^{\,\varepsilon} F(\overline{x}) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\varepsilon\in{}^{\circ}\mathscr{E}} \bigcap_{\overline{x}\in B} \partial^{\,\varepsilon} F(\overline{x}),$$

что означает эквивалентность (1) ↔ (3). Ссылка на принцип Коши обеспечивает (2) ↔ (3). Прочие эквивалентности следуют из определения преобразования Юнга — Фенхеля. ▷

4.6.22. *Пусть $\mathscr{C} := \{C \subset X : (\exists B \in \mathscr{B})\, C \supset B\}$ — внешний фильтр, порожденный базисом $\mathscr{B}$. Тогда $DF(\mathscr{C}) = DF(\mathscr{B})$.*

◁ Ясно, что $\mathscr{C} \supset \mathscr{B}$, и поэтому

$$DF(\mathscr{C}) = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} DF(C) \supset \bigcup_{B\in\mathscr{B}} DF(B) = DF(\mathscr{B}).$$

Если теперь $T \in DF(\mathscr{C})$, то в силу 4.6.21 для некоторого C из $\mathscr{C}$ будет выполнено условие

$$(\forall \overline{x} \in C) \sup_{x \in \operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$$

Множество C содержит некоторый элемент B базиса $\mathscr{B}$ по условию. Апеллируя к 4.6.21, видим, что $T \in DF(B) \subset DF(\mathscr{B})$. $\triangleright$

4.6.23. *Пусть $\mathscr{B}$ — внутренний фильтр в X и $f : X \to \mathbb{R}$ — (всюду определенная) выпуклая функция. Тогда для $x^{\#} \in X^{\#}$ выполнено*

$$x^{\#} \in Df(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+))\ f^*(x^{\#}) \leqslant \liminf\,(x^{\#}(\mathscr{B}) - f(\mathscr{B})) + \varepsilon,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ — множество положительных инфинитезималей в $\mathbb{R}$.

$\triangleleft$ Для проверки импликации вправо заметим, что в силу 4.6.21 для некоторого внутреннего B из $\mathscr{B}$ и любого стандартного $\varepsilon > 0$ будет

$$f^*(x^{\#}) \leqslant \inf \big\{ \langle x \mid x^{\#} \rangle - f(x) :\, x \in B \big\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$(\forall \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}_+)\, f^*(x^{\#}) \leqslant \liminf_{x \in B} \big(\langle x \mid x^{\#} \rangle - f(x) \big) + \varepsilon.$$

Остается сослаться на принцип Коши.

Установим теперь импликацию влево. Для этого возьмем бесконечно малое $\delta > 0$ и подберем $B \in \mathscr{B}$ так, чтобы было

$$\liminf_{x \in B} \langle x \mid x^{\#} \rangle - f(x) \leqslant \inf(x^*(B) - f(B)) + \delta.$$

После этого можно сослаться на 4.6.21. $\triangleright$

4.6.24. *Пусть Z — стандартное K-пространство и $G : Y \to Z^{\bullet}$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(G)$ и $\operatorname{epi}(F) \times Z$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F)$, то*

$$D(G \circ F)(\mathscr{B}) = \bigcup_{S \in DG(F(\mathscr{B}))} D(S \circ F)(\mathscr{B}).$$

◁ Доказательство состоит в проверке двух включений. Для проверки одного из них возьмем $S \in DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S \circ F)(\mathscr{B})$. Тогда в силу 4.6.21 выполнены соотношения

$$(\exists \overline{B} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial^{\varepsilon}(S \circ F)(\overline{x});$$

$$(\exists \overline{\overline{B}} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{\overline{B}})(\exists \delta \in \mu(\mathscr{E}))\, S \in \partial^{\delta} G((S \circ F)(\overline{x})).$$

Поскольку $\mathscr{B}$ — это базис фильтра, для некоторого $B \in \mathscr{B}$ будет $B \subset \overline{B} \cap \overline{\overline{B}}$. При этом для $\overline{x} \in B$ справедливы неравенства

$$(G \circ F)^*(T) \leqslant G^*(S) + (S \circ F)^*(T) \leqslant T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon + \delta.$$

Здесь мы учли подходящее правило подсчета преобразования Юнга — Фенхеля. Инфинитезимали составляют конус. Поэтому $\varepsilon + \delta \approx 0$ и ссылка на 4.6.21 гарантирует вхождение $T \in D(G \circ F)(\mathscr{B})$. Следовательно, множество из правой части доказываемого включения содержится в множестве, стоящем в его левой части.

Для доказательства оставшегося все еще непроверенным включения возьмем $T \in D(G \circ F)(\mathscr{B})$. В силу 4.6.21 для некоторого B из $\mathscr{B}$ будет

$$(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(G \circ F)^*(T) \leqslant T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon.$$

Применяя точную формулу для преобразования Юнга — Фенхеля композиции выпуклых операторов, найдем положительный оператор $S \in L^+(Y, Z)$, для которого

$$(G \circ F)^*(T) = G^*(S) + (S \circ F)^*(T).$$

Взяв $\overline{x} \in \overline{B}$, положим

$$\varepsilon_1 := G^*(S) - (SF(\overline{x}) - G \circ F(\overline{x}));$$

$$\varepsilon_2 := (S \circ F)^*(T) - (T\overline{x} - SF\overline{x}).$$

Ясно, что $0 \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$. Стало быть, ε_1 и ε_2 — бесконечно малые величины. Итак, $S \in DG(F(B)) \subset DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S \circ F)(B) \subset D(S \circ F)(\mathscr{B})$. ▷

4.6.25. *Пусть $F_1, \dots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Если $F_1, \dots, F_n$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(F_n)$, то*

$$D(F_1 + \dots + F_n)(\mathscr{B}) = D(F_1)(\mathscr{B}) + \dots + D(F_n)(\mathscr{B}).$$

$\triangleleft$ Если $T_k \in D(F_k(\mathscr{B}))$, то найдутся $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}$ такие, что для каждого $\overline{x}$ из B_k при некотором бесконечно малом ε_k выполнено $T_k \in \partial^{\varepsilon_k}(F_k)(\overline{x})$. Если теперь $\overline{x} \in B_1 \cap \dots \cap B_n$, то выполнено

$$T_1 + \dots + T_n \in \partial^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}(F_1 + \dots + F_n)(\overline{x}).$$

Сумма стандартного числа бесконечно малых бесконечно мала. Следовательно, ссылка на 4.6.21 подтверждает, что множество в правой части доказываемого равенства содержится в множестве из левой части.

Пусть теперь $T \in D(F_1 + \dots + F_n)(\mathscr{B})$. Привлекая 4.6.21, видим, что для некоторого $B \in \mathscr{B}$ выполняется условие

$$(\forall \overline{x} \in \mathscr{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial^{\varepsilon}(F_1 + \dots + F_n)(\overline{x}).$$

Таким образом, взяв $\overline{x} \in B$, можно подыскать инфинитезималь ε, для которой

$$(F_1 + \dots + F_n)^*(T) \leqslant T\overline{x} - (F_1 + \dots + F_n)(\overline{x}) + \varepsilon.$$

Используя точную формулу для подсчета преобразования Юнга — Фенхеля, найдем операторы $T_1, \dots, T_n \in L(X, Y)$, удовлетворяющие соотношениям

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \right)^*(T) = \sum_{k=1}^{n} F_k^*(T_k).$$

Полагаем теперь

$$\varepsilon_k := F_k^*(T_k) - (T_k\overline{x} - F_k\overline{x}) \quad (k := 1, \dots, n).$$

Ясно, что $\varepsilon_k \geqslant 0$ и $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon_k \approx 0$ и $T_k \in DF_k(\overline{x})$ для каждого $k := 1, \dots, n$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

4.6.26. *Пусть $F_1, \dots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $F_1, \dots, F_n$ находятся в общем положении, Y — векторная решетка и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в* $\operatorname{dom}(F_1 \vee \dots \vee F_n)$. *Если Z — стандартное K-пространство и $T \in L(Y, Z)$ — положительный линейный оператор, то элемент $S \in L(X, Z)$ служит инфинитезимальным субградиентом оператора $T \circ (F_1 \vee \dots \vee F_n)$ вдоль $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если для некоторого $B \in \mathscr{B}$ совместна следующая система условий:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T \in L^+(Y, Z), \quad k := 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k(F_k(\overline{x})) \approx T(F_1(\overline{x}) \vee \dots \vee F_n(\overline{x})) \quad (\overline{x} \in B);$$

$$S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ F_k)(B).$$

$\triangleleft$ Определим следующие операторы:

$$(F_1, \dots, F_n) : X \to (Y^n)^\bullet; \quad (F_1, \dots, F_n)(x) := (F_1(x), \dots, F_n(x));$$
$$\varkappa : Y^n \to Y; \quad \varkappa(y_1, \dots, y_n) := y_1 \vee \dots \vee y_n.$$

Тогда справедливо представление

$$T \circ F_1 \vee \dots \vee F_n = T \circ \varkappa \circ (F_1, \dots, F_n).$$

Учитывая 4.6.25, выводим требуемое. $\triangleright$

4.6.27. *Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство и $\mathscr{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, Y)$, а $F = \varepsilon_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y$ — регулярный выпуклый оператор.*

Пусть, далее, $G : Y \to Z^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартном K-пространстве Z, причем в образе $F(X)$ имеется алгебраически внутренняя точка $\operatorname{dom}(S)$, *а базис фильтра $\mathscr{B}$ в X таков, что $F(\mathscr{B})$ — базис фильтра в* $\operatorname{dom}(G)$. *Оператор S из $\mathscr{L}(X, Z)$ входит в инфинитезимальный субдифференциал $D(G \circ F)(\mathscr{B})$ в том и только в том случае, если найдется $B \in \mathscr{B}$ такой, что совместна следующая система условий:*

$$S = T \circ \langle \mathscr{A} \rangle; \quad T \geqslant 0; \quad T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B));$$

$$(\forall \overline{x} \in B)\, T \circ \Delta_{\mathscr{A}} F\overline{x} \approx T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}.$$

$\triangleleft$ В силу правил субдифференциального исчисления разрешимость приведенной системы означает, что $S \in D(G \circ F)(\overline{x})$ для каждого $\overline{x} \in B$. Таким образом, остается установить обратную импликацию. Как легко видеть,

$$D(G \circ F)(\mathscr{B}) = D(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y) = \partial(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}}) \circ \langle \mathscr{A} \rangle,$$

где $\overline{\mathscr{B}} := \langle \mathscr{A} \rangle_y(\mathscr{B})$. Значит, нам достаточно получить представление оператора $T \in D(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}})$. Итак, пусть

$$(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))$$
$$(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T \leqslant T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x} - G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x} + \varepsilon.$$

В силу общих правил замены переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля, выполнено

$$(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T = G^*(T \circ \Delta_{\mathscr{A}}).$$

Полагая $\overline{y} := \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}$ для $\overline{x} \in B$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geqslant (G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T + T \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} = \\ &= G^*(T \circ \Delta_{\mathscr{A}}) + G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} = \\ &= \sup_{y \in \mathrm{dom}(G)} (T \circ \Delta_{\mathscr{A}} y - T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y}) - \\ &\quad - (Gy - G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y}) + T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B))$ и $T \circ \Delta_{\mathscr{A}} F\overline{x} \approx T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}$. Тем самым требуемое утверждение установлено. $\triangleright$

4.7. Комментарии

4.7.1. (1) Преобразование Юнга — Фенхеля имеет давнюю историю, которая отражена в монографиях В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова и С. В. Фомина [3], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78], М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого [97], Р. Т. Рокафеллара [218], а также в обзорах А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78], А. Д. Иоффе и В. Л. Левина [76], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [134], В. М. Тихомирова [230]. В современной форме оно введено В. Фенхелем [353, 354] в конечномерном пространстве, а затем А. Бронстедом [304] и Ж.-Ж. Моро [470] — в бесконечномерной ситуации.

(2) Понятие сопряженной функции тесно связано с классическим преобразованием Лежандра для дифференцируемых функций (см. [218]). На этом основании некоторые авторы предпочитают говорить о преобразовании Лежандра или преобразовании Лежандра — Юнга — Фенхеля (см. [231]). Преобразование Лежандра встречается уже у Л. Эйлера и даже у Г. В. Лейбница, но в явном виде было введено А.-М. Лежандром в 1789 году.

Пусть C — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : C \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Обозначим $D := \operatorname{im} df := df(C)$ — образ C относительно отображения $df : x \mapsto df(x)$ $(x \in C)$. Введем функцию $g : D \to \mathbb{R}$ формулой $(g(x^*)) := \langle (df)^{-1}(x^*), x^* \rangle - f((df)^{-1}(x^*))$ $(x^* \in D)$. Пару (D, g) называют *преобразованием Лежандра* пары (C, f). Связь преобразования Лежандра с сопряженной функцией отражена в следующей теореме (подробности см. в книге Р. Т. Рокафеллара [218]):

Теорема. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\bullet$ — замкнутая выпуклая функция, $C := \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f)) \neq \varnothing$ и f дифференцируема на C. Тогда пара (C, f) имеет преобразование Лежандра (D, g), причем $D = df(C) \subset \operatorname{dom}(f)^*$ и $g = f^*|_D$.*

(3) Для операторов со значениями в векторной решетке преобразование Юнга — Фенхеля появилось в работах К. Раффена [508], В. Л. Левина [177, 178] и М. Валадье [561]. Алгебраический вариант исчисления сопряженных операторов построил С. С. Кутателадзе [152], см. также статьи К.-Г. Эльстера и Р. Незе [348], Е. С. Левитина, А. А. Милютина и Н. П. Осмоловского [180], Ж.-П. Пено и М. Тера [498], К. Залинеску [585, 586], Дж. Зова [590, 591]. Синтез алгебраических приемов, развитых в этих работах, и метода общего положения (см. [108, 123]) привел к «непрерывному» исчислению сопряженных операторов, которое и изложено в этом параграфе.

4.7.2. (1) Понятие ε-субдифференциала скалярных функций ввел Р. Т. Рокафеллар [218]. Дальнейшие результаты в скалярном случае можно найти в монографиях В. Ф. Демьянова и Л. В. Васильева [60], Е. А. Нурминского [201], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [202], И. Экланда и Р. Темама [246]. Общее ε-субдифференцирование в классе выпуклых операторов развито в [153, 157]. Некоторые правила ε-субдифференцирования получили независимо и почти одновременно В. Ф. Демьянов и В. К. Шомесова [65], Ж.-Б. Ириар-Уррути [374] и М. Тера [550, 551].

(2) Пусть X — вещественное векторное пространство, а E — векторная решетка. Соответствие Φ из X в $L(X,E)$ называют *циклически монотонным,* если для любого $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$T_1(x_1 - x_0) + T_2(x_2 - x_1 + \ldots + T_n(x_n - x_{n-1}) \geqslant 0,$$

каковы бы ни были $x_0, \ldots, x_n \in X$, $x_0 = x_n$, и $T_k \in \Phi(x_k)$ $(k := 1, \ldots, n)$. Если же указанное условие выполняется только для $n = 2$, то соответствие Φ принято называть *монотонным.* Легко понять, что субдифференциальное соответствие $x \mapsto \partial f(x)$ выпуклого оператора $f : X \to E^\bullet$ является циклически монотонным, а значит, и монотонным.

(3) Монотонное (циклически монотонное) соответствие называют *максимальным,* если для любого монотонного соответствия $\Psi \subset X \times L(X,E)$ из $\Phi \subset \Psi$ вытекает $\Phi = \Psi$. Структура максимальных монотонных соответствий и их связь с субдифференциальными соответствиями в общей ситуации мало изучена, однако имеется ряд глубоких фактов для двойственности $X \leftrightarrow X'$ в случае банахова пространства X. Следующий факт установлен Р. Т. Рокафелларом [517]:

Теорема Рокафеллара. *Пусть X — банахово пространство с сопряженным X'. Если $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, то его субдифференциальное соответствие ∂f представляет собой максимальное монотонное соответствие из X в X'.*

Очевидно, что если максимальное монотонное соответствие циклически монотонно, то оно будет и максимальным циклически монотонным соответствием. Интересно, что при некоторых условиях субдифференциальными соответствиями исчерпывается запас максимальных циклически монотонных соответствий. Этот результат также установил Р. Т. Рокафеллар.

Теорема. *Пусть X — банахово пространство с сопряженным X'. Субдифференциалы полунепрерывных снизу собственных вы-*

пуклых функций на X и только они служат максимальными циклически монотонными соответствиями из X в X'.

Доказательство этих, а также других близких результатов см. в книге Р. Фелпса [501].

(4) Монотонные соответствия стали интенсивно изучать в связи с различными аспектами нелинейного анализа независимо от теории субдифференциалов. Значительный вклад в это направление внесли Х. Брезис, Ф. Браудер, Г. Дж. Минти, Р. Т. Рокафеллар и др. Обширный материал по теории монотонных соответствий, ее приложений, а также по смежным вопросам имеется в двухтомнике Е. Зайдлера [587], в книгах В. Барбу и Т. Прекупану [274], К. Деймлинга [325], Ж.-П. Обэна [264, 265, 267], Ж.-П. Обэна и Е. Франковской [268], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [202], Д. Паскали и С. Сбёрлана [495], Р. Фелпса [501], И. Экланда и Р. Темама [246].

(5) Большое число исследований посвящено вопросу об однозначности субдифференциального соответствия, т. е. условиям дифференцируемости выпуклой функции.

Банахово пространство называют *асплундовым* или *пространством Асплунда*, если всякая выпуклая функция $f : X \to \mathbb{R}^{\bullet}$, непрерывная на множестве $D := \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, дифференцируема (по Фреше) в каждой точке некоторого G_δ-подмножества D. Если в этом определении заменить дифференцируемость по Фреше дифференцируемостью по Гато, то говорят о *слабом асплундовом пространстве.* Эти термины связаны с работой Е. Асплунда [260]. Классический результат С. Мазура утверждает, что сепарабельное банахово пространство является слабо асплундовым.

Асплундовость и слабая асплундовость имеют глубокие связи с различными геометрическими свойствами банаховых пространств. Так, например, банахово пространство X является асплундовым в том и только в том случае, если X' обладает свойством Радона — Никодима, см. [501; теорема 5.7]. Подробное изложение этих аспектов выпуклого анализа можно найти в монографиях Р. Д. Бургена [301], Дж. Джайлза [360], Дж. Дистеля [67], Дж. Дистеля и Дж. Уля [337], Р. Фелпса [501].

4.7.3. (1) Фундаментальная роль полунепрерывности в выпуклом анализе отражена в монографиях В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова и С. В. Фомина [3], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [202], Р. Фелпса [501], Р. Т. Рокафеллара [218], И. Экланда и Р. Темама [246]. Большинство тонких результатов о полунепрерывных выпуклых функциях не допускают прямого распространения на выпуклые операторы. Наиболее благополучно в этом смысле обстоит дело в том случае, когда выпуклый оператор действует в K-пространство ограниченных элементов с топологией сходимости с регулятором (или, что то же, с нормой, порожденной единицей).

(2) Для векторнозначных отображений существуют различные понятия полунепрерывности. Определение, данное в 4.3.3, а также основные результаты 4.3.8–4.3.10 впервые опубликованы в [138]. Вопрос об инволютивности преобразования Юнга — Фенхеля в классе выпуклых операторов изучался также Дж. Борвейном, Ж.-П. Пено и М. Тера [299, 498]. Субдифференциал выпуклой векторнозначной функции впервые рассмотрел В. Л. Левин [177].

(3) Напомним классический результат об инволютивности преобразования Юнга — Фенхеля в классе замкнутых выпуклых (скалярных) функций. Функцию $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ называют *замкнутой*, если ее надграфик $\operatorname{epi}(f)$ замкнут в топологии произведения $X \times \mathbb{R}$. Собственная функция замкнута в том и только в том случае, если она полунепрерывна снизу в каждой точке.

Теорема Фенхеля — Моро. *Пусть X — локально выпуклое пространство и $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — выпуклая функция. Тогда $f^{**} = f$ в том и только в том случае, если f замкнута.*

Поскольку для сублинейного $p : X \to \mathbb{R}^\bullet$ выполняется $p^* = \delta_{\mathbb{R}}(\partial p)$ и $p^{**} = \sup \partial p$, то теорема Фенхеля — Моро содержит как частный случай следующий факт.

Теорема Хёрмандера о сублинейных функциях. *Пусть X — локально выпуклое пространство и $p : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — сублинейная функция. Тогда $p = \sup \partial p$ в том и только в том случае, если p замкнута.*

Замыкание надграфика $\operatorname{epi}(f)$ служит надграфиком некоторой функции, которую называют *замыканием* функции f и обозначают символом $\operatorname{cl}(f)$. Таким образом, замыкание определяется формулой $\operatorname{cl}(\operatorname{epi}(f)) = \operatorname{epi}(\operatorname{cl}(f))$. Легко видеть, что $f^{**} = \operatorname{cl}(f)$ для любой выпуклой функции. Эти результаты можно найти в любом курсе выпуклого анализа, см., например, литературу, указанную в 4.7.3 (1).

4.7.4. (1) В цикле работ [458–461] Д. Магарам разработала оригинальный подход к изучению векторных мер и положительных операторов в функциональных пространствах. Краткое описание развитого ею метода и формулировка основных результатов имеются в обзоре [461]. В. Люксембург и А. Шэп [455] распространили фрагмент теории Д. Магарам, связанной с теоремой типа Радона — Никодима, на положительные операторы, действующие в K-пространствах. Термины «свойство Магарам» и «оператор Магарам» были введены соответственно в [455] и [114, 123]. В [458–461] операторы со свойством Магарам названы «full-valued».

(2) Сублинейные операторы Магарам введены и изучены А. Г. Кусраевым в [114, 120]. Теорему 4.4.10 установил А. Г. Кусраев; для линейных операторов она опубликована в [114]. Этот факт означает, что по существу всякий сублинейный оператор Магарам представляет собой o-непрерывный возрастающий сублинейный функционал в подходящей булевозначной модели. Теорема 4.4.9 в случае функционалов установлена Б. З. Вулихом и Г. Я. Лозановским [32], а в общем случае — А. Г. Кусраевым [120]. Подробнее об операторах Магарам см. в монографии А. Г. Кусраева [433].

(3) Для операторов Магарам имеет место аналог теоремы Радона — Никодима. Сформулируем этот результат, полученный В. Люксембургом и А. Шэпом [455].

Пусть E и F — некоторые K-пространства, S и T — положительные порядково непрерывные операторы из E в F, причем T обладает свойством Магарам. Тогда равносильны следующие утверждения:

(i) $S \in \{T\}^{\perp\perp}$;

(ii) *S абсолютно непрерывен относительно T;*

(iii) *существует ортоморфизм $0 \leqslant \rho \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ такой, что $Sx = T(\rho x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(\rho)$;*

(iv) *существует такая последовательность ортоморфизмов $(\rho_n) \subset \mathrm{Orth}(E)$, что $Sx = \sup_n T(\rho_n x)$ для всех $x \in E_+$.*

(4) Между операторами Магарам и решеточными гомоморфизмами имеется двойственность. Пусть E и F — векторные решетки и $T : E \to F$ — порядково ограниченный оператор. Тогда для каждого функционала $f \in F^{\sim}$ имеем $f \circ T \in E^{\sim}$. Возникающий таким образом оператор $f \mapsto f \circ T$ из $F^{\sim}$ в $E^{\sim}$ называют *порядково сопряженным* к T и обозначают, как обычно, символом T'. Если обозначить символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ билинейную форму двойственностей $E \leftrightarrow E^{\sim}$ и $F \leftrightarrow F^{\sim}$, то данное определение можно записать в виде

$$\langle T'f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle \quad (x \in E,\ f \in F^{\sim}).$$

Известно, что $T' : F^{\sim} \to E^{\sim}$ — порядково ограниченный и порядково непрерывный оператор. Более того, имеет место следующий результат (см. [255, 433]):

Если $F^{\sim}$ разделяет точки F, то положительный оператор $T : E \to F$ будет решеточным гомоморфизмом в том и только в том случае, когда $T' : F^{\sim} \to E^{\sim}$ удовлетворяет условию Магарам.

4.7.5. (1) Замечания, сделанные в начале пункта 4.2.5, относятся и к параграфу 4.5. Так, например, если в теореме 4.2.6 положить $\varepsilon = 0$, то получим формулу

$$\partial(g \circ f)(x) = \bigcup\{T \circ \partial f(x) :\ T \in \partial g(f(x))\}. \tag{$*$}$$

Действительно, в этом случае $\lambda = 0$ и $T(\delta) = 0$, причем последнее влечет $T \circ \partial_\delta f(x) = T \circ \partial f(x)$. Однако указанная выше формула справедлива при более слабых ограничениях, чем в 4.5.6.

Пусть $f : X \to E^{\bullet}$ — произвольный выпуклый оператор и $x_0 \in$ $\operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$. Пусть $g : E \to F^{\bullet}$ — выпуклый оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

(a) *существуют элемент $e \in E^{+}$ и сублинейный оператор Магарам $P : X \to E$ такие, что*

$$P(x) + e \leqslant f(x) \leqslant P(x) + e \quad (x \in \operatorname{dom}(g));$$

(b) *$f(x_0) \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$; причем если последовательность (e_n) элементов E o-сходится к $f(x_0)$, то $e_n \in \operatorname{dom}(g)$, начиная с некоторого номера.*

Тогда имеет место формула $(*)$.

$\lhd$ В наших предположениях оператор f секвенциально o-непрерывен в точке x_0, поэтому $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$. Кроме того, $g'(f(x_0)) \leqslant P$, стало быть, $g'(f(x_0))$ — сублинейный оператор Магарам в силу 4.4.7. Остается применить 4.5.2. $\rhd$

(2) Дезинтегрирование в K-пространствах, изложенное в 4.5.2–4.5.7, развито А. Г. Кусраевым [120, 122]. Многочисленные частные случаи и модификации приведенных в 4.5 формул разбросаны в литературе по выпуклому анализу. В случае функционалов (т. е. при $F = \mathbb{R}$) формулу типа 4.5.2 (точнее, типа $(*)$) впервые получил В. Л. Левин, см. [174, 177, 179]. Для сравнения сформулируем результат В. Л. Левина.

Пусть X и E — локально выпуклые пространства, причем E также K-пространство с условием (A), т. е. всякая о-сходящаяся сеть в E сходится топологически. Пусть выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ непрерывен в точке $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom}(f)$, а выпуклая функция $g : E \to \mathbb{R}^{\bullet}$ непрерывна в точке $f(x_0) \in \operatorname{int} \operatorname{dom}(g)$. Тогда имеет место представление

$$\partial(g \circ f)(x) = \{T'e' : \ T \in \partial f(x); \ e' \in \partial g(f(x))\}.$$

$\lhd$ Очевидное следствие формулы $(*)$ из (1). $\rhd$

Доказательство В. Л. Левина [179] опирается на установленную им в [174] компактность в слабой операторной топологии субдифференциала $\partial f(x_0)$ при указанных выше предположениях. Однако, как уже отмечалось в 2.7.4 (2), компактность не является адекватным инструментом при анализе субдифференциалов, поскольку циклическая компактность, служащая характеристическим свойством субдифференциала, сводится к компактности лишь при выполнении определенных условий, см. [123].

(3) Теорема 4.5.8 получена М. Нейманом [476]. В скалярном случае (т. е. при $E = \mathbb{R}$) она превращается в известный результат В. Штрассена [543], называемый часто *теоремой Штрассена о дезинтегрировании.* Субдифференциал выпуклой функции, представимой как интеграл измеримого семейства выпуклых функций, был объектом изучения многих авторов, см., например, М. Валадье [561], Е. Г. Гольштейн [40, 41], В. Л. Левин [174, 175, 179]. Скалярный вариант ($E = \mathbb{R}$) теоремы 4.5.9 (2) получили независимо М. Валадье и В. Л. Левин, используя разные идеи и технические средства. Наше доказательство идейно ближе к В. Л. Левину [179], но все же существенно отличается от предложенного им.

(4) Пусть (Q, Σ, μ), X и E те же, что и в 4.5.8 и 4.5.9. Зафиксируем некоторое банахово пространство L сильно измеримых вектор-функций, т. е. $L \subset L^0(Q, \Sigma, \mu, X)$. Предположим, что отображение $f : Q \times X \to E^{\bullet}$ удовлетворяет условиям: отображение

$f(t,\cdot) : x \mapsto f(t,x)$ — выпуклый оператор из X в $E^\bullet$ для почти всех $t \in Q$ и вектор-функция $f(\cdot, x(\cdot)) : t \mapsto f(t, x(t))$ сильно измерима для любого $x \in L$. Рассмотрим интегральный оператор $I_f : L \to E^\bullet$, определяемый формулой

$$I_f(x) := \int\limits_Q f(t, x(t))\, d\mu(t),$$

если вектор-функция $f(\cdot, x(\cdot))$ конечна при почти всех $t \in Q$ и интегрируема по Бохнеру, и $I_f(x) = +\infty$ во всех остальных случаях. Тогда $I_f : L \to E^\bullet$ — выпуклый оператор. Представляют значительный интерес формулы для вычисления преобразования Юнга — Фенхеля $(I_f)^*$ и субдифференциалов $\partial I_f(u)$ и $\partial_\varepsilon I_f(u)$, где $u \in \operatorname{dom}(I_f)$ и $0 < \varepsilon \in E$.

(5) Направление, указанное в (3), разработано лишь в скалярном случае $E = \mathbb{R}$. Из обширной литературы, затрагивающей субдифференцирование и замену переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля выпуклых интегральных функционалов, укажем монографии А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78], К. Кастена и М. Валадье [182], В. Л. Левина [179], в которых имеются также дальнейшие литературные ссылки и комментарии. В общей постановке (3) эти задачи ждут своих исследователей.

(6) Идея, высказанная в 4.5.11, восходит к Д. Магарам. До некоторой степени она реализована А. Г. Кусраевым в [123, 433]. Однако соответствующие формулы субдифференцирования и замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля все еще не получены. Отсутствуют также общие формулы дезинтегрирования в случае не всюду определенных операторов, т. е. формулы типа 4.5.2 для P, допускающего бесконечные значения. В этих направлениях также желательны дальнейшие исследования.

4.7.6. (1) Понятие инфинитезимального субдифференциала было введено С. С. Кутателадзе [251]; из этой же работы заимствован материал, представленный в 4.6. Близким к понятию инфинитезимального субдифференциала является субдифференциал относительно последовательности, рассмотренный Е. Г. Гольштейном [41] и В. Л. Левиным [175].

(2) В теории экстремальных задач известное внимание уделяется проблеме учета точности соблюдения критериев оптимальности при практической реализации вычислений. Общепринятый качественный подход к названной проблеме отражен в выпуклом ε-программировании, дающем аппарат оценок приближения к оптимуму по функционалу. Развитый на этом пути инструментарий достаточно специфичен и в некотором смысле оказывается искусственно усложненным. В то же время он не вполне коррелирует с бытующими приемами, основанными на поиске «практического оптимума» с помощью «практически точного» соблюдения требований дополняющей нежесткости, отвечающих классическому случаю $\varepsilon = 0$. В результате можно говорить об определенном расхождении и даже разрыве теоретических и практических воззрений. В 4.6 намечен подход к преодолению имеющихся трудностей в рамках нестандартного анализа.

(3) Суть изложенной в 4.6 схемы в том, что необходимое представление субградиентов осуществляется в некотором смысле независимо от выбора исследуемой точки за счет точности применяемых правил вычисления преобразований Юнга — Фенхеля. Иными словами, поведение инфинитезимальных субградиентов, по форме аналогичное свойствам обычных «точных» субградиентов, по существу родственно случаю ε-субдифференциалов, учитывающих поведение рассматриваемых операторов «в целом», во всей области их определения. Таким образом, хотя по форме правила подсчета инфинитезимальных субдифференциалов аналогичны обычным правилам локального субдифференцирования, условия их справедливости существенно более жесткие и совпадают с условиями для преобразований Юнга — Фенхеля или ε-субдифференциалов.

(4) По изложенной схеме можно получить аналоги для всего спектра правил субдифференциального исчисления (дезинтегрирование, свертки Рокафеллара, лебеговы множества и т. п.). Естественным путем отсюда выводятся и признаки инфинитезимальной оптимальности.

Глава 5

Выпуклые экстремальные задачи

Традиционным полем приложений выпуклого анализа является теория экстремальных задач. Ее истоками стали работы Л. В. Канторовича, В. Каруша, Х. Куна и А. У. Таккера. Здесь мы затронем тот раздел современной теории экстремальных задач, который принято называть *выпуклым программированием*. Изложение ведется в большой общности так, что без особых оговорок всюду изучаются задачи многоцелевой оптимизации, характеризующиеся векторнозначными функциями цели. Эта абстрактность нисколько не затрудняет существа дела. Более того, основные идеи из приводимого материала весьма эффективны и при анализе скалярных (одноцелевых) задач.

Характерная особенность задач многоцелевой оптимизации состоит в том, что при поиске оптимального решения приходится учитывать различные, противоречащие друг другу интересы (стремления), составляющие единую комплексную цель. При этом невозможно, как правило, выделить какую-либо отдельную цель, не игнорируя остальные и не меняя тем самым первоначальной постановки задачи. Указанное обстоятельство приводит к возникновению специфических задач, не типичных для скалярного случая: что нужно понимать под решением векторной программы, как следует согласовать разные цели, возможно ли в принципе согласование интересов и т. д. В этой связи обсуждаются разные понятия оптимальности для многоцелевых задач: идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

Аппарат субдифференциального исчисления представляет собой эффективный инструмент для анализа выпуклых экстремальных задач. Формулы замены переменного в преобразовании Юнга — Фенхеля легко применяются к обоснованию различных вариантов принципа Лагранжа, который утверждает по сути, что поиск оптимума в многоцелевой выпуклой экстремальной задаче с ограничениями сводится к решению аналогичной безусловной задачи для подходящего лагранжиана. С помощью исчисления ε-субдифференциалов мы выводим признаки оптимальности, приближенной и инфинитезимальной оптимальности, а также разбираем концепцию оптимальности по Парето. Основной упор делается на общие концептуальные моменты. В то же время мы сочли возможным оставить в стороне многие аспекты, хорошо представленные в обширной монографической литературе по теории экстремума.

5.1. Векторные программы. Оптимальность

Здесь обсуждаются различные понятия оптимальности в задачах векторной оптимизации.

5.1.1. Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторной* (*выпуклой*) *программой* мы будем называть пару (C, f) и записывать ее символически в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

Векторную программу принято называть также *многоцелевой* или *многокритериальной экстремальной* (*оптимизационной*) *задачей.* Оператор f называют *целью программы,* а множество C — *ограничением.* Точки $x \in C$ именуют *допустимыми элементами,* реже *допустимыми планами.* Указанная выше запись векторной программы отражает то обстоятельство, что рассматривается экстремальная задача: найти точную нижнюю границу оператора f на множестве C. В случае, когда $C = X$, говорят о безусловной задаче или задаче без ограничений.

Ограничения в экстремальной задаче могут задаваться по-разному, включая, например, уравнения и неравенства. Пусть $g : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, $\Lambda \in L(X, Y)$ и $y \in Y$, где Y — векторное пространство, а F — упорядоченное векторное пространство. Если ограничения C_1 и C_2 имеют вид

$$C_1 := \{x \in C : g(x) \leqslant 0\},$$
$$C_2 := \{x \in X : g(x) \leqslant 0,\ \Lambda x = y\},$$

то вместо (C_1, f) и (C_2, f) пишут соответственно (C, g, f) и (Λ, g, f) или же более выразительно

$$x \in C, \quad g(x) \leqslant 0, \quad f(x) \to \inf;$$
$$\Lambda x = y, \quad g(x) \leqslant 0, \quad f(x) \to \inf.$$

5.1.2. Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Ясно, что $e = -f^*(0)$. Допустимый элемент x_0 называется *идеальным оптимумом* (*решением*), если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $f(C) \subset f(x_0) + E^+$.

Непосредственно из определений видно, что x_0 есть решение безусловной задачи $f(x) \to \inf$ тогда и только тогда, когда нулевой оператор входит в субдифференциал $\partial f(x_0)$:

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) \ \leftrightarrow\ 0 \in \partial f(x_0).$$

В теории экстремума различают *локальный* и *глобальный* оптимумы. Для нас это различие несущественно, так как мы будем рассматривать лишь задачи минимизации выпуклых операторов на выпуклых множествах.

Пусть $x_0 \in C$ — идеальный локальный оптимум в программе (C, f) в следующем (очень слабом) смысле: существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \operatorname{core} U$ и

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}.$$

Тогда $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C\}$.

$\lhd$ Пусть x_0 и U удовлетворяют указанному условию. Для произвольного $h \in C$ подберем $0 < \varepsilon < 1$ так, чтобы $\varepsilon(h - x_0) \in U$. Тогда для $z := x_0 + \varepsilon(h - x_0) = (1-\varepsilon)x_0 + \varepsilon h$ будет $z \in C \cap (x_0 + U)$, значит, $f(x_0) \leqslant f(z)$. Отсюда ввиду выпуклости f выводим $f(x_0) \leqslant f(z) \leqslant (1-\varepsilon) f(x_0) + \varepsilon f(h)$ или $f(x_0) \leqslant f(h)$. $\rhd$

5.1.3. Можно убедиться на простейших примерах, что идеальный оптимум в векторных программах существует крайне редко. Это обстоятельство побуждает вводить различные понятия оптимальности, подходящие для тех или иных классов задач. Среди них — *приближенная оптимальность,* полезная даже в скалярной ситуации (т. е. в задачах со скалярной целевой функцией).

Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка x_0 называется *ε-решением* (*ε-оптимумом*) программы (C, f), если $f(x_0) \leqslant e + \varepsilon$, где e — значение программы. Таким образом, x_0 есть ε-решение программы (C, f), если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$. Очевидно, что точка x_0 будет ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$:

$$f(x_0) \leqslant \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

5.1.4. *Обобщенным ε-решением* программы (C, f) называют множество $\mathfrak{A} \subset C$, если $\inf_{x \in \mathfrak{A}} f(x) \leqslant e + \varepsilon$, где e, как и выше, — значение программы. Если $\varepsilon = 0$, то говорят просто об *обобщенном решении.* Обобщенное ε-решение всегда существует (например, $\mathfrak{A} = C$), но интересно выбрать по возможности меньшее такое решение. Минимальное (по включению) возможное обобщенное ε-решение — идеальный ε-оптимум при $\mathfrak{A} = \{x_0\}$.

(1) *Любое обобщенное ε-решение является ε-решением некоторой векторной выпуклой программы.*

$\lhd$ В самом деле, рассмотрим оператор $\mathscr{F} : X^{\mathfrak{A}} \to E^{\mathfrak{A}} \cup \{+\infty\}$, действующий по правилу ($\alpha \in \mathfrak{A}$, $\chi \in X^{\mathfrak{A}}$):

$$\mathscr{F}(\chi) : \alpha \mapsto \begin{cases} f(\chi(\alpha)), & \text{если } \operatorname{im} \chi \subset \operatorname{dom}(f), \\ +\infty, & \text{если } \operatorname{im} \chi \not\subset \operatorname{dom}(f). \end{cases}$$

Пусть $\chi_0 \in X^{\mathfrak{A}}$, $\chi_0(\alpha) = \alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{A}$), и предположим, что $\mathscr{F}(\chi_0) \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ (это не ограничивает общности).

Возьмем теперь $\mu \in \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}}(-\mathscr{F}(\chi_0))$, где $\varepsilon_{\mathfrak{A}} : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E$ — канонический оператор (см. 2.1.1). Согласно 2.1.5 имеем

$$\mu \geqslant 0,\ \mu \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E,$$

$$\mu \circ \mathscr{F}(\chi_0) = -\varepsilon_{\mathfrak{A}}(-\mathscr{F}(\chi_0)) = \inf_{x \in \mathfrak{A}} f(x).$$

Если $\mathfrak{A}$ — обобщенное ε-решение, то для $\chi \in C^{\mathfrak{A}}$ верно

$$\mu \circ \mathscr{F}(\chi) \geqslant -\varepsilon_{\mathfrak{A}}(-\mathscr{F}(\chi)) = \inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha) \geqslant \inf_{x \in C} f(x) \geqslant \\ \geqslant \inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha) - \varepsilon = \mu(\mathscr{F}(\chi_0)) - \varepsilon.$$

Следовательно, χ_0 есть ε-решение программы

$$\chi \in C^{\mathfrak{A}}, \ \mathscr{F}(\chi) \to \inf .$$

Наоборот, если χ_0 — это ε-решение последней задачи, то для каждого $x \in \mathscr{C}$ будет

$$\mu \circ \mathscr{F}(\chi_0) \leqslant \mu \circ \mathscr{F} \circ \Delta_{\mathfrak{A},X}(x) + \varepsilon = \\ = \mu \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} \circ f(x) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon.$$

Таким образом, имеют место соотношения

$$\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha) = \mu \circ \mathscr{F}(\chi_0) \geqslant \inf_{x \in C} f(x) + \varepsilon,$$

т. е. $\mathfrak{A}$ есть обобщенное ε-решение программы (C, f). $\triangleright$

(2) *Множество* $\mathfrak{A} \subset X$ *является обобщенным* ε*-решением безусловной задачи* $f(x) \to \inf$ *в том и только в том случае, если совместна система условий:*

$$\mu \in L^{+}(l_{\infty}(\mathfrak{A}, E),\, E), \quad \mu \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E;$$

$$\mu \circ \mathscr{F}(\chi_0) = \inf_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha), \quad 0 \in \partial_{\varepsilon}(\mu \circ \mathscr{F})\ (\chi_0).$$

$\triangleleft$ Следует из (1). $\triangleright$

5.1.5. Рассмотренные выше понятия оптимальности связаны с точной нижней границей целевой функции на множестве допустимых элементов, т. е. со значением программы. Понятие минимального элемента ведет к принципиально иной концепции оптимальности.

Здесь удобно допустить, что E — предупорядоченное векторное пространство, т. е. конус положительных элементов не обязательно острый. Тем самым подпространство $E_0 := E^{+} \cap (-E^{+})$, вообще говоря, не сводится к одному нулевому элементу. Для $u \in E$ обозначим

$$[u] := \{v \in E : u \leqslant v, \quad v \leqslant u\}.$$

Запись $u \sim v$ означает, что $[u] = [v]$.

Допустимая точка x_0 называется *ε-оптимальной по Парето* в программе (C, f), если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $f(C)+\varepsilon$, т. е. если $(f(x_0)-E^+)\cap(f(C)+\varepsilon) = [f(x_0)]$. Более подробно, ε-оптимальность по Парето точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)+\varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x)+\varepsilon$. Если $\varepsilon = 0$, то говорят просто об оптимальности по Парето. При изучении оптимальности по Парето часто используют *метод скаляризации*, т. е. сведение рассматриваемой программы к скалярной (одноцелевой) экстремальной задаче. Скаляризацию можно проводить по-разному. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Предположим, что предпорядок $\leqslant$ в E задается формулой:

$$u \leqslant v \leftrightarrow (\forall l \in \partial q)\ lu \leqslant lv,$$

где $q : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Это равносильно тому, что конус E^+ имеет вид $E^+ := \{u \in E : (\forall l \in \partial q)\ lu \geqslant 0\}$. Тогда допустимая точка x_0 будет ε-оптимальной по Парето в программе (C, f) в том и только в том случае, если для каждого $x \in C$ либо $f(x_0) \sim f(x)+\varepsilon$, либо существует функционал $l \in \partial q$, для которого $lf(x_0) > l(f(x)+\varepsilon)$. В частности, для ε-оптимальной по Парето точки $x_0 \in C$ выполняется

$$\inf_{x\in C} q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geqslant 0.$$

Обратное утверждение неверно, так как последнее неравенство равносильно более слабому понятию оптимальности. Говорят, что точка $x_0 \in C$ *слабо ε-оптимальна по Парето,* если для каждого $x \in C$ найдется такой функционал $l \in \partial q$, что $l(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geqslant 0$, т. е. если ни для какого $x \in C$ несовместна система строгих неравенств $lf(x_0) < l(f(x)+\varepsilon) \quad (l \in \partial q)$. Как видно, слабая ε-оптимальность по Парето равносильна тому, что $q(f(x)-f(x_0)+\varepsilon) \geqslant 0$ для всех $x \in C$, и это понятие нетривиально лишь в случае $0 \notin \partial q$.

5.1.6. Роль ε-субдифференциалов раскрывается, в частности, тем, что ε-решение при достаточно малом ε можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на «практически точное» решение исходной задачи (см. 5.1.3–5.1.5). Как уже отмечалось, найденные в 4.2 правила вычисления ε-субдифференциалов, доставляя формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи, не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют упрощенные правила «отбрасывания малых».

Адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов развит в 4.6. С ним, естественно, связано понятие инфинитезимального решения. Соответствующее определение дается в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона (см. Приложение 5).

Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, причем в E выделено фильтрованное по убыванию множество $\mathscr{E}$ положительных элементов. Считаем, что X, E и $\mathscr{E}$ стандартны. Возьмем стандартный выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ и стандартное выпуклое множество $C \subset X$. Напомним, что запись $e_1 \approx e_2$ означает справедливость неравенства $-\varepsilon \leqslant e_1 - e_2 \leqslant \varepsilon$ для каждого стандартного $\varepsilon \in \mathscr{E}$.

Допустим, что существует конечное значение $e := \inf_{x \in C} f(x)$ программы (C, f). Допустимую точку x_0 называют *инфинитезимальным решением,* если верно $f(x_0) \approx e$, т. е. если для каждого $x \in C$ и любого стандартного $\varepsilon \in \mathscr{E}$ выполняется $f(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Учитывая определение инфинитезимального субдифференциала из 4.6.4 и сказанное в 5.1.3, можно сформулировать утверждение.

Точка $x_0 \in X$ является инфинитезимальным решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in Df(x_0)$.

5.1.7. Обобщенное ε-решение, введенное в 5.1.4, существует всегда. Однако класс всех допустимых множеств, из которых черпаются обобщенные решения, может оказаться необозримым. Само обобщенное решение — объект также трудный для анализа, ибо не имеет никакой заранее предписанной структуры. В 5.5 мы введем еще одно понятие обобщенного решения, которое существует уже не всегда, но зато обладает хорошими структурными свойствами. Здесь мы докажем одно мотивирующее предложение.

Пусть X — произвольное множество, E — некоторое K-пространство и ε — единица в E. Тогда для всякого ограниченного снизу отображения $f : X \to E^\bullet$, не равного тождественно $+\infty$, существуют разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре проекторов $\mathfrak{Pr}(E)$ и семейство $(x_\xi)_\xi \in \Xi$ в X такие, что $\pi_\xi f(x_\xi) \leqslant \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$ для всех $\xi \in \Xi$.

$\lhd$ Воспользовавшись реализационной теоремой для K-пространств, можем считать без ограничения общности, что E — фундамент в K-пространстве $C_\infty(Q)$, а ε совпадает с функцией, тождественно равной единице на Q. Положим $e := \inf\{f(x) : x \in X\}$. Поскольку $e \neq +\infty$, то $e(t) < e(t)+1$ для всех t из некоторого котощего множества. По смыслу точных границ в K-пространстве $C_\infty(Q)$, существует множество $Q_0 \subset Q$ такое, что $Q\backslash Q_0$ — тощее множество и

$$-\infty \neq e(t) \leqslant \inf\{f(x)(t) : x \in X\} < +\infty$$

для всех $t \in Q_0$. Для каждого $t \in Q_0$ существует $x_t \in X$ такое, что $f(x_t)(t) < e(t) + 1$, а в силу непрерывности e и $f(x)$ неравенство $f(x_t)(\tau) < e(\tau)+1$ выполняется в некоторой открыто-замкнутой окрестности Q_t точки t. По теореме Цермело множество Q_0 можно вполне упорядочить, т. е. существуют кардинал λ и биекция $\varphi : [0, \lambda) \to Q_0$, где $[0, \lambda)$ — множество всех ординалов $\xi < \lambda$. Положим

$$Q_\xi := Q_{\varphi(\xi)} \backslash \operatorname{cl}\left(\bigcup_{\eta<\xi} Q_{\varphi(\eta)}\right), \quad x_\xi := x_{\varphi(\xi)} \quad (\xi \in [0, \lambda)).$$

Тогда $f(x_\xi)(t) < e(t)+1$ для всех $t \in Q_\xi$, а семейство $(Q_\xi)_{\xi\in[0,\lambda)}$ состоит из попарно непересекающихся множеств с плотным в Q объединением. Если π_ξ — проектор, соответствующий открыто-замкнутому множеству Q_ξ и $\Xi := [0, \lambda)$, то $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — искомые семейства. $\rhd$

5.1.8. Доказанное предложение наводит на мысль, что обобщенным ε-решением экстремальной задачи $f(x) \to \inf$ следует назвать семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ вместе с разбиением единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Приведем формализацию этой идеи. Прежде всего несколько расширим понятие выпуклого оператора, заменив пространство $E^\bullet$ на более широкий объект $E^\star$. Мотивировка будет ясна из последующего изложения.

(1) В декартовом произведении $E \times \mathfrak{P}(E)$ выделим подмножество $E^\star$, состоящее из таких пар (x, π), что $\pi x = 0$. В множестве $E^\star$ можно корректно ввести сложение, умножение на положительные числа и упорядочение формулами:

$$(x, \pi) + (y, \rho) := (\pi \wedge \rho(x + y), \pi \vee \rho), \quad \lambda(x, \pi) := (\lambda x, \pi),$$
$$(x, \pi) \leqslant (y, \rho) \leftrightarrow \pi \leqslant \rho \,\&\, \rho^d x \leqslant \rho^d y \quad (x, y \in E;\ \pi, \rho \in \mathfrak{P};\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Нетрудно проверить, что $E^\star$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка, см. 1.5.1. Отображение, сопоставляющее элементу $x \in E$ пару $(x, 0)$, служит вложением E в $E^\star$ с сохранением операций и порядка. Мы будем отождествлять E с соответствующим подмножеством $E^\star$. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ продолжается до проектора на $E^\star$ следующим образом: если $z := (x, \rho) \in E^\star$, то полагаем $\pi z := (\pi x, \pi\rho)$. Множество вида $\pi E^\star$ естественно назвать полосой в $E^\star$. Пара $(0, \pi)$, обозначаемая символом $+ \propto_\pi := \propto_\pi$, будет наибольшим элементом в полосе $\pi E^\star$. Элемент $+\infty := \infty := \propto_{\mathbb{1}}$ — наибольшим элементом $E^\star$. Таким образом, в каждой полосе $\pi E^\star$ имеется своя бесконечность $\propto_\pi$, причем все они являются осколками бесконечности ∞, т. е. $\propto_\pi \wedge \propto_{\pi^\perp} = 0$ и $\propto_\pi \vee \propto_{\pi^\perp} = \infty$. Очевидно, что множество всех бесконечных элементов $\propto_\pi$ с индуцированным из $E^\star$ порядком образует полную булеву алгебру, изоморфную $\mathfrak{P}(E)$.

(2) Обозначим символом $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, принимающих значение $-\infty$ на нигде не плотном множестве. Введем в $C^+_\propto(Q, \overline{R})$ операции суммы и умножения на положительные скаляры, полагая $(u + v)(t) = u(t) + v(t)$ и $(\lambda u)(t) = \lambda \cdot u(t)$, причем правые части этих соотношений имеют смысл для каждого t из некоторого котощего множества $Q_0 \subset Q$. Порядок в $C^+_\propto(Q, \overline{R})$ определяется поточечно, т. е. $u \leqslant v$ означает, что $u(t) \leqslant v(t)$ для всех $t \in Q$. Тогда $C^+_\propto(Q, \overline{R})$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. 1.5.1). Ясно, что $C_\infty(Q) \subset C^+_\propto(Q, \overline{R})$, причем порядок и операции в $C_\infty(Q)$ индуцированы из $C^+_\propto(Q, \overline{R})$. Из результатов о функциональном представлении K-пространств (см. П1.13) вытекает следующее утверждение.

Пусть E — произвольное K-пространство и Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)$. Тогда существует полулинейный изоморфизм, отображающий $\mathbb{R}$-коническую решетку $E^\star$ в $\mathbb{R}$-коническую решетку $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Образ E относительно этого изоморфизма *служит фундаментом в* $C_\infty(Q)$, *а образ* $E^\star$ *совпадает с* $C^+_\propto(Q,\overline{\mathbb{R}})$ *в том и только в том случае, если* E *расширенно.*

Очевидно, что элемент $\propto_\pi\in E^\star$ при указанном изоморфизме переходит в функцию, принимающую значение $+\infty$ на открыто-замкнутом множестве $Q_\pi\subset Q$, соответствующем проектору π. При этом ограничение этой функции на $Q\setminus Q_\pi$ входит в $C_\infty(Q\setminus Q_\pi)$.

(3) Пусть X — банахово пространство. Рассмотрим отображение $f : X\to E^\star$. Эффективное множество и надграфик вводятся обычным образом:

$$\operatorname{dom}(f) := \{x\in X :\, f(x)\in E\},$$

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x,e)\in X\times E :\, f(x)\leqslant e\}.$$

Полунепрерывность снизу отображения f вводится так же, как и в 4.3.3. Учитывая специфику рассматриваемой ситуации, можно дать такое определение. Возьмем точку $x_0\in X$. Обозначим через π_∞ проектор в E, для которого $\pi_\infty f(x_0)=\propto_\pi$ и $\pi^d_\infty f(x_0)\in E$. Говорят, что f *полунепрерывно снизу в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует счетное разбиение $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ проектора π^d_∞ такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in X$, $\|x-x_0\|\leqslant 1/n$ выполняется

$$\pi_n f(x)\geqslant\pi_n f(x_0)-\varepsilon\mathbb{1},\quad \pi^d_n f(x)\geqslant(\mathbb{1}/\varepsilon)\pi^d_n\mathbb{1}.$$

Отображение $f : X\to E^\star$ будет полунепрерывным снизу в точке $x_0\in X$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_0)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf\,\{f(x) :\ x\in X,\ \|x-x_0\|\leqslant 1/n\}.$$

Подчеркнем, что точные границы в этой формуле вычисляются в $E^\star$.

Для произвольного отображения $f : X\to E^\star$ обозначим символом f_q функцию из X в $\overline{\mathbb{R}}$, действующую по правилу $f_q : x\mapsto f(x)(q)$. Легко видеть, что отображение f выпукло в том и только в том случае, если выпукла функция f_q при всех $q\in Q$. Если функция f_q полунепрерывна снизу в точке x_0 при всех $q\in Q$, то отображение f будет полунепрерывным снизу в той же точке в указанном выше смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

5.1.9. До конца параграфа X — произвольное банахово пространство, а E — расширенное K-пространство, отождествляемое с $C_\infty(Q)$ для подходящего экстремально несвязного компакта Q (см. П1.13). Обозначим символом $C_\infty(Q,X)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций u, действующих из котощих множеств $\operatorname{dom}(u) \subset Q$ в пространство X. Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим,* если его дополнение является тощим множеством. Подробнее, обозначим символом $\mathscr{C}(Q,X)$ множество вектор-функций $u : \operatorname{dom}(u) \to X$, удовлетворяющих условиям: а) $\operatorname{dom}(u)$ — котощее подмножество Q и б) отображение u непрерывно. Введем отношение эквивалентности $\sim$ в $\mathscr{C}(Q,X)$ следующим образом: вектор-функции u и v считаются эквивалентными, если они совпадают на общей части своих областей определения, т. е. $u \sim v$ означает, что $u(t) = v(t)$ при всех $t \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)$. Фактор-множество $\mathscr{C}(Q,X)/{\sim}$ обозначается символом $C_\infty(Q,X)$.

Множество $C_\infty(Q,X)$ можно естественным образом снабдить структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Пусть $\tilde u$ обозначает класс эквивалентности вектор-функции $u \in \mathscr{C}(Q,X)$. Возьмем теперь $u, v \in \mathscr{C}(Q,X)$ и $a \in C_\infty(Q)$. Положим

$$
\begin{gathered}
w(t) := u(t) + v(t) \quad (t \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)),\\
z(t) := a(t)u(t) \quad (t \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{Dom}(a)),
\end{gathered}
$$

где $\operatorname{Dom}(a) := \{t \in Q : |a(t)| < +\infty\}$. Примем по определению $\tilde u + \tilde v := \tilde w$ и $a \cdot \tilde u := \tilde z$. Корректность этих определений проверяется без труда. Не вызывают сомнений и аксиомы модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Более того, непрерывное продолжение поточечной нормы определяет разложимую норму на $C_\infty(Q,X)$ со значениями в $C_\infty(Q)$. В самом деле, для $z \in C_\infty(Q,X)$ существует единственная функция $x_z \in C_\infty(Q)$ такая, что $\|u(t)\| = x_z(t)$ $(t \in \operatorname{dom}(u))$ для каждого представителя u класса эквивалентности z. Положим $\lvert z\rvert := x_z$ и заметим, что так определенное отображение $\lvert\cdot\rvert : C_\infty(Q,X) \to C_\infty(Q)$ удовлетворяет аксиомам 1.6.1 (1–3). Более того, $\lvert ax\rvert = |a|\,\lvert x\rvert$ для всех $a \in C_\infty(Q)$ и $x \in C_\infty(Q,X)$. Введем теперь пространство

$$
E(X) := \bigl\{z \in C_\infty(Q,X) : \lvert z\rvert \in E\bigr\}
$$

и снабдим его индуцированной векторной нормой. Разложимость этой нормы можно показать так же, как и в 2.3.2 (1). Если $E = C_\infty(Q)$, то $E(X) = C_\infty(Q, X)$.

Если X — банахово пространство, то $E(X)$ — пространство Банаха — Канторовича, максимальным расширением которого служит $C_\infty(Q, X)$.

$\triangleleft$ Это утверждение можно без труда вывести из 1.6.5. Подробности см. в [433]. $\triangleright$

В дальнейшем, допуская вольность, мы будем отождествлять классы эквивалентности $z \in E(X)$ с представителями $u \in z$. Если $z \in E(X)$ и $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$, то символом πz обозначим вектор-функцию из $\mathrm{dom}(z)$ в X такую, что $(\pi z)(t) = z(t)$ при $t \in Q_\pi \cap \mathrm{dom}(z)$ и $\pi z(t) = 0$ при $t \in \mathrm{dom}(z) \backslash Q_\pi$, где Q_π — открыто-замкнутое подмножество Q, соответствующее проектору π. Заметим, что при этом $\lvert \pi z \rvert = \pi \lvert z \rvert$. Если функция, тождественно равная единице, входит в E, то каждый элемент $x \in X$ можно отождествить с постоянным отображением $t \mapsto x$ $(t \in Q)$ и считать $X \subset E(X)$. Если теперь (x_ξ) — семейство в X и (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(E)$, то $\sum \pi_\xi x_\xi$ — отображение из $E(X)$, принимающее значение x_ξ на множестве Q_{π_ξ}.

5.1.10. *Теорема.* *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *для любых $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $z \in E(X)$ существуют семейство (x_ξ) в X и разбиение единицы (π_ξ) в $\mathfrak{P}(E)$ такие, что выполнено $\lvert z - \sum \pi_\xi x_\xi \rvert \leqslant \varepsilon \lvert z \rvert$;*

(2) *для любого семейства (z_ξ) в $E(X)$ и для произвольного разбиения единицы (π_ξ) в $\mathfrak{P}(E)$ существует единственный элемент $z \in E(X)$ такой, что $\pi_\xi z = \pi_\xi z_\xi$ для всех ξ;*

(3) *пространство $(E(X), \lvert \cdot \rvert)$ r-полно, т. е. для любой последовательности (z_n) в $E(X)$ из $r\text{-}\lim_{n,m\to\infty} \lvert z_n - z_m \rvert = 0$ следует существование такого $z \in E(X)$, что $r\text{-}\lim_{n\to\infty} \lvert z - z_n \rvert = 0$.*

$\triangleleft$ См. [433; 2.3]. $\triangleright$

5.1.11. *Теорема.* *Пусть E — расширенное K-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Для любого полунепрерывного снизу отображения $f : X \to E^\star$ существует единственное отображение $\tilde{f} : E(X) \to E^\star$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) *для любых $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ и $u, v \in E(X)$ из $\pi u = \pi v$ следует $\pi \tilde{f}(u) = \pi \tilde{f}(v)$;*

(2) *$\tilde f$ полунепрерывно снизу в следующем смысле: для любого $u \in E(X)$ выполняется равенство*

$$\tilde f(u) = \sup_{\varepsilon\downarrow 0} \inf\,\{\tilde f(v) : v \in E(X),\ \lvert u - v\rvert \leqslant \varepsilon\mathbb{1}\};$$

(3) *$\pi f(x) = \tilde f(\pi x)$ для всех $x \in X$ и $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.*

При этом f выпукло (сублинейно, линейно) в том и только в том случае, если $\tilde f$ — выпуклое (сублинейное, линейное) отображение.

$\lhd$ Пусть $E_0(X)$ — множество всех элементов $z \in E(X)$ вида $z = \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi x_\xi$, где (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(E)$ и $(x_\xi) \subset X$. Для всякого такого z положим

$$\tilde f(z) = \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi f(x_\xi).$$

Далее, пусть для произвольного $z \in E(X)$ по определению будет

$$\tilde f(z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{\tilde f(z') :\ z' \in E_0(X),\ \lvert z - z'\rvert \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}\right\}.$$

Проверим справедливость условий (1)–(3). Пусть

$$u = \sum \pi_\xi x_\xi, \quad v = \sum \pi_\xi y_\xi$$

и $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$. Если $\pi u = \pi v$, то $\pi \circ \pi_\xi x_\xi = \pi \circ \pi_\xi y_\xi$ и, значит, $x_\xi = y_\xi$ всякий раз, когда $\pi \circ \pi_\xi \neq 0$. Отсюда выводим

$$\pi f(u) = \sum_{\pi\circ\pi_\xi\neq 0} \pi \circ \pi_\xi f(x_\xi) = \sum_{\pi\circ\pi_\xi\neq 0} \pi \circ \pi_\xi f(y_\xi) = \pi \tilde f(v).$$

Для произвольных $u, v \in E(X)$ справедливость требуемого соотношения следует из того, что если $\pi u = \pi v$, то

$$\begin{aligned}
\pi \tilde f(u) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{\pi \tilde f(u') : u' \in E_0(X),\ \lvert u - u'\rvert \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}\right\} = \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{\pi \tilde f(v') : \lvert u - u'\rvert \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1},\ \pi u' = \pi v'\right\} = \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{\pi \tilde f(v') : \lvert v - v'\rvert < \frac{1}{n}\mathbb{1},\ v' \in E_0(X)\right\} = \pi \tilde f(v).
\end{aligned}$$

Если $z_0 \in E(X)$, то по определению $\tilde{f}$ будет

$$\tilde{f}(z_0) \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(z) : z \in E_0(X),\ |z - z_0| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1} \right\} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{|z-z_0|\leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(u) : u \in E_0(X),\ |u - z| \leqslant \frac{1}{m}\mathbb{1} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{n,m\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(u) : u \in E_0(X),\ |u - z| \leqslant \frac{1}{n}1;\ |z - z_0| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(u) : u \in E_0(X),\ |u - z_0| \leqslant \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\mathbb{1} \right\} =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \inf \{ \tilde{f}(u) : u \in E_0(X),\ |u - z_0| \leqslant \varepsilon\mathbb{1} \} = \tilde{f}(z_0).$$

Следовательно, $\tilde{f}$ полунепрерывно снизу в точке z_0.

Свойство (3) вытекает непосредственно из определения $\tilde{f}$. Из (3) видно, что если $\tilde{f}$ — выпуклый оператор, то и f — выпуклый оператор. Наоборот, допустим, что $\tilde{f}$ — выпуклое отображение. Тогда для $u = \sum \pi_\xi x_\xi$, $v = \sum \pi_\xi y_\xi$ и $0 < \lambda < 1$ справедливы соотношения

$$\tilde{f}(\lambda u + (1-\lambda)v) = \tilde{f}\left(\sum \pi_\xi(\lambda x_\xi + (1-\lambda)y_\xi)\right) =$$

$$= \sum \pi_\xi f(\lambda x_\xi + (1-\lambda)y_\xi) \leqslant \sum \pi_\xi \lambda f(x_\xi) + \sum \pi_\xi (1-\lambda) f(y_\xi) =$$

$$= \lambda \tilde{f}(u) + (1-\lambda)\tilde{f}(v).$$

Наконец, для произвольных $u, v \in E(X)$ выводим

$$\tilde{f}(\lambda u - (1-\lambda)v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(z) : \left|z - \lambda u - (1-\lambda)v\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \tilde{f}(\lambda u' + (1-\lambda)v') : \left|u - u'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1},\ \left|u - u'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \lambda \tilde{f}(u') + (1-\lambda)\, \tilde{f}(v') : \left|u - u'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1},\ \left|v - v'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \tilde{f}(u) + (1-\lambda)\tilde{f}(v) \quad (z, u', v' \in E_0(X)).$$

Это доказывает выпуклость оператора $\tilde{f}$. Утверждения относительно линейности и сублинейности отображения $\tilde{f}$ устанавливаются аналогично. $\triangleright$

5.1.12. Пусть $f : X \to E^\star$ — полунепрерывное снизу отображение. Элемент $z \in E(X)$ называется *обобщенным ε-решением* безусловной задачи $f(x) \to \inf$, если $\tilde{f}(z) \leqslant \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$.

5.2. Принцип Лагранжа

«Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, нужно прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех независимых неизвестных».

Так писал Ж. Лагранж в своей книге «Теория аналитических функций» в 1797 г. Это положение, именуемое ныне *принципом Лагранжа,* относится к числу важнейших идей, на которых строится современная теория экстремальных задач. В текущем параграфе дается обоснование принципа Лагранжа для многоцелевых задач выпуклого программирования.

5.2.1. Рассмотрим векторную программу

$$\Lambda x = y, \quad g(x) \leqslant 0, \quad f(x) \to \inf, \tag{P}$$

где $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to F^\bullet$ — выпуклые операторы, $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$, $y \in Y$, X и Y — топологические векторные пространства, E и F — упорядоченные топологические векторные пространства. Везде (за исключением 5.2.10) мы будем предполагать, что E — это некоторое K-пространство. Перечислим несколько условий, которые потребуются ниже.

(а) *Условие Слейтера*: существует точка $x_0 \in C$, для которой элемент $-g(x_0)$ входит во внутренность конуса F^+.

(б) *Слабое условие Слейтера*: выпуклые множества $\operatorname{epi}(g) \cap (C \times F)$ и $-X \times F^+$ находятся в общем положении.

(в) Существует возрастающий сублинейный оператор $p : F \to E$ такой, что если $g(x) \nleqslant 0$, то $p \circ g(x) \geqslant 0$, какова бы ни была точка $x \in C$.

(г) *Условие квазирегулярности*: точная нижняя граница множества $\{\{(p \circ g(x))^-\}^d : x \in C\}$ в булевой алгебре компонент $\mathfrak{B}(E)$ есть нулевая компонента. Иными словами, для каждого ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ найдутся ненулевой проектор $\pi' \leqslant \pi$ и элемент $x' \in C$ такие, что $\pi' p \circ g(x') < 0$.

(д) *Условие открытости*: подпространство $\Lambda(X)$ дополняемо в Y, а оператор $\Lambda : X \to \Lambda(X)$ открыт, т. е. для любой окрестности нуля $U \subset X$ множество $\Lambda(U)$ будет окрестностью нуля в $\Lambda(X)$.

(е) *Условие непрерывности*: оператор f непрерывен в некоторой точке $\bar{x} \in C$.

Программу (C, g, f) называют *регулярной по Слейтеру* (*слабо регулярной по Слейтеру*), если выполняются (а) и (е) (соответственно (б) и (е)). Если же имеют место (в), (г) и (е), то говорят, что она *квазирегулярна*. Соответствующие понятия регулярности для программы (P) определяются так же, нужно лишь положить $C := \{\Lambda = y\}$ и добавить условие открытости (д). Условие непрерывности (е) можно, разумеется, ослабить, заменив его на требование общности положения подходящих выпуклых множеств, но это было бы слишком громоздко. Смысл условий регулярности станет ясным при выводе принципа Лагранжа и признаков оптимальности.

5.2.2. Пусть $\alpha \in \mathscr{L}^+(E)$, $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $\gamma \in \mathscr{L}(X, E)$. Положим по определению

$$L(x) := L(x, \alpha, \beta, \gamma) := \alpha \circ f(x) + \beta \circ g(x) + \gamma \circ \Lambda x - \gamma y.$$

Если $\alpha \notin \mathscr{L}^+(E)$ или $\beta \notin \mathscr{L}^+(F, E)$, то считают $L(x, \alpha, \beta, \gamma) = -\infty$. Тем самым L определен на произведении $X \times \mathscr{L}^+(E) \times \mathscr{L}^+(F, E) \times \mathscr{L}(Y, E)$, причем операторы $L(\cdot, \alpha, \beta, \gamma)$ и $-L(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпуклы для всех x, α, β, γ. Отображение L называют *лагранжианом программы* (P), а операторы α, β и γ — *множителями Лагранжа*.

5.2.3. *Пусть X, Y и Z — топологические векторные пространства и $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ — оператор, удовлетворяющий сформулированному выше условию открытости* (д)*. Тогда для любого оператора $T \in \mathscr{L}(X, Z)$ равносильны следующие условия:*

(1) $\ker(\Lambda) \subset \ker(T)$;

(2) *существует линейный непрерывный оператор $S : Y \to Z$ такой, что $S \circ \Lambda = T$.*

$\lhd$ Импликация (2) $\to$ (1) очевидна. Докажем (1) $\to$ (2). Из (1) вытекает, что если $\Lambda x_1 = \Lambda x_2$, то $Tx_1 = Tx_2$, каковы бы ни были x_1 и x_2 из X. Значит, для каждого $y \in \Lambda(X)$ множество $T(\Lambda^{-1}(y))$ состоит из единственной точки, которую обозначим символом $S_0 y$. Таким образом, равенством $S_0 y = T(\Lambda^{-1}(y))$ $(y \in \Lambda(X))$ определяется линейный оператор $S_0 : \Lambda(X) \to Z$, причем $S_0 \circ \Lambda = T$. Если V — окрестность нуля в Z, то $S_0^{-1}(V) = \Lambda(T^{-1}(V))$ есть окрестность нуля в $\Lambda(X)$ ввиду непрерывности T и условия открытости для Λ. Следовательно, $S_0 \in \mathscr{L}(\Lambda(X), Z)$. Если P — непрерывный проектор в Y на подпространство $\Lambda(X)$, то оператор $S := S_0 \circ P$ искомый. $\rhd$

5.2.4. В предложении 5.2.3 условие открытости Λ можно заменить на следующее: пространства X и $\Lambda(X)$ метризуемы, причем $\Lambda(X)$ нетощее и дополняемо в Y. В самом деле, при соблюдении этих требований Λ есть открытое отображение из X в $\Lambda(X)$ (см. 3.1.18).

Если же Y локально выпукло и $Z := \mathbb{R}$, то можно опустить и требование дополняемости $\Lambda(X)$ в Y. В самом деле, функционал $S_0 : \Lambda(X) \to \mathbb{R}$ (см. 2.3) по теореме Хана — Банаха допускает продолжение до непрерывного линейного функционала $S : Y \to \mathbb{R}$.

5.2.5. *Пусть $C \subset X$ — выпуклое множество и $f : X \to E^\bullet$ — выпуклый оператор, непрерывный в точке $x_0 \in C$. Тогда множества* $\operatorname{epi}(f)$ *и $C \times E^+$ находятся в общем положении.*

$\lhd$ Можно считать, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Возьмем произвольные окрестности нулей $U' \subset X$ и $V' \subset E$, число $\varepsilon' > 0$ и положим $W' := (-\varepsilon', \varepsilon) \times U' \times V'$. Подберем число $\varepsilon > 0$ и окрестности нулей $U \subset X$ и $V \subset E$ так, чтобы удовлетворялись условия:

$$2\varepsilon < \varepsilon', \quad V - \varepsilon V \subset V', \quad V \cap E^+ - V \cap E^+ = V,$$

$$\varepsilon x_0 + U \subset U', \quad f(x_0 + (1/\varepsilon)U) \subset V.$$

Если $(e, x, t) \in W := U \times V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, то

$$(x, e, t) = (\varepsilon x_0 + x,\ \varepsilon f(x_0 + x/\varepsilon)^+ + e^+,\ \varepsilon + t^+) -$$

$$-(\varepsilon x_0,\ \varepsilon f(x_0 + x/\varepsilon)^- + e^-, \varepsilon + t^-).$$

Отсюда видно, что $W \subset H(\operatorname{epi} f) \cap W' - (H(C) \times E^+) \cap W'$. $\rhd$

5.2.6. *Пусть $e \in E$ — значение слабо регулярной по Слейтеру задачи (C, g, f). Тогда найдутся такие $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $\lambda \in \mathscr{L}(X, E)$, что*

$$\inf_{x \in X} \{f(x) + \beta \circ g(x) + \lambda(x)\} = e + \sup_{x \in C} \{\lambda(x)\}.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим отображение $h : X \to E^{\bullet}$, действующее по формуле $h(x) := f(x) - e + \delta_E(F^-) \circ g_C(x)$, где $g_C := g + \delta_F(C)$. Очевидно, что h — выпуклый оператор и $\inf\{h(x) : x \in X\} = 0$ или, иначе, $h^*(0) = 0$. Применим правило вычисления сопряженного к сумме (см. 4.1.5 (1)). Необходимое для этого условие общего положения выполняется в силу 5.2.3. По соответствующей точной формуле существует линейный непрерывный оператор $\gamma' : X \to E$ такой, что

$$(f - e)^* (\gamma') + (\delta_E(F^-) \circ g_C)^* (-\gamma') = 0.$$

Воспользуемся теперь точной формулой для вычисления сопряженного к суперпозиции (4.1.9 (3)). На этот раз нужное условие общего положения дает регулярность по Слейтеру. Итак, существует оператор $\beta \in \partial \delta_E(F^-)$ такой, что

$$(\beta \circ g_C)^* (-\gamma') = (\delta_E(F^-) \circ g_C)^* (-\gamma').$$

Учитывая это, получим

$$0 = (f - e)^* (\gamma) + (\beta \circ g_C)^* (\gamma') \geqslant \inf \{(f - e)^* (\gamma') +$$

$$+ (\beta \circ g_C)^* (-\gamma) : \gamma' \in \mathscr{L}(X, E)\} = (f - e + \alpha \circ g_C)^* (0).$$

Из включения $\beta \in \partial \delta_E(F^-)$ видно, что $\beta \geqslant 0$, поэтому $f - e + \alpha \circ g_C \leqslant f - e + \delta_E(F^-) \circ g_C$ и $(f - e + \beta \circ g_C)^* (0) \geqslant h^*(0) = 0$. Окончательно

$$(f - e + \beta \circ g + \delta_E(C))^* (0) = 0.$$

Поскольку оператор $f - e + \beta g$ непрерывен в некоторой точке множества C, то благодаря 5.2.3 вновь можно применить правило вычисления сопряженного к сумме. При этом получим, что существует оператор $\lambda \in \mathscr{L}(X, E)$ такой, что

$$(f - e + \beta \circ g)^* (-\lambda) + C^*(\lambda) = 0.$$

Привлекая теперь определение сопряженного оператора, немедленно приходим к требуемому соотношению. $\triangleright$

5.2.7. *Пусть* $e \in E$ *— значение квазирегулярной задачи* (C, g, f). *Тогда найдутся операторы* $\alpha \in \operatorname{Orth}^+(E)$, $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ *и* $\lambda \in \mathscr{L}(X, E)$ *такие, что* $\ker(\alpha) = \{0\}$ *и*

$$\alpha e + \sup_{x \in C} \{\lambda x\} = \inf_{x \in X} \{\alpha f(x) + \beta g(x) + \lambda x\}.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим выпуклый оператор $h : X \to E^\bullet$, определяемый формулой $h(x) := (f(x) - e) \vee p \circ g(x)$, где e — значение программы (C, g, f). Ясно, что

$$0 = \inf \{h(x) : x \in C\} = \inf_{x \in X} \{h(x) + \delta_E(C)\}$$

или, что то же самое, $(h + \delta_E(C))^* (0) = 0$. Так же, как и в 5.2.6, можно получить $h^*(-\lambda) = C^*(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathscr{L}(X, E)$. Воспользуемся теперь правилом вычисления сопряженного оператора к супремуму выпуклых операторов из 4.1.5 (3). Соответствующая точная формула обеспечивает существование ортоморфизмов $\alpha, \alpha' \in \operatorname{Orth}^+(E)$ и операторов $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathscr{L}(X, E)$ таких, что $\alpha + \alpha' = I_E$, $-\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, и

$$(\alpha \circ (f - e))^* (\lambda_1) + (\alpha' \circ p \circ g)^* (\lambda_2) = -\delta_E(C)^* (\lambda).$$

Привлекая точную формулу 4.1.9 (3), получим

$$(\alpha(f - e))^* (\lambda_1) + (\beta \circ g)^* (\lambda_2) = -C^*(\lambda),$$

где $\beta \in \partial(\alpha' \circ p)$. Так как $\alpha' \circ p$ — возрастающий сублинейный оператор, то $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ (см. 1.4.14 (6)). В силу 4.1.5 (1) и предыдущей формулы будет

$$(\alpha \circ (f - e) + \beta \circ g)^* (-\lambda) \leqslant -C^*(\lambda).$$

С другой стороны,

$$\alpha(f(x) - e) + \beta g(x) \leqslant \alpha(f(x) - e) + \alpha' p \circ g(x) \leqslant h(x)$$

и в соответствии с 4.1.2 (5) верно

$$-C^*(\lambda) = h^*(-\lambda) \leqslant (\alpha(f - e) + \beta g)^* (-\lambda).$$

Тем самым возникает равенство

$$C^*(\lambda) = -(\alpha(f - e) + \beta g)^*(-\lambda).$$

Учитывая определение преобразования Юнга — Фенхеля, выводим

$$\sup_{x\in C} \{\lambda x\} = -\sup_{x\in X} \{-\lambda x - \alpha f(x) + \alpha e - \beta g(x)\} =$$
$$= -\alpha e + \inf \{\alpha f(x) + \beta g(x) + \lambda x\}.$$

Докажем, что $\ker(\alpha) = \{0\}$. Обозначим через π проектор на компоненту $\ker(\alpha) \subset E$. Ясно, что $\pi\alpha = \alpha\pi = 0$. Из уже доказанного равенства видно, что

$$\alpha e + \lambda x' \leqslant \alpha f(x) + \beta g(x) + \lambda x \quad (x \in X,\ x' \in C).$$

При $x = x' \in C$ имеем $\alpha(f(x) - e) + \beta g(x) \geqslant 0$. Следовательно,

$$0 \leqslant \pi(\alpha f(x) - \alpha e) + \pi\beta g(x) = \pi\beta g(x) \leqslant$$
$$\leqslant \pi\alpha' p g(x) = \pi(I_E - \alpha) p g(x) = \pi p g(x).$$

Итак, $\pi p g(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in C$. Предположение $\pi \neq 0$ в силу регулярности влечет существование $0 \neq \pi' \leqslant \pi$ и $x' \in C$ таких, что $\pi' p g(x') < 0$, и ведет к противоречию $\pi' p g(x') = \pi'(\pi p g(x')) \geqslant 0$. Поэтому $\pi = 0$ или $\ker(\alpha) = \{0\}$. $\rhd$

5.2.8. Сформулируем теперь вариант принципа Лагранжа, утверждающий в новой ситуации, что конечное значение векторной программы есть значение безусловной задачи для подходящего лагранжиана.

Принцип Лагранжа для значений векторных программ. *Пусть* $e \in E$ *— значение векторной программы* (P).

(1) *Если программа* (P) *слабо регулярна по Слейтеру, то найдутся такие операторы* $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ *и* $\gamma \in \mathscr{L}(Y, E)$, *что*

$$e = \inf_{x\in X} \{f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \gamma y\}.$$

(2) *Если программа* (P) *квазирегулярна, то найдутся такие операторы* $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$, $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ *и* $\gamma \in \mathscr{L}(Y, E)$, *что* $\ker(\alpha) = \{0\}$ *и*

$$\alpha e = \inf_{x\in X} \{\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \gamma y\}.$$

$\triangleleft$ Нужно применить 5.2.6, положив $C := \{x \in X : \Lambda x = y\}$. Тогда $C^*(\lambda) \neq +\infty$ в том и только в том случае, если $\ker(\Lambda) \subset \ker(\lambda)$. При выполнении последнего условия будет $C^*(\lambda) = \lambda x_0$, где $x_0 \in X$ и $\Lambda x_0 = y$. Остается привлечь 5.2.3. В этих рассуждениях неявно предполагается, что $C \neq \varnothing$. Если $C = \varnothing$, то следует взять $\gamma = 0$. Во второй части рассуждения те же, нужно только использовать 5.2.7 вместо 5.2.6. $\triangleright$

5.2.9. *Принцип Лагранжа для ε-решений векторных программ.* *Допустимая точка x_0 является ε-решением квазирегулярной векторной программы* (P) *в том и только в том случае, если существуют операторы $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$, $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $\gamma \in \mathscr{L}(Y, E)$ такие, что $\ker(\alpha) = \{0\}$, выполняется условие дополняющей нежесткости $\delta := \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$ и x_0 есть δ-решение безусловной задачи для лагранжиана $L(x) := \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \gamma y$ $(x \in X)$.*

$\triangleleft$ Если x_0 — это ε-решение нашей программы, то $f(x_0) \leqslant e + \varepsilon$. Учитывая 5.2.8 (2), отсюда выводим

$$\alpha f(x_0) \leqslant \alpha\varepsilon + \alpha e \leqslant \alpha\varepsilon + L(x, \alpha, \beta, \gamma) \quad (x \in X),$$

причем α, β и γ удовлетворяют нужным условиям.

Прибавив к обеим частям неравенства $\beta g(x_0)$, получим

$$L(x_0, \alpha, \beta, \gamma) \leqslant L(x, \alpha, \beta, \gamma) + \alpha\varepsilon + \beta g(x_0).$$

При $x = x_0$ видно, что $\delta = \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$. Следовательно,

$$L(x_0, \alpha, \beta, \gamma) \leqslant \inf_{x \in X}\{L(x, \alpha, \beta, \gamma)\} + \delta,$$

т. е. x_0 есть δ-решение безусловной задачи $L(x, \alpha, \beta, \gamma) := L(x) \to \inf$.

Наоборот, допустим, что x_0 есть δ-решение указанной задачи, причем $\ker(\alpha) = \{0\}$ и $\delta := \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$. Тогда выполняется

$$\alpha f(x_0) + \beta g(x_0) \leqslant \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \gamma y + \delta \quad (x \in X).$$

При $x \in \{\Lambda = y\}$ и $g(x) \leqslant 0$ неравенство легко приводится к виду

$$0 \leqslant \alpha(f(x) - f(x_0)) + \alpha\varepsilon + \beta g(x) \leqslant \alpha(f(x) - f(x_0) + \varepsilon).$$

Отсюда и следует требуемое неравенство $f(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon$, ибо $\ker(\alpha) = \{0\}$. $\triangleright$

Пусть предпорядок в E задается так, как описано в 5.1.5, причем функционал q непрерывен и $0 \notin \partial q$. Тогда справедливо следующее утверждение.

5.2.10. *Принцип Лагранжа для ε-оптимальности по Парето.* *Если допустимая точка x_0 является ε-оптимальной по Парето в регулярной по Слейтеру программе* (P), *то существуют непрерывные линейные функционалы $\alpha \in E'$, $\beta \in F'$ и $\gamma \in Y'$ такие, что $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, $\delta := \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$ и x_0 является δ-решением безусловной задачи для лагранжиана $L(x, \alpha, \beta, \gamma)$.*

Наоборот, если $\delta \geqslant 0$, x_0 есть δ-решение безусловной задачи

$$L(x, \alpha, \beta, \gamma) \to \inf$$

и, кроме того, $\ker(\alpha) \cap E^+ \subset \{e \in E : q(e) = 0\}$, *то x_0 будет ε-оптимальной по Парето точкой в программе* (P).

$\lhd$ Как уже отмечалось в 5.1.5, для ε-оптимальной по Парето точки x_0 имеем $q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ при условии $g(x) \leqslant 0$ и $\Lambda x = \Lambda x_0$. Возьмем множество

$$C := \{f(x) - f(x_0) + \varepsilon + a : x \in X,\ g(x) \leqslant 0,\ \Lambda x = \Lambda x_0,\ a \in E^+\}.$$

Понятно, что C выпукло и $q(c) \geqslant 0$ для всех $c \in C$. Применив теорему о сэндвиче 3.2.15 к выпуклым функциям q и $\delta_{\mathbb{R}}(C)$, найдем функционал $\alpha \in \partial q$, для которого $\alpha c \geqslant 0$ при $c \in C$. Тем самым $\alpha f(x_0) \leqslant \alpha f(x) + \alpha\varepsilon$, если $g(x) \leqslant 0$ и $\Lambda x = \Lambda x_0$. Иными словами, x_0 есть $\alpha(\varepsilon)$-решение программы

$$\Lambda x = \Lambda x_0, \quad g(x) \leqslant 0, \quad \alpha f(x) \to \inf$$

со скалярной целевой функцией αf. Заметим, что $\alpha \geqslant 0$, так как q возрастает и $\alpha \neq 0$, ибо $0 \notin \partial q$. В силу условия Слейтера для некоторой допустимой точки $\bar{x}$ элемент $\mathbb{1} := -g(\bar{x})$ является внутренней точкой F^+, а тогда и сильной единицей в F.

Положим по определению

$$p(u) := \inf\{t \in \mathbb{R} :\ u \leqslant t\mathbb{1}\} \quad (u \in F).$$

Нетрудно заметить, что p — возрастающий непрерывный сублинейный функционал, причем $g(x) \leqslant 0$ в том и только в том случае, если $pg(x) \leqslant 0$. Ввиду сказанного ясно, что x_0 есть $\alpha(\varepsilon)$-решение скалярной задачи

$$\Lambda x = y, \quad pg(x) \leqslant 0, \quad \alpha f(x) \to \inf.$$

Для этой задачи выполняются условия теоремы 5.2.8 (2). Следовательно, существуют $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $\gamma' \in Y'$ такие, что $\lambda > 0, \mu \geqslant 0$ и

$$\lambda e = \inf_{x \in X} \{\lambda \alpha f(x) + \mu p g(x) + \gamma'(\Lambda x - y)\},$$

где e — значение рассматриваемой программы. Отсюда вытекает, что для некоторого $\beta' \in \partial(\mu p)$ будет

$$-\lambda e = (\lambda \alpha f + \mu p g + \gamma'(\Lambda - y))^* (0) = (\lambda \alpha f + \beta' g + \gamma'(\Lambda - y))^* (0).$$

Полагая $\beta := \beta'/\lambda,\ \gamma := \gamma'/\lambda$, находим

$$e = \inf_{x \in X} \{\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma(\Lambda x - y)\}.$$

Принимая в расчет неравенство $\alpha f(x_0) \leqslant e + \alpha\varepsilon$, можно написать

$$\alpha f(x_0) - \alpha\varepsilon \leqslant e \leqslant \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma(\Lambda x - y) \quad (x \in X)$$

или, что то же самое,

$$L(x_0, \alpha, \beta, \gamma) \leqslant L(x, \alpha, \beta, \gamma) + \beta g(x_0) + \alpha\varepsilon \quad (x \in X).$$

Полагая $x = x_0$ в этом неравенстве, увидим, что $\delta := \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$. Тем самым x_0 есть δ-решение безусловной задачи для лагранжиана.

Допустим теперь, что $\delta := \alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \geqslant 0$ и x_0 — это δ-решение задачи $L(x, \alpha, \beta, \gamma) \to \inf$, где $0 < \alpha \in E'$, $0 \leqslant \beta \in F'$, $\gamma \in Y'$, $0 \leqslant \varepsilon \in E$. Тогда для каждого допустимого x будет $\alpha(\varepsilon + f(x) - f(x_0)) \geqslant 0$. Покажем, что нуль есть минимальный элемент множества $\{f(x) - f(x_0) + \varepsilon :\ g(x) \leqslant 0,\ \Lambda x = y\}$. Если x — допустимая точка и $c := f(x) - f(x_0) + \varepsilon \leqslant 0$, то $\alpha c \leqslant 0$ и $-c \geqslant 0$. Итак, $\alpha(-c) = 0$, т. е. $-c \in \ker(\alpha) \cap E^+$. В силу дополнительного предположения относительно α выполняется $q(-c) = 0$, поэтому $lc \leqslant 0$ для всех $l \in \partial q$. Эти рассуждения показывают, что если для допустимой точки x верно $f(x_0) - \varepsilon \geqslant f(x)$, то верно также $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x)$, т. е. x_0 есть ε-оптимум по Парето в задаче (P). $\triangleright$

5.3. Признаки оптимальности и приближенной оптимальности

В этом параграфе из установленных выше вариантов принципа Лагранжа выводятся признаки ε-оптимальности, обобщенной ε-оптимальности и ε-оптимальности по Парето для векторных программ. Сформулированные утверждения при $\varepsilon = 0$ превращаются в признаки точной оптимальности. Стоит подчеркнуть, что случай $\varepsilon = 0$ можно анализировать несколько иначе при менее жестких требованиях к данным рассматриваемой программы (ср. 4.2.5). Однако подобные детали мы ниже опускаем.

5.3.1. *Теорема.* *Допустимая точка x_0 является ε-оптимальной в слабо регулярной по Слейтеру задаче* (P) *в том и только в том случае, если совместна система условий:*

$$\begin{gathered}\beta \in \mathscr{L}^{+}(F,E), \quad \gamma \in \mathscr{L}(Y,E);\\ 0 \leqslant \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E, \quad \beta \circ g(x_0) + \varepsilon \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2;\\ 0 \in \partial_{\varepsilon_1} f(x_0) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda.\end{gathered}$$

$\triangleleft$ Предположим, что приведенная система совместна. Тогда по теореме 4.2.7 заключаем

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(f + \beta g + \gamma\Lambda)(x_0),$$

т. е. x_0 есть $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$-оптимум в безусловной задаче $f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda(x) \to \inf$. Для допустимой точки x_0 выполняется

$$\begin{aligned}f(x_0) &\leqslant f(x) + \beta g(x) - \beta g(x_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \gamma\Lambda x - \gamma\Lambda x_0 \leqslant\\ &\leqslant f(x) + \beta g(x) + \varepsilon \leqslant f(x) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что x_0 является ε-оптимумом в задаче (P).

Пусть теперь известно, что x_0 является ε-решением рассматриваемой программы. В силу принципа Лагранжа 5.2.8 (1) значение $e \in E$ программы (P) есть значение безусловной задачи для лагранжиана $L(x) := f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \gamma\Lambda x_0$ при подходящих множителях Лагранжа $\beta \in \mathscr{L}^{+}(F,E)$, $\gamma \in \mathscr{L}(Y,E)$. Следовательно,

$f(x_0) - \varepsilon \leqslant e = \inf_{x \in X} \{L(x)\} \leqslant L(x)$. Из этого соотношения вытекает $f(x_0) - \varepsilon \leqslant L(x_0) = f(x_0) + \alpha g(x_0)$. Значит, элемент $\delta := \varepsilon + \beta g(x_0)$ положителен. Кроме того,

$$0 \leqslant \varepsilon + L(x) - f(x_0) = f(x) + \beta g(x) + \gamma\Lambda x - \\ -(f(x_0) + \beta g(x_0) + \gamma\Lambda x_0) + \delta$$

для всех $x \in X$ и, стало быть,

$$0 \in \partial_\delta(f + \beta \circ g + \gamma \circ \Lambda)(x_0).$$

Привлекая формулу для ε-субдифференцирования суммы (теорема 4.2.7), найдем такие $0 \leqslant \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in E$, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \delta$ и

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1} f(x_0) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda. \ \triangleright$$

5.3.2. *Теорема.* *Допустимая точка x_0 является ε-оптимальной в квазирегулярной задаче* (P) *в том и только в том случае, если для некоторых $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, $\beta \in \mathscr{L}(F, E)$ и $\gamma \in \mathscr{L}(Y, E)$ совместна система условий*

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \ker(\alpha) = \{0\},$$
$$0 \leqslant \nu,\ \lambda \in E, \quad \nu + \lambda \leqslant \alpha\varepsilon + \beta g(x_0),$$
$$0 \in \partial_\nu(\alpha \circ f)(x_0) + \partial_\lambda(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda.$$

$\triangleleft$ Для доказательства нужно применить принцип Лагранжа из 5.2.9 для ε-решений и воспользоваться формулой ε-субдифференцирования суммы из 4.2.7. $\triangleright$

5.3.3. *Если соблюдены все условия теоремы* 5.2.6, *то допустимая точка x_0 является ε-оптимальной для программы (C, g, f) в том и только в том случае, если для некоторых $\lambda, \mu, \nu \in E$, $\beta \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $\gamma \in \mathscr{L}(X, E)$ совместна система условий*

$$\lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0, \quad \lambda + \nu \leqslant \varepsilon + \beta g(x_0) + \mu;$$
$$\sup_{x \in C} \{\gamma x\} \leqslant \gamma(x_0) + \mu;$$
$$0 \in \partial_\lambda f(x_0) + \partial_\nu(\beta \circ g)(x_0) + \gamma.$$

$\triangleleft$ Доказательство можно извлечь из 5.2.6 по той же схеме, что и в 5.3.1. $\triangleright$

5.3.4. *Теорема.* *Множество допустимых точек* $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ *является обобщенным* ε*-оптимумом в слабо регулярной по Слейтеру векторной программе* (P) *в том и только в том случае, если совместна система условий:*

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \in E, \quad 0 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}(E); \\
0 \leqslant \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathscr{L}(F, E), \quad \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathscr{L}(Y, E); \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_k \circ g\big(x_k^0\big) + \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E; \\
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ f\big(x_k^0\big) = f\big(x_1^0\big) \wedge \dots \wedge f\big(x_n^0\big); \\
0 \in \alpha_k \partial_{\varepsilon_1} f\big(x_k^0\big) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta_k \circ g)\big(x_k^0\big) + \gamma_k \circ \Lambda \ \ (k := 1, \dots, n).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ Пусть $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ — обобщенное ε-решение программы (P). Положим $w := \big(f\big(x_1^0\big), \dots, f\big(x_n^0\big)\big)$ и допустим, что $\alpha \in \partial\varepsilon_{n,E}(-w)$, где

$$
\varepsilon_{n,E}(e_1, \dots, e_n) = e_1 \vee \dots \vee e_n \ \ ((e_1, \dots e_n) \in E^n).
$$

В силу 2.1.5 (2) существуют ортоморфизмы $0 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}(E)$ такие, что

$$
\alpha_1 + \ \dots + \alpha_n = I_E,
$$

$$
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ f\big(x_k^0\big) = -\varepsilon_{n,E}(-w) = f\big(x_1^0\big) \wedge \dots \wedge f\big(x_n^0\big),
$$

$$
\alpha(e_1, \dots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \quad ((e_1, \dots, e_n) \in E^n).
$$

Определим операторы $\varphi : X^n \to E^{\bullet}$, $\psi : X^n \to (F^n)^{\bullet}$ и $\lambda : X^n \to Y^n$ формулами

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \circ f(x_k), \\
\psi(x_1, \dots, x_n) &= (g(x_1), \dots, g(x_n)), \\
\lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_k).
\end{aligned}
$$

Ясно, что φ и ψ — выпуклые операторы, непрерывные в некоторой точке $(x_0, \dots, x_0)$ такой, что $\Lambda x_0 = y$, а λ — линейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условию открытости. Далее, так как множества $(\mathrm{epi}(g) \cap (\{\Lambda = y\} \times E))^n$ и $-X^n \times (E^+)^n$ находятся в общем положении, то в общем положении находятся и множества $\mathrm{epi}(\psi) \cap (\{\lambda = v\} \times E^n)$ и $-X^n \times (E^+)^n$, совпадающие с ними с точностью до перестановки координат. Следовательно, программа

$$\lambda u = v, \quad \psi(u) \leqslant 0, \quad \varphi(u) \to \inf$$

слабо регулярна по Слейтеру и вектор $u^0 = \bigl(x_1^0, \dots, x_n^0\bigr)$ является для нее ε-решением. По теореме 5.3.1 существуют операторы $\beta \in \mathscr{L}^+(F^n, E)$ и $\gamma \in \mathscr{L}(Y^n, E)$ и элементы $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E$ такие, что

$$\varepsilon_1 \geqslant 0, \quad \varepsilon_2 \geqslant 0, \quad \beta \circ \psi(u^0) + \varepsilon \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1} \varphi(u^0) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta \circ \psi)(u^0) + \gamma \circ \lambda.$$

Понятно, что β и γ задаются наборами $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathscr{L}^+(F, E)$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathscr{L}(Y, E)$ в соответствии со следующими формулами:

$$\beta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x_n), \quad \gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x_k),$$

поэтому предыдущие соотношения можно записать в виде

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_k \circ g\bigl(x_k^0\bigr) + \varepsilon,$$

$$0 \in \alpha_k \partial_{\varepsilon_1} f\bigl(x_k^0\bigr) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta_k \circ g)\bigl(x_k^0\bigr) + \gamma_k \circ \Lambda \quad (k := 1, \dots, n).$$

Обоснование обратного утверждения оставляем в качестве упражнения. $\triangleright$

5.3.5. ***Теорема.*** *Если допустимая точка x_0 является ε-оптимальной по Парето в регулярной по Слейтеру программе* (P), *то существуют непрерывные линейные функционалы $\alpha \in E'$, $\beta \in F'$, $\gamma \in Y'$ и числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ такие, что совместна система условий:*

$$\alpha > 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \varepsilon_1 \geqslant 0, \quad \varepsilon_2 \geqslant 0;$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \alpha\varepsilon + \beta \circ g(x_0);$$

$$0 \in \partial_{\varepsilon_1}(\alpha \circ f)(x_0) + \partial_{\varepsilon_2}(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda.$$

Наоборот, если приведенные условия выполняются для некоторой допустимой точки x_0 *и, сверх того,* $\ker(\alpha) \cap E^+ \subset \{q = 0\}$, *то* x_0 *является* ε*-оптимумом по Парето в программе* (P).

$\triangleleft$ Выводится непосредственно из принципа Лагранжа для приближенной оптимальности по Парето (см. 5.2.10) с применением правила субдифференцирования суммы 4.2.7. $\triangleright$

5.3.6. В заключение параграфа рассмотрим еще одно простое приложение субдифференциального исчисления к выводу критерия ε-оптимальности в конечношаговой динамической задаче.

Пусть $X_0, \dots, X_n$ — топологические векторные пространства, а G_k — непустое выпуклое соответствие из X_{k-1} в X_k, $k := 1, \dots, n$. Совокупность $G_1, \dots, G_n$ задает динамическое семейство процессов $(G_{k,l})_{k<l\leqslant n}$, где $G_{k,l}$ — соответствие из X_k в X_l, определяемое равенствами:

$$G_{k,l} := G_{k+1} \circ \dots \circ G_l \quad (k + 1 < l);$$

$$G_{k,k+1} := G_{k+1} \quad (k := 0, 1, \dots, n - 1).$$

Очевидно, что $G_{k,l} \circ G_{l,m} = G_{k,m}$ для всех $k < l < m \leqslant n$.

Траекторией рассматриваемого семейства процессов называется упорядоченный набор элементов $(x_0, \dots, x_n)$ такой, что вхождение $x_l \in G_{k,l}(x_k)$ имеет место для всех $k < l \leqslant n$. При этом говорят, что x_0 — начало траектории, а x_n — ее конец.

Пусть E — топологическое K-пространство. Зафиксируем выпуклые операторы $f_k : X_k \to E^\bullet$ $(k := 0, 1, \dots, n)$ и выпуклые множества $D_0 \subset X_0$ и $D_N \subset X_N$. Для набора $\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_n)$ положим

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x_k).$$

Допустимой мы будем называть такую траекторию, для которой начало входит в D_0, а конец попадает в D_N.

Траекторию $\mathfrak{x}^0 := \left(x_1^0, \dots, x_N^0\right)$ называют *ε-оптимальной,* если $x_0^0 \in D_0$, $x_N^0 \in D_N$ и $f(\mathfrak{x}^0) \leqslant f(\mathfrak{x}) + \varepsilon$ для любой допустимой траектории $\mathfrak{x}$. *Динамическая экстремальная задача* состоит в поиске ε-оптимальной (или оптимальной в каком-либо другом смысле) траектории рассматриваемого динамического семейства.

Введем множества

$$C_0 := D_0 \times X; \quad C_1 := G_1 \times \prod_{k=2}^{N} X_k;$$

$$C_2 := X_0 \times G_2 \times \prod_{k=3}^{N} X_k; \quad \ldots \quad ; \quad C_N := \prod_{k=0}^{N-2} X_k \times G_N;$$

$$C_{N+1} := \prod_{k=1}^{N-1} X_k \times D_N, \quad X := \prod_{k=0}^{N} X_k.$$

Пусть оператор $\tilde{f}_k : X \to E^\bullet$ определяется формулой

$$\tilde{f}_k(\mathfrak{x}) = f_k(x_k) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \ldots, x_N),\ k := 0, \ldots, N).$$

5.3.7. *Теорема.* *Предположим, что выпуклые множества $C_0 \times E^+, \ldots, C_{N+1} \times E^+$, $\operatorname{epi}(\tilde{f}_0), \ldots, \operatorname{epi}(\tilde{f}_N)$ находятся в общем положении в пространстве $X \times E$. Допустимая траектория $\big(x_0^0, \ldots, x_N^0\big)$ будет ε-оптимальной в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$0 \leqslant \delta,\ \delta_k,\ \varepsilon_k \in E; \quad \alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E) \quad (k := 0, \ldots, N);$$

$$\delta + \sum_{k=0}^{N} \delta_k + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k = \varepsilon;$$

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in \partial_{\delta_k} G_k\big(x_{k-1}^0, x_k^0\big) - \{0\} \times \partial_{\varepsilon_k} f_k\big(x_k^0\big) \quad (k := 1, \ldots, N);$$

$$-\alpha_0 \in \partial_{\delta_0} D_0(x_0) + \partial_{\varepsilon_0} f_0(x_0); \quad \alpha_N \in \partial_\delta D_N(x_N).$$

$\triangleleft$ Как видно, ε-оптимальная траектория $u := \big(x_0^0, \ldots, x_N^0\big)$ будет также ε-решением программы

$$v \in C_0 \cap \ldots \cap C_{N+1}, \quad f(v) \to \inf,$$

следовательно,

$$0 \in \partial_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{N} \tilde{f}_k + \sum_{k=0}^{N+1} \delta_E(C_k) \right)(u).$$

Ввиду предположения об общем положении можно применить теорему 4.2.7 о субдифференцировании суммы. Значит, найдутся $0 \leqslant \varepsilon_k, \delta_k \in E$ $(k := 0, \ldots, N)$, $0 < \delta := \delta_{N+1} \in E$, а также линейные операторы $\mathscr{A}_k, \mathscr{B}_l \in \mathscr{L}(X, E)$, для которых выполнены соотношения

$$\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k + \sum_{k=0}^{N+1} \delta_k = \varepsilon,$$
$$\mathscr{A}_k \in \partial_{\delta_k} C_k(u) \quad (k := 0, 1, \ldots, N),$$
$$\mathscr{B}_l \in \partial_{\varepsilon_l} \tilde{f}_l(u) \quad (l := 0, 1, \ldots, N),$$
$$0 = \sum_{k=0}^{N+1} \mathscr{A}_k + \sum_{k=0}^{N} \mathscr{B}_l.$$

Нетрудно видеть, что операторы $\mathscr{A}_k$ и $\mathscr{B}$ можно записать в виде $(\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 + \ldots + \mathscr{B}_N)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_0 &= (\alpha_0', 0, 0, \ldots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_1 &= (\alpha_0, \alpha_1', 0, \ldots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_2 &= (0, -\alpha_1, \alpha_2', \ldots, 0, 0, 0),\\
&\vdots\\
\mathscr{A}_{N-1} &= (0, 0, 0, \ldots, -\alpha_{N-2}, \alpha_{N-1}', 0),\\
\mathscr{A}_N &= (0, 0, 0, \ldots, 0, -\alpha_{N-1}, \alpha_N'),\\
\mathscr{A}_{N+1} &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 0, -\alpha_N),\\
\mathscr{B} &= (-\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{N-2}, \beta_{N-1}, \beta_N),
\end{aligned}$$

где α_k, $\alpha_k' \in \mathscr{L}(X_k, E)$ и $-\beta_l \in \partial_{\varepsilon_l} f_l(x_l^0)$ $(l := 1, \ldots, N)$. Отсюда выводим $\alpha_k' = \alpha_k - \beta_k$ $(k := 1, \ldots, N)$. Теперь для $k := 1, \ldots, N$ ввиду субдифференциальных включений для операторов $\mathscr{A}_k$ можем написать

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k') = (\alpha_{k-1}, \alpha_k - \beta_k) = (\alpha_{k-1}, \alpha_k) + (0, -\beta_k) \in \partial_{\delta_k} G_{\hat{k}}\bigl(x_{k-1}^0, x_k^0\bigr)$$

и далее

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in \partial_{\delta_k} G_k\bigl(x_{k-1}^0, x_k^0\bigr) - \{0\} \times \partial_{\varepsilon_k} f_k\bigl(x_k^0\bigr).$$

Кроме того, при $k = 0$ и $k = N + 1$ получаем соотношения

$$-\alpha_0 = \alpha_0' - \beta_0 \in \partial_{\delta_0} D_0\bigl(x_0^0\bigr) + \partial_{\varepsilon_0} f_0\bigl(x_0^0\bigr), \quad \alpha_N \in \partial_{\delta_N+1} D_N\bigl(x_N^0\bigr),$$

что и требовалось. $\triangleright$

5.3.8. Рассмотренную выше динамическую экстремальную задачу называют *терминальной,* если целевое отображение зависит только от конечного состояния:

$$f(\mathfrak{x}) = f_N(x_N) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N) \in X).$$

Будем считать, что f — выпуклый оператор из X_N в E.

Если $(x_0, \dots, x_N)$ — это ε-оптимальная траектория в терминальной задаче, то x_N есть ε-решение экстремальной задачи

$$x \in C := C_{0,N}(D_0) \cap D_N, \quad f_N(x) \to \inf .$$

Это следует из того, что для $a \in D_0$ и $b \in C$ по очевидным соображениям найдется траектория с началом a и концом b. С другой стороны, если $\bar{x}$ — это ε-решение указанной экстремальной задачи, то $\bar{x} \in G_{0,N}(x_0)$ для некоторого $x_0 \in D_0$ и траектория, соединяющая x_0 и $\bar{x}$, будет ε-оптимальной. Вместе с тем понятно, что интересна характеризация оптимальной траектории в целом, а не только ее конечного состояния. Этим и отличается рассматриваемая задача от программы вида $x \in C,\ f(x) \to \inf$.

Последовательность линейных операторов $\alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E)$ $(k := 0, \dots, N)$ называют *ε-характеристикой траектории* $(x_0, \dots, x_N)$, если для некоторых $0 \leqslant \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in E$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \ \ldots + \varepsilon_N = \varepsilon, \\
\alpha_k x - \alpha_l y \leqslant \alpha_k x_k - \alpha_l x_l + \varepsilon_{k+1} + \ \ldots + \varepsilon_l, \\
(x, y) \in G_{k,l} \quad (0 \leqslant k < l \leqslant N).
\end{gathered}$$

5.3.9. *Теорема.* *Предположим, что выпуклые множества $C_0 \times E^+, \dots, C_{N+1} \times E^+$ и $\prod_{k=0}^{N-1} X_k \times \operatorname{epi}(f)$ находятся в общем положении. Тогда допустимая траектория $(x_0, \dots, x_N)$ будет ε-оптимальной в том и только в том случае, если для некоторого $0 \leqslant \delta \in E$ существует δ-характеристика $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ этой траектории такая, что выполнены условия*

$$\begin{gathered}
\nu, \mu \in E^+, \quad \nu + \mu + \delta = \varepsilon; \\
\alpha_0(x_0) \leqslant \inf_{x \in D_0} \{\alpha_0(x)\} + \mu; \\
\alpha_N \in \partial_\nu f(x_N) + \partial_\lambda D_N(x_N).
\end{gathered}$$

$\triangleleft$ Субдифференциальные включения из 5.3.7 можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in \partial_{\delta_k} G(x_{k-1}, x_k) + \\ + \partial_{\varepsilon_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1}) \times \{0\} \quad (k := 0, 1, \dots, N-1);$$

$$-\alpha_0 \in \partial_{\delta_0} D_0(x_0); \quad \alpha_N \in \partial_{\varepsilon_N} f_N(x_N) + \partial_\delta D_N(x_N).$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое. $\triangleright$

5.4. Признаки инфинитезимальной оптимальности

Здесь мы анализируем инфинитезимальные решения выпуклых векторных программ (см. 5.1). Необходимый аппарат содержится в 4.6 и Приложении 5.

5.4.1. *В стандартной безусловной программе* $f(x) \to \inf$ *имеется инфинитезимальное решение в том и только в том случае, если, во-первых, образ* $f(X)$ *ограничен снизу и, во-вторых, существует стандартное обобщенное решение* $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathscr{E}}$ *рассматриваемой программы, т. е.* $x_\varepsilon \in \operatorname{dom}(f)$ *и* $f(x_\varepsilon) \leqslant e + \varepsilon$ *для всех* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, *где* $e := \inf f(X)$ — *значение программы.*

$\triangleleft$ В силу принципов идеализации П5.2 (2) и переноса П5.2 (1) с учетом 4.6.3 выводим

$$(\exists x_0 \in X)\, 0 \in Df(x_0) \leftrightarrow (\exists x \in X)\, (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})\, 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})\, (\exists x \in X)(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\, 0 \in \partial_\varepsilon f(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})\, (\exists x_\varepsilon \in X)\, 0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\, (\exists x \in X)(\forall x \in X)\, f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) + \varepsilon. \ \triangleright$$

5.4.2. Рассмотрим регулярную выпуклую программу

$$g(x) \leqslant 0, \ f(x) \to \inf.$$

Таким образом, $g, f : X \to E^\bullet$ (для простоты $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) = X$) при каждом $x \in X$ либо $g(x) \leqslant 0$, либо $g(x) \geqslant 0$ и, кроме того, для некоторого $\bar{x} \in X$ элемент $g(\bar{x})$ — это единица в E.

5.4.3. *В случае стандартного антуража допустимая внутренняя точка x_0 является инфинитезимальным решением рассматриваемой регулярной программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\alpha, \beta \in^{\circ} [0, I_E],\ \alpha + \beta = I_E,\ \ker(\alpha) = \{0\};$$

$$\beta \circ g(x_0) \approx 0,\ 0 \in D(\alpha \circ f)(x_0) + D(\beta \circ g)(x_0).$$

$\lhd$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для допустимого x при некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$\alpha f(x_0) \leqslant \alpha f(x) + \beta g(x) - \beta g(x_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \alpha f(x) + \varepsilon$$

для каждого стандартного $\varepsilon \in \mathscr{E}$. В частности, $\alpha(f(x_0) - f(x)) \leqslant \alpha\varepsilon$ при $\varepsilon \in \mathscr{E}$, ибо α — это стандартное отображение. В силу условия $\ker(\alpha) = \{0\}$ и общих свойств мультипликаторов видим, что x_0 — инфинитезимальное решение.

$\rightarrow$: Пусть

$$e := \inf\{f(x) : x \in X,\ g(x) \leqslant 0\}$$

— значение рассматриваемой программы. По условию и в силу принципа переноса e — стандартный элемент. Значит, вновь привлекая принцип переноса, по теореме о векторном минимаксе 4.1.10 (1) найдем стандартные мультипликаторы $\alpha, \beta \in^{\circ} [0, I_E]$ такие, что

$$\alpha + \beta = I_E,$$

$$0 = \inf_{x \in X} \{\alpha(f(x) - e) + \beta g(x)\}.$$

Обычным рассуждением проверяется, что $\ker(\alpha) = \{0\}$. Кроме того, поскольку x_0 является инфинитезимально оптимальным решением, для некоторого бесконечно малого ε будет $\varepsilon = f(x_0) - e$. Следовательно, при любом $x \in X$ справедлива оценка

$$-\alpha\varepsilon \leqslant \alpha f(x) - \alpha f(x_0) + \beta g(x).$$

В частности, $0 \geqslant \beta g(x_0) \geqslant -\alpha\varepsilon \geqslant -\varepsilon$, т. е. $\beta g(x_0) \approx 0$ и

$$0 \in \partial_{\alpha\varepsilon + \beta g(x_0)}(\alpha f + \beta g)(x_0) \subset D(\alpha f + \beta g)(x_0),$$

ибо $\alpha\varepsilon + \beta g(x_0) \approx 0$. $\rhd$

5.4.4. Рассмотрим регулярную в смысле Слейтера программу

$$\Lambda x = \Lambda \bar{x}, \quad g(x) \leqslant 0, \quad f(x) \to \inf;$$

т. е., во-первых, $\Lambda \in L(X, \mathfrak{X})$ — линейный оператор со значениями в некотором векторном пространстве $\mathfrak{X}$, отображения $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to F^\bullet$ — выпуклые операторы (для удобства $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) = X$), во-вторых, F — архимедово упорядоченное векторное пространство, E — стандартное K-пространство ограниченных элементов и, наконец, в-третьих, для некоторой допустимой точки $\bar{x}$ элемент $g(\bar{x})$ является сильной единицей в F.

5.4.5. *Критерий инфинитезимальной оптимальности.* *Допустимая точка x_0 является инфинитезимальным решением регулярной в смысле Слейтера программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\beta \in L^+(F, E), \quad \gamma \in L(\mathfrak{X}, E), \quad \gamma g(x_0) \approx 0,$$
$$0 \in Df(x_0) + D(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda.$$

$\lhd$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для всякой допустимой точки x и некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$f(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon_1 + \beta g(x) - \beta g(x_0) + \varepsilon_2 - \gamma \Lambda x + \gamma \Lambda x_0 \leqslant$$
$$\leqslant f(x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

при любом стандартном $\varepsilon \in \mathscr{E}$.

$\rightarrow$: Если x_0 — инфинитезимальное решение, то оно и ε-решение для подходящего бесконечно малого ε. Остается привлечь соответствующий критерий ε-оптимальности. $\rhd$

5.4.6. Допустимая точка x_0 называется *инфинитезимально оптимальной по Парето* в программе 5.4.4, если x_0 является ε-оптимальной по Парето для какого-нибудь бесконечно малого ε (относительно сильной единицы $\mathbb{1}_E$ в пространстве E), т. е. если для допустимого x выполнено $f(x) - f(x_0) \leqslant -\varepsilon \mathbb{1}_E$, то $f(x) - f(x_0) = \varepsilon \mathbb{1}_E$ при $\varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+)$.

5.4.7. *Пусть точка x_0 инфинитезимально оптимальна по Парето в регулярной в смысле Слейтера программе. Тогда при некоторых линейных функционалах α, β и γ на пространствах E, F и $\mathfrak{X}$ соответственно совместна следующая система условий:*

$$\alpha > 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \beta g(x_0) \approx 0,$$
$$0 \in D(\alpha \circ f)(x_0) + D(\beta \circ g)(x_0) + \gamma \circ \Lambda.$$

Если, в свою очередь, приведенные соотношения выполнены для некоторой допустимой точки x_0, причем $\alpha(\mathbb{1}_E) = 1$ и $\ker(\alpha) \cap E^+ = \{0\}$, то x_0 служит инфинитезимально оптимальным решением по Парето рассматриваемой программы.

$\lhd$ Первая часть доказываемого утверждения вытекает из обычного признака ε-оптимальности по Парето с учетом отмеченных ранее свойств бесконечно малых. Если же выполнена гипотеза второй части интересующего нас предложения, то, привлекая определения, для любого допустимого $x \in X$ выводим:

$$0 \leqslant \alpha(f(x) - f(x_0)) + \beta g(x) - \beta g(x_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(f(x) - f(x_0)) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(x_0)$$

при подходящих бесконечно малых ε_1 и ε_2. Положим $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(x_0)$. Ясно, что $\varepsilon \approx 0$ и, кроме того, $\varepsilon \geqslant 0$. Если теперь для допустимого x верно $f(x) - f(x_0) \leqslant -\varepsilon \mathbb{1}_E$, то получаем равенство $\alpha(f(x_0) - f(x)) = \varepsilon$. Иными словами, $\alpha(f(\bar{x}) - f(x) - \varepsilon \mathbb{1}_E) = 0$ и $f(\bar{x}) - f(x) = \varepsilon \mathbb{1}_E$. Последнее как раз и означает, что $\bar{x}$ — это ε-оптимальное по Парето решение. $\rhd$

5.4.8. По описанному образу можно получить признаки инфинитезимальных решений и в других основных формах задач выпуклого программирования, например, вывести нестандартные аналоги теоремы о характеристике естественным образом определяемых инфинитезимально оптимальных траекторий в конечношаговых терминальных динамических задачах (см. 5.3.6–5.3.9).

5.5. Признаки обобщенной оптимальности

Здесь рассматриваются признаки обобщенной оптимальности в смысле определений 5.1.7 и 5.1.12. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные конструкции. Всюду в этом параграфе, за исключением 5.5.3 и 5.5.4, X — банахово пространство, а X' — сопряженное к нему.

5.5.1. Введем теперь пространство слабо непрерывных вектор-функций, аналогичное $E(X)$, см. 5.1.9. Предположим, что $Z \subset X'$ — *нормирующее подпространство*, т. е.

$$\|x\|_X = \sup\{|\langle x, z\rangle| : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\} \quad (x \in X).$$

Здесь, как обычно, X' — сопряженное пространство, а $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ — каноническая билинейная форма двойственности $X \leftrightarrow X'$, см. [166].

Обозначим через $\mathscr{C}_w(Q, X)$ множество $\sigma(X, Z)$-непрерывных вектор-функций $u : \mathrm{dom}(u) \to X$ таких, что $\mathrm{dom}(u)$ — котощее множество в Q.

Рассмотрим фактор-множество $C_\infty(Q, X|Z) := \mathscr{C}_w(Q, X)/{\sim}$, где $u \sim v$ означает, что $u(t) = v(t)$ $\big(t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)\big)$. Множество $C_\infty(Q, X|Z)$ можно естественным образом превратить в векторное пространство: если $\widetilde{u}$ — класс эквивалентности вектор-функции $u \in \mathscr{C}_w(Q, X)$, то под линейной комбинацией $\lambda\widetilde{u} + \mu\widetilde{v}$ понимается класс эквивалентности поточечной линейной комбинации $\lambda u(t) + \mu v(t)$, $t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Для $a \in C_\infty(Q)$ вектор-функция $t \mapsto a(t)u(t)$, $t \in \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(u)$, входит в $\mathscr{C}_w(Q, X)$ и, стало быть, определяет класс эквивалентности, который обозначим $a\tilde{w}$. Для $u \in \mathscr{C}_w(Q, X)$ и $z \in Z$ обозначим символом $\langle u, z\rangle$ продолжение по непрерывности функции $t \mapsto \langle u(t), z\rangle$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$ на все пространство Q. Если $u \sim v$, то очевидным образом $\langle u, z\rangle = \langle v, z\rangle$, следовательно, для $w \in C_\infty(Q, X|Z)$ и произвольного $u \in w$ можно положить $\langle w, z\rangle := \langle u, z\rangle$. Множество $R(u) := \big\{\langle u, z\rangle : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\big\}$ порядково ограничено в $C_\infty(Q)$, так как оно поточечно ограничено на котощем множестве $\mathrm{dom}(u)$. Таким образом, для произвольного $u \in w$ можно положить

$$\lvert w\rvert := \lvert u\rvert := \sup\big\{\langle u, z\rangle : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\big\},$$

где супремум вычисляется в $C_\infty(Q)$. Заметим, что функция $\|u(\cdot)\| : t \mapsto \|u(t)\|$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$ является поточечным супремумом того же множества $R(u)$. Поэтому функции $\lvert u\rvert$ и $\|u(\cdot)\|$ совпадают на котощем подмножестве Q. Тем не менее эти функции могут различаться на $\mathrm{dom}(u)$.

Легко видеть, что $\lvert \cdot \rvert$ — разложимая норма со значениями в $C_\infty(Q)$. Более того, $C_\infty(Q, X|Z)$ естественным образом наделяется структурой точного модуля над кольцом $C_\infty(Q)$, причем $\lvert au\rvert = |a|\,\lvert u\rvert$ для $a \in C_\infty(Q)$ и $u \in C_\infty(Q, X|Z)$. Положим

$$E_w(X, Z) := \big\{u \in C_\infty(Q, X|Z) : \lvert u\rvert \in E\big\}.$$

Выделим важный частный случай $E_w(X') := E_w(X', X)$, возникающий при $X := X'$ и $Z := X \subset X''$.

Если X — банахово пространство, то для каждого фундамента $E \subset C_\infty(Q)$ множество $E_w(X, Z)$ с алгебраическими операциями и E-значной нормой $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}$, индуцированными из $C_\infty(Q, X|Z)$, является пространством Банаха — Канторовича над E, а $C_\infty(Q, X|Z)$ будет его максимальным расширением. В частности, $E_w(X')$ — пространство Банаха — Канторовича над E.

Возьмем непрерывную вектор-функцию $u \in \mathscr{C}(Q, X)$ и слабо непрерывную вектор-функцию $v \in \mathscr{C}_w(Q, X')$ и для произвольного $q \in \operatorname{dom}(\varphi) := \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)$ положим $\varphi(q) := \langle u(q), v(q)\rangle$. Заметим, что для любых $q, q_0 \in \operatorname{dom}(\varphi)$ имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
|\varphi(q) - \varphi(q_0)| \leqslant |\langle u(q) - u(q_0), v(q)\rangle| + |\langle u(q_0), v(q) - v(q_0)\rangle| \leqslant \\
\leqslant \boldsymbol{|}v\boldsymbol{|}(q)\|u(q) - u(q_0)\| + |\langle u(q_0), v(q) - v(q_0)\rangle|.
\end{aligned}
$$

Ввиду сильной непрерывности u и слабой непрерывности v оба слагаемых в правой крайней части цепочки неравенств стремятся к нулю при $q \to q_0$, следовательно, функция φ непрерывна. Как видно, множество $\operatorname{dom}(\varphi)$ является котощим, поэтому φ имеет единственное продолжение до непрерывной функции $\tilde\varphi : Q \to \overline{\mathbb{R}}$. Положим $\langle u, v\rangle := \tilde\varphi$. Обозначим $E^* := \operatorname{Orth}(E)$ и заметим, что если $\boldsymbol{|}u\boldsymbol{|} \in E$ и $\boldsymbol{|}v\boldsymbol{|} \in E^*$, то $\langle u, v\rangle \leqslant \boldsymbol{|}v\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}u\boldsymbol{|}$. (Алгебра ортоморфизмов отождествляется с фундаментом в mE согласно П2.5 (9).) Тем самым определен билинейный оператор $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : E(X) \times E_w(X) \to E$. При этом для любого ортоморфизма выполняется $\langle \alpha u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.

5.5.2. Напомним (см. 4.3.4), что множество всех o-ограниченных операторов из X в E обозначается символом $\mathscr{L}_0(X, E)$. В случае банахова пространства X включение $T \in \mathscr{L}_0(X, E)$ означает, что множество $\{|Tx| : \|x\| \leqslant 1\}$ порядково ограничено в E (см. 4.3.4 (c)). Положим по определению

$$
\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|} := \sup\{|Tx| :\ x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}.
$$

Ясно, что отображение $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|} : \mathscr{L}_0(X, E) \to E$ также удовлетворяет аксиомам 1.6.1 (1–3). В этом случае принято обозначение $L_A(X, E) := \mathscr{L}_0(X, E)$, а элементы пространства $L_A(X, E)$ называют также операторами с *абстрактной нормой*. Нетрудно показать, что $L_A(X, E)$ — это пространство Банаха — Канторовича.

(1) *Для каждого оператора с абстрактной нормой $T : X \to E$ существует единственный элемент $u_T \in E_w(X')$, удовлетворяющий условию*

$$Tx = \langle x, u_T \rangle \quad (x \in X).$$

Отображение $T \mapsto u_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами Банаха — Канторовича $L_A(X, E)$ и $E_w(X')$.

$\triangleleft$ Если $e := \lvert T \rvert$, то для каждого $x \in X$ функция $Tx \in C_\infty(Q)$ принимает конечные значения в точках множества $Q_0 := \{t \in Q : e(t) < +\infty\}$, так как $|Tx| \leqslant e\|x\|$. Последняя оценка влечет также, что для произвольной $t \in Q_0$ функционал $v(t) : x \mapsto (Tx)(t)$ $(x \in X)$ ограничен и $\|v(t)\| \leqslant e(t)$. Тем самым возникает отображение $v : Q_0 \to X'$, непрерывное в слабой топологии $\sigma(X', X)$. Пусть u_T обозначает класс эквивалентности функции v. Тогда $Tx = \langle x, u_T \rangle$ для всех $x \in X$. В частности, существует точная верхняя граница $\sup\{\langle x, u_T \rangle : \|x\| \leqslant 1\} = e$. Следовательно, $u_T \in E_w(X')$ и $\lvert u_T \rvert = \lvert T \rvert$. Как видно, отображение $T \mapsto u_T$ является линейной изометрией из $L_A(X, E)$ в $E_w(X')$. Ясно, что это отображение также и сюръективно. $\triangleright$

Линейный оператор $T : E(X) \to E$ называют ограниченным, если существует положительный ортоморфизм $\alpha \in E^*$ такой, что $|Tu| \leqslant \alpha \lvert u \rvert$ для всех $u \in E(X)$. Множество всех линейных ограниченных операторов из $E(X)$ в E обозначим символом $L_b(E(X), E)$. Из данного определения и из порядковой непрерывности ортоморфизмов (см. П2.5 (2)) следует, что произвольный оператор $T \in L_b(E(X), E)$ bo-непрерывен, т. е. из равенства $bo\text{-}\lim_\nu u_\nu = 0$ вытекает $bo\text{-}\lim_\nu Tu_\nu = 0$.

(2) *Для каждого линейного ограниченного оператора $T : E(X) \to E$ существует единственный элемент $v_T \in E_w^*(X')$, удовлетворяющий условию*

$$Tu = \langle u, v_T \rangle \quad \big(u \in E(X)\big).$$

Отображение $T \mapsto v_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами Банаха — Канторовича $L_b(E(X), E)$ и $E_w^*(X')$.

$\triangleleft$ Если $v \in E_w^*(X')$, то вследствие оценки $\langle u, v \rangle \leqslant \lvert v \rvert \cdot \lvert u \rvert$ оператор $S_v : u \mapsto \langle u, v \rangle$ $(u \in E(X))$ входит в $L_b(E(X), E)$ и $\lvert S_v \rvert \leqslant \lvert v \rvert$.

Возьмем теперь произвольный оператор $S \in L_b(E(X), E)$ и обозначим $\alpha := \lvert S \rvert$. Для произвольного $x \in X$ оператор $\varphi_x : e \mapsto$

$S(x \otimes e)$ является ортоморфизмом в E, так как $|\varphi_x(e)| \leqslant \alpha(e)\|x\|$ (см. П2.5 (3)). Здесь и далее элемент $x \otimes e \in E(X)$ определяется непрерывной вектор-функцией $q \mapsto e(q)\|x\|$ ($|e(q)| < +\infty$). Тем самым отображение $S' : x \mapsto \varphi_x$ из X в E^* является оператором с абстрактной нормой и $\left|\!\left| S' \right|\!\right| \leqslant \alpha$. Согласно (1) существует единственный элемент $v := v_{S'} \in E_w^*(X')$ такой, что $\left|\!\left| S' \right|\!\right| = |\!|v|\!|$ и $S'x = \langle x, v\rangle$ для всех $x \in X$. По определению S' для элемента вида $z := \sum_{k=1}^n x_k \otimes e_k$ будет $Sz = \sum_{k=1}^n S'(x_k \otimes e_n) = \langle z, v\rangle$. Как видно, операторы S и S_v совпадают на множестве всех элементов z указанного вида. В соответствии с теоремой 5.1.10 такое множество bo-плотно в $E(X)$ (см. 1.6.6), и ввиду bo-непрерывности операторов S и S_v получаем $S = S_v$. Кроме того, $|\!|v|\!| = \left|\!\left| S' \right|\!\right| \leqslant \alpha = |\!|S|\!|$, что вместе с уже доказанным противоположным неравенством дает $|\!|S|\!| = |\!|v|\!|$. $\triangleright$

(3) Если E — расширенное K-пространство, то имеет место равенство $L_A(X, E) = L_\pi(X, E)$.

$\triangleleft$ Нужно лишь показать, что произвольный проскалярный оператор $T : X \to E$ ограничен на единичном шаре пространства X. Согласно 4.3.5 имеет место представление $Tx = o\text{-}\sum \pi_\xi \circ T_\xi x$, где (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(E)$ и $T_\xi \in \mathscr{L}_A(X, E)$ для всех ξ. В расширенном K-пространстве E существует элемент $e := o\text{-}\sum \pi_\xi \left|\!\left| T_\xi \right|\!\right|$. Если $\|x\| \leqslant 1$, то $|Tx| \leqslant o\text{-}\sum \pi_\xi |T_\xi x| \leqslant o\text{-}\sum \pi_\xi \left|\!\left| T_\xi \right|\!\right| \leqslant e$, следовательно, $|\!|T|\!| \leqslant e$ и $T \in L_A(X, E)$. $\triangleright$

5.5.3. В главе 4 выпуклые операторы $f : X \to \bar{E}$ и их субдифференциалы изучались в рамках векторнозначной (E-значной) двойственности $E \leftrightarrow \mathscr{L}(X, E)$ с билинейным оператором $(x, T) \mapsto Tx$ ($x \in X$, $T \in \mathscr{L}(X, E)$). Наша ближайшая цель — изучить полунепрерывные снизу выпуклые операторы $f : X \to E^\star$ относительно векторнозначной двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X)$, задаваемой билинейным оператором $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : E(X) \otimes E_w(X) \to E$. Но для этого необходимо убедиться в том, что для операторов со значениями в $E^\star$ остаются в силе некоторые основополагающие факты. Начнем с алгебраического варианта формулы Моро — Рокафеллара.

Пусть X — произвольное векторное пространство, а E — K-пространство. Рассмотрим сублинейный оператор $p : X \to E^\star$. Опорное множество (субдифференциал в нуле) ∂p оператора p вводится точно так же, как и в 1.4.11:

$$\partial^a p := \{T \in L(X, E) :\ (\forall x \in X)\, Tx \leqslant p(x)\}.$$

Однако, в отличие от определения 1.4.11, включение $T \in \partial p$ не сводится к справедливости для всех $x \in \operatorname{dom}(p)$ неравенства $Tx \leqslant p(x)$, а требует также выполнения неравенств вида $\pi^{\perp}Tx \leqslant \pi^{\perp}e$, если элемент $p(x) \in E^{\star}$ определяется парой (e, π). В соответствии с этим изменится и определение общего положения (ср. 3.1.9 и 3.2.8). Будем говорить, что сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^{\star}$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если существует такое подпространство $Z_0 \subset X^n$, что $Z_0 = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{dom}(\pi p_k) - \Delta_n(X)$ для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$. Это условие можно несколько ослабить, однако для наших дальнейших целей оно вполне приемлемо. Нетрудно видеть, что для двух сублинейных операторов условие общего положения равносильно существованию подпространства $X_0 \subset X$, обеспечивающего справедливость равенства $X_0 = \operatorname{dom}(\pi p_1) - \operatorname{dom}(\pi p_2)$ при всех $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

(1) *Если сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^{\star}$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула Моро — Рокафеллара*

$$\partial^a(p_1 + \ \dots + p_n) = \partial^a p_1 + \ \dots + \partial^a p_n.$$

$\lhd$ Ограничимся наброском доказательства для случая $n = 2$. Как обычно, нужно лишь установить включение $\subset$. Возьмем $T \in \partial^a(p_1 + p_2)$ и $(x, y) \in Z_0$. В силу условия общего положения для любого $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место представление $(x, y) = (h_1, h_2) - (h, h) = (k_1, k_2) - (k, k)$ для некоторых $h_i, k_i \in \operatorname{dom}(\pi p_i)$ $(i := 1, 2)$ и $h, k \in X$. Тогда справедливо неравенство

$$-\pi p_1(k - x) - \pi p_2(k - y) + \pi Tk \leqslant \pi p_1(h + x) + \pi p_2(h + y) - \pi Th,$$

следовательно, для любого разбиения единицы (π_ξ) в алгебре $\mathfrak{P}(E)$ выполняется

$$a \leqslant \sum_{\xi} \big(\pi_\xi p_1(h + x) + \pi_\xi p_2(h + y) - \pi_\xi Th\big),$$

где $a := \sum_{\xi}(-\pi p_1(k - x) - \pi p_2(k - y) + \pi Tk)$. Тем самым оператор $p_0 : Z_0 \to E$ корректно определяется формулой

$$p_0(x, y) := \inf \Bigg\{ \sum_{\xi} \big(\pi_\xi p_1(h + x) + \pi_\xi p_2(h + y) - \pi_\xi Th\big) :$$
$$h + x \in \operatorname{dom}(\pi_\xi p_1),\ h + y \in \operatorname{dom}(\pi_\xi p_2),\ (\pi_\xi) \in \operatorname{Prt}(E) \Bigg\},$$

где $\operatorname{Prt}(E)$ — множество всех разбиений единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$. Нетрудно видеть, что p_0 — сублинейный оператор. Если P — произвольный линейный проектор из Z_0 на X^2 и $p := p_0 \circ P$, то оператор p сублинеен, а для линейного оператора $(T_1, -T_2) \in \partial p$, действующего по правилу $(T_1, -T_2) : (x, y) \mapsto T_1 x + T_2 y$, будет $T_1 \in \partial^a p_1$, $T_2 \in \partial^a p_2$ и $T = T_1 + T_2$. $\triangleright$

Рассмотрим теперь формулу для вычисления опорного множества супремума конечного числа сублинейных операторов.

(2) *Если сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$\partial^a(p_1 \vee \ldots \vee p_n) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E}} \bigl\{\partial^a(\alpha_1 \circ p_1) + \ \ldots + \partial^a(\alpha_n \circ p_n)\bigr\}.$$

$\triangleleft$ Введем сублинейные операторы $q_1, \dots, q_n : X \times E \to E^\star$, полагая $q_k(x, e) = +\propto_\pi$, где π — наименьший порядковый проектор, для которого $\pi^d p_k(x) \leqslant \pi^d e$. Напомним, что $\propto_0 = 0$ и $\propto_{\mathbb{1}} = +\infty$, поэтому $q_k(x, e) = 0$ при $(x, e) \in \operatorname{epi}(p_k)$ и $q_k(x, e) = +\infty$, если не существует ненулевого порядкового проектора ρ, для которого $\rho p_k(x) \leqslant \rho e$. Легко видеть, что $\operatorname{dom}(\rho q_k) = \operatorname{epi}(\rho p)$ для любого порядкового проектора ρ, следовательно, операторы $q_1, \dots, q_n$ находятся в алгебраическом общем положении и к ним можно применить (1). Остается заметить, что $\mathscr{T}_k \in \partial^a q_k$ лишь в том случае, если $\alpha_k := \mathscr{T}_k(0, \cdot) \geqslant 0$ и $T_k \in \partial^a(\alpha_k \circ p_k)$, где $T_k := (\cdot, 0)$. $\triangleright$

Используя технические приемы, развитые во второй и четвертой главах, из теоремы Моро — Рокафеллара можно вывести алгебраические варианты всех полученных ранее формул субдифференцирования. В следующих двух пунктах ограничимся выводом нескольких формул, которые необходимы для целей данного и следующего параграфов.

5.5.4. Принято говорить, что выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если в общем положении находятся преобразования Хёрмандера этих операторов $H(f_1), \dots, H(f_n)$. Напомним, что преобразование Хёрмандера $H(f) : X \times \mathbb{R} \to E^\star$ выпуклого оператора $f : X \to E^\star$ вводится формулой

$$H(f) : (x,t) \mapsto \begin{cases} tf(x/t), & \text{если } t > 0, \\ +\infty, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Преобразование Юнга — Фенхеля $f^* : L(X,E) \to \overline{E}$ отображения $f : X \to E^\star$ определяется так же, как и в 4.1.1:

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) : \; x \in X\} \quad (T \in L\,(X,E)).$$

Только теперь супремум вычисляется в $\overline{E}$. Непосредственно проверяется, что $\pi f^*(T) = (\pi f)^*(\pi T)$ для $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $T \in L(X,E)$. Отсюда вытекает, в частности, что если $\pi T = \pi S$ для некоторых $S, T \in L(X,E)$, то $\pi f^*(T) = \pi f^*(S)$. Заметим также, что если $T \in \operatorname{dom}(\pi f)^*$, то $\pi^\perp T = 0$.

(1) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 + \, \dots + f_n)^* = f_1^* \oplus \dots \oplus f_n^*.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \operatorname{dom}(\pi(f_1 + \, \dots + f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_i \in L(X,E)$ $(i := 1, \dots, n)$ такие, что

$$T = T_1 + \, \dots + T_n,$$
$$\pi(f_1 + \, \dots + f_n)^*(T) = \pi f_1^*(T_1) + \, \dots + \pi f_n^*(T_n).$$

$\lhd$ Вновь ограничимся случаем $n = 2$. Если $f := f_1 + f_2$ и $T = T_1 + T_2$, то непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$f^*(T) \leqslant f^*(T_1) + f^*(T_2).$$

Отсюда, в частности, видно, что если $f^*(T) = (e, \rho)$, то $\{+\} \propto_\rho = \rho f^*(T) = \rho f^*(T_1) + \rho f^*(T_2)$. Поэтому остается доказать утверждение о точности формулы.

Пусть $T \in \operatorname{dom}(\pi f^*)$ и $e := \pi f^*(T) = (\pi f)^*(\pi T)$. Можем считать при этом, что $\pi T = T$. Тогда $t(\pi f)(x/t) \geqslant Tx - te$ $(x \in X,\, t \in \mathbb{R})$, стало быть, оператор $\mathscr{T} \in L(X \times \mathbb{R}, E)$, действующий по правилу $\mathscr{T} : (x,t) \mapsto Tx - te$, входит в $\partial H(f)$. Согласно (1) существуют операторы $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 \in L(X \times \mathbb{R}, E)$ такие, что $\mathscr{T}_i \in \partial H(\pi f_i)$ и $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2$, так как $H(\pi f) = H(\pi f_1) + H(\pi f_2)$. Положим $T_i := \mathscr{T}_i(\cdot, 0)$ и $e_i := \mathscr{T}_i(0,1)$ $(i := 1, 2)$. Тогда $f_i^*(T_i) \leqslant e_i$ и $e = e_1 + e_2$, что и требовалось. $\rhd$

(2) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^* \rightleftharpoons \inf \left\{ \bigoplus_{l=1}^{n} (\alpha_l \circ f_l)^* : \ \alpha_l \in \mathrm{Orth}(E)^+, \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_l = I_E \right\}.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \mathrm{dom}(\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_l \in L(X, E)$ и ортоморфизмы $\alpha_l \in \mathrm{Orth}(E)$ $(l := 1, \dots, n)$ такие, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*(T) = \pi(\alpha_1 f_1)^*(T_1) + \ldots + \pi(\alpha_n f_n)^*(T_n).$$

$\lhd$ Устанавливается по той же схеме, что и в 4.1.5 при использовании (1) и 5.5.3 (2). $\rhd$

5.5.5. Определим алгебраический ε-субдифференциал оператора $f : X \to E^\star$ в точке $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ формулой (ср. 3.2.1)

$$\partial^a_\varepsilon f(x_0) := \{T \in L\,(X, E) : Tx - Tx_0 \leqslant f(x) - f(x_0) + \varepsilon \quad (x \in X)\}.$$

(1) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то для любых $x_0 \in \mathrm{dom}(f_1 + \ldots + f_n)$ и $0 \leqslant \varepsilon \in E$ справедлива формула*

$$\partial^a_\varepsilon (f_1 + \ldots + f_n)(x_0) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \dots, \varepsilon_n \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \varepsilon}} \partial^a_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \ldots + \partial^a_{\varepsilon_n} f_n(x_0).$$

$\lhd$ Выводится из (2) так же, как и 4.2.7. $\rhd$

Как и раньше в 4.2.5–4.2.7 при $\varepsilon = 0$ обозначаем $\partial^a f(x_0) := \partial^a_0 f(x_0)$ и получаем следующее утверждение.

(2) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то для любой точки $x_0 \in \mathrm{dom}(f_1 + \ldots + f_n)$ справедлива формула*

$$\partial^a (f_1 + \ldots + f_n)(x_0) = \partial^a f_1(x_0) + \ldots + \partial^a f_n(x_0).$$

(3) *Теорема о сэндвиче.* *Пусть $f, g : X \to E^\star$ — выпуклые операторы, находящиеся в общем положении. Если $f(x) + g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, то существует аффинный оператор $A : X \to E$ такой, что*

$$-g(x) \leqslant Ax \leqslant g(x) \quad (x \in X).$$

$\lhd$ По условию $(f + g)^*(0) \leqslant 0$. В силу 5.5.3 (2) найдутся операторы $S, T \in L(X, E)$, для которых $0 = T + S$ и $f^*(S) + g^*(T) \leqslant 0$. Отсюда $-g^*(-S) \leqslant f^*(S)$. Теперь если $-g^*(-S) \leqslant -e \leqslant f^*(S)$, то аффинный оператор A, определяемый формулой $Ax := Sx - e$, будет искомым. $\rhd$

5.5.6. Обозначим символом $\Gamma(X, E)$ множество всех полунепрерывных снизу выпуклых операторов из X в $E^\star$. Ясно, что $\Gamma(X, E)$ — это A-коническая полурешетка при $A = \mathrm{Orth}(E)$, см. 1.5.1. Пусть V — решеточно нормированное пространство над E. Отображение $f : V \to E^\star$ называют полунепрерывным снизу в точке $v_0 \in V$, если для любого $0 \leqslant e \in E$, $e \geqslant |v_0|$, выполняется равенство

$$f(v_0) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \{ f(v) : \ v \in V, \ |v - v_0| \leqslant \varepsilon e \}.$$

Можно показать, что если в E имеется порядковая единица $\mathbb{1}$, то полунепрерывность снизу f в точке v_0 равносильна равенству

$$f(v_0) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{ f(v) : \ v \in V, \ |v - v_0| \leqslant \varepsilon \mathbb{1} \}.$$

Скажем, что f полунепрерывно снизу, если оно полунепрерывно снизу в любой точке $v_0 \in V$. Пусть $\Gamma_h(V, E)$ обозначает множество полунепрерывных снизу выпуклых операторов $f : V \to E^\star$, удовлетворяющих следующему дополнительному условию A-однородности: для любых $u, v \in V$ и $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ равенство $\pi u = \pi v$ влечет $\pi f(u) = \pi f(v)$. Легко видеть, что $\Gamma_h(V, E)$ также A-коническая полурешетка.

(1) *Для произвольного расширенного K-пространства E отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ служит полулинейным изоморфизмом A-конических полурешеток $\Gamma(X, E)$ и $\Gamma_h(E(X), E)$, сохраняющим точные верхние границы конечных множеств. То же самое отображение осуществляет изоморфизм между пространствами Банаха — Канторовича $L_A(X, E)$ и $L_b(E(X), E)$.*

◁ Аддитивность указанного отображения очевидна, а равенство $\widetilde{\alpha f} = \alpha\widetilde{f}$ выводится непосредственно из определений с использованием порядковой непрерывности ортоморфизмов и их перестановочности с порядковыми проекторами. Остальные утверждения, за исключением, быть может, сюръективности, легко следуют из 5.1.10 и 5.1.11. Сюръективность следует из того, что $E_0(X)$ r-плотно в $E(X)$, см. 5.1.11. В самом деле, если $g \in \Gamma_h(E(X), E)$ и $f(x) := f(x)$ $(x \in X)$, то $f \in \Gamma(X, E)$ и $g = \widetilde{f}$. Последнее равенство выводится из A-однородности и полунепрерывности оператора g. ▷

В силу 5.5.2 (1) пространство $L_A(X, E)$ можно отождествлять с пространством вектор-функций $E_w^*(X')$. Ограничение отображения $f^* : L(X, E) \to E$ на подпространство $E_w^*(X')$ мы будем обозначать тем же символом, так что

$$f^*(v) := \sup\{\langle x,\, v\rangle - f(x) :\; x \in X\} \quad (v \in E_w^*(X')).$$

Аналогичным образом, отождествив согласно 5.5.2 (2) пространства $L_b(E(X), E)$ и $E_w^*(X')$, для отображения $g : E(X) \to E^\star$ обозначим

$$g^*(v) := \sup\{\langle u,\, v\rangle - g(u) :\; u \in E(X)\} \quad (v \in E_w^*(X')).$$

(2) *Для любого полунепрерывного снизу выпуклого оператора $f : X \to E^\star$ выполняется $f^*(v) = (\widetilde{f})^*(v)$ $(v \in E_w^*(X'))$.*

◁ Обозначим $g := \widetilde{f}$ и возьмем $v \in E_w^*(X')$. Очевидно, что $f^*(v) \leqslant g^*(v)$. Если $u_0 \in E_0(X)$ имеет вид $u_0 = \sum \pi_\xi x_\xi$, то

$$\langle u_0, v\rangle - \widetilde{f}(u_0) = \sum_\xi \pi_\xi\bigl(\langle x_\xi, v\rangle - f(x_\xi)\bigr) \leqslant f^*(v).$$

Для произвольного $u \in E(X)$ будет

$$\langle u, v\rangle - \widetilde{f}(u) = \inf_{\varepsilon>0} \sup\left\{\langle u', v\rangle - \tilde{f}(u') :\, u' \in E_0(X),\ \bigl|u - u'\bigr| \leqslant \varepsilon e\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\varepsilon>0} \sup\left\{f^*(v) :\, u' \in E_0(X),\ \bigl|u - u'\bigr| \leqslant \varepsilon e\right\} \leqslant f^*(v). \ ▷$$

(3) *Если E — расширенное K-пространство, то отображение $f \mapsto f^*$ служит биекцией между $\Gamma(X, E)$ и $\Gamma_h(E(X'), E)$, а также между $\Gamma_h(E(X), E)$ и $\Gamma_h(E(X'), E)$.*

◁ Так же, как и в 4.3.8 и 4.3.9 устанавливается, что выпуклый оператор f полунепрерывен в том и только в том случае, если $f = f^{**}$. Остальное следует из (1), (2) и 5.5.3 (3). ▷

5.5.7. Пусть $f : X \to E^{\star}$ — полунепрерывный снизу выпуклый оператор и $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Обозначим символом $\partial_\varepsilon^o f(x_0)$ ту часть $\partial_\varepsilon^a f(x_0)$, которая состоит из операторов с абстрактной нормой, т. е. $\partial_\varepsilon^o f(x_0) := \partial_\varepsilon^a f(x_0) \cap L_A(X, E)$.

(1) *Оператор $T \in L_A(X, E)$ входит в субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$ в том и только в том случае, если $\widetilde{T} \in \partial_\varepsilon \tilde{f}(x_0)$.*

$\lhd$ Если $T \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ и $z := \sum \pi_\xi x_\xi \in E_0(X)$, то для каждого ξ имеем

$$\pi_\xi T x_\xi - \pi_\xi T x_0 \leqslant \pi_\xi f(x_\xi) - \pi_\xi f\,(x_0) + \varepsilon.$$

Суммируя это неравенство по ξ, получим

$$\widetilde{T} z - \widetilde{T} x_0 \leqslant \tilde{f}(z) - f(x_0) + \varepsilon.$$

Теперь для произвольного $u \in E(X)$ справедливы соотношения

$$\widetilde{T} u - \widetilde{T} x_0 = \liminf_{\substack{z \in E_0(X)\\ z \to u}} (\widetilde{T} u - \widetilde{T} x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \liminf_{\substack{z \in E_0(X)\\ z \to u}} (\tilde{f}(z) - \tilde{f}\,(x_0)) + \varepsilon = \tilde{f}(u) - \tilde{f}(x_0) + \varepsilon.$$

Значит, $T \in \partial_\varepsilon \tilde{f}(x_0)$. Обратное утверждение тривиально. $\rhd$

(2) Доказанное утверждение дает повод к следующему определению. Оператор $T \in L_A(X, E)$ называется обобщенным ε-*субградиентом выпуклого оператора* $f : X \to E^{\star}$ в точке $z \in E(X)$, если $\widetilde{T} \in \partial_\varepsilon^a \tilde{f}(z)$. Обозначим через $\partial_\varepsilon^o f(z)$ множество всех обобщенных ε-субградиентов f в точке z:

$$\partial_\varepsilon^o f(z) := \{T \in L_A(X, E) :\ \widetilde{T} \in \partial_\varepsilon^a \tilde{f}(z)\} =$$
$$= \{T \in L_A(X, E) :\ (\forall x \in X)\, \widetilde{T} z - T x \leqslant \tilde{f}(z) - f(x) + \varepsilon\}.$$

Как обычно, $\partial^o f(z)$ совпадает по определению с $\partial_\varepsilon^o f(z)$ при $\varepsilon = 0$.

5.5.8. Говорят, что отображение $f : X \to E^{\star}$ удовлетворяет *условию Липшица* (или что оно *липшицево*) *на множестве* $U \subset X$, если $U \subset \mathrm{dom}(f)$ и можно подобрать элемент $L \in E$ (называемый *липшицевой константой*) так, что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\| \quad (x, y \in U).$$

Отображение $f : X \to E^\star$ называют *локально липшицевым на множестве* $U \subset X$, если оно липшицево в некоторой окрестности любой точки из U.

Пусть теперь Z — решеточно нормированное пространство над E, и рассмотрим отображение $f : Z \to E^\star$. Скажем, что f *липшицево на множестве* $U \subset Z$, если $U \subset \operatorname{dom}(f)$ и можно подобрать ортоморфизм $L \in \operatorname{Orth}(E)$ (также называемый липшицевой константой), для которого

$$|f(z) - f(z')| \leqslant L \,|\!| x - y |\!| \quad (z, z' \in U).$$

(1) *Выпуклый оператор* $f : X \to E^\star$ *будет локально липшицевым на множестве* $\operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$ *в том и только в том случае, если он порядково ограничен сверху на некотором шаре, целиком содержащемся в множестве* $\operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$.

$\lhd$ Необходимость очевидна; докажем достаточность. Пусть выпуклый оператор $f : X \to E^\star$ порядково ограничен сверху элементом $e \in E^+$ на шаре $x_0 + \varepsilon B \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$, где B — единичный шар пространства X. Заменив, если необходимо, f на оператор $x \mapsto f(x_0 + x) - f(x_0)$, можем считать, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Если $x \in \varepsilon B$, то $-x \in \varepsilon B$, стало быть,

$$0 = f(0) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(-x)\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x),$$

и получаем $-e \leqslant -f(-x) \leqslant f(x)$. Итак, $f(\varepsilon B) \subset [-e, e]$, т. е. f порядково ограничен на шаре εB. Для произвольного $u \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$ подберем $0 < \delta < 1$ так, чтобы $x := \delta^{-1}u \in \operatorname{dom}(f)$. Если число $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ таково, что $(1-\delta)\varepsilon' < \varepsilon$, то $V := (1-\delta)\varepsilon' B \subset \varepsilon B$ и $u + V$ — окрестность точки u. При этом для произвольного $v \in V$ будет

$$f(u + v) = f(\delta x + (1-\delta)\varepsilon' z) \leqslant \delta f(x) + (1-\delta) f(\varepsilon' z) \leqslant \delta f(x) + e.$$

Тем самым f ограничен сверху на $u + V$. Ограниченность f на $u + V$ устанавливается повторением начала наших рассуждений.

Итак, для произвольной точки $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что f порядково ограничен в окрестности $x_0 + 2\varepsilon B$, т. е. $f(x_0 + 2\varepsilon B) \subset [-e, e]$ для некоторого элемента $e \in E^+$. Возьмем произвольные $x, y \in V(x_0) := x_0 + \varepsilon B$ и положим $z := y + \varepsilon(y - x)/\|y - x\|$. Тогда

$z \in V(x_0) + \varepsilon B = x_0 + 2\varepsilon B$, стало быть, $f(z) \leqslant e$. Заметим, что справедливо представление $y = (1-\lambda)x + \lambda z$, где $\lambda := \|y-x\|(\varepsilon + \|y-x\|)^{-1}$. Отсюда в силу выпуклости f выводим:

$$f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z) = f(x) + \lambda(f(z) - f(x))$$

и, следовательно,

$$f(y) - f(x) \leqslant \lambda(e - (-e)) = 2e\|y-x\|(\varepsilon + \|y-x\|)^{-1} \leqslant 2e\|y-x\|.$$

Здесь элементы x и y можно поменять местами, поэтому $|f(y) - f(x)| \leqslant 2e\|y-x\|$ для всех $x, y \in V(x_0)$, что и требовалось. $\triangleright$

(2) *Пусть выпуклый полунепрерывный снизу оператор $f : X \to E^{\star}$ удовлетворят условию Липшица на некотором открытом множестве $U \subset X$. Тогда для произвольной вектор-функции $u \in \mathscr{C}(Q, X)$, удовлетворяющей условию $u(q) \in U$ ($q \in \operatorname{dom}(u)$), существует котощее множество $Q(u) \subset Q$ такое, что $\widetilde{f}(\tilde{u})(q) = f_q(u(q))$ при всех $q \in Q(u)$.*

$\triangleleft$ Если $L \in E^{+}$ — липшицева константа функции f на множестве U и $Q_0 := \{q \in Q : |L(q)| < \infty\}$, то функция $f_q : X \to \overline{\mathbb{R}}$ конечна и непрерывна на U для каждого $q \in Q_0$. Это утверждение очевидным образом следует из оценки

$$|f_q(x) - f_q(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|(q) \leqslant L(q)\|x - x_0\|,$$

справедливой для любых $x, x_0 \in U$ и $q \in Q_0$.

Обозначим $e_n := \inf\left\{\tilde{f}(u') : u' \in E_0(X),\ \left|u - u'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}\right\}$. Существуют котощие множества $Q_n \subset Q$ и $Q' \subset Q$ такие, что

$$e_n(q) = \inf\left\{\tilde{f}(u')(q) : u' \in E_0(X),\ \left|u - u'\right| \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}\right\} \quad (q \in Q_n),$$
$$\tilde{f}(u)(q) = \sup_{n \in \mathbb{N}} e_n(q) \quad (q \in Q').$$

Из определения $\widetilde{f}$ (см. 5.1.11) непосредственно видно, что $\widetilde{f}(\tilde{u}')(q) = f_q(u'(q))$ для всех $q \in Q_0 \cap \operatorname{dom}(u')$, если $u' \in E_0(X)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно подобрать $\tilde{u}_n \in E_0(X)$ так, что $\left|\tilde{u} - \tilde{u}_n\right| < (1/n)\mathbb{1}$ и

$e_n \leqslant \widetilde{f}(\tilde{u}_n) \leqslant e_n + (1/n)\mathbb{1}$. Множество $Q'' := \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}(u_n)$ будет котощим.

Если $Q(u) := Q_0 \cap Q' \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n)$, то $Q(u)$ — котощее множество и для каждого $q \in Q(u)$ выполняются равенства

$$\tilde{f}(\tilde{u})(q) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(\tilde{u}_n)(q) = \lim_{n\to\infty} f_q(u_n(q)) = f_q(u_n(q)). \ \rhd$$

5.5.9. (1) *Если выпуклый оператор $f : X \to E^\star$ липшицев в некоторой окрестности точки $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(f)$, то $\partial_\varepsilon^o f(x_0) = \partial_\varepsilon^a f(x_0)$.*

$\lhd$ В самом деле, если оператор f удовлетворяет условию Липшица с константой L на шаре $B(x_0, r)$ и $T \in \partial_\varepsilon^a(x_0)$, то $T(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) + \varepsilon \leqslant L\|x - x_0\| + \varepsilon$ для всех $x \in B(x_0, r)$. Если положить $x := x_0 \pm th$, где $0 < t \in \mathbb{R}$ и $h \in X$, то $\pm Th \leqslant L\|h\| + \varepsilon/t$. Устремив t к нулю, получим, что $|Th| \leqslant L\|h\|$ для всех $h \in B(0, r)$ или $|Th| \leqslant (L/r)\|h\|$ для всех $h \in B(0, 1)$, т. е. $\lvert T\rvert \leqslant L/r$ и $T \in \partial_\varepsilon^o f(x_0)$. Обратное включение очевидно. $\rhd$

(2) *Пусть E — K-пространство с единицей $\mathbb{1}$, $u_0 \in E(X)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть выпуклый полунепрерывный снизу оператор $f : X \to E^\star$ таков, что оператор $\widetilde{f} : mE(X) \to mE^\star$ удовлетворяет условию Липшица с константой L на множестве $U := \{u \in E(X) : \lvert u - u_0\rvert \leqslant \varepsilon\mathbb{1}\}$. Тогда*

$$\partial^a \widetilde{f}(u_0) = \{\widetilde{T} :\ T \in \partial^o f(u_0)\}.$$

$\lhd$ Заметим сначала, что в условиях предложения $|\tilde{f}'(u_0)h| \leqslant L\,\lvert h\rvert$ $(h \in mE(X))$, следовательно, $\partial^a \tilde{f}(u_0) \subset L\partial^a \lvert\cdot\rvert)$. Оператор $h \mapsto \lvert h\rvert$ является A-сублинейным при $A := \operatorname{Orth}(mE)$, стало быть, $\partial^a \tilde{f}(u_0)$ состоит согласно 2.3.15 из A-линейных операторов. Кроме того, каждый оператор $T \in \partial^a \tilde{f}(u_0)$ ограничен и $\lvert T\rvert \leqslant L$. Теперь требуемое вытекает из 5.5.6 (1). $\rhd$

(3) *Пусть выпуклый полунепрерывный снизу оператор $f : X \to E^\star$ удовлетворят условию Липшица на некотором открытом множестве $U \subset X$. Тогда для произвольной вектор-функции $u_0 \in \mathscr{C}(Q, X)$, удовлетворяющей условию $u_0(q) \in U$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$, и любой вектор-функции $v \in \mathscr{C}_w(Q, X)$ включение $\widetilde{v} \in \partial_\varepsilon^o f(\widetilde{u}_0)$ выполняется в том и только в том случае, если существует котощее множество $Q(u_0) \subset Q$ такое, что $v(q) \in \partial_{\varepsilon(q)} f_q(u_0(q))$ для всех $q \in Q(u_0)$.*

$\lhd$ Пусть вхождение $\widetilde{v} \in \partial_\varepsilon^o f(\widetilde{u}_0)$ имеет место для некоторых $u_0 \in \mathscr{C}(Q, X)$ и $v \in \mathscr{C}_w(Q, X)$, причем $u_0(q) \in U$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$. Тогда

$$\langle x, \widetilde{v}\rangle(q) - \langle \tilde{u}_0, \tilde{v}\rangle(q) \leqslant f(x)(q) - \widetilde{f}(\widetilde{u}_0)(q) + \varepsilon(q) \quad (x \in X,\ q \in Q).$$

В соответствии с 5.5.2 (1) и 5.5.7 (2) можно подобрать котощее множество $Q(u_0) \subset \{|\varepsilon| < \infty\}$, на котором выполняются равенства $\widetilde{f}(\tilde{u}_0)(q) = f_q(u_0(q))$, $\langle \tilde{u}_0, \widetilde{v}\rangle(q) = \langle u_0(q), v(q)\rangle$ и $\langle x, \widetilde{v}\rangle(q) = \langle x, v(q)\rangle$. Отсюда $\langle x, v(q)\rangle - \langle u_0(q), v(q)\rangle \leqslant f_q(x) - f_q(u_0(q)) + \varepsilon(q)$ для всех $x \in X$, $q \in Q(u_0)$, что и требовалось. $\rhd$

5.5.10. Рассмотрим теперь экстремальную задачу (P) при следующих предположениях: F — порядково полная банахова решетка, $f : X \to E^\star$ и $g : X \to F^\star$ — полунепрерывные снизу выпуклые операторы, а линейный оператор Λ из банахова пространства X в банахово пространство Y удовлетворяет условию открытости 5.2.1 (д). Одновременно мы будем рассматривать задачу

$$\widetilde{\Lambda} u = y, \quad \widetilde{g}(u) \leqslant 0, \quad \widetilde{f}(u) \to \inf, \qquad (\widetilde{\mathrm{P}})$$

$\widetilde{\Lambda}$ — линейный оператор из $E(X)$ в $E(Y)$, сопоставляющий элементу $\tilde{z} \in E(X)$ элемент $\tilde{u} \in E(Y)$, определяемый равенством $u(q) := \Lambda(z(q))$ ($q \in \mathrm{dom}(z)$). Будем предполагать, что f и g удовлетворяют условию Липшица в окрестности множества $\mathrm{im}(z_0)$ для некоторого $\tilde{z}_0 \in E(X)$. Как видно, допустимый элемент $z \in E(X)$ задачи $(\widetilde{\mathrm{P}})$ определяется условиями $\widetilde{g}(z) \leqslant 0$ и $\widetilde{\Lambda} z = y$. Элемент $u_0 \in E(X)$ называют *обобщенным ε-решением* задачи (P), если он является допустимым элементом для задачи $(\widetilde{\mathrm{P}})$ и $\tilde{f}(u_0) \leqslant f(x) + \varepsilon$ для всех допустимых элементов x задачи (P). Понятно, что u_0 будет обобщенным ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ тогда и только тогда, если $0 \in \partial^o_\varepsilon f(u_0)$.

(1) *Допустимый элемент будет ε-решением задачи* $(\widetilde{\mathrm{P}})$ *тогда и только тогда, когда он служит обобщенным ε-решением задачи* (P).

$\lhd$ Пусть $\tilde{z}_0$ — обобщенное ε-решение задачи (P). Допустимый элемент $\tilde{z}$ задачи (P) можно равномерно приблизить элементами вида $\sum \pi_\xi x_\xi$, причем x_ξ можно выбрать из $\mathrm{im}(z_0)$, значит, $\tilde{f}(z_0) \leqslant \tilde{f}(z)$. Остается заметить, что допустимое множество задачи (P) r-замкнуто и d-замкнуто. $\rhd$

(2) *Пусть E — расширенное K-пространство. Если линейный оператор $T : E(Y) \to E$ удовлетворяет условию $T \circ \widetilde{\Lambda} \in L_b(E(X), E)$, то существует оператор $S \in L_A(Y, E)$ такой, что $T \circ \widetilde{\Lambda} = \widetilde{S} \circ \widetilde{\Lambda}$.*

◁ Обозначим $Y_0 := \operatorname{im}(\Lambda)$, и пусть P — ограниченный линейный проектор на Y_0, а T_0 — ограничение T на $E(Y_0)$. Тогда $\operatorname{im}(\widetilde{\Lambda}) = E(Y_0)$. Возьмем произвольный порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$. Если $z = \widetilde{\Lambda}u \in E(Y_0)$, то

$$\pi T_0 z = \pi T_0(\widetilde{\Lambda}u) = \pi T \circ \widetilde{\Lambda}u = T(\pi\widetilde{\Lambda}u) = T_0\pi z.$$

В силу открытости Λ единичный шар пространства Y_0 содержится в образе относительно Λ некоторого шара в X радиуса r. Отсюда видно, что если $z \in E(Y_0)$ и $|z| \leqslant \mathbb{1}$, то $z = \tilde{\Lambda}u$ для некоторого $u \in E(X)$, $|u| \leqslant r\mathbb{1}$. Таким образом, $|T_0 z| \leqslant \left|T_0 \circ \widetilde{\Lambda}\right| \cdot |u| \leqslant \alpha(r\mathbb{1})$, где $\alpha := \left|T \circ \widetilde{\Lambda}\right| \in \operatorname{Orth}(E)$, следовательно, $|T_0| \leqslant r\alpha$ и $T_0 \in \Gamma_h(E(X), E)$. Согласно 5.5.6 (3) $T_0 = \widetilde{S}_0$ для некоторого $S_0 \in L_A(Y_0, E)$, см. 5.5.6 (1). Положив $S := S_0 \circ P$, получим требуемый оператор $S \in L_A(Y, E)$. ▷

5.5.11. Приведем теперь признаки обобщенной ε-оптимальности в задаче (P). В следующих двух теоремах f, g и Λ удовлетворяют предположениям из 5.5.10. Будем также считать, что сублинейный оператор $p : F \to E$, фигурирующий в условии квазирегулярности (см. 5.2.1 (в, г)), порядково ограничен на единичном шаре, т. е. $\sup\{|p(x)| : x \in F,\ \|x\| \leqslant 1\}$ существует в E.

(1) *Теорема.* *Допустимая точка u_0 является обобщенно ε-оптимальной в квазирегулярной задаче* (P) *в том и только в том случае, если для некоторых $\alpha \in \operatorname{Orth}(E)$, $\beta \in L_A(F, E)$ и $\gamma \in L_A(Y, E)$ совместна система условий*

$$\alpha \geqslant 0, \quad \ker(\alpha) = \{0\}, \quad \beta \geqslant 0,$$
$$0 \leqslant \nu,\ \lambda \in E, \quad \nu + \lambda \leqslant \alpha\varepsilon + \beta g(u_0),$$
$$0 \in \partial^o_\nu(\alpha \circ f)(u_0) + \partial^o_\lambda(\beta \circ g)(u_0) + \gamma \circ \Lambda.$$

◁ Пусть u_0 — обобщенный ε-оптимум в задаче (P). Тогда согласно 5.5.10 (1) u_0 будет ε-оптимальным в задаче $(\widetilde{\mathrm{P}})$. Повторив рассуждения из 5.2.8 (2), 5.2.9 и 5.3.2, приходим к требуемым условиям с той лишь разницей, что в субдифференциальном включении фигурируют алгебраические субдифференциалы и $\gamma \in L(Y, E)$. Остается привлечь 5.5.9 (2) и 5.5.10 (2). ▷

(2) *Теорема.* *Пусть вектор-функция $u_0 \in \mathscr{C}(Q, X)$ такова, что $\tilde{u}_0$ — допустимая точка задачи $(\widetilde{\mathrm{P}})$. Тогда u_0 является обобщенным ε-решением в квазирегулярной задаче (P) в том и только в том случае, если существуют котощее множество $Q(\mathrm{P})$, скалярные функции $\alpha, \nu, \lambda \in E \subset C_\infty(Q)$ и вектор-функции $\beta \in \mathscr{C}_w(F')$ и $\gamma \in \mathscr{C}_w(Y')$, для которых совместна следующая система условий:*

$$
\begin{gathered}
0 < \alpha(q) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta(q), \quad 0 \leqslant \nu(q), \quad 0 \leqslant \lambda(q), \\
\nu(q) + \lambda(q) \leqslant \alpha(q)\varepsilon(q) + \langle g(u_0), \beta(q) \rangle, \\
0 \in \alpha(q)\partial_{\nu(q)} f\,(u_0(q)) + \partial_{\lambda(q)} \langle g(\cdot), \beta(q) \rangle (u_0(q)) + \Lambda' \gamma(q).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ Выводится из (1) с помощью 5.5.9 (2). $\rhd$

5.6. Существование обобщенных решений

Здесь устанавливается векторнозначный вариант теоремы Экланда, затем даются некоторые его применения к изучению обобщенных решений и ε-субдифференциалов. Всюду в этом параграфе E — расширенное K-пространство.

5.6.1. *Теорема.* *Пусть f — полунепрерывное снизу отображение из X в $E^\star$. Допустим, что f ограничено снизу и для некоторых $0 < \varepsilon \in E$ и $x_0 \in X$ справедливо неравенство $f(x_0) \leqslant \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$. Тогда для любого обратимого $0 \leqslant \lambda \in E$ существует $z_\lambda \in E(X)$ такой, что*

$$
\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant f(x_0), \quad |z_\lambda - x_0| \leqslant \lambda,
$$

$$
\tilde{f}(z_\lambda) = \inf\{f(x) + \lambda^{-1}\varepsilon\,|z_\lambda - x| : \ x \in X\}.
$$

$\lhd$ Пусть π — проектор на компоненту $\{\varepsilon\}^{dd}$, и допустим, что для отображения πf требуемое утверждение доказано, т. е. существует $z'_\lambda \in E(X)$ такой, что $\pi\tilde{f}(z'_\lambda) \leqslant \pi f(x_0)$, $\pi\,|z'_\lambda - x_0| \leqslant \lambda$ и $\pi\tilde{f}(z'_\lambda)$ совпадает с инфимумом значений $\pi\tilde{f}(x) + \lambda^{-1}\varepsilon\pi\,|z'_\lambda - x|$ при $x \in X$. Тогда элемент $\pi z'_\lambda + \pi^d x_0$ удовлетворяет всем необходимым условиям, так как $\pi^d f(x_0) = \inf\{\pi^d f(x) : x \in X\}$. Итак, в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что ε — порядковая единица в E. Допустим теперь, что $f(x_0) = (e, \pi) \in E^\star$ и для отображения $\pi^d f$ установлено существование элемента $z'_\lambda \in E(X)$ с указанными выше свойствами. Тогда элемент $\pi^d z'_\lambda + \pi x_0$ будет искомым. Тем самым можно считать, не умаляя общности, что $f(x_0) \in E$.

Определим по индукции последовательность (u_n) в пространстве $E(X)$. Начнем с $u_0 := x_0$ и допустим, что член u_n уже определен. Если

$$\tilde{f}(z) \geqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon \, |u_n - z|$$

для всех $z \in E(X)$, то положим $u_{n+1} := u_n$. В противном случае для некоторого элемента $z \in E(X)$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ будет

$$\pi\tilde{f}(z) \leqslant \pi\tilde{f}(u_n) - \pi\lambda^{-1}\varepsilon \, |u_n - z| \, .$$

Элемент $v := \pi z + \pi^d u_n$ в силу 5.1.11 (1) удовлетворяет соотношениям

$$\pi\tilde{f}(z) = \pi\tilde{f}(v), \quad \pi^d\tilde{f}(v) = \pi^d\tilde{f}(u_n);$$

значит,

$$\tilde{f}(v) \leqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon \, |u_n - v| \, .$$

Множество всех $v \in E(X)$, удовлетворяющее последнему неравенству, обозначим через V_n. Положим

$$e := \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}(u_n) - \inf\{\tilde{f}(v) : \, v \in V_n\}\Big) + \frac{1}{2^n}\mathbb{1}.$$

Существуют разбиение единицы (π_ξ) в $\mathfrak{Pr}(E)$ и семейство (v_ξ) в V_n такие, что

$$\pi_\xi\tilde{f}(v_\xi) \leqslant \inf \, \tilde{f}(V_n) + e,$$

ибо $e \geqslant (1/2)^n\mathbb{1}$. Если $u_{n+1} := \sum \pi_\xi v_\xi$, то $\pi_\xi\tilde{f}(u_{n+1}) = \pi_\xi\tilde{f}(v_\xi)$, поэтому

$$\tilde{f}(u_{n+1}) \leqslant \inf f(V_n) + e$$

и

$$\tilde{f}(u_{n+1}) \leqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon \, |u_{n+1} - u_n| \, .$$

В частности, $u_{n+1} \in V_n$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}\varepsilon \, |u_{n+k} - u_n| &\leqslant \lambda^{-1}\varepsilon \, |u_{n+1} - u_n| + \ldots + \lambda^{-1}\varepsilon \, |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \leqslant \\ &\leqslant \tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u_{n+1}) + \ldots + \tilde{f}(u_{n+k-1}) - \tilde{f}(u_{n+k}) = \\ &= \tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u_{n+k}).\end{aligned}$$

Последовательность $(\tilde{f}(u_n)) \subset E$ убывает и ограничена снизу, поэтому

$$o\text{-}\lim_{n,k\to\infty} (\tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u_{n+k})) = 0.$$

Но тогда также $o\text{-}\lim_{n,k\to\infty} |u_{n+k} - u| = 0$. В силу o-полноты пространства $E(X)$ существует элемент $z_\lambda \in E(X)$, для которого будет равенство $o\text{-}\lim_{n\to\infty} |u_n - z_\lambda| = 0$. В силу полунепрерывности снизу отображения $\tilde{f}$ имеем

$$\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \sup \inf_{n\geqslant m} \tilde{f}(u_n) = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(u_n).$$

Далее, если в неравенстве

$$\lambda^{-1}\varepsilon\, |u_n - u_{n+k}| \leqslant \tilde{f}(u_n) - \tilde{f}(u_{n+k})$$

положим $n = 0$ и перейдем к o-пределу при $k \to \infty$, то получим

$$\lambda^{-1}\varepsilon\, |x_0 - z_\lambda| \leqslant f(x_0) - \inf_n \tilde{f}(u_n) \leqslant f(x_0) - \inf\{\tilde{f}(v) : v \in E(X)\} + \varepsilon.$$

Обратимость элемента ε дает теперь, что $|z_\lambda - x_0| \leqslant \lambda$. Для каждого $x \in X$ обозначим

$$\pi_x := \inf\{\pi \in \mathfrak{Pr}(E) : \pi^d x = \pi^d z_\lambda\}.$$

Заметим, что $x \neq z_\lambda$ лишь в том случае, когда $\pi_x \neq 0$. Кроме того, $\pi_x^d x = \pi_x^d z_\lambda$. Покажем, что для любых $x \neq z_\lambda$ и $0 < \pi \leqslant \pi_x$ будет

$$\pi\tilde{f}(z_\lambda) < \pi f(x) + \lambda^{-1}\varepsilon\, |z_\lambda - x|.$$

Если это не так, то при подходящих $z_\lambda \neq x \in X$ и $0 < \pi \leqslant \pi_x$ выполняется

$$\pi\tilde{f}(z_\lambda) - \pi\lambda^{-1}\varepsilon\, |z_\lambda - x| \geqslant \pi f(x).$$

Но тогда, как легко видеть, для элемента $w := \pi x + \pi^d z_\lambda$ верно $\tilde{f}(w) \leqslant \tilde{f}(z_\lambda) - \varepsilon\lambda^{-1}\, |z_\lambda - w|$. Поскольку $\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon\, |z_\lambda - u_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\tilde{f}(w) \leqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon(\,|z_\lambda - u_n| + |w - z_\lambda|\,) \leqslant \tilde{f}(u_n) - \lambda^{-1}\varepsilon\, |u_n - w|.$$

Следовательно, $w \in V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, выбор u_{n+1} производится так, что

$$2\tilde{f}(u_{n+1}) - \tilde{f}(u_n) \leqslant \inf \tilde{f}(V_n) + \frac{1}{2^n}\mathbb{1} \leqslant f(w) + \frac{1}{2^n}\mathbb{1}.$$

Переходя здесь к r-пределу при $n \to \infty$ и учитывая полунепрерывность снизу отображения $\tilde{f}$, получаем $\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant o\text{-}\lim \tilde{f}(u_n) \leqslant \tilde{f}(w)$. Привлекая определение w, приходим к противоречию:

$$\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \tilde{f}(w) \leqslant \tilde{f}(z_\lambda) - \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - x| < \tilde{f}(z_\lambda).$$

Итак, для любого $x \in X$ можем написать

$$\begin{gathered}\tilde{f}(z_\lambda) = \pi_x \tilde{f}(z_\lambda) + \pi_x^d \tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \\ \leqslant \pi_x f(x) + \pi_x \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - x| + \pi_x^d f(x) \leqslant f(x) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - x| \,.\end{gathered}$$

Тем самым $\tilde{f}(z_\lambda)$ есть точная нижняя граница множества значений отображения $f(x) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - x|$ $(x \in X)$. $\triangleright$

5.6.2. Сделаем несколько дополнительных замечаний к установленному факту. Мы будем считать, что выполнены условия теоремы 5.6.1. Тогда имеет место несколько более сильное утверждение.

(1) *Существует $z_\lambda \in E(X)$ такой, что отображение $z \mapsto \tilde{f}(z) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - z|$ достигает своего наименьшего на всем $E(X)$ значения в точке z_λ.*

$\triangleleft$ В самом деле, если $z := \sum \pi_\xi x_\xi$, то

$$\pi_\xi \tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \pi_\xi f(x_\xi) + \pi_\xi \lambda^{-1}\varepsilon \,\big|z_\lambda - x_\xi\big|$$

для всех ξ, и суммирование по ξ приводит к неравенству

$$\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \tilde{f}(z) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - z| \,.$$

Для произвольного $z \in E(X)$ нужно осуществить предельный переход и воспользоваться полунепрерывностью снизу оператора $\tilde{f}$. $\triangleright$

(2) *Вектор-функция* z_λ *обладает также следующим свойством: для любого* $z \in E(X)$ *и для каждого* $0 < \pi \leqslant \pi_z$, *где* $\pi_z := \sup\{\rho \in \mathfrak{Pr}(E) : \rho^d z_\lambda = \rho^d z\}$, *выполняется неравенство*

$$\pi \tilde{f}(z_\lambda) < \pi \tilde{f}(z) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - z|\,.$$

$\lhd$ Если $z = x \in X$, то это утверждение содержится в доказательстве теоремы 5.6.1. Если $z = \sum \pi_\xi x_\xi$, то $\pi_z \circ \pi_{x_\xi} \leqslant \pi_{x_\xi}$ для каждого ξ, значит, для $0 < \rho \leqslant \pi_z$ будет $\rho_\xi = \rho \circ \pi_{x_\varepsilon} \leqslant \pi_{x_\xi}$ и

$$\rho_\xi \pi \tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \rho_\xi f(x_\xi) + \rho_\xi \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - x_\xi|\,.$$

Суммирование по ξ дает

$$\rho \tilde{f}(z_\lambda) \leqslant \rho f(z) + \lambda^{-1}\varepsilon \,|z_\lambda - z|\,.$$

Для произвольного $z \in E(X)$ нужно заметить, что существуют такие разбиение единицы (π_ξ) и число $\delta > 0$, что для всех $u \in E_0(X)$ из $|u - z| < \delta \mathbb{1}$ следует $\pi_{\pi_\xi u} = \pi_{\pi_\xi z}$ для всех ξ. $\rhd$

5.6.3. *Теорема.* *Пусть отображение* $f : X \to E^\star$ *полунепрерывно снизу, ограничено снизу и* $f \not\equiv +\infty$. *Тогда для любого* $0 < \varepsilon \in E$ *существует* $z_\varepsilon \in E(X)$ *такой, что*

$$\pi_\varepsilon \tilde{f}(z_\varepsilon) \leqslant \inf\{\pi_\varepsilon f(x) : \ x \in X\} + \varepsilon,$$

$$\pi_\varepsilon \tilde{f}(z_\varepsilon) = \inf\{\pi_\varepsilon f(x) + \varepsilon \,|z_\varepsilon - x| : \ x \in X\},$$

где π_ε *— проектор на компоненту* $\{\varepsilon\}^{dd}$.

$\lhd$ Без ограничения общности можно предположить, что $\pi_\varepsilon = I_E$, т. е. ε — порядковая единица в E. Тогда существуют разбиение единицы (π_ξ) в $\mathfrak{Pr}(E)$ и семейство (x_ξ) в X такие, что $\pi_\xi f(x_\xi) \leqslant \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \varepsilon$ (см. 5.1.7).

По теореме 5.6.1 (где взято $\lambda := \mathbb{1}$) для каждого x_ξ существует элемент $z_\xi \in E(X)$, который удовлетворяет соотношениям

$$\pi_\xi \tilde{f}(z_\xi) \leqslant \pi_\xi f(x_\xi), \quad \pi_\xi \,|z_\xi - x_\xi| \leqslant \mathbb{1},$$

$$\pi_\xi \tilde{f}(z_\xi) = \inf\{\pi_\xi f(x) + \varepsilon \pi_\xi \,|z_\xi - x| : \ x \in X\}.$$

Положим $z_\varepsilon := \sum \pi_\xi z_\xi$ и просуммируем полученные соотношения по ξ. Поскольку $\pi_\xi z_\varepsilon = \pi_\xi z_\xi$, то $\pi_\xi \tilde{f}(z_\xi) = \pi_\xi \tilde{f}(z_\xi)$ (см. 5.5.6 (1)). Значит, $\tilde{f}(z_\varepsilon) \leqslant \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$ и

$$\tilde{f}(z_\varepsilon) = \inf\{f(x) + \varepsilon \,|z_\varepsilon - x| : \ x \in X\},$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

5.6.4. *Теорема.* *Пусть $f : X \to E^\star$ — полунепрерывный снизу выпуклый оператор. Допустим, что для некоторых $x_0 \in X$, $0 \leqslant \varepsilon \in E$ и $T \in \mathscr{L}_0(X, E)$ выполняется $T \in \partial_\varepsilon f(x_0)$. Тогда для любого обратимого $0 \leqslant \lambda \in E$ существуют $z_\lambda \in E(X)$ и $S_\lambda \in \mathscr{L}_0(X, E)$ такие, что*

$$|z_\lambda - x_0| \leqslant \lambda, \quad |S_\lambda - T| \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon; \quad S_\lambda \in \partial^o f(z_\lambda).$$

$\triangleleft$ Положим $g := f - T$ и заметим, что если $T \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, то $0 \in \partial_\varepsilon g(x_0)$, т. е.

$$g(x_0) \leqslant \inf_{x \in X} \{g(x)\} + \varepsilon.$$

Отображение g удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому для обратимого $\lambda \in E$ существует элемент $z_\lambda \in E(X)$ такой, что

$$\tilde{g}(z_\lambda) \leqslant g(x_0), \quad |z_\lambda - x_0| \leqslant \lambda,$$

$$\tilde{g}(z_\lambda) = \inf \{g(x) + \lambda^{-1}\varepsilon \, |z_\lambda - x| : \ x \in X\}.$$

Последнее соотношение равносильно включению

$$0 \in \partial^a \big(\tilde{g} - \lambda^{-1}\varepsilon \, \big|z_\lambda - (\cdot)\big|\big)(z_\lambda).$$

По формуле субдифференцирования суммы 5.5.5 (2) существует оператор

$$T_\lambda \in \partial^a \big(\lambda^{-1}\varepsilon \, \big|z_\lambda - (\cdot)\big|\big)(z_\lambda) = \lambda^{-1}\varepsilon \partial^a \big(\big|z_\lambda - (\cdot)\big|\big)(z_\lambda)$$

такой, что $-T_\lambda \in \partial^a \tilde{g}(z_\lambda)$. Легко видеть при этом, что

$$\begin{aligned} \partial^a \big(\big|z_\lambda - (\cdot)\big|\big)(z_\lambda) &= \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X) Tx \leqslant |x|\} = \\ &= \{T \in \mathscr{L}_0(X, E) : |T| \leqslant \mathbb{1}\} = \partial^o \big(\big|z_\lambda - (\cdot)\big|\big)(z_\lambda), \end{aligned}$$

следовательно, $|T_\lambda| \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon$. Заметим теперь, что в силу непрерывности оператора T будет $\tilde{g} = \tilde{f} - \widetilde{T}$, поэтому $-T_\lambda \in \partial^o f(z_\lambda) - T$ или $T - T_\lambda \in \partial^o f(z_\lambda)$. Ясно, что $S_\lambda := T - T_\lambda$ и есть искомый оператор. $\triangleright$

5.6.5. Скажем, что отображение $f : X \to E^\star$ *дифференцируемо по Гато в точке* $z \in E(X)$, если $\tilde{f}(z) \in E$ и существует оператор $T \in L_A(X, E)$ такой, что

$$Th = o\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \frac{\tilde{f}(z + th) - \tilde{f}(z)}{t}$$

для всех $h \in X$. При этом принято обозначать $f'(z) := T$.

Теорема. *Пусть $f : X \to E^\star$ — полунепрерывное снизу и ограниченное снизу отображение. Предположим, что для некоторых $0 < \varepsilon \in E$ и $x_0 \in X$ выполняется $f(x_0) \leqslant \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$. Если для некоторого обратимого $0 < \lambda \in E$ отображение f дифференцируемо по Гато в каждой точке множества $\{z \in E(X) : |z - x_0| \leqslant \lambda\}$, то существует элемент $z_\lambda \in E(X)$ такой, что*

$$|x - z_\lambda| \leqslant \lambda, \quad \tilde{f}(z_\lambda) \leqslant f(x_0), \quad \bigl|f'(z_\lambda)\bigr| \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon.$$

$\lhd$ Отображение f удовлетворяет условиям теоремы 5.6.1, поэтому существует z_λ, для которого $|z_\lambda - x_0| \leqslant \lambda$, $\tilde{f}(z_\lambda) \leqslant f(x_0)$ и

$$f(u) - \tilde{f}(z_\lambda) \geqslant -\lambda^{-1}\varepsilon\, |z_\lambda - u| \quad (u \in E(X)).$$

Положим в этом соотношении $u := z_\lambda + th$. Тогда

$$t^{-1}(\tilde{f}(z_\lambda + th) - \tilde{f}(z_\lambda) \geqslant -\lambda^{-1}\varepsilon\|h\|.$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получим $f'(z_\lambda)h \geqslant -\lambda^{-1}\varepsilon\|h\|$ или, заменив h на $-h$, $f'(z_\lambda)h \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon\|h\|$. Отсюда вытекает, что $\bigl|f'(z_\lambda)\bigr| \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon$. $\rhd$

5.6.6. Установим теперь два предложения, утверждающие, что точки субдифференцируемости и субградиенты полунепрерывного снизу выпуклого оператора образуют достаточно представительные множества.

(1) *Пусть $f : X \to E^\star$ — собственный полунепрерывный снизу выпуклый оператор. Множество вектор-функций $z \in \mathrm{dom}(\tilde{f})$, для которых $\partial^o \tilde{f}(z) \neq$ непусто, является r-плотным в $\mathrm{dom}(\tilde{f})$. Точнее, для любых $\varepsilon > 0$ и $z_0 \in \mathrm{dom}(\tilde{f})$ найдется вектор-функция $z \in \mathrm{dom}(\partial^o \tilde{f})$ такая, что $|z - z_0| \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$.*

$\lhd$ Для произвольной точки $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ в соответствии с предложением 4.3.9 (1) имеет место представление

$$f(x_0) = \sup\{Sx - f^*(S) : S \in \mathscr{L}_0(X, E) = L_A(X, E)\}.$$

Для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ и семейство $(S_\xi) \subset \mathscr{L}_0(X, E)$ такие, что $\pi_\xi S_\xi(x_0) - \pi_\xi f^*(S_\xi) \geqslant \pi_\xi f(x_0) - \varepsilon\pi_\xi\mathbb{1}$ для каждого ξ. Так как $\pi_\xi f^*(S) = (\pi_\xi f)^*(\pi_\xi S_\xi)$, то из последнего неравенства вытекает $\pi_\xi S_\xi \in \partial_{\varepsilon\pi_\xi\mathbb{1}}(\pi_\xi f)(x_0)$. По теореме 5.6.4, примененной к оператору $\pi_\xi f : X \to \pi_\xi E$ при $\lambda := \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1}$, подберем $z_\xi \in E(X)$ и $T_\xi \in \mathscr{L}_0(X, E)$ такие, что

$$\bigl\lvert z_\xi - x_0 \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1},\ \bigl\lvert S_\xi - T_\xi \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1},\ T_\xi \in \partial^o(\pi_\xi f)(z_\xi).$$

Если $z := \sum_\xi \pi_\xi z_\xi$ и $T := \sum_\xi \pi_\xi T_\xi$, то $\lvert z - x_0 \rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$ и $T \in \partial^o f(z)$.

Возьмем теперь произвольный элемент $z_0 \in \operatorname{dom}(\tilde{f})$ и подберем разбиение единицы $(\rho_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ и семейство $(x_\xi) \subset \operatorname{dom}(f)$ так, чтобы $\bigl\lvert z - \sum_\xi \rho_\xi x_\xi \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$. В силу уже доказанного, для каждого ξ существуют элемент $z_\xi \in \operatorname{dom}(\tilde{f})$ и оператор $T_\xi \in \mathscr{L}_0(X, E)$ такие, что $\bigl\lvert z - x_\xi \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$ и $T_\xi \in \partial^o f(z_\xi)$. Вновь положим $z := \sum_\xi \pi_\xi z_\xi$ и $T := \sum_\xi \pi_\xi T_\xi$. Тогда $\lvert z - z_0 \rvert \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$ и $T \in \partial^o f(z)$. $\triangleright$

(2) *Пусть $f : X \to E^\star$ — собственный полунепрерывный снизу выпуклый оператор. Множество всех субградиентов* $\operatorname{im}(\partial^o f)$ *r-плотно в* $\operatorname{dom}(f^*)$. *Точнее, для любых $\varepsilon > 0$ и $S_0 \in \operatorname{dom}(f^*)$ найдется оператор с абстрактной нормой $S \in \operatorname{im}(\partial^o f)$ такой, что* $\lvert S - S_0 \rvert \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$.

$\triangleleft$ Для произвольного оператора $S_0 \in \operatorname{dom}(f^*)$ по определению $f^*(S_0) = \sup\{S_0 x - f(x) : x \in X\}$. При любом выборе $\varepsilon > 0$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ и семейство $(x_\xi) \subset X$ такие, что $\pi_\xi S_0(x_\xi) - \pi_\xi f(x_\xi) \geqslant \pi_\xi f^*(S_0) - \varepsilon\pi_\xi \mathbb{1}$ для каждого ξ. Отсюда видно, что $\pi_\xi S_0 \in \partial^o_{\varepsilon\pi_\xi \mathbb{1}}(\pi_\xi f)(x_\xi)$. По теореме 5.6.4, примененной к оператору $\pi_\xi f$ при $\lambda := \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1}$, подберем $z_\xi \in E(X)$ и $T_\xi \in \mathscr{L}_0(X, E)$ так, чтобы $\bigl\lvert z_\xi - x_\xi \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1}$, $\bigl\lvert S_0 - T_\xi \bigr\rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1}$ и $T_\xi \in \partial^o f(z_\xi)$. Если $z := \sum_\xi \pi_\xi z_\xi$ и $S := \sum_\xi \pi_\xi T_\xi$, то $\lvert S_0 - S \rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi_\xi \mathbb{1}$ и $S \in \partial^o f(z)$. $\triangleright$

5.6.7. Рассмотрим несколько простых следствий из только что установленных предложений. Как и выше, X — банахово пространство, а E — расширенное K-пространство. Для множества $C \subset X$ обозначим символом $\widetilde{C}$ множество всех $\widetilde{u} \in E(X)$, определяемых непрерывными вектор-функциями $u \in \mathscr{C}(Q, X)$ со свойством $u(q) \in C$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$.

(1) *Допустим, что оператор с абстрактной нормой $S_0 : X \to E$ ограничен на непустом выпуклом замкнутом множестве $C \subset X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся оператор с абстрактной нормой $S : X \to E$ и элемент $\widetilde{u} \in E(X)$ такие, что*

$$\widetilde{u} \in \widetilde{C}, \quad \lvert S - S_0 \rvert \leqslant \varepsilon \lvert S_0 \rvert, \quad C^*(S) = \widetilde{S}(\widetilde{u}).$$

◁ Иными словами, для ограниченного на C оператора с абстрактной нормой существует сколь угодно близкий (в смысле векторной нормы) оператор с абстрактной нормой, достигающий обобщенного максимума на C. Для доказательства нужно положить в 5.6.6 (1) $f := \delta_E(C)$. ▷

(2) *Для любого оператора с абстрактной нормой* $S_0 : X \to E$ *и для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует оператор с абстрактной нормой* $S : X \to E$ *такой, что* $\lvert S - S_0 \rvert \leqslant \varepsilon \lvert S_0 \rvert$ *и* $\widetilde{S}(\widetilde{u}) = \lvert S \rvert$ *для некоторой* $u \in E(X)$, *удовлетворяющей условию* $\lvert \widetilde{u} \rvert = \mathbb{1}$.

◁ Этот факт означает, что множество операторов с абстрактной нормой, достигающих обобщенного максимума на единичном шаре, r-плотно в пространстве всех операторов с абстрактной нормой. Следует из (1), если взять в качестве C единичный шар пространства X. ▷

Вектор-функцию $u \in \mathscr{C}(Q, X)$, а также соответствующий элемент $\widetilde{u} \in E(X)$ называют *обобщенной опорной точкой* выпуклого множества $C \subset X$, если $\widetilde{u} \in \widetilde{C}$ и $C^*(S) = \widetilde{S}(\widetilde{u})$ для некоторого $S \in L_A(X, E)$. При этом сам оператор $S \in L_A(X, E)$ мы будем называть *опорным оператором* множества C. Границу множества C обозначим символом $\mathrm{bd}\,(C)$. В то же время границу $\mathrm{bd}\,(\widetilde{C})$ множества $\widetilde{C}$ определим как множество всех элементов $\widetilde{u} \in E(X)$, определяемых такими вектор-функциями $u \in \mathscr{C}(Q, X)$, что $u(q) \in \mathrm{bd}\,(C)$ при всех $q \in \mathrm{dom}(u)$. Следующее утверждение показывает, что замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве имеет много обобщенных опорных точек.

(3) *Пусть* $C \subset X$ — *непустое выпуклое замкнутое множество. Множество всех обобщенных опорных точек множества* C r-*плотно в* $\mathrm{bd}\,(\widetilde{C})$. *Точнее, для любого* $\varepsilon > 0$ *и произвольного* $u_0 \in \mathrm{bd}\,(\widetilde{C})$ *найдутся оператор с абстрактной нормой* $S : X \to E$ *и элемент* $u \in \widetilde{C}$, *такие, что*

$$\lvert u - u_0 \rvert \leqslant \varepsilon \lvert u_0 \rvert, \quad C^*(S) = \widetilde{S}(u).$$

◁ Выводится из 5.6.6 (2) при $f := \delta_E(C)$. В самом деле, возьмем $u_0 \in \mathrm{bd}\,(\widetilde{C})$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Подберем разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ и семейство $(x_\xi) \subset \mathrm{bd}\,(C)$ так, чтобы $\lvert \pi_\xi u_0 - \pi_\xi x_\xi \rvert \leqslant (1/2)\varepsilon\mathbb{1}$. Для каждого ξ выберем элемент $y_\xi \in X \setminus C$, для которого $\|x_\xi - y_\xi\| <$

$(1/4)\varepsilon$. По теореме отделимости найдутся такие функционалы $y'_\xi \in X'$, что $\|y'_\xi\| = 1$ и $\langle x, y'_\xi\rangle < \langle y_\xi, y'_\xi\rangle$ для всех ξ и $x \in C$. Определим оператор $T_\xi : X \to E$ равенством $T_\xi x := \langle x, y'_\xi\rangle \pi_\xi \mathbb{1}$ и заметим, что T_ξ — линейный оператор с абстрактной нормой, причем для $x \in C$ выполняется

$$T_\xi x \leqslant T_\xi y_\xi = T_\xi(y_\xi - x_\xi) + T_\xi x_\xi \leqslant (1/4)\varepsilon\pi_\xi\mathbb{1} + T_\xi x_\xi.$$

Тем самым $T_\xi(x - x_\xi) \leqslant f(x) - f(x_\xi) + (1/4)\varepsilon\pi_\xi\mathbb{1}$ для всех $x \in C$, т. е. $T_\xi \in \partial^o_e f(x_\xi)$, где $e := (1/4)\varepsilon\pi_\xi\mathbb{1}$. По теореме 5.6.4 существуют такие $u_\xi \in \pi_\xi E(X)$ и $S_\xi \in L_A(X, \pi_\xi E)$, что

$$\left| u_\xi - x_\xi \right| \leqslant (1/2)\sqrt{\varepsilon}\pi_\xi\mathbb{1},$$
$$\left| T_\xi - S_\xi \right| \leqslant (1/2)\sqrt{\varepsilon}\pi_\xi\mathbb{1}, \quad S_\xi \in \partial^o(\pi_\xi f)(u_\xi).$$

Положив $S := \sum_\xi \pi_\xi S_\xi$ и $u := \sum_\xi \pi_\xi u_\xi$, получим

$$|u_0 - u| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}, \quad |S - T| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}, \quad Tx := \sum_\xi \pi_\xi T_\xi, \quad S \in \partial^o f(u).$$

Последнее означает, что $C^*(S) = \widetilde{S}(u)$. Кроме того, неравенство $|S - T| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$ влечет $S \in L_A(X, E)$, так как $T \in L_A(X, E)$. $\triangleright$

Скажем, что оператор с абстрактной нормой $S \in L_A(X, E)$ *достигает своей нормы на элементе* $u \in E(X)$, если $|u| \leqslant \mathbb{1}$ и $|S| = \widetilde{S}\widetilde{u}$.

(4) *Точки, в которых достигают своей нормы операторы с абстрактной нормой, r-плотны в множестве $\{u \in E(X) : |u| = \mathbb{1}\}$. Точнее, для любого элемента $u_0 \in E(X)$, $|u_0| = \mathbb{1}$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют элемент $u \in E(X)$, $|u_0| \leqslant \mathbb{1}$, и оператор с абстрактной нормой $S \in L_A(X, E)$ такие, что $|u - u_0| \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$ и $\widetilde{S}(u) = |S|$.*

$\triangleleft$ Следует из (3). $\triangleright$

5.6.8. *Теорема.* *Пусть $f : X \to E^\star$ — собственный полунепрерывный снизу выпуклый оператор. Тогда для любого $x \in \mathrm{dom}(f)$ имеет место представление*

$$f(x) = \sup\{S(x - y) + f(y) : \ y \in \mathrm{dom}(\partial f), \ S \in \partial^o f(y)\} =$$
$$= \sup\{Sx + f^*(S) : \ S \in \mathrm{im}(\partial^o f)\}.$$

Иными словами, собственный полунепрерывный снизу выпуклый оператор на банаховом пространстве является верхней огибающей семейства аффинных операторов, определяемых ее субградиентами с абстрактной нормой.

$\lhd$ Для собственного полунепрерывного снизу выпуклого оператора $f : X \to E^\star$ положим по определению

$$g(x) := \sup\{Sx - f^*(S) : \ S \in \partial^o f(z), \ z \in \operatorname{dom}(\tilde{f})\}.$$

Ясно, что g — полунепрерывный снизу выпуклый оператор, причем $g \leqslant f$. Предположим, что $g(x_0) < f(x_0)$ для некоторого $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. Тогда можно подобрать число $\varepsilon > 0$ и ненулевой проектор π' в E так, что выполняется неравенство $\pi' g(x_0) + \varepsilon\pi'\mathbb{1} \leqslant \pi' f(x_0) - 2\varepsilon\pi'\mathbb{1}$. В силу предложения 4.3.8 (1) существуют оператор с абстрактной нормой $T : X \to E$, элемент $y \in E$ и ненулевой проектор $\pi \leqslant \pi'$, для которых выполняется $Tx + y \leqslant f(x)$ $(x \in X)$ и $\pi T x_0 + \pi y \geqslant \pi f(x_0) - 2\varepsilon\mathbb{1} \geqslant \pi g(x_0)$. Из этих двух неравенств вытекает, что $\pi T x - \pi T x_0 \leqslant \pi f(x) - \pi f(x_0) + 2\varepsilon\pi\mathbb{1}$, т. е. $\pi \in \partial_e(\pi f)(x_0)$, где $e := 2\varepsilon\pi\mathbb{1}$. По теореме 5.6.4 существуют $z \in E(X)$ и $S \in \mathscr{L}_0(X, E)$ такие, что $\lvert z - x_0 \rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi\mathbb{1}$, $\lvert S - T \rvert \leqslant \sqrt{\varepsilon}\pi\mathbb{1}$ и $S \in \partial(\pi\tilde{f})(z)$. Положим $Ax := Sx - \tilde{S}(z) + \pi\tilde{f}(z)$ $(x \in X)$. Тогда $A : X \to E$ — проскалярный аффинный оператор и $Ax \leqslant \pi f(x)$ $(x \in X)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} Ax_0 = Sx_0 - \tilde{S}(z) + \pi\tilde{f}(z) \geqslant Sx_0 - \tilde{S}(z) + \tilde{T}(z) + y = \\ = (S - T)(x_0 - z) + Tx_0 + y \geqslant \lvert S - T \rvert \cdot \lvert z - x_0 \rvert + Tx_0 + y \geqslant \\ \geqslant -\varepsilon\pi\mathbb{1} + (\pi f(x_0) - \varepsilon\pi\mathbb{1}) = \pi f(x_0) - 2\varepsilon\pi\mathbb{1} \geqslant \pi g(x_0). \end{aligned}$$

Согласно 5.6.6 существует проскалярный оператор $S' \in \partial f(z')$ для некоторого $z' \in \operatorname{dom}(\tilde{f})$. Положим $z_0 := \pi z + \pi^d z'$ и $S_0 := \pi S + \pi^d S'$. Тогда $S_0 \in \partial f(z_0)$ и $A_0 x := S_0 x - \tilde{S}_0(z_0) + \pi\tilde{f}(z_0) \leqslant f(x)$ $(x \in X)$. Тем самым возникают противоречивые неравенства $g(x_0) \geqslant A_0(x_0)$ и $\pi A_0 x_0 = \pi A x_0 \geqslant \pi f(x_0) - 2\varepsilon\pi\mathbb{1} \geqslant \pi g(x_0) + \varepsilon\pi'\mathbb{1}$, что и требовалось. $\rhd$

5.6.9. Приведем формулировки теорем 5.6.1, 5.6.4, 5.6.6 и 5.6.7 в скалярном случае $E = \mathbb{R}$.

(1) ***Вариационный принцип Экланда.*** *Пусть задача $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — полунепрерывная снизу собственная выпуклая функция на банаховом пространстве X. Допустим также, что f ограничена снизу и $f(x_0) \leqslant \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и*

$x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *найдется точка* $z \in \operatorname{dom}(f)$ *такая, что*

(i) $\lambda\|z - x_0\| \leqslant f(x_0) - f(z)$;

(ii) $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon/\lambda$;

(iii) $\lambda\|x - z\| + f(x) > f(z)$ $(x \neq z)$.

(2) ***Теорема Бронстеда — Рокафеллара.*** *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}^{\bullet}$ *— полунепрерывная снизу выпуклая собственная функция на банаховом пространстве* X. *Допустим, что даны число* $\varepsilon > 0$, *точка* $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ *и функционал* $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *найдутся точка* $x \in \operatorname{dom}(f)$ *и функционал* $x^* \in X'$ *такие, что*

$$x^* \in \partial f(x), \quad \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon/\lambda, \quad \|x^* - x_0^*\| \leqslant \lambda.$$

(3) ***Теорема Бишопа — Фелпса.*** *Пусть* C *— непустое выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве* X. *Тогда:*

(i) *множество опорных точек* C *плотно в границе* $\operatorname{bd}(C)$ *множества* C;

(ii) *множество всех непрерывных линейных функционалов, достигающих своего наибольшего значения на* C, *плотно в конусе непрерывных линейных функционалов, ограниченных на* C.

(4) ***Теорема.*** *Пусть* f *— собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция на банаховом пространстве* X. *Тогда для любого* $x \in \operatorname{dom}(f)$ *имеет место представление*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{\langle x - y, y'\rangle + f(y) : \ y \in \operatorname{dom}(\partial f), \ y' \in \partial f(y)\} = \\ &= \sup\{\langle x, y'\rangle + f^*(y') : \ y' \in \operatorname{im}(\partial f)\}. \end{aligned}$$

$\lhd$ Действительно, как следует из 5.6.1, $\partial \tilde{f}(z) \neq \varnothing$. Кроме того, собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция на банаховом пространстве является верхней огибающей семейства непрерывных аффинных функционалов, определяемых ее субдифференциалами. $\rhd$

5.7. Комментарии

Библиография по теории экстремальных задач огромна. Мы перечислим лишь некоторые из наиболее известных монографий, в которых представлено выпуклое программирование и его важнейшие приложения: В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров и С. В. Фомин [3], Е. Г. Гольштейн [41], И. И. Ерёмин и Н. Н. Астафьев [73], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомиров [78], В. Г. Карманов [90], П.-Ж. Лоран [188], Х. Никкайдо [200], Б. Т. Поляк [204], Б. Н. Пшеничный [210, 211], Р. Т. Рокафеллар [218], В. М. Тихомиров [228], И. Экланд и Р. Темам [246], К. Эрроу, Л. Гурвиц и Х. Удзава [248], М. Юрг [408]. В настоящей книге мы совсем не касаемся роли выпуклости и субдифференциалов в вариационном исчислении и оптимальном управлении; по этому поводу см. монографии: В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров и С. В. Фомин [3], В. Барбу и Т. Прекупану [274], В. Г. Болтянский [16, 17], Дж. Варга [26], Р. В. Гамкрелидзе [35], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомиров [78], Л. Нойштадт [478], И. Экланд и Р. Темам [246], Л. Янг [251].

5.7.1. **(1)** Многоцелевая оптимизация берет свое начало в экономике и ее становление связано, прежде всего, с именем В. Парето. Обстоятельный обзор этого предмета с 1776 по 1960 год содержится в работе В. Стэдлера [542]. В пятидесятые годы векторная оптимизация включается в общее математическое программирование. Последующее развитие предмета отражено в сборниках под редакцией Дж. Л. Кохрейна и М. Зелени [317], Х. Тириеза и С. Зайонтса [556], М. Зелени [588].

(2) Векторные программы с реализующимся идеальным решением в гладком случае рассматривал К. Риттер [512]; имеется много практических примеров задач «с клювом» (т. е. тех, где идеал достигается), см. комментарии в обзоре С. С. Кутателадзе [152]. Дальнейшие события, а также идейная сторона многокритериальной оптимизации отражены в обзорах А. Ахиллеса, К.-Г. Эльстера и Р. Незе [252], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [134], а также в книге В. В. Гороховика [50].

(3) В текущей главе изложены некоторые приемы анализа векторных программ, основанные на субдифференциальном исчислении. Понятия обобщенного решения (5.1.4) и инфинитезимального решения (5.1.6) ввел и изучил С. С. Кутателадзе в [148] и [162] соответственно. Обобщенное решение в смысле 5.1.12 определил А. Г. Кусраев.

5.7.2. **(1)** Общий метод исследования, сформулированный еще в XVII веке Ж. Лагранжем для гладких конечномерных задач на нахождение экстремума при ограничениях в виде равенств, получил название *принципа Лагранжа* и используется при изучении самых разнообразных классов оптимизационных задач. Суть метода: решение экстремальной задачи с ограничениями есть решение безусловной задачи для подходящего лагранжиана — суммы целевой функции и функций, задающих ограничения, с неопределенными множителями (называемыми *множителями Лагранжа*). Оказалось, что при определенных предположениях этот принцип верен для любых экстремальных задач с ограничениями в виде равенств, неравенств и включений. Наиболее завершенную форму принцип Лагранжа обрел в выпуклом анализе, так как для выпуклой экстремальной задачи необходимые и достаточные условия фактически совпадают, а решение задачи на минимум с ограничениями в виде неравенств служит глобальным минимумом для функции Лагранжа. Последнее утверждение принято называть *теоремой Куна — Таккера* из-за сыгравшей огромную роль в развитии математического программирования работы Х. Куна и А. Таккера [429]. Кун в своей работе [428] отметил, что этот факт был получен ранее в малоизвестной диссертации В. Каруша [410]. В этой связи некоторые авторы предпочитают говорить о теореме Каруша — Куна — Таккера.

(2) Глубина и универсальность принципа Лагранжа раскрыты в книгах В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова и С. В. Фомина [3], А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78]. Об истории принципа Лагранжа можно прочитать в статье А. В. Дорофеевой и В. М. Тихомирова [69].

(3) Принцип Лагранжа в форме теорем о седловых точках для разрешимых векторных программ был обоснован в статьях Дж. Зова [590, 592]. Ряд признаков существования простых векторных лагранжианов дан С. С. Кутателадзе и М. М. Фельдманом [168]. Принцип Лагранжа для значений векторных программ (алгебраическая версия 2.5.8 (1)) впервые установил С. С. Кутателадзе [149]. Условие Слейтера хорошо известно в выпуклом анализе; слабое условие Слейтера введено А. Г. Кусраевым [112].

(4) При доказательстве вспомогательных утверждений 5.2.6 и 5.2.7 был применен метод штрафа — формальный прием, позволяющий сводить экстремальную задачу с ограничениями к безусловной экстремальной задаче. Использование метода штрафа приводит к недифференцируемой целевой функции, даже если данные изучаемой задачи изначально были гладкими. Поэтому указанный метод требует применения техники субдифференциального исчисления (см. обзор А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [134]). Метод штрафа впервые возник в работе Р. Куранта при решении некоторых физических задач. Применительно к задачам математического программирования он стал использоваться лишь с середины 1950-х годов. О роли этого метода в разработке численных алгоритмов поиска экстремума нелинейной функции при нелинейных ограничениях см. в монографиях Ф. П. Васильева [27], В. С. Михалевича, А. М. Гупала и В. И. Норкина [194], Н. Н. Моисеева, Ю. П. Иванилова и Е. М. Столяровой [195], Р. П. Федоренко [233], А. Фиакко и Г. Мак-Кормик [237].

5.7.3. (1) В изложении результатов о приближенной оптимальности (5.3.1–5.3.5) мы следуем С. С. Кутателадзе [153, 157]. В гладком случае оптимальность по Парето изучается в известном цикле работ С. Смейла [537].

(2) Относительно динамических экстремальных задач типа 5.3.6 и их связи с моделями экономической динамики см. книги В. Л. Макарова и А. М. Рубинова [191, 192], Б. Н. Пшеничного [210], А. М. Рубинова [223]. Принципиальная схема, изложенная в 5.3.6–5.3.9, опубликована в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [131, 132].

5.7.4. В основу параграфа 5.4 положена статья С. С. Кутателадзе [162].

5.7.5. (1) О пространствах вектор-функций $E(X)$ и $E_w(X')$, а также о двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X')$ подробнее можно найти в монографии А. Г. Кусраева [433]. Измеримый вариант пространств $E(X)$ и $E_w(X')$, а также двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X')$ см. у В. Л. Левина [179]. В силу утверждения 5.5.2 (1) и результатов 4.3 полунепрерывные снизу операторы (в смысле 4.3.2–4.3.3) естественно изучать относительно двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X')$. В 5.5 и 5.6 представлено лишь начало такого изучения.

(2) Выпуклые операторы со значениями в $E^{\star}$ ранее не рассматривались. Необходимость такого расширения области значений выпуклых операторов возникает в связи с техническими приемами, развитыми в 5.5 и 5.6. Приведем здесь иную мотивировку.

Пусть $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — полунепрерывные снизу выпуклые функционалы, определенные на произвольном нормированном пространстве X. Положим $E := \mathbb{R}^2$ и определим операторы $F_1 : X \to E^\bullet$ и $F_2 : X \to E^\star$ формулами:

$$F_1(x) := \begin{cases} (f_1(x), f_2(x)), & \text{если } x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2), \\ +\infty, & \text{если } x \notin \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2); \end{cases}$$

$$F_2(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (x \in X),$$

где принимается $+\infty := (+\infty, +\infty)$ и, стало быть,

$$E^\star = \mathbb{R}^2 \cup \{(0, +\infty), (+\infty, 0), +\infty\}.$$

Если $x_0 \in \operatorname{dom}(f_1)$ и $x_0 \notin \operatorname{dom}(f_2)$, то оператор F_2 полунепрерывен снизу в точке x_0, а F_1 — нет. Таким образом, если мы рассматриваем операторы со значениями в $E^\bullet$, то происходит неестественное сужение класса полунепрерывных снизу операторов.

(3) Аналогично дело обстоит при изучении интегральных функционалов. Пусть X — банахово пространство и (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим функцию $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}^\bullet$. Допустим, что функция $f(\omega, \cdot)$ выпукла при почти всех $\omega \in \Omega$, а композиция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ измерима для всех u из некоторого пространства L измеримых по Бохнеру вектор-функций $u : \Omega \to X$. Тогда интегральный функционал $I_f : L \to \mathbb{R}^\bullet$ определяется следующим образом:

$$I_f(u) := \int\limits_\Omega f(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega),$$

если функция $\omega \mapsto f^+(\omega, u(\omega))$ суммируема, и $I_f(u) := +\infty$ — в противном случае. Пусть $E := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (классов эквивалентности) измеримых функций, а $I : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Лебега. Тогда имеет место представление $I_f = I \circ F$, где оператор $F : L \to E^\star$ определяется формулой $F(u) : \omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$. В рассматриваемом контексте функцию f принято называть *интегрантом.* Как видно, допущение к рассмотрению лишь операторов F со значениями в $E^\bullet$ приводит к нежелательному сужению класса интегрантов. Относительно теории интегрантов, восходящей к Р. Т. Рокафеллару, см. монографии В. Л. Левина [179], К. Кастена и М. Валадье [310], И. Экланда и Р. Темама [246].

(4) Материал пп. 5.5.3–5.5.5 показывает, что алгебраический вариант субдифференциального исчисления в полном объеме имеет место для выпуклых операторов со значениями в $E^\star$. Условие общего положения из 5.5.3 и 5.5.4 можно несколько ослабить, но за счет более громоздкой конструкции.

(5) Различные варианты условия Липшица для отображений со значениями в упорядоченном векторном пространстве были введены А. Г. Кусраевым [105] и Л. Тибо [552]. Данное в 5.5.8 определение липшицевости наиболее приспособлено к двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X')$, как видно из 5.5.8–5.5.11. Оно было введено, по-видимому, Н. Папагеоргиу [492] и является частным случаем определения А. Г. Кусраева [105]; так, согласно [105] липшицевость отображения $f : X \to E^\bullet$ на множестве $U \subset X$ означает справедливость соотношения $|f(x)-f(x')| \leqslant (x-x')$ $(x, x' \in U)$, где $p : X \to E$ — непрерывный сублинейный оператор. Если оператор p порядково ограничен в том смысле, что для некоторого $e \in E^+$ выполняется $|p(x)| \leqslant e$ при всех $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, то $|p(x)| \leqslant e\|x\|$ $(x \in X)$ и, следовательно, f удовлетворяет условию Липшица в смысле 5.5.8.

(6) Основные результаты параграфа 5.5 получены А. Г. Кусраевым и Е. К. Басаевой. Здесь только намечено построение многоцелевого выпуклого программирования на основе векторной двойственности $E(X) \leftrightarrow E_w(X')$. Представляет интерес дальнейшее развитие этого подхода и особенно его распространение на случай пространств измеримых вектор-функций типа $E(X)$ и $E_w(X')$. Здесь могут быть полезны методы, развитые А. Е. Гутманом [53], А. Г. Кусраевым [433], В. Л. Левиным [179].

5.7.6. (1) Основные результаты параграфа 5.6 (пп. 5.6.1–5.6.8) получены А. Г. Кусраевым. Как уже отмечалось, скалярный вариант 5.6.9 (1) теоремы 5.6.1 — вариационный принцип Экланда, получивший широкий спектр приложений в нелинейном анализе (см. обзор И. Экланда [346], а также монографии Ф. Кларка [315], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [202], Р. Фелпса [501], И. Экланда и Р. Темама [246]. Относительно теорем 5.6.9 (2) и 5.6.9 (3) см. работы Э. Бишопа, Р. Фелпса, А. Бронстеда и Р. Т. Рокафеллара. Соответствующие ссылки и комментарии см. в книгах Р. Фелпса [501], Р. Холмса [381].

(2) Принцип Экланда 5.6.9 (1) имеет место и при более общих предположениях (см. [346]):

Теорема. *Пусть* (X, d) — *полное метрическое пространство и* $f : X \to \mathbb{R}^{\bullet}$ — *полунепрерывная снизу функция, ограниченная снизу и не равная тождественно* $+\infty$. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $x \in X$ *таковы, что* $f(x) \leqslant \inf_{x' \in X} f(x') + \varepsilon$. *Тогда существует точка* $y \in X$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $f(y) \leqslant f(x)$;
(ii) $d(f(x), f(y)) \leqslant 1$;
(iii) $f(y) < f(x') + \varepsilon d(y, x')$ $(y \neq x')$.

(3) Вариационный принцип Экланда можно сформулировать так: если полунепрерывная снизу функция достигает приближенного минимума в какой-то точке, то некоторое малое возмущение этой функции достигает точного минимума в близкой точке. При этом возмущение может не быть дифференцируемой функцией, даже если исходная функция была гладкой. Аналогичный вариационный принцип с дифференцируемым возмущением был впервые установлен Дж. Борвейном и Д. Прейсом [296]. Обсуждение вариационных принципов и их приложений имеется в книгах П. Лоевена [448], Н. Гусоуба [365], Ж.-П. Обэна и И. Экланда [202]; см. также препринт Л. Йонгксина и С. Шужонга [581].

(4) Полностью за пределами этой книги остается замечательный раздел выпуклого анализа, посвященный дифференцируемости выпуклых функций и обладающий богатыми взаимосвязями с геометрией банаховых пространств. Важнейшие идеи и методы этого направления отражены в монографиях Р. Бургена [301], П. Лоевена [448], Р. Фелпса [501].

(5) Вопрос о том, имеет ли опорные точки выпуклое замкнутое множество в вещественном банаховом пространстве, был сформулирован В. Кли [419] в 1958 году. Если это множество имеет внутреннюю точку, то ответ легко следует из теоремы Хана — Банаха: каждая граничная точка является опорной. Но даже в этой простой ситуации не каждый функционал является опорным. Очевидно, что для ограниченного выпуклого множества в рефлексивном банаховом пространстве (в силу его слабой компактности) каждый ограниченный функционал достигает нормы на единичном шаре, т. е. опорен для единичного шара. В то же время знаменитая теорема Р. С. Джеймса (см. [166]) утверждает, что в нерефлексивном банаховом пространстве существует ограниченный линейный функционал, не достигающий своего максимума на единичном шаре; доказательство можно найти в книгах Дж. Дистеля [67] и Р. Холмса [381]. Таким образом, проблема Кли существования опорных точек и функционалов нетривиальна в произвольных банаховых пространствах для выпуклых замкнутых множеств с пустой внутренностью и в нерефлексивных банаховых пространствах для выпуклых замкнутых ограниченных множеств соответственно.

(6) Ответ на сформулированный Кли вопрос получили Э. Бишоп и Р. Фелпс, установившие в [286] теорему 5.6.9 (3) для вещественного банахова пространства. Р. Т. Рокафеллар и А. Бронстед, используя геометрические идеи и технику Э. Бишопа и Р. Фелпса, установили теорему 5.6.9 (2). Принятый нами в параграфе 5.6 аналитический подход основан на вариационном принципе Экланда. По существу эти подходы равносильны: как показал М. Фабиан в [352], принцип Экланда и теорему Бронстеда — Рокафеллара можно вывести из теоремы Бишопа — Фелпса.

(7) Теорема Бишопа — Фелпса не имеет места в комплексном случае: В. И. Ломоносов [449] построил пример выпуклого замкнутого ограниченного множества в комплексном банаховом пространстве, не имеющего ни одного опорного функционала.

Глава 6

Квазидифференциалы

Отображение называют квазидифференцируемым во внутренней точке области определения, если в этой точке существует производная по направлениям, которая представляет собой разность двух сублинейных операторов. При этом квазидифференциал вводится посредством естественного расширения двойственности Минковского. Тем самым возникает довольно широкий класс отображений, допускающих линеаризацию, который включает выпуклые и вогнутые операторы.

Задача выражения квазидифференциала составного отображения через квазидифференциалы составляющих отображений естественным образом распадается на три этапа: 1) нахождение явного вида производной по направлениям через производные по направлениям составляющих отображений; 2) представление полученной производной по направлениям в виде разности сублинейных операторов; 3) вычисление квазидифференциала через квазидифференциалы составляющих отображений. Первый этап состоит в вычислении соответствующих пределов и использует приемы классического анализа с некоторыми техническими модификациями. Второй этап либо очевиден, либо требует изобретения каких-либо искусственных приемов. Третий этап опирается на двойственность Минковского, причем расширенную с класса сублинейных операторов на более широкий класс квазилинейных операторов — операторов, представимых в виде разности сублинейных операторов.

Следуя этой схеме, можно получить все основные формулы исчисления квазидифференциалов, а именно, квазидифференциалы суммы, произведения, частного, композиции, супремума и инфимума.

Как мы видели в главе 4, аналог классического «цепного правила» исчисления — субдифференциал суперпозиции равняется суперпозиции субдифференциалов — выполняется лишь в специальных случаях. Соответствующая техника, называемая дезинтегрированием, связана с понятием оператора Магарам. Часть этой техники может быть распространена и на квазидифференциалы.

Построенное исчисление позволяет вывести необходимые условия экстремума в многоцелевых экстремальных задачах с ограничениями, определяемыми квазидифференцируемыми отображениями, используя те же приемы, что и в главе 5.

6.1. Пространство опорных множеств

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно продолжение двойственности Минковского (см. 1.5.6 и 1.5.7) на класс квазилинейных операторов — операторов, представимых в виде разности сублинейных операторов.

6.1.1. Пусть X — векторное пространство, E — произвольное K-пространство и $A := \mathrm{Orth}(E)$. Напомним, что *двойственностью Минковского* называют отображение $\partial : \mathrm{Sbl}(X,E) \to \mathrm{CS}(X,E)$, сопоставляющее сублинейному оператору p его субдифференциал в нуле ∂p. Это отображение служит изоморфизмом A-конических полурешеток $\mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\mathrm{CS}_c(X,E)$, причем обратное отображение $\sup : \mathrm{CS}_c(X,E) \to \mathrm{Sbl}(X,E)$ множеству $\mathscr{U} \subset \mathrm{CS}_c(X,E)$ сопоставляет сублинейный оператор $\sup(\mathscr{U}) : X \to E$, действующий по правилу

$$\sup(\mathscr{U}) : x \mapsto \sup\{Tx : \ T \in \mathscr{U}\} \quad (x \in X).$$

Согласно 1.5.6 A-конические полурешетки $\mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\mathrm{CS}_c(X,E)$ допускают погружение в унитарные решеточно упорядоченные A-модули $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ соответственно. Более того, двойственность Минковского ∂ и отображение $\sup$ допускают продолжение до изоморфизмов решеточно упорядоченных A-модулей

$$[\partial] : [\mathrm{Sbl}(X,E)] \to [\mathrm{CS}_c(X,E)], \quad [\sup] : [\mathrm{CS}_c(X,E)] \to [\mathrm{Sbl}(X,E)],$$

причем $[\partial]^{-1} = [\sup]$. Остановимся немного подробнее на строении модулей $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ и изоморфизмов $[\partial]$ и $[\sup]$.

Как уже отмечалось в 1.5.7, $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ можно отождествить с A-подмодулем в E^X, состоящим из всех отображений из X в E, представимых в виде разности двух сублинейных операторов. Последнее множество, обозначаемое в дальнейшем символом $\mathrm{QL}(X,E)$, действительно является модулем: если $f = p - q$ для некоторых $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, то имеют место равенства

$$\alpha f := \alpha \circ f = \alpha^+ p + \alpha^- q - (\alpha^- p + \alpha^+ q),$$

доказывающие, что $\alpha f \in \mathrm{QL}(X,E)$. Элементы $\mathrm{QL}(X,E)$ мы будем называть *квазилинейными операторами.* Итак, $\mathrm{QL}(X,E) := \mathrm{Sbl}(X,E) - \mathrm{Sbl}(X,E)$, причем структура упорядоченного A-модуля индуцирована из E^X, т. е. вводится поточечно. В частности, порядок в $\mathrm{QL}(X,E)$ определяется конусом положительных элементов $\{p \in \mathrm{QL}(X,E) : \, p(x) \geqslant 0 \, (x \in X)\}$.

Упомянутое отождествление производят следующим образом. Паре сублинейных операторов $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ ставят в соответствие квазилинейный оператор $\phi(p,q) : x \mapsto p(x) - q(x)$ $(x \in X)$. Пусть $\varphi : \mathrm{Sbl}(X,E) \times \mathrm{Sbl}(X,E) \to [\mathrm{Sbl}(X,E)]$ — фактор-отображение из 1.5.6. Очевидно, что пары (p,q) и (p',q') представляют один и тот же квазилинейный оператор в том и только в том случае, когда $p + q' = p' + q$, что означает эквивалентность этих пар в смысле 1.5.6, а значит, и справедливость равенства $\varphi(p,q) = \varphi(p',q')$. Тем самым существует единственный изоморфизм $\imath : [\mathrm{Sbl}(X,E)] \to \mathrm{QL}(X,E)$ такой, что $\imath \circ \varphi = \phi$. Иными словами, если $[p,q]$ — класс эквивалентности пары (p,q), то $\imath([p,q]) = p - q$.

6.1.2. *Множество $\mathrm{QL}(X,E)$ с указанными операциями и порядком является решеточно упорядоченным A-модулем. Если операторы $l_1, \dots, l_k \in \mathrm{QL}(X,E)$ представимы в виде $l_i = p_i - q_i$, где $p_i, q_i \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ $(i := 1, \dots, k)$, то их супремум и инфимум (вычисляемые поточечно) также входят в $\mathrm{QL}(X,E)$, причем имеют место представления*

$$\bigvee_{i=1}^{n} l_i = \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} q_j \Big\} - \sum_{j=1}^{n} q_j,$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} l_i = \sum_{j=1}^{n} p_j - \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ q_i + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} p_j \Big\}.$$

◁ Определим операторы $p, q : X \to E$ формулами

$$p(x) := \bigvee_{i=1}^{n} \left\{ p_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} q_j(x) \right\}, \quad q(x) := \sum_{j=1}^{n} q_j(x).$$

Очевидно, что операторы p и q сублинейны, следовательно, достаточно установить, что $\bigvee_{i=1}^{n} l_i = p - q$. Последнее вытекает из следующих выкладок, в которых используется соотношение $a_1 \vee \ldots \vee a_n + b = (a_1 + b) \vee \ldots \vee (a_n + b)$, справедливое в любой векторной решетке:

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i=1}^{n} l_i(x) = \bigvee_{i=1}^{n} \{p_i(x) - q_i(x)\} = \\
&= \bigvee_{i=1}^{n} \{p_i(x) - q_i(x)\} + \sum_{j=1}^{n} q_j(x) - q(x) = \\
&= \bigvee_{i=1}^{n} \left\{ p_i(x) - q_i(x) + \sum_{j=1}^{n} q_j(x) \right\} - q(x) = p(x) - q(x).
\end{aligned}$$

Используя формулу $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n + b = (a_1 + b) \wedge \ldots \wedge (a_n + b)$, мы аналогично выводим представление для поточечного инфимума:

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i_1}^{n} l_i(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} \{p_i(x) - q_i(x)\} = \\
&= p(x) - \sum_{j=1}^{n} p_j(x) + \bigwedge_{i=1}^{n} \{p_i(x) - q_i(x)\} = \\
&= p(x) + \bigwedge_{i=1}^{n} \left\{ -q_i(x) - \sum_{j=1}^{n} p_j(x) + p_i(x) \right\} = \\
&= p(x) - \bigvee_{i=1}^{n} \left\{ q_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j(x) \right\} = p(x) - q(x),
\end{aligned}$$

где на этот раз обозначено

$$p(x) := \sum_{j=1}^{n} p_j(x), \quad q(x) := \bigvee_{i=1}^{n} \left\{ q_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j(x) \right\}.$$

Таким образом, точные границы конечного числа квазилинейных операторов также квазилинейны. ▷

6.1.3. Рассмотрим теперь подробнее *модуль опорных множеств* $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$. Прежде всего проверим, что в A-конической полурешетке $\mathrm{CS}_c(X,E)$ выполняется закон сокращения, что по умолчанию предполагалось в 1.5.7.

(1) *Пусть $U,V,W\in\mathrm{CS}_c(X,E)$. Если $U+W\supset V+W$, то $U\supset V$. Если же $U+W=V+W$, то $U=V$.*

$\lhd$ Допустим, что $U=\partial p$, $V=\partial q$ и $W=\partial r$ для некоторых сублинейных операторов $p,q,r : X\to E$. Тогда, привлекая аддитивность и монотонность двойственности Минковского, выводим $\partial(p+r)=\partial p+\partial r\supset\partial q+\partial r=\partial(q+r)$. Отсюда $p+r\geqslant q+r$ и, стало быть, $p\geqslant q$ или, что то же самое, $U=\partial p\supset\partial q=V$. Второе утверждение очевидным образом следует из первого. $\rhd$

Отношение эквивалентности в $\mathrm{CS}_c(X,E)$ вводится следующим образом: пары (U_1,V_1) и (U_2,V_2) эквивалентны в том и только в том случае, если $U_1+V_2=U_2+V_1$, см. 1.5.6. Пусть $[U,V]$ обозначает класс эквивалентности пары опорных множеств (U,V). Тогда алгебраические операции (сложение и умножение на элементы кольца $\mathrm{Orth}(E)$) в $[\mathrm{CS}_c(X,E]$ вводятся следующими формулами:

$$[U_1,V_1]+[U_2,V_2]:=[U_1+U_2,V_1+V_2];$$
$$\alpha[U,V]:=[\alpha^+U,\alpha^+V]+[\alpha^-V,\alpha^-U].$$

Эти определения корректны, так как согласуются с эквивалентностью в множестве упорядоченных пар опорных множеств. В частности, противоположный элемент задается формулой $-[U,V]=[V,U]$, а класс эквивалентности $[U,V]$ будет нулем в том и только в том случае, если $(U,V)\sim(\{0\},\{0\})$, т. е. если $U=V$. Отношение порядка в модуле $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ вводится с помощью конуса положительных элементов

$$K=\{[U,V]\in[\mathrm{CS}_c(X,E)]:\ U\supset V\}.$$

Тем самым справедливы следующие соотношения:

$$[U_1,V_1]\geqslant[U_2,V_2]\leftrightarrow[U_1,V_1]-[U_2,V_2]\geqslant 0\leftrightarrow U_1-V_2\supset V_1-U_2.$$

Вложение $\iota : \mathrm{CS}_c(X,E)\to[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ из 1.5.6 имеет вид $\iota(U)=[U,\{0\}]$. Для произвольной пары опорных множеств $U,V\in\mathrm{CS}_c(X,E)$ будет $[U,V]=[U,\{0\}]+[\{0\},V]=[U,\{0\}]-[V,\{0\}]=\iota(U)-\iota(V)$, откуда видно, что конус $\iota(\mathrm{CS}_c(X,E))$ является воспроизводящим.

Согласно теореме 1.5.6 двойственность Минковского допускает распространение $[\partial]$ на модуль $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$. Поскольку последний отождествляется с $\mathrm{QL}(X,E)$, то возникает изоморфизм из $\mathrm{QL}(X,E)$ на $\mathrm{CS}_c(X,E)$, который мы будем обозначать символом $\mathscr{D}$, полагая по определению $\mathscr{D} := [\partial] \circ \imath^{-1}$. Обратный к нему изоморфизм имеет вид $\mathscr{S} := \imath \circ [\sup]$, так как $\mathscr{D}^{-1} = \imath \circ [\partial]^{-1} = \mathscr{S}$. Отображение $[\partial]$ определяется равенством (см. 1.5.6) $[\partial](\varphi(p,q)) = [\partial p, \partial q]$. Значит, в силу наших соглашений можно написать $\mathscr{D}(\phi(p,q)) = [\partial p, \partial q]$, каковы бы ни были $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$. Итак, если $l = p - q$, то $\mathscr{D}l = [\partial p, \partial q]$, причем $\mathscr{D}l$ не зависит от конкретного представления l в виде разности сублинейных операторов. Элемент $\mathscr{D}l$ из A-модуля $\mathrm{CS}_c(X,E)$ называют *квазидифференциалом (в нуле) оператора* l и обозначают символом $\mathscr{D}l$. При этом для опорных множеств ∂p и ∂q приняты следующие названия и обозначения: $\underline{\partial} l := \partial p$ — *субдифференциал в нуле оператора* l и $\overline{\partial} l := \partial q$ — *супердифференциал в нуле оператора* l.

Суммируя сказанное и учитывая 1.5.7, мы приходим к следующему утверждению.

(2) *Отображение* $\mathscr{D} := [\partial] \circ \imath^{-1}$ *осуществляет изоморфизм решеточно упорядоченных* A*-модулей* $\mathrm{QL}(X,E)$ *и* $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$, *причем обратный к нему изоморфизм имеет вид* $\mathscr{S} := \imath \circ [\sup]$. *Таким образом, если для некоторых* $l \in \mathrm{QL}(X,E)$ *и* $U, V \in \mathrm{CS}_c(X,E)$ *выполняется* $\mathscr{D}l = [U,V]$ *(или, что то же самое,* $\mathscr{S}([U,V]) = l$*), то*

$$\underline{\partial} l = U, \quad \overline{\partial} l = V,$$
$$l(x) = \sup\{Sx : \ S \in U\} - \sup\{Tx : \ T \in V\} \quad (x \in X).$$

Разумеется, субдифференциал и супердифференциал квазилинейной функции определяются неоднозначно, тогда как квазидифференциал — вполне определенный элемент модуля $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$. В самом деле, помимо представления $l = p - q$ верно также $l = (p + r) - (q + r)$, где r — произвольный сублинейный оператор, следовательно, $\mathscr{D}l = [\partial p, \partial q] = [\partial(p + r), \partial(q + r)]$. Пусть $l = p_1 - q_1 = p_2 - q_2$, где $p_i, q_i \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ $(i := 1,2)$. Тогда $p_1 + q_2 = p_2 + q_1$. Полагая $U_i = \partial p_i$, $V_i = \partial q_i$ $(i := 1,2)$ и привлекая двойственность Минковского, получаем $U_1 + V_2 = U_2 + V_1$. Таким образом, если две пары опорных множеств определяют одну и ту же квазилинейную функцию l, то они эквивалентны. Верно и обратное: если пары (U_1, V_1) и (U_2, V_2) эквивалентны, то по ним восстанавливается одна и та же квазилинейная функция:

$$\sup_{S\in U_1} S(x) - \sup_{T\in V_1} T(x) = \sup_{S\in U_2} S(x) - \sup_{T\in V_2} T(x) \quad (x \in X).$$

6.1.4. Рассмотрим, как преобразуются произведение на элемент кольца A, сумма и решеточные операции при изоморфизме $\mathscr{D}$.

(1) *Пусть $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, $l \in \mathrm{QL}(X, E)$ и $\mathscr{D}l = [\underline{\partial}l, \overline{\partial}l]$. Тогда $\mathscr{D}(\alpha l) = \alpha\mathscr{D}l$. Подробнее, $\mathscr{D}(\alpha l) = [\underline{\partial}(\alpha l), \overline{\partial}(\alpha l)]$, где*

$$\underline{\partial}(\alpha l) = \alpha^+\underline{\partial}l + \alpha^-\overline{\partial}l, \quad \overline{\partial}(\alpha l) = \alpha^-\underline{\partial}l + \alpha^+\overline{\partial}l.$$

$\lhd$ Из равенства $\mathscr{D}l = [\underline{\partial}l, \overline{\partial}l]$ видно, что $l = p - q$, где

$$p(x) = \sup_{S\in\underline{\partial}l} S(x), \quad q(x) = \sup_{T\in\overline{\partial}l} T(x).$$

Отсюда $\alpha l = (\alpha^+ p + \alpha^- q) - (\alpha^- p + \alpha^+ q)$. Остается применить двойственность Минковского с учетом ее аддитивности и однородности (см. 1.4.12 и 1.4.14 (5)). $\rhd$

(2) *Пусть $l_1, \dots, l_n \in \mathrm{QL}(X, E)$. Тогда $\mathscr{D}(l_1 + \ldots + l_n) = \mathscr{D}l_1 + \ldots + \mathscr{D}l_n$. Подробнее, если $l := l_1 + \ldots + l_n$ и $\mathscr{D}l_i = [\underline{\partial}l_i, \overline{\partial}l_i]$ $(i := 1, \dots, n)$, то $\mathscr{D}l = [\underline{\partial}l, \overline{\partial}l]$, где $\underline{\partial}l = \underline{\partial}l_1 + \ldots + \underline{\partial}l_n$, $\overline{\partial}l = \overline{\partial}l_1 + \ldots + \overline{\partial}l_n$.*

$\lhd$ Если $l_i = p_i - q_i$, то достаточно применить двойственность Минковского к равенству $l_1 + \ldots + l_n = (p_1 + \ldots + p_n) - (q_1 + \ldots + q_n)$. $\rhd$

(3) *Пусть $l_1, \dots, l_n \in \mathrm{QL}(X, E)$ и $\mathscr{D}l_i = [\underline{\partial}l_i, \overline{\partial}l_i]$ $(i := 1, \dots, n)$. Положим $g(x) := l_1(x) \vee \ldots \vee l_n(x)$ и $h(x) := l_1(x) \wedge \ldots \wedge l_n(x)$. Тогда $\mathscr{D}g = [\underline{\partial}g, \overline{\partial}g]$, $\mathscr{D}h = [\underline{\partial}h, \overline{\partial}h]$, где*

$$\underline{\partial}g = \mathrm{op}\bigcup_{i=1}^{n}\Bigg(\underline{\partial}l_i + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \overline{\partial}l_j\Bigg), \quad \overline{\partial}g = \sum_{j=1}^{n} \overline{\partial}l_j,$$

$$\underline{\partial}h = \sum_{j=1}^{n} \underline{\partial}l_j, \quad \overline{\partial}h = \mathrm{op}\bigcup_{i=1}^{n}\Bigg(\overline{\partial}l_i + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \underline{\partial}l_j\Bigg).$$

$\lhd$ Из условия $\mathscr{D}l_i = [\underline{\partial}l_i, \overline{\partial}l_i]$ видно, что $l_i = p_i - q_i$, где

$$p_i(x) = \sup_{S\in\underline{\partial}l_i} S(x), \quad q_i(x) = \sup_{T\in\overline{\partial}l_i} T(x)$$

при всех $i := 1, \dots, n$. Предложение 6.1.2 дает выражение операторов g и h через операторы p_i и q_i. Для завершения доказательства достаточно применить двойственность Минковского. При этом следует воспользоваться аддитивностью двойственности Минковского, а также формулой 2.1.7 (1), утверждающей, что точную верхнюю границу сублинейных операторов двойственность Минковского переводит в операторную оболочку опорных множеств этих операторов. $\triangleright$

6.1.5. Разность опорных множеств $U, V \in \mathrm{CS}_c(X, E)$ мы можем определить, используя вложение ι, рассмотренное в 6.1.3. Именно, за такую разность можно принять элемент $\iota(U) - \iota(V)$ модуля $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$. Но при этом указанная разность не совпадает, вообще говоря, с элементом вида $\iota(W)$ ни для какого опорного множества W. Если все же $\iota(U) - \iota(V) = \iota(W)$ для некоторого опорного множества W, то $[W, \{0\}] = [U, V]$ или, что то же самое, $(W, \{0\}) \sim (U, V)$, поэтому $U = V + W$. В этом случае мы пишем $W = U \div V$. Однако разность $W = U \div V$ может существовать и в более общей ситуации, чем наличие равенства $U = V + W$.

Определим операцию $\div$ явно. Пусть $U, V \in \mathrm{CS}_c(X, E)$. Положим

$$U \div V = \{x : \ x + V \subset U\}.$$

Пространство $\mathrm{CS}_c(X, E)$ не замкнуто относительно операции $\div$, так как результат этой операции может быть пустым множеством.

(1) *Если множество $U \div V$ непусто, то оно опорно.*

$\triangleleft$ Согласно 2.4.12 непустое множество $W \subset L(X, E)$ опорно в том и только в том случае, когда оно: 1) слабо порядково ограничено, т. е. для любого $x \in X$ множество $\{T(x) : T \in W\}$ порядково ограничено в E; 2) операторно выпукло, т. е. если $T_1, T_2 \in W$ и $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$, то $\alpha T_1 + (I_E - \alpha) T_2 \in W$; 3) слабо o-замкнуто, т. е. если сеть $(T_\beta) \subset W$ такова, что для каждого $x \in X$ существует $Tx := o\text{-}\lim_\beta T_\beta(x)$, то $T \in W$.

Положим $W := U \div V$. Для фиксированного $T \in V$ верно $W + T \subset U$, поэтому множество $W + T$ слабо порядково ограничено, ибо таковым является U. Но тогда множество W тоже слабо порядково ограничено.

Покажем, что множество W операторно выпукло. Пусть W непусто, и возьмем $T_1, T_2 \in W$. Тогда для любого $S \in V$ будет

T_1+S, $T_2+S \in U$ и, следовательно,

$$U \ni \alpha(T_1+S)+(I_E-\alpha)(T_2+S)=\alpha T_1+(I_E-\alpha)T_2+S,$$

какой бы ни был ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)^+$, $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$. Отсюда, ввиду произвола в выборе $S \in V$, получаем требуемое $\alpha T_1 + (I_E-\alpha)T_2 \in W$.

Наконец, допустим, что $T_\beta + S \in U$ для любых β и $S \in V$. Тогда $(T+S)(x) = o\text{-}\lim\,(T_\beta+S)(x)$ при всех $x \in X$, поэтому $T+S \in U$ ввиду слабой порядковой замкнутости U. Тем самым $T \in W$. $\triangleright$

Аналогичную операцию можно ввести в $\mathrm{Sbl}(X,E)$. Для $p,q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ положим по определению

$$(p \div q)(x) := \sup\big\{r(x):\ r \in \mathrm{Sbl}(X,E),\ r+q \leqslant p \quad (x \in X)\big\}.$$

Это равенство определяет сублинейный оператор $p \div q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ в том и только в том случае, если существует хоть один сублинейный оператор $r \in \mathrm{Sbl}(X,E)$, для которого $q+r \leqslant p$.

(2) *Если для сублинейных операторов $p,q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ существует $p \div q$, то имеет место равенство $\partial(p \div q) = (\partial p) \div (\partial q)$.*

$\triangleleft$ Если $T \in (\partial p) \div (\partial q)$, то по определению операции $\div$ для множеств будет $T + \partial q \subset \partial p$ или, что то же, $T+q \leqslant p$. Тем самым $T \leqslant p \div q$. Наоборот, обозначим через W объединение множеств ∂r по всем $r \in \mathrm{Sbl}(X,E)$, удовлетворяющим неравенству $r+q \leqslant p$. Как видно из определений, $\partial(p \div q) = \mathrm{cop}(W)$. В то же время $U \subset (\partial p) \div (\partial q)$. Согласно (1) $(\partial p) \div (\partial q)$ — опорное множество, следовательно, $\mathrm{cop}(U) \subset (\partial p) \div (\partial q)$. $\triangleright$

(3) *Пусть U, V и W — опорные множества, а p, q и r — сублинейные операторы. Если $p = q+r$, то $r = p \div q$; если $U = V+W$, то $W = U \div V$.*

$\triangleleft$ Допустим, что $p=q+r$. Тогда для любого сублинейного оператора r', для которого $r'+q \leqslant p$, будет $r' \leqslant r$. Тем самым $r = p \div q$. Второе утверждение следует из первого в силу двойственности Минковского с учетом (2). $\triangleright$

(4) *Пусть U_1, V_1, U_2 и V_2 — опорные множества, а p_1, q_1, p_2 и q_2 — сублинейные операторы. Если $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$, то $p_1 \div q_1 = p_2 \div q_2$; если $(U_1,V_1) \sim (U_2,V_2)$, то $U_1 \div V_1 = U_2 \div V_2$.*

$\lhd$ Пусть $r + q_1 \leqslant p_1$. Тогда $r \leqslant p_1 - q_1 = p_2 - q_2$ и, стало быть, $r + q_2 \leqslant p_2$. Переход в последнем соотношении к супремуму по всем указанным r дает $p_1 \dotdiv q_1 \leqslant p_2 \dotdiv q_2$. Обратное неравенство доказывается аналогично. Утверждение относительно опорных множеств выводится путем применения к уже доказанному двойственности Минковского с учетом (2). $\rhd$

6.1.6. Пусть E — векторная решетка, а F — произвольное K-пространство. Сублинейный оператор $p : E \to F$ называют *мажорируемым,* если существует линейный положительный оператор $\Lambda : E \to F$ такой, что $|p(x)| \leqslant \Lambda(|x|)$ для всех $x \in E$. При этом Λ именуют *мажорантой* оператора p. Множество операторов $\mathscr{U} \in L^{\sim}(E, F)$ называют *равномерно мажорируемым* (с *равномерной мажорантой* Λ), если $|Tx| \leqslant \Lambda(|x|)$ для всех $x \in E$ и $T \in \mathscr{U}$. Взяв $x \in E^+$, положим

$$C(x,p) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} p(x_k) : \ x_1, \dots, x_n \in E, \ \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant x, \ n \in \mathscr{N} \right\}.$$

Для произвольного сублинейного оператора $p : E \to F$ равносильны следующие утверждения:

(1) *оператор p мажорируем;*

(2) *существуют такие операторы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^{\sim}(E, F)$, что $\Lambda_1(e) \leqslant -p(-e) \leqslant p(e) \leqslant \Lambda_2(e)$ для всех $e \in E^+$;*

(3) *опорное множество ∂p порядково ограничено в K-пространстве $L^{\sim}(E, F)$;*

(4) *опорное множество ∂p равномерно мажорируемо;*

(5) *для любого $x \in E^+$ множество $C(x, p)$ порядково ограничено в E.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если Λ — мажоранта оператора p, то p удовлетворяет условию (2) с операторами $\Lambda_1 := -\Lambda$ и $\Lambda_2 := \Lambda$.

(2) $\to$ (3): Если выполнено (2), то ∂p содержится в порядковом отрезке $[\Lambda_1, \Lambda_2]$.

(3) $\to$ (4): Если выполнено (3), то оператор $\Lambda := \sup\{|T| : T \in \partial p\}$, где супремум вычисляется в $L^{\sim}(E, F)$, будет равномерной мажорантой множества ∂p.

(4) $\to$ (5): Пусть $\Lambda \in L^+(E, F)$ — равномерная мажоранта множества ∂p. Возьмем такие элементы $x \in E^+$, $x_1, \dots, x_n \in E$, что

$|x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant x$. Привлекая теорему Хана — Банаха — Канторовича, для каждого x_k подберем оператор $T_k \in \partial p$ так, чтобы $T_k x_k = p(x_k)$ (см. 1.4.14 (1)). Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = \sum_{k=1}^{n} T_k x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Lambda(|x_k|) \leqslant \Lambda(x),$$

что и доказывает порядковую ограниченность множества $C(x,p)$.

(5) $\to$ (1): Для каждого $x \in E^+$ положим $\Lambda(x) := \sup C(x,p)$. Покажем, что Λ — аддитивный оператор из E^+ в F. В самом деле, пусть $x = y+z$, $y,z \in E^+$. Возьмем такие $y_1,\ldots,y_n \in E$ и $z_1,\ldots,z_m \in E$, что $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant y$ и $|z_1| + \ldots + |z_m| \leqslant z$. Тогда $|y_1| + \ldots + |y_n| + |z_1| + \ldots + |z_m| \leqslant x$,

$$\sum_{k=1}^{n} p(y_k) + \sum_{l=1}^{m} p(z_l) \leqslant \Lambda(x).$$

Переход в этом соотношении по указанным y_k и z_l дает $\Lambda(y)+\Lambda(z) \leqslant \Lambda(x)$.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $x_1,\ldots,x_n \in E$, для которых $|x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant x = y+z$. В силу леммы о двойном разбиении существуют такие $y_1,\ldots,y_n \in E$ и $z_1,\ldots,z_n \in E$, что $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant y$, $|z_1| + \ldots + |z_n| \leqslant z$ и $x_k = y_k + z_k$ для всех $k := 1,\ldots,n$. Учитывая определение Λ, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = \sum_{k=1}^{n} p(y_k+z_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(y_k) + \sum_{k=1}^{n} p(z_k) \leqslant \Lambda(y) + \Lambda(z).$$

Очевидно, что оператор Λ также и положительно однороден, т. е. $\Lambda(\lambda x) = \lambda\Lambda(x)$ при $x \in E^+$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Таким образом, существует положительный оператор из E в F, совпадающий с Λ на конусе E^+, который мы обозначим тем же символом Λ. Из определения Λ видно, что $p(x) \leqslant \Lambda(|x|)$ для произвольного $x \in E$. При замене x на $-x$ получим $p(-x) \leqslant \Lambda(|x|)$, поэтому $|p(x)| \leqslant p(x) \vee p(-x) \leqslant \Lambda(|x|)$ $(x \in E)$. $\triangleright$

6.1.7. Покажем теперь, что при некоторых условиях композиция квазилинейных операторов будет квазилинейной.

Пусть X — векторное пространство, E — векторная решетка, а F — некоторое K-пространство. Рассмотрим сублинейные операторы $P, Q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ и $p, q \in \mathrm{Sbl}(E, F)$, предположив, что p и q мажорируемы. Тогда оператор $R = (p - q) \circ (P - Q)$ представим в виде разности двух сублинейных операторов.

$\lhd$ Рассмотрим сублинейный оператор $(P \times Q) : X \to E \times E$ и линейный оператор $\pi : E \times E \to E$, определенные формулами

$$(P \times Q)(x) = (P(x), Q(x)); \quad \pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2.$$

Декартовы произведения $E \times E$ и $F \times F$ наделяют, как обычно, покоординатными алгебраическими операциями и порядком. Как видно, имеет место представление $R = p\pi(P \times Q) - q\pi(P \times Q)$.

Последнее соотношение не дает нам требуемого представления в виде разности сублинейных операторов, так как $p\pi$ и $q\pi$ не являются возрастающими операторами. Следовательно, последние нужно заменить на возрастающие операторы $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ так, чтобы сохранить представление $R = \widetilde{p}(P \times Q) - \widetilde{q}(P \times Q)$. Сначала заметим, что сублинейный оператор r из предупорядоченного векторного пространства Z в F будет возрастающим в том и только в том случае, если $r(z) \leqslant 0$ при $z \leqslant 0$. В самом деле, последнее условие, очевидно, необходимо. Если же оно выполнено, то всякий оператор $T \in \partial r$ положителен, так как $-Tz \leqslant p(-z) \leqslant 0$ для $z \in Z^+$. Остается сослаться на 2.1.1 (2).

Пусть теперь регулярные операторы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^{\sim}(E, F)$ таковы, что для каждого из операторов p и q выполнено условие 6.1.6 (2). Тогда для $e_1, e_2 \in E^+$ справедливы неравенства

$$p(e_2 - e_1) \leqslant p(e_2) + p(-e_1) \leqslant \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1),$$
$$q(e_2 - e_1) \leqslant q(e_2) + q(-e_1) \leqslant \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1).$$

Эти неравенства можно переписать в виде

$$p\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leqslant 0, \quad q\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leqslant 0,$$

где оператор $\Lambda : E \times E \to F$ определяется формулой $\Lambda(a_1, a_2) := \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$ $(a_1, a_2 \in E)$. Последние соотношения показывают, что сублинейные операторы $\widetilde{p} = p\pi - \Lambda$ и $\widetilde{q} = q\pi - \Lambda$ возрастающие. Кроме того, очевидным образом выполняется равенство $R = \widetilde{p}(P \times Q) - \widetilde{q}(P \times Q)$. $\rhd$

6.2. Квазидифференцируемые отображения

В этом параграфе вводится класс квазидифференцируемых операторов и устанавливаются формулы для квазидифференцирования суммы и произведения.

6.2.1. Пусть X — векторное пространство, а E — некоторое K-пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to E^{\bullet}$ и точку $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если для некоторого $h \in X$ существует предел

$$f'(x_0)h := f'_{x_0}(h) := o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} =$$
$$= \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < \alpha < \varepsilon} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{0 < \alpha < \varepsilon} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha},$$

то его называют (*односторонней*) *производной* или, реже, *производной Дини f в точке x_0 по направлению h*. Допустим, что в точке x_0 существует производная $f'(x_0)h$ по любому направлению $h \in X$. Тогда возникает отображение $f'(x_0) : X \to E$, которое называют также (*односторонней*) *производной по направлениям* или *производной Дини*. В этой ситуации говорят также, что отображение f *дифференцируемо по направлениям*.

Говорят, что f *квазидифференцируемо* в точке x_0, если выполнены следующие условия:

(1) для каждого $h \in X$ существует односторонняя производная f в точке x_0 по направлению h;

(2) отображение $f'(x_0) : X \to E$ квазилинейно.

Если отображение f квазидифференцируемо в точке x_0, то, в силу двойственности Минковского, квазилинейному оператору $f'(x_0) \in \operatorname{QL}(X, E)$ отвечает элемент $\mathscr{D}\big(f'(x_0)\big) \in [\operatorname{CS}_c(X, E)]$, который называют *квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathscr{D}f(x_0)$.

Если $f'(x_0)$ допускает представление в виде разности сублинейных операторов $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$ так, что $\mathscr{D}f(x_0) = [\partial p, \partial q]$, то

$$f'(x_0)h = \sup\{S(h) :\ S \in \partial p\} - \sup\{T(h) :\ T \in \partial q\} =$$
$$= p(h) - q(h) \quad (h \in X).$$

При этом опорные множества ∂p и ∂q принято называть соответственно *субдифференциалом* и *супердифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначать $\underline{\partial} f(x_0)$ и $\overline{\partial} f(x_0)$. Итак,

$$\mathscr{D} f(x_0) := [\partial p, \partial q] := [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)].$$

Предположим, что квазидифференцируемое отображение f имеет в точке x_0 квазидифференциал вида $\mathscr{D} f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \{0\}]$ (или $\mathscr{D} f(x_0) = [\{0\}, \overline{\partial} f(x_0)]$). Тогда говорят, что f *субдифференцируемо* (соответственно, *супердифференцируемо*) в точке x_0. Если отображение f в некоторой точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ имеет производную по направлениям $T := f'(x_0)$, являющуюся линейным оператором, то это отображение одновременно субдифференцируемо и супердифференцируемо, причем $\mathscr{D} f(x_0) = [\{T\}, \{0\}] = [\{0\}, \{T\}]$.

Выпуклый оператор f субдифференцируем в каждой точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, ибо существует производная по направлениям $f'(x_0)$, являющаяся сублинейным оператором. При этом $\underline{\partial} f(x_0) = \partial f(x)$. Оператор f называют *вогнутым*, если $-f$ — выпуклый оператор. Вогнутый оператор f супердифференцируем в любой точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(-f))$, причем $\overline{\partial} f(x_0) = -\partial(-f)(x_0)$. В этом случае производная по направлениям $f'(x_0)$ также существует, но является *суперлинейным* оператором, т. е. $-f'(x_0)$ — сублинейный оператор.

Еще более широкий класс квазидифференцируемых отображений составляют разности выпуклых операторов (или, что то же самое, суммы выпуклых и вогнутых операторов).

Рассмотрим теперь вопросы квазидифференцируемости суммы и произведения квазидифференцируемых отображений.

6.2.2. *Теорема.* *Пусть операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom}(f)_i)$. Тогда их сумма также квазидифференцируема в этой точке и*

$$\mathscr{D}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0) = \mathscr{D} f_1(x_0) + \ldots + \mathscr{D} f_n(x_0).$$

Иными словами, если $\mathscr{D} f_i(x_0) = [\underline{\partial} f_i(x_0), \overline{\partial} f_i(x_0)]$ $(i := 1, \dots, n)$, то квазидифференциал суммы

$$\mathscr{D}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0) = \big[\underline{\partial}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0), \overline{\partial}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0)\big]$$

вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \underline{\partial}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0) &= \underline{\partial} f_1(x_0) + \ldots + \underline{\partial} f_n(x_0), \\ \overline{\partial}(f_1 + \ldots + f_n)(x_0) &= \overline{\partial} f_1(x_0) + \ldots + \overline{\partial} f_n(x_0). \end{aligned}$$

◁ Рассмотрим произвольные квазидифференцируемые в точке x_0 отображения $f_1, \dots, f_n$. Покажем, что сумма $f := f_1 + \ldots + f_n$ имеет производную по направлениям в точке x_0:

$$f'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0+\alpha h) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)\bigg) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big(f_i(x_0+\alpha h) - f_i(x_0)\Big)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)h.$$

Предположим, что $f_i'(x_0) = p_i - q_i$ $(i := 1, \dots, n)$. Тогда

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i - q_i\big) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Так как операторы $p_1 + \ldots + p_n$ и $q_1 + \ldots + q_n$ сублинейны, то тем самым установлена квазидифференцируемость отображения f в точке x_0. Далее в силу аддитивности отображения $\mathscr{D} : \mathrm{QL}(X, E) \to [\mathrm{CS}_c(X, E)]$ (см. 6.1.4 (2)) будет

$$\mathscr{D}f(x_0) = \mathscr{D}\Bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i\bigg)'(x_0)\Bigg) = \mathscr{D}\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)\bigg) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathscr{D}\big(f_i'(x_0)\big) = \mathscr{D}f_1(x_0) + \ldots + \mathscr{D}f_2(x_0),$$

что и требовалось. ▷

6.2.3. *Теорема.* *Пусть оператор $f : X \to E^{\bullet}$ квазидифференцируем в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ и $\lambda \in \operatorname{Orth}(E)$. Тогда оператор $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ также квазидифференцируем в этой точке и*

$$\mathscr{D}(\lambda f)(x_0) = \lambda \mathscr{D} f(x_0).$$

Иными словами, если $\mathscr{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$, то для квазидифференциала $\mathscr{D}(\lambda f)(x_0) = [\underline{\partial}(\lambda f)(x_0), \overline{\partial}(\lambda f)(x_0)]$ справедливы равенства

$$\underline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \lambda^{+}\underline{\partial} f(x_0) + \lambda^{-}\overline{\partial} f(x_0),$$

$$\overline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \lambda^+ \overline{\partial} f(x_0) + \lambda^- \underline{\partial} f(x_0).$$

$\lhd$ В силу o-непрерывности произвольного ортоморфизма производная по направлению отображения λf вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0)h &= o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{(\lambda f)(x_0+\alpha h) - (\lambda f)(x_0)}{\alpha} = \\ &= o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \lambda\left(\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha}\right) = \\ &= \lambda \cdot o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \lambda f'(x_0)h.\end{aligned}$$

Пусть $f'(x_0) = p - q$ для некоторых $p, q \in \mathrm{QL}(X, E)$. Тогда в силу установленного выше равенства

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0)h = \lambda f'(x_0)h = \lambda(p(h) - q(h)) = (\lambda^+ - \lambda^-)(p(h) - q(h)) = \\ = \big(\lambda^+ p(h) + \lambda^- q(h)\big) - \big(\lambda^- p(h) + \lambda^+ q(h)\big).\end{aligned}$$

Отсюда видна квазидифференцируемость оператора λf в точке x_0. Наконец, в силу однородности отображения $\mathscr{D}$ (см. 6.1.4 (1)) имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\lambda f)(x_0) = [\partial]((\lambda f)'(x_0)h) = [\partial](\lambda f'(x_0)h) = \\ = \lambda[\partial](f'(x_0)h) = \lambda \mathscr{D}(f)(x_0).\end{aligned}$$

Формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала отображения λf вытекают из 6.1.4 (1). $\rhd$

6.2.4. Если в условиях теоремы (1) положить $E = \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то получим, что для квазидифференцируемой в точке x_0 функции $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ функция λf также квазидифференцируема в точке x_0 и при этом формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала принимают вид:

$$\underline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \begin{cases} \lambda \underline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ -\lambda \overline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\overline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \begin{cases} \lambda \overline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ -\lambda \underline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

6.2.5. Далее рассмотрим вопрос о квазидифференцируемости произведения $g \cdot f$ двух квазидифференцируемых отображений $f, g : X \to E^{\bullet}$, действующего по правилу $g \cdot f : x \mapsto g(x)f(x)$. Однако последнее соотношение имеет смысл, если в E введена структура кольца. При этом для осуществления указанной программы нужно будет потребовать, чтобы E была f-алгеброй с единицей (см. П1.12). Но всякая f-алгебра с единицей изоморфна алгебре своих ортоморфизмов (см. П2.5 (7)), поэтому естественно рассмотреть ситуацию, когда изучаемые отображения принимают значения в $E^{\bullet}$ и $\mathrm{Orth}(E)^{\bullet}$, причем умножение $E^{\bullet} \times \mathrm{Orth}(E)^{\bullet} \to E$ имеет вид $(\pi, e) \mapsto \pi(e)$. Тогда произведение $g \cdot f : x \mapsto g(x)f(x)$ определено корректно, но необходимо еще выяснить, как связаны между собой модули $\mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и $\mathrm{QL}(X, E)$, $[\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$ и $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$.

(1) Для отображения $\varphi : X \to \mathrm{Orth}(E)$ и элемента $e \in E$ определим отображение $m_e(\varphi) := \varphi(\cdot)e : X \to E$, действующее по формуле $m_e(\varphi) : x \mapsto \varphi(x)e$. Теперь возьмем сублинейный оператор $p \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$. Если $e \in E^{+}$, то $m_e(p) \in \mathrm{Sbl}(X, E)$. Для произвольного $e \in E$ выполняется $m_e(p) \in \mathrm{QL}(X, E)$, так как $p(\cdot)e = p(\cdot)e^{+} - p(\cdot)e^{-}$. Пусть квазилинейный оператор $l \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ допускает представление $l = p - q$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$. Тогда для произвольного $e \in E$ имеем

$$m_e(l) = p(\cdot)e - q(\cdot)e = \big(p(\cdot)e^{+} + q(\cdot)e^{-}\big) - \big(p(\cdot)e^{-} + q(\cdot)e^{+}\big),$$

и, следовательно, $m_e(l) \in \mathrm{QL}(X, E)$.

(2) Аналогично для множества U отображений из X в $\mathrm{Orth}(E)$ и элемента $e \in E^{+}$ положим $m_e(U) := U(\cdot)e := \{m_e(\varphi) : \varphi \in U\}$. Если U — опорное множество, то легко проверить, что $m_e(U)$ также опорное множество. Если же $e \in E$ — произвольный элемент, то $m_e(U)$ обозначает класс эквивалентности, определяемый парой опорных множеств $(U(\cdot)e^{+}, U(\cdot)e^{-})$, т. е. $m_e(U) = [U(\cdot)e^{+}, U(\cdot)e^{-}] \in [\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$. Наконец, для $[U, V] \in \mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))$ положим

$$m_e([U, V]) := [U(\cdot)e^{+} + V(\cdot)e^{-}, U(\cdot)e^{-} + V(\cdot)e^{+}].$$

Таким образом, одним и тем же символом m_e мы обозначили два разных, но тесно взаимосвязанных отображения: одно из них действует из $\mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ в $\mathrm{QL}(X, E)$, а другое — из $\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))$ в $\mathrm{CS}_c(X, E)$.

(3) *Для $l \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и $e \in E$ имеет место равенство $\mathscr{D}(m_e(l)) = m_e(\mathscr{D}(l))$.*

$\triangleleft$ Достаточно установить, что для сублинейного оператора $p \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и положительного $e \in E$ верно $\partial(m_e(p)) = m_e(\partial p)$. Тогда требуемое следует непосредственно из определений (1) и (2). Включение $m_e(\partial p) \subset \partial(m_e(p))$ очевидно. Докажем противоположное включение.

Возьмем произвольный оператор $T \in \partial(m_e(p))$, т. е. $T \in L(X, E)$ и $Tx \leqslant p(x)e$ для всех $x \in X$. Отсюда видно, что $\pi T = T$, где π — порядковый проектор на полосу e^{dd}. В максимальном расширении mE K-пространства E выберем порядковую единицу $\mathbb{1}$ и тем самым мультипликативную структуру, для которой она служит кольцевой единицей. Существует положительный элемент $d \in mE$ такой, что $de = \pi\mathbb{1}$. Положим $S_0x := d \cdot Tx$ $(x \in X)$. Очевидно, что S_0 — линейный оператор из X в mE. Возьмем произвольный оператор $S_1 \in \partial p$ и введем новый оператор $S : X \to mE$ формулой $S := \pi S_0 + \pi^d S_1$. Тогда для произвольного $x \in X$ имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
Sx = \pi S_0 x + \pi^d S_1 x = \pi d \cdot Tx + \pi^d S_1 \leqslant \\
\leqslant \pi d \cdot p(x)e + \pi^d p(x) = \pi(\mathbb{1})p(x) + \pi^d p(x) = p(x).
\end{aligned}
$$

Тем самым $S \in \partial p$, откуда, в частности, следует, что образ S содержится в $\mathrm{Orth}(E)$, так как $Sx \in [-p(-x), p(x)] \subset E$. Кроме того, $(Sx)e = \pi(S_0x)e = \pi(d \cdot Tx)e = \pi Tx = Tx$ и, стало быть, $T = m_e(S) \in m_e(\partial p)$, что и требовалось. $\triangleright$

Ниже для объектов вида $m_e(\mathscr{D}l)$ мы используем более короткое и выразительное обозначение $(\mathscr{D}l)e$. Так, если рассматриваются отображения $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$, то выражение $\mathscr{D}g(x_0)f(x_0)$ — иное обозначение для $m_e(\mathscr{D}g(x_0))$, где $e := f(x_0)$, а $g(x_0)\mathscr{D}f(x_0)$ понимается в соответствии с 6.1.4 (1).

6.2.6. *Теорема.* *Пусть отображения $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$ квазидифференцируемы в $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$. Тогда отображение $gf = g \cdot f : X \to E^\bullet$, действующее по правилу $gf : x \mapsto g(x)f(x)$, также квазидифференцируемо в этой точке и справедлива формула*

$$
\mathscr{D}(g \cdot f)(x_0) = g(x_0)\mathscr{D}f(x_0) + \mathscr{D}g(x_0)f(x_0).
$$

Более того, если $\mathscr{D}(gf)(x_0) = [\underline{\partial}(gf)(x_0), \overline{\partial} gf(x_0)]$, *то имеют место представления*

$$\begin{aligned}\underline{\partial}(gf)(x) = g^+(x_0)\underline{\partial} f(x_0) + g^-(x_0)\overline{\partial} f(x_0) + \\ + \underline{\partial} g(x_0) f^+(x_0) + \overline{\partial} g(x_0) f^-(x_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(gf)(x) = g^+(x_0)\overline{\partial} f(x_0) + g^-(x_0)\underline{\partial} f(x_0) + \\ + \overline{\partial} g(x_0) f^+(x_0) + \underline{\partial} g(x_0) f^-(x_0).\end{aligned}$$

$\lhd$ Пусть f и g квазидифференцируемы в $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$. Для $\alpha > 0$ положим $\varphi(\alpha, h) := f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)h$. По условию $o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \varphi(\alpha, h)/\alpha = 0$, следовательно, для некоторого $e' \in E^+$ будет $|\varphi(\alpha, h)/\alpha| \leqslant e'$ при всех достаточно малых α. Полагая $e := e' + |f'(x_0)h|$, можем написать

$$|(g(x_0+\alpha h) - g(x_0))(f'(x_0)h + \varphi(\alpha, h)/\alpha)| \leqslant |g(x_0+\alpha h) - g(x_0)|(e) \xrightarrow{(o)} 0.$$

Учитывая доказанное, выводим:

$$\begin{gathered}(gf)'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\big(g(x_0 + \alpha h) f(x_0 + \alpha h) - g(x_0) f(x_0)\big) = \\ = o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\big(g(x_0 + \alpha h) f(x_0 + \alpha h) - g(x_0) f(x_0 + \alpha h) + \\ + g(x_0) f(x_0 + \alpha h) - g(x_0) f(x_0)\big) = o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{(g(x_0 + \alpha h) - g(x_0))}{\alpha} f(x_0) + \\ + o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \big(g(x_0 + \alpha h) - g(x_0)\big)\big(f'(x_0)h + \varphi(\alpha, h)/\alpha\big) + \\ + o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} g(x_0) \cdot \frac{(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0))}{\alpha} = \\ = g'(x_0)(h) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)h.\end{gathered}$$

Итак, отображение gf имеет производную по направлениям в точке x_0, причем

$$(gf)'(x_0)h = g'(x_0)(h) f(x_0) + g(x_0) f'(x_0)(h) \quad (h \in X).$$

В силу квазидифференцируемости f и g существуют операторы $r, s \in \operatorname{Sbl}(X, \operatorname{Orth}(E))$ и $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$ такие, что $g'(x_0) = r - s$ и

$f'(x_0) = p - q$. Покажем, что производная $(gf)'(x_0)$ представима в виде разности сублинейных операторов:

$$\begin{aligned}(gf)'(x_0)h =& g'(x_0)(h)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0)(h) = \\ &= (r(h) - s(h))f(x_0) + g(x_0)(p(h) - q(h)) = \\ &= r(h)f(x_0) - s(h)f(x_0) + g(x_0)p(h) - g(x_0)q(h) = \\ &= r(h)f^+(x_0) - r(h)f^-(x_0) - s(h)f^+(x_0) + s(h)f^-(x_0) + \\ &+ g^+(x_0)p(h) - g^-(x_0)p(h) - g^+(x_0)q(h) + g^-(x_0)q(h) = \\ &= \big(r(h)f^+(x_0) + s(h)f^-(x_0) + g^+(x_0)p(h) + g^-(x_0)q(h)\big) - \\ &- \big(r(h)f^-(x_0) + s(h)f^+(x_0) + g^-(x_0)p(h) + g^+(x_0)q(h)\big).\end{aligned}$$

Вновь привлекая линейность отображения $\mathscr{D}$, с учетом 6.2.5 (3) получим:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(g \cdot f)(x_0) = \mathscr{D}\big((gf)'(x_0)\big) = \mathscr{D}\big(g'(x_0)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big) = \\ = \mathscr{D}(g'(x_0))f(x_0) + g(x_0)\mathscr{D}(f'(x_0)) = \mathscr{D}g(x_0)f(x_0) + g(x_0)\mathscr{D}f(x_0). \ \triangleright\end{aligned}$$

6.2.7. Рассмотрим два частных случая установленной теоремы.

(1) Пусть f и x_0 те же, что и в 6.2.6, а $g : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — квазидифференцируемая в точке x_0 функция. Определим отображение $\tilde{g} : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$ формулой $\tilde{g}(x) := g(x)I_E$. Тогда отображения $\tilde{g}$ и f удовлетворяют условиям теоремы 6.2.6. Следовательно, отображение, действующее по правилу $gf : x \mapsto g(x)f(x)$, квазидифференцируемо в точке x_0 и справедливы формулы

$$\begin{aligned}&\underline{\partial}(gf)(x_0) = \\ &= \begin{cases} g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\underline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\underline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{\partial}(gf)(x_0) = \\ &= \begin{cases} g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\overline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\overline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0, \end{cases}\end{aligned}$$

(2) При $E = \mathbb{R}$ из теоремы 6.2.4 следует, что для квазидифференцируемых в точке x_0 функций $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ и $g : X \to \mathbb{R}^\bullet$

функция $g \cdot f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ также квазидифференцируема в точке x_0 и при этом формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала принимают вид:

$$\underline{\partial}(gf)(x_0) = \\ = \begin{cases} g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0, \\ g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\overline{\partial}(gf)(x_0) = \\ = \begin{cases} g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0, \\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0, \\ g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0. \end{cases}$$

6.2.8. *Теорема.* *Пусть отображение $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Допустим, что для каждого $x \in \mathrm{dom}(g)$ ортоморфизм $g(x)$ обратим, и обозначим символом $1/g := \frac{1}{g}$ отображение, действующее по правилу $x \mapsto (g(x))^{-1}$. Тогда отображение $1/g$ квазидифференцируемо в точке x_0 и*

$$\mathscr{D}(1/g)(x_0) = -\big(g(x_0)\big)^{-2}\mathscr{D}g(x_0).$$

Иными словами, если $\mathscr{D}(1/g)(x_0) = [\underline{\partial}(1/g)(x_0), \overline{\partial}(1/g)(x_0)]$, то имеют место представления

$$\underline{\partial}(1/g)(x_0) = (g(x_0))^{-2}\overline{\partial}g(x_0), \quad \overline{\partial}(1/g)(x_0) = (g(x_0))^{-2}\underline{\partial}g(x_0).$$

$\lhd$ Умножив выражение $\alpha^{-1}\big((1/g)(x_0+\alpha h) - (1/g)(x_0)\big)$ на ортоморфизм $I_E := g(x_0)g(x_0+\alpha h)(g(x_0))^{-1}(g(x_0+\alpha h))^{-1}$, получим

$$\frac{(1/g)(x_0+\alpha h) - (1/g)(x_0)}{\alpha} = \\ = \frac{g(x_0) - g(x_0+\alpha h)}{\alpha} \cdot g(x_0)^{-1} \cdot g(x_0+\alpha h)^{-1}.$$

Переходя к o-пределу при $\alpha \downarrow 0$, получаем равенство $(1/g)'(x_0)h = -(g(x_0))^{-2}g'(x_0)h$.

Пусть теперь p, q — сублинейные операторы такие, что выполнено соотношение $g'(x_0)(h) = p(h) - q(h)$. Тогда

$$(1/g)'(x_0)h = (g(x_0))^{-2}q(h) - (g(x_0))^{-2}p(h).$$

Поскольку $(g(x_0))^{-2}$ — положительный ортоморфизм, то понятно, что $(1/g)'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и отображение $(1/g)$ квазидифференцируемо в точке x_0. Формула для вычисления квазидифференциала отображения $(1/g)$ следует, как и выше, из линейности отображения $\mathscr{D}$. $\triangleright$

6.2.9. Если для отображения $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$ существует $1/g$, то по определению полагают $f/g := \frac{f}{g} = f \cdot (1/g)$.

(1) *Пусть отображения $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^\bullet$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$, причем существует $1/g$. Тогда отображение $f/g := 1/g \cdot f$ квазидифференцируемо в точке x_0 и*

$$\mathscr{D}(f/g)(x_0) = \frac{g(x_0)\mathscr{D}f(x_0) - \mathscr{D}g(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

$\triangleleft$ Следует из 6.2.6 и 6.2.8. $\triangleright$

(2) *Если операторы f_1 и $f_2 : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)_1) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)_2)$, то их разность $f_1 - f_2$ квазидифференцируема в этой точке и*

$$\mathscr{D}(f_1 - f_2)(x_0) = \mathscr{D}f_1(x_0) - \mathscr{D}f_2(x_0).$$

$\triangleleft$ Следует из 6.2.2 и 6.2.3. $\triangleright$

6.3. Квазидифференциал композиции, супремума и инфимума

В текущем параграфе устанавливается, что композиция, супремум и инфимум квазидифференцируемых отображений квазидифференцируемы. Мы также выводим явные формулы для вычисления соответствующих квазидифференциалов.

6.3.1. Пусть E и F — некоторые K-пространства. Рассмотрим отображение $g : E \to F^{\bullet}$, дифференцируемое по направлениям в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$. Возьмем направление $u \in E$ и элемент $d \in F$. Предположим, что для любой последовательности $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$, имеет место соотношение

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{0<\alpha<1/m \\ |u'-u|\leqslant e_m}} \left| \frac{g(e_0+\alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - d \right| = 0.$$

Тогда d называют *производной Адамара* g *в точке* e_0 *по направлению* u и обозначают $g'(e_0)u := d$. Такое обозначение оправдано тем очевидным наблюдением, что если существует производная Адамара, то существует и производная Дини (в той же точке по тому же направлению) и их значения совпадают. Таким образом, производную Адамара g в точке e_0 по направлению u можно определить формулами

$$g'(e_0)u := g'_{e_0}(u) := \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{0<\alpha<1/m \\ |u'-u|\leqslant e_m}} \frac{g(e_0+\alpha u') - g(e_0)}{\alpha} = \\ = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{0<\alpha<1/m \\ |u'-u|\leqslant e_m}} \frac{g(e_0+\alpha u') - g(e_0)}{\alpha}.$$

Если производная Адамара $g'(e_0)u$ существует для каждого направления $u \in E$, то говорят, что отображение g *дифференцируемо по Адамару* в точке e_0.

Определение производной Адамара упрощается, если F — регулярное K-пространство. Напомним, что K-пространство F называют *регулярным*, если для любой последовательности вложенных подмножеств $F \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ таких, что $a = \inf_n \sup(A_n)$, существуют конечные подмножества $A'_n \subset A_n$, удовлетворяющие условию $o\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup(A'_n) = a$. Можно показать, что K-пространство F будет регулярным, если F удовлетворяет двум требованиям: 1) F имеет *счетный тип*, т. е. любое подмножество, состоящее из попарно дизъюнктных множеств, не более чем счетно; 2) в F выполняется *принцип диагонали*, т. е. для любой двойной последовательности $(e_{n,k}) \subset F$, имеющей пределы $e_n := o\text{-}\lim_{k\to\infty} e_{n,k}$ $(n \in \mathbb{N})$ и

$e := o\text{-}\lim_{n\to\infty} e_n$, существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (k_n) такая, что $e = o\text{-}\lim_{n\to\infty} e_{n,k_n}$. (Подробности см. в монографиях Б. З. Вулиха [29], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [88], А. Г. Кусраева [433].)

Пусть F — регулярное K-пространство. Элемент $d \in F$ будет производной Адамара отображения $g : E \to F^\bullet$ в точке $e_0 \in$ $\operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$ по направлению $u \in E$ в том и только в том случае, если для любых последовательностей $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(u_n) \subset E$ таких, что $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$, имеет место соотношение

$$d = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} =$$
$$= \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant m} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n}.$$

$\lhd$ Необходимость очевидна и верна даже без предположения о регулярности F. Докажем достаточность. Предположим, что для d выполняется указанное в формулировке условие. Возьмем последовательность $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$, и обозначим

$$c_m := \sup_{\substack{0<\alpha<1/m \\ |u'-u|\leqslant e_m}} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - d \right|.$$

Нужно доказать, что $c := \inf_m c_m = 0$. В силу регулярности F для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют конечные подмножества

$$\{\alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,l(m)}\} \subset (0, 1/m);\ \{u_{m,1}, \dots, u_{m,l(m)}\} \subset [u - e_m, u + e_m]$$

такие, что

$$c'_m := \sup_{0\leqslant l\leqslant l(m)} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{m,l} u_{m,l}) - g(e_0)}{\alpha_{m,l}} - d \right| \xrightarrow{(o)} c.$$

Построим новую последовательность $(u_n) \subset E$, занумеровав подряд сначала группу $\{u_{1,1}, \dots, u_{1,l(1)}\}$, затем $\{u_{2,1}, \dots, u_{2,l(2)}\}$ и т. д. Точнее, полагаем $u_n := u_{m,k}$ при $n = l(m-1)+k$, где $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant l(m)$ и $l(0) := 0$. Очевидно, что последовательность (u_n) o-сходится к u.

Проделав то же самое с последовательностью конечных множеств $(\{\alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,l(m)}\})_{m\in\mathbb{N}}$, получим сходящуюся к нулю числовую последовательность (α_n). Если при этом (α_n) не является убывающей, то заменим α_n на $\sup_{k\geqslant n} \alpha_k$. Итак, $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$, поэтому в соответствии с нашим предположением

$$0 = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} - d \right| = o\text{-}\lim_{n\to\infty} c'_n = c,$$

что и требовалось. $\rhd$

6.3.2. В нашей ситуации дифференцируемость по Адамару отображения g не гарантирует непрерывности производной по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ в отличие от случая, когда $E = \mathbb{R}^n$ и $F = \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая, когда дифференцируемое по Адамару отображение имеет производную по направлениям, непрерывную в следующем смысле. Отображение $\varphi : E \to F$ называют *то-непрерывным* в точке $u_0 \in E$, если для любой последовательности $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$, выполняется

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|u-u_0|\leqslant e_n} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| = 0.$$

Из соображений, сходных с 6.3.1, можно получить, что если F — регулярное K-пространство, то *то*-непрерывность означает секвенциальную o-непрерывность. Напомним, что множество $U \subset E$ называют *нормальным*, если для любых $u_1, u_2 \in U$, $e \in E$ из $u_1 \leqslant e \leqslant u_2$ следует $e \in U$.

(1) *Пусть отображение $g : E \to F^\bullet$ дифференцируемо по Дини в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$. Предположим, что существуют нормальное множество $U \subset E$ и то-непрерывный сублинейный оператор $p : E \to F$ такие, что $e_0 \in \operatorname{core}(U)$ и*

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant p(u_1 - u_2) \quad (u_1, u_2 \in U).$$

Тогда g дифференцируемо по Адамару в точке e_0 и производная по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ то-непрерывна.

$\lhd$ Возьмем направление $u \in E$ и последовательности $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(e_n) \subset E$, для которых $\alpha_n \downarrow 0$ и $e_n \downarrow 0$. Легко видеть справедливость соотношений

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{0<\alpha<1/n\\ |u'-u|\leqslant e_n}} \left| \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{0<\alpha<1/n} \left| \frac{g(e_0+\alpha u)-g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \\
&+ \sup_{\substack{0<\alpha<1/n\\ |u'-u|\leqslant e_n}} \left| \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0+\alpha u)}{\alpha} \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{0<\alpha<1/n} \left| \frac{g(e_0+\alpha u)-g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \sup_{|u'-u|\leqslant e_n} p(u'-u) \xrightarrow{(o)} 0,
\end{aligned}
$$

из которых видна дифференцируемость по Адамару отображения g в точке e_0 по направлению u.

По условию $e_0 \in \operatorname{core}(U)$, стало быть, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $e_0 + \varepsilon(u \pm e_1) \in U$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Если $|u' - u| \leqslant e_n$, то с учетом нормальности U для тех же ε можем написать $e_0 + \varepsilon u' \in e_0 + \varepsilon[u - e_n, u + e_n] \subset e_0 + [\varepsilon(u - e_1), \varepsilon(u + e_1)] \subset U$. Итак, если $0 < \alpha < 1/m < \varepsilon_0$ и $|u' - u| \leqslant e_n$, то $e_0 + \alpha u' \in U$ и справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&|g'(e_0)u' - g'(e_0)u| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{0<\alpha<1/m} \left| \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0)}{\alpha} - \frac{g(e_0+\alpha u)-g(e_0)}{\alpha} \right| \leqslant \\
&\leqslant p(u'-u) \leqslant \sup_{|u'-u|\leqslant e_n} p(u'-u) \xrightarrow{(o)} 0,
\end{aligned}
$$

что и показывает mo-непрерывность $g'(e_0)$. $\rhd$

(2) *Пусть K-пространство F регулярно. Если отображение $g : E \to F^\bullet$ дифференцируемо по Адамару в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, то производная по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ секвенциально o-непрерывна.*

$\lhd$ Воспользуемся установленным в 6.3.1 вариантом дифференцируемости по Адамару в случае регулярного K-пространства F. Возьмем последовательности $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(u_n) \subset E$, для которых $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$. Положим

$$
d_{k,n} := \sup_{m\geqslant n} \left| \frac{g(e_0+\alpha_m u_k)-g(e_0)}{\alpha_m} - g'(e_0)u_k \right|.
$$

По определению производной по направлениям $o\text{-}\lim_{n\to\infty} d_{k,n} = 0$ для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. В силу предположения о регулярности F существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k) такая, что $o\text{-}\lim_{k\to\infty} d_{k,n_k} = 0$. Отсюда выводим

$$|g'(e_0)u_k - g'(e_0)u| \leqslant \left|\frac{g(e_0+\alpha_{n_k}u_k)-g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u_k\right| +$$
$$+\left|\frac{g(e_0+\alpha_{n_k}u_k)-g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u\right| \leqslant d_{k,n_k} + w_k \xrightarrow{(o)} 0,$$

где $w_k := \sup_{m\geqslant k} |\alpha_{n_m}^{-1}\big(g(e_0+\alpha_{n_m}u_m) - g(e_0)\big) - g'(e_0)u| \xrightarrow{(o)} 0$ по определению производной Адамара. $\rhd$

6.3.3. *Теорема.* *Пусть X — векторное пространство, E и F — K-пространства. Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ дифференцируемо по направлениям в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, а отображение $g : E \to F^\bullet$ дифференцируемо по Адамару в точке $f(x_0) \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, причем $g'(f(x_0))(\cdot)$ — это то-непрерывное отображение. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

$\lhd$ Возьмем произвольное направление $h \in X$ и для $\alpha > 0$ обозначим

$$v(\alpha,h) := \alpha^{-1}\big(f(x_0+\alpha h) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)h\big),$$
$$w(\alpha,u) := \alpha^{-1}\big(g(f(x_0)+\alpha u) - g(f(x_0)) - \alpha g'(f(x_0))u\big).$$

Так как отображение f дифференцируемо по направлениям в точке x_0, то $o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} v(\alpha,h) = 0$ и, значит, $u(\alpha,h) := f'(x_0)h + v(\alpha,h) \xrightarrow{(o)} f'(x_0)h$ при $\alpha \downarrow 0$. Последнее означает, что $e_n := \sup_{0<\alpha<1/n} |u(\alpha,h) - f'(x_0)h| \downarrow 0$. Используя введенные обозначения, можем написать

$$(g\circ f)(x_0+\alpha h) = g(f(x_0+\alpha h)) = g\big(f(x_0) + \alpha f'(x_0)h + \alpha v(\alpha,h)\big) =$$
$$= g\big(f(x_0) + \alpha u(\alpha,h)\big) = g(f(x_0)) + \alpha g'(f(x_0))u(\alpha,h) + \alpha w(\alpha, u(\alpha,h)).$$

Учитывая установленное соотношение, mo-непрерывность $g'(e_0)(\cdot)$ и определение дифференцируемости по Адамару, выводим:

$$\sup_{0<\alpha<1/n}\left|\frac{(g\circ f)(x_0+\alpha h)-(g\circ f)(x_0)}{\alpha}-g'(f(x_0))(f'(x_0)h)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{0<\alpha<1/n}\Big(\big|g'(f(x_0))u(\alpha,h)-g'(f(x_0))(f'(x_0)h)\big|+\big|w(\alpha,u(\alpha,h))\big|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{|u-f'(x_0)h|\leqslant e_n}|g'(f(x_0))u-g'(f(x_0))(f'(x_0)h)|+$$
$$+\sup_{0<\alpha<1/n,\,|u-f'(x_0)h|\leqslant e_n}|w(\alpha,u)|\xrightarrow{(o)}0.$$

Отсюда следуют существование производной $(g\circ f)(x_0)(h)$ и справедливость равенства $(g\circ f)(x_0)(h)=g'(f(x_0))(f'(x_0)(h))$. $\triangleright$

6.3.4. *Теорема.* *Пусть X — векторное пространство, E и F — K-пространства. Пусть отображение $f:X\to E^{\bullet}$ квазидифференцируемо в точке $x_0\in\operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, а отображение $g:E\to F^{\bullet}$ квазидифференцируемо и одновременно дифференцируемо по Адамару в точке $e_0:=f(x_0)\in\operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, причем производная $g'(e_0)(\cdot)$ mo-непрерывна. Предположим, сверх того, что квазидифференциал $\mathscr{D}g(e_0)$ определяется парой порядково ограниченных в $L^{\sim}(E,F)$ опорных множеств $\underline{\partial}g(e_0)$ и $\overline{\partial}g(e_0)$. Тогда отображение $g\circ f$ квазидифференцируемо в точке x_0. Если $\underline{\partial}g(e_0)\cup\overline{\partial}g(e_0)\subset[\Lambda_1,\Lambda_2]$ для некоторых $\Lambda_1,\Lambda_2\in L^{\sim}(E,F)$, то квазидифференциал $\mathscr{D}(g\circ f)(x_0)=[\underline{\partial}(g\circ f)(x_0),\overline{\partial}(g\circ f)(x_0)]$ может быть вычислен по следующим формулам:*

$$\underline{\partial}(g\circ f)(x_0)=\bigcup_{C\in\underline{\partial}g(e_0)}\partial(P_C),\quad \overline{\partial}(g\circ f)(x_0)=\bigcup_{C\in\overline{\partial}g(e_0)}\partial(P_C),$$

где

$$P_C(x_0):=(C-\Lambda_1)\sup_{S\in\underline{\partial}f(x_0)}S(x_0)+(\Lambda_2-C)\sup_{T\in\overline{\partial}f(x_0)}T(x_0).$$

$\triangleleft$ Согласно 6.1.7 и теореме 6.3.3 отображение $g\circ f$ квазидифференцируемо в точке x_0 и справедливо равенство

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\circ f'(x_0)=(p-q)\circ(P-Q),$$

где операторы $P, Q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ и $p, q \in \mathrm{Sbl}(E, F)$ удовлетворяют соотношениям

$$\partial p = \underline{\partial} g(e_0), \quad \partial q = \overline{\partial} g(e_0),$$
$$\partial P = \underline{\partial} f(x_0), \quad \partial Q = \overline{\partial} f(x_0),$$

а операторы p и q можно выбрать даже мажорируемыми. Так же, как и в 6.1.7, положим $\Lambda := (\Lambda_1, -\Lambda_2)$ $(\Lambda : (a_1, a_2) \mapsto \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2))$, $\widetilde{p} = p\pi - \Lambda$, $\widetilde{q} := q\pi - \Lambda$, $\pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2$. В соответствии с 6.1.7 $(g \circ f)'(x_0) = \widetilde{p}(P \times Q) - \widetilde{q}(P \times Q)$, следовательно, $\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial p_1$ и $\overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial q_1$, где $p_1 := \widetilde{p}(P \times Q)$ и $q_1 := \widetilde{q}(P \times Q)$. Здесь, как и в 6.1.7, $(P \times Q)(x) = (P(x), Q(x))$. Поскольку $\widetilde{p}$ — возрастающий сублинейный оператор, то согласно формуле 2.1.6 (3) будет

$$\partial p_1 = \bigcup_{S \in \underline{\partial}\tilde{p}} \underline{\partial}(S(P \times Q)).$$

Применим теперь формулу 1.4.14 (4):

$$\partial \widetilde{p} = \partial(p\pi - \Lambda) = \{(C \circ \pi - \Lambda) : \ C \in \partial p\}.$$

Таким образом, справедливо представление

$$\partial p_1 = \bigcup_{C \in \partial p} \partial\big((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q\big).$$

Аналогично устанавливается представление

$$\partial q_1 = \bigcup_{C \in \partial q} \partial\big((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q\big).$$

Остается выполнить правила субдифференцирования. $\triangleright$

6.3.5. *Пусть отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ дифференцируемы по направлениям в точке x_0. Тогда отображение $f := f_1 \vee \ldots \vee f_n$ также дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и имеет место формула*

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i'(x_0)h \Big\},$$

где

$$\Gamma_n(x_0) := \Gamma_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \ \alpha_k \in \mathrm{Orth}^+(E), \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \ \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x_0) = f(x_0)\Big\}.$$

$\lhd$ Конечно-порожденный канонический сублинейный оператор $\varepsilon_n : E^n \to E$, очевидно, ro-непрерывен и удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_n(u) - \varepsilon_n(u')| \leqslant p(u - u') \quad (u, u' \in E^n),$$

где $p(u) := \varepsilon_n|u|$ (см. 2.1.1). В соответствии с 6.3.2 (1) ε_n дифференцируем по Адамару в любой точке, а его производная по направлениям ro-непрерывна. Для $x \in X$ положим $\varphi(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$, считая $\varphi(x) = +\infty$, если $f_k(x) = +\infty$ хотя бы для одного k. Ясно, что полученное отображение $\varphi : X \to (E^n)^\bullet$ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и $\varphi'(x_0)h = (f_1'(x_0)h, \dots, f_n'(x_0)h)$ для всех $h \in X$. Таким образом, к композиции $\varepsilon_n \circ \varphi$ применима теорема 6.3.3. Так как $f = \varepsilon_n \circ \varphi$, то получим формулу

$$f'(x_0)h = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ \varphi'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Остается заметить, что $\partial(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) = \Gamma_n(x_0)$. Следовательно,

$$\varepsilon_n'(\varphi(x_0))u = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad (u = (e_1, \dots, e_n) \in E^n). \ \rhd$$

6.3.6. *Пусть отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ дифференцируемы по направлениям в точке x_0. Тогда отображение $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ также дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и имеет место формула*

$$g'(x_0)h = \bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Delta_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i'(x_0)h \Big\},$$

где

$$\Delta_n(x_0) := \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \Big\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \ \alpha_k \in \mathrm{Orth}^+(E),$$
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \ \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x_0) = g(x_0) \Big\}.$$

$\lhd$ Доказательство проводится так же, как и в 6.3.5, но с той разницей, что формула дифференцирования по направлениям из 6.3.3 применяется к композиции $\psi \circ \varphi$, где $\psi(u) := -\varepsilon_n(-u) = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ $(u = (e_1, \dots, e_n) \in E^n)$. Учитывая очевидные соотношения

$$\Gamma_n(x_0; -f_1, \dots, -f_n) = \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$$

и $\varphi'(u_0)u = -\varepsilon_n'(-u_0)(-u)$, выводим

$$\psi'(\varphi(x_0)) \circ \varphi'(x_0)h = -\varepsilon_n'(-\varphi(x_0))(-\varphi'(x_0)h) =$$
$$= - \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0; -f_1, \dots, -f_n)} \sum_{k=1}^n -\alpha_k f_k'(x_0)h =$$
$$= \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)} \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k'(x_0)h,$$

что и требовалось. $\rhd$

6.3.7. Теорема. *Пусть отображения $f_1, \dots, f_m : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Положим $f := f_1 \vee \ldots \vee f_n$ и $g := f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$. Тогда отображения f и g квазидифференцируемы в точке x_0 и для квазидифференциалов $\mathscr{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ и $\mathscr{D}g(x_0) = [\underline{\partial} g(x_0), \overline{\partial} g(x_0)]$ имеют место представления*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^n \alpha_k \Big(\underline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l \neq k} \overline{\partial} f_l(x_0) \Big),$$
$$\overline{\partial} f(x_0) = \sum_{k=1}^n \overline{\partial} f_k(x_0), \quad \underline{\partial} g(x_0) = \sum_{k=1}^n \underline{\partial} f_k(x_0),$$

$$\overline{\partial} g(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Delta_n(x_0)} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\overline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l\neq k} \underline{\partial} f_l(x_0) \Big).$$

$\lhd$ Ограничимся доказательством для отображения f; отображение g рассматривается аналогично. Из предложения 6.3.5 следует дифференцируемость по направлениям отображения f в точке x_0, причем

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0)h \Big\} \quad (h \in X).$$

В силу квазидифференцируемости отображений f_i в точке x_0 имеют место представления $f_k'(x_0)h = p_k(h) - q_k(h)$ $(k := 1, \dots, n;\ h \in X)$, где p_k, q_k — сублинейные операторы. Введем следующие обозначения:

$$Q(h) := \sum_{k=1}^{n} q_k(h), \quad p_k'(h) := p_k(h) + \sum_{l\neq k} q_l(h),$$
$$P(h) := (p_1'(h), \dots, p_n'(h)) \in E^n \quad (h \in X).$$

Как видно, $P : X \to E^n$ и $Q : X \to E$ — сублинейные операторы. Учитывая введенные обозначения, напишем следующую цепочку равенств:

$$f'(x_0)h = \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(p_i(h) - q_i(h) \big) \Big\} =$$
$$= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(p_i(h) - q_i(h) \big) \Big\} + \sum_{i=1}^{n} q_i(h) - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i p_i(h) - \alpha_i q_i(h) + q_i(h) \big) \Big\} - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i p_i(h) + \sum_{j\neq i} \alpha_j q_i(h) \Big) \Big\} - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i'(h) - Q(h) = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P(h) - Q(h),$$

где $\varphi(x_0) := (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$. Итак, $f'(x_0) = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P - Q$, следовательно, отображение f квазидифференцируемо в точке x_0, причем $\underline{\partial} f(x_0) = \partial(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P)$ и $\overline{\partial} f(x_0) = \partial Q$. Остается вычислить соответствующие субдифференциалы $\partial(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P)$ и ∂Q, что несложно сделать, привлекая 2.1.6 (3) и 1.4.12 (1):

$$\partial\big(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P\big) = \bigcup_{A \in \varepsilon_n'(\varphi(x_0))} \partial(A \circ P) =$$
$$= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\partial p_i + \sum_{j \neq i} \partial q_j\Big),$$

$$\partial Q = \partial \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \partial q_i.$$

Полученные соотношения совпадают с требуемыми с точностью до обозначений. $\triangleright$

6.3.8. Сформулируем теорему 6.3.7 в скалярном случае $E = \mathbb{R}$. Принципиальное отличие последнего состоит в том, что точные границы достигаются, т. е. существует некоторое количество индексов $k \in \{1, \dots, n\}$, для которых $f(x_0) = f_k(x_0)$ и $g(x_0) = f_k(x_0)$. В этой связи множества $\Gamma_n(x_0)$ и $\Delta_n(x_0)$, а с ними и формула для вычисления квазидифференциалов несколько упрощаются. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема. *Пусть функции $f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}^{\bullet}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)_k)$. Положим $f := f_1 \vee \ldots \vee f_n$ и $g := f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$. Тогда функции f и g квазидифференцируемы в точке x_0 и их квазидифференциалы могут быть вычислены по формулам*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \operatorname{co} \bigcup_{k \in R(x_0)} \Big(\underline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{i \in R(x_0), i \neq k} \overline{\partial} f_i(x_0)\Big),$$
$$\overline{\partial} f(x_0) = \sum_{i \in R(x_0)} \overline{\partial} f_i(x_0), \quad \underline{\partial} g(x_0) = \sum_{i \in Q(x_0)} \underline{\partial} f_i(x_0),$$
$$\overline{\partial} g(x_0) = \operatorname{co} \bigcup_{k \in Q(x_0)} \Big(\overline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{i \in Q(x_0), i \neq k} \underline{\partial} f_i(x_0)\Big),$$

где $R(x_0) := \{k \in \{1,\dots,n\} : f(x_0) = f_k(x_0)\}$ *и* $Q(x_0) := \{k \in \{1,\dots,n\} : g(x_0) = f_k(x_0)\}$.

$\lhd$ Перепишем множество $\Gamma_n(x_0)$ в виде

$$\Gamma_n(x_0) = \Bigg\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha_k \geqslant 0, \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \ \sum_{k=1}^n \alpha_k (f(x_0) - f_k(x_0)) = 0\Bigg\}.$$

Равенство $\sum_{k=1}^n \alpha_k(f(x_0) - f_k(x_0)) = 0$ влечет $\alpha_k(f(x_0) - f_k(x_0)) = 0$ для всех k, так как $f(x_0) \geqslant f_k(x_0)$ и, стало быть, сумма состоит из неотрицательных слагаемых. Таким образом, число α_k отлично от нуля лишь только в том случае, когда соответствующий номер k входит в $R(x_0)$, поэтому в формулах из 6.3.7 объединение и суммирование следует производить по номерам из $R(x_0)$. Аналогично, вид множества $\Delta_n(x_0)$ приводит к суммированию и объединению по множеству номеров $Q(x_0)$. $\rhd$

6.4. Дезинтегрирование квазидифференциалов

В текущем параграфе техника дезинтегрирования применяется к квазидифференциалам. Устанавливается, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» исчисления — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов.

6.4.1. *Теорема.* *Пусть выполнены условия* 6.3.4 *и, сверх того, общая нижняя граница* Λ_1 *и общая верхняя граница* Λ_2 *множеств* $\underline{\partial} g(e_0)$ *и* $\overline{\partial} g(e_0)$ *входят в полосу, порожденную оператором Магарам. Тогда квазидифференциал* $\mathscr{D}\varphi(x_0) = [\underline{\partial}\varphi(x_0), \overline{\partial}\varphi(x_0)]$ *может быть вычислен по формулам*

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\underline{\partial} g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial} f(x_0) \times \overline{\partial} f(x_0)),$$
$$\overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\overline{\partial} g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial} f(x_0) \times \overline{\partial} f(x_0)).$$

$\lhd$ В 6.3.4 было установлено представление $(g \circ f)'(x_0) = \widetilde{p} \circ (P \times Q) - \widetilde{q} \circ (P \times Q)$. Отсюда видно, что если $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ — сублинейные операторы Магарам, то в силу теоремы 4.5.2 имеют место формулы

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial\widetilde{p} \circ \partial(P \times Q) - \partial\widetilde{q} \circ \partial(P \times Q) = \\ = \partial\widetilde{p} \circ (\partial P \times \partial Q) - \partial\widetilde{q} \circ (\partial P \times \partial Q).$$

Вспомним, что $\widetilde{p} = p \circ \pi - \Lambda$ и $\widetilde{q} := q \circ \pi - \Lambda$, где $\Lambda((a_1, a_2)) = \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$ и $\pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2$. Поэтому, учитывая линейность $\pi : E^2 \to E$ и $\Lambda : E^2 \to F$ и привлекая формулу 1.4.14 (4), получим $\partial\widetilde{p} = (\partial p) \circ \pi - \Lambda$ и $\partial\widetilde{q} = (\partial q) \circ \pi - \Lambda$. Тем самым мы приходим к соотношениям

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\partial p \circ \pi - \Lambda) \circ (\partial P \times \partial T),$$
$$\overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\partial q \circ \pi - \Lambda) \circ (\partial P \times \partial T),$$

эквивалентным требуемым. Итак, остается показать, что $\widetilde{p}$ — оператор Магарам, так как магарамовость оператора $\widetilde{q}$ устанавливается точно так же. Но согласно теореме 4.4.7 нужно лишь показать, что опорное множество $\partial\widetilde{p}$ состоит из операторов Магарам.

В силу наших предположений $S_0 := |\Lambda_1| + |\Lambda_2|$ — оператор Магарам. Так как $\partial p \subset [-S_0, S_0]$, то в силу теоремы 4.4.7 p также оператор Магарам. Рассмотрим оператор $\widetilde{P} = P\pi - (\Lambda_1, -\Lambda_2)$. Так как Λ_1 и Λ_2 — операторы Магарам, то P — сублинейный оператор Магарам.

Субдифференциал $\partial\widetilde{p}$ в более подробной записи имеет вид

$$\partial\widetilde{p} = \{\mathscr{T} := (T_1, T_2) \in L^+(E \times E, E) : \mathscr{T} = S \circ \pi - (\Lambda_1, -\Lambda_2),\ S \in \partial p\},$$

причем $\mathscr{T}(e_1, e_2) = T(e_1) + T(e_2)$. Отсюда видно, что $T_1 = S - \Lambda_1$ и $T_2 = \Lambda_2 - S$. Таким образом,

$$|T_i| \leqslant |S| + |\Lambda_i| \leqslant 2S_0 \quad (i := 1, 2),$$

и, следовательно, T_1 и T_2 — операторы Магарам.

Возьмем теперь элементы $d \in F$ и $e_1, e_2 \in E^+$ такие, что $0 \leqslant d \leqslant \mathscr{T}(e_1, e_2) = T_1 e_1 + T_2 e_2$. Тогда $d = d_1 + d_2$ для некоторых $0 \leqslant d_i \leqslant T_i e_i$ $(i := 1, 2)$. Так как T_i — операторы Магарам, то существуют $e'_i \in E$ такие, что $T_i(e'_i) = d_i$, и, следовательно, $\mathscr{T}(e'_1, e'_2) = d$. $\triangleright$

6.4.2. Для дальнейшего необходимо придать смысл выражениям вида $\sum_\xi \mathscr{D} f_\xi(x_0)$ в том случае, если (f_ξ) — бесконечное семейство квазидифференцируемых в точке x_0 отображений. Так же, как и в параграфах 4.4 и 4.5, воспользуемся тем, что оператор суммирования является оператором Магарам на K-пространстве $l_\infty(A, E)$ (4.4.2 (3)). Пусть, как обычно, X — векторное пространства, а E и F — некоторые K-пространства.

(1) *Возьмем такой регулярный оператор $T : E \to F$, что $S := |T|$ — оператор Магарам. Символом A_0 обозначим f-алгебру $Z(F_T)$, где $F_T := T(E)^{dd}$. Тогда $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X, F)]$ можно снабдить структурой решеточно упорядоченного A_0-модуля. Более того, существует единственное A_0-линейное регулярное отображение $[h_T] : [\mathrm{CS}_c(X, E)] \to [\mathrm{CS}_c(X, F)]$, для которого $[h_T]([\mathscr{U}, \{0\}]) = [T^+ \circ \mathscr{U}, T^- \circ \mathscr{U}]$ при всех $\mathscr{U} \in \mathrm{CS}_c(X, E)$.*

$\lhd$ Пусть сначала оператор Магарам $T = S$ положителен. Для опорного множества $\mathscr{U} \in \mathrm{CS}_c(X, E)$, $\mathscr{U} = \partial p$, множество $T \circ \mathscr{U} := \{S \circ U : U \in \mathscr{U}\}$ также будет опорным, поскольку $S \circ \mathscr{U} = S \circ \partial p = \partial(S \circ p)$ в силу 4.5.2. Тем самым возникает отображение $h := h_S : \mathrm{CS}_c(X, E) \to \mathrm{CS}_c(X, F)$, действующее по правилу $h_S(\mathscr{U}) = S \circ \mathscr{U}$. Несомненно, что это отображение аддитивно. Кроме того, оно будет и A_0^+-однородно, где $A_0 := Z(F_S)$. В самом деле, согласно 4.4.3 (2, 3) существует кольцевой и решеточный изоморфизм h' из f-алгебры $Z(F_S)$ на правильную подрешетку и подкольцо в $Z(E_S)$ такой, что $\pi \circ S = S \circ h(\pi)$ для всех $\alpha \in Z(F_S)$. Таким образом, оператор S будет A_0-линейным, если рассматривать E и F с естественной структурой A_0-модуля. Так как $A_0 \subset A := \mathrm{Orth}(F)$, то A-коническая решетка $\mathrm{CS}_c(X, F)$ будет также и A_0-конической решеткой. В то же время структуру A_0-конической решетки в $\mathrm{CS}_c(X, E)$ можно определить, полагая $\alpha \mathscr{U} := h'(\alpha) \mathscr{U}$ для всех $\pi \in Z(F_S)$. При этом h_S станет A_0-полулинейным отображением.

Теперь обратимся к теореме 1.5.6. В соответствии с рассмотренной в ней конструкцией можно построить A_0-модуль $[\mathrm{CS}_c(X, E)]_{A_0}$ и $\mathrm{Orth}(E)$-модуль $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$, причем эти два модуля совпадают по запасу элементов, а модульные структуры согласованы, т. е. умножение на элементы A_0 индуцируется умножением на элементы $\mathrm{Orth}(E)$. То же самое справедливо и относительно A_0-конической решетки $\mathrm{CS}_c(X, F)$. Согласно теореме 1.5.6 существует единственное A_0-линейное отображение $[h_S] : [\mathrm{CS}_c(X, E)] \to [\mathrm{CS}_c(X, F)]$, для которого $[h_S]([\mathscr{U}, \{0\}]) = [S \circ \mathscr{U}, \{0\}]$ при всех $\mathscr{U} \in \mathrm{CS}_c(X, E)$.

Возьмем теперь регулярный оператор $T : E \to F$ такой, что $S := |T|$ — оператор Магарам. Вновь по теореме 4.4.3 операторы T^+ и T^- также будут A_0-линейными. В соответствии со сказанным выше существуют A_0-линейные положительные операторы $[h_{T^+}], [h_{T^-}] : [\mathrm{CS}_c(X, E)] \to [\mathrm{CS}_c(X, F)]$. Положив $[h_T] := [h_{T^+}] - [h_{T^-}]$, получим A_0-линейный регулярный оператор из $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$ в $[\mathrm{CS}_c(X, F)]$. $\rhd$

(2) *Пусть T, S, A_0 те же, что и в (1). Тогда* $\mathrm{QL}(X,E)$ *и* $\mathrm{QL}(X,F)$ *можно снабдить структурой решеточно упорядоченного A_0-модуля. Более того, существует единственное A_0-линейное регулярное отображение $[h^T] : \mathrm{QL}(X,E) \to \mathrm{QL}(X,F)$, для которого $[h^T](p) = T^+ \circ p - T^- p$ при всех $p \in \mathrm{Sbl}(X,E)$.*

$\triangleleft$ Если $T = S$, то очевидно, что отображение $[h^S] : \mathrm{QL}(X,E) \to \mathrm{QL}(X,F)]$, действующее по правилу $l \mapsto S \circ l$, является A_0-линейным и положительным. В общем случае полагаем $[h^T] := [h^{T^+}] - [h^{T^-}]$. $\triangleright$

Оператор $\mathscr{D}$, действующий на $\mathrm{QL}(X,E)$ и $\mathrm{QL}(X,F)$, мы будем обозначать соответственно символами $\mathscr{D}_E$ и $\mathscr{D}_F$.

(3) *Пусть $T : E \to F$ — регулярный оператор, причем $|T|$ — оператор Магарам. Тогда $\mathscr{D}_F \circ [h^T] = [h_T] \circ \mathscr{D}_E$.*

$\triangleleft$ Пусть $l := p - q$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$. Тогда, используя (1), (2) и 4.5.3, последовательно выводим:

$$\begin{aligned}
[h_T] \circ \mathscr{D}_E(l) &= [h_T]([\partial p, \partial q]) = [h_T]([\partial p, \{0\}]) - [h_T]([\partial q, \{0\}]) = \\
&= [T^+ \circ \partial p, T^- \circ \partial p] - [T^+ \circ \partial q, T^- \circ \partial q] = \\
&= [\partial(T^+ \circ p), \partial(T^- \circ p)] - [\partial(T^+ \circ q), \partial(T^- \circ q)] = \\
&= \mathscr{D}_F(T^+ \circ p - T^- \circ p) - \mathscr{D}_F(T^+ \circ q - T^- \circ q) = \\
&= \mathscr{D}_F(T^+(p-q)) - \mathscr{D}_F(T^-(p-q)) = \mathscr{D}_F \circ [h^T]. \ \triangleright
\end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты и выразительности обозначений мы пишем $\mathscr{D}$ вместо $\mathscr{D}_E$ и $\mathscr{D}_F$, а также $T \circ \mathscr{D}$ вместо $[h_T] \circ \mathscr{D}_E$ и $\mathscr{D} \circ T$ вместо $\mathscr{D}_F \circ [h^T]$.

6.4.3. (1) ***Теорема.*** *Пусть $f : X \to E^\bullet$ — квазидифференцируемое в точке x_0 отображение и $T : E \to F$ — регулярный порядково непрерывный оператор такой, что $|T|$ — оператор Магарам. Тогда $T \circ f$ также квазидифференцируемо в точке x_0 и*

$$\mathscr{D}(T \circ f)(x_0) = T \circ \mathscr{D} f(x_0).$$

Иначе говоря, для квазидифференциала $\mathscr{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \overline{\partial}(T \circ f)(x_0)]$ имеют место представления

$$\begin{aligned}
\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) &= T^+ \circ \underline{\partial} f(x_0) + T^- \circ \overline{\partial} f(x_0), \\
\overline{\partial}(T \circ f)(x_0) &= T^+ \circ \overline{\partial} f(x_0) + T^- \circ \underline{\partial} f(x_0).
\end{aligned}$$

◁ Из теоремы 6.3.3 немедленно следует справедливость формулы $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$; требуемые предположения выполняются тривиальным образом, так как T линеен, регулярен и порядково непрерывен. По условию $f'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, E)$, а ввиду 6.4.3 (2) $T \circ f'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, F)$. Таким образом, отображение $T \circ f'$ квазидифференцируемо в точке x_0. Остается применить оператор $\mathscr{D}$ к равенству $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$ и воспользоваться предложением 6.4.2 (3). ▷

(2) Стоит выделить частный случай формул квазидифференцирования из (1), когда $T : E \to F$ — линейный оператор Магарам. В этом случае формулы для вычисления $\mathscr{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \overline{\partial}(T \circ f)(x_0)]$ упрощаются:

$$\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \underline{\partial} f(x_0), \quad \overline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \overline{\partial} f(x_0).$$

6.4.4. Рассмотрим вопрос о квазидифференцируемости бесконечной суммы. Зафиксируем непустое множество A. Символом $l_1(\mathrm{A}, E)$, как обычно, мы обозначим совокупность всех o-суммируемых семейств элементов E, индексированных посредством A. Возьмем семейство отображений $f_\alpha : X \to E^\bullet$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, и пусть $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)_\alpha)$ для всех $(\alpha \in \mathrm{A})$. Будем говорить, что это семейство *равностепенно квазидифференцируемо* в точке x_0 по направлению $h \in X$, если существует убывающая к нулю последовательность $(c_n(\cdot)) \subset l_1(\mathrm{A}, E)$ такая, что

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{f_\alpha(x_0 + th) - f_\alpha(x_0)}{t} \right| \leqslant c_n(\alpha)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и $n \in \mathbb{N}$.

В следующей теореме выражение $o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathscr{D} f_\alpha(x_0)$ надо понимать в соответствии с 6.4.2. Точнее,

$$o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathscr{D} f_\alpha = \left[o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0), o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0) \right],$$

причем $o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathscr{U}_\alpha$ — множество линейных операторов $T \in L(X, E)$, представимых в виде $Tx = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} T_\alpha x$ $(x \in X)$, где $T_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$.

Теорема. *Пусть X — векторное пространство, E — произвольное K-пространство, A — произвольное множество. Пусть $f_\alpha : X \to E$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — некоторое o-суммируемое семейство отображений и отображение $f : X \to E^\bullet$ определено равенством*

$$f(x) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(x) \quad (x \in X).$$

Предположим, что $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и семейство $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ равностепенно квазидифференцируемо по направлениям в точке x_0. Если для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ существуют $p_\alpha, q_\alpha \in \operatorname{Sbl}(X, E)$ такие, что $f'_\alpha(x_0) = p_\alpha - q_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ и при этом $(p_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}}$,$(q_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}} \in l_1(A, E)$, то отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и справедлива формула

$$\mathscr{D} f(x_0) = \mathscr{D}\Big(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha\Big)(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathscr{D} f_\alpha(x_0).$$

Таким образом, если $\mathscr{D} f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$, то

$$\underline{\partial} f(x_0) = \underline{\partial}\Big(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(x_0)\Big) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0),$$

$$\overline{\partial} f(x_0) = \overline{\partial}\Big(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(x_0)\Big) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0).$$

$\lhd$ Рассмотрим оператор Магарам Σ из $l_1(\mathrm{A}, E)$ в E, определяемый формулой

$$\Sigma : (e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \mapsto o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha.$$

Определим оператор $\varphi : X \to l_1(\mathrm{A}, E)$ равенством $\varphi(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Ясно, что дифференцируемость φ по направлениям в точке x_0 вытекает из предположения о равностепенной дифференцируемости по направлениям в силу следующей оценки:

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} \right| \leqslant (c_n(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

При этом производная по направлениям имеет вид

$$\varphi'(x_0)h = \big(f'_\alpha(x_0)h\big)_{\alpha\in\mathrm{A}} = P(h) - Q(h),$$

где $P : h \mapsto (p_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и $Q : h \mapsto (q_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Ввиду наших предположений последние соотношения корректно определяют сублинейные операторы $P, Q : X \to l_1(\mathrm{A}, E)$, следовательно, φ квазидифференцируемо в точке x_0. Так как $f := \Sigma \circ \varphi$, то согласно 6.4.3 отображение f также квазидифференцируемо в точке x_0 и его квазидифференциал вычисляется с помощью формул

$$\underline{\partial} f(x_0) = \underline{\partial}(\Sigma \circ F)(x_0) = \Sigma \circ \underline{\partial} F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0),$$
$$\overline{\partial} f(x_0) = \overline{\partial}(\Sigma \circ F)(x_0) = \Sigma \circ \overline{\partial} F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0). \ \triangleright$$

6.4.5. *Теорема.* *Пусть семейство* $(f_\alpha : X \to E^\bullet)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *и точка* x_0 *удовлетворяют всем условиям теоремы* 6.4.4. *Положим*

$$f(x) := \bigvee_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(x), \quad g(x) := \bigwedge_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(x).$$

Тогда отображения f *и* g *квазидифференцируемы в точке* x_0 *и для* $\mathscr{D} f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ *и* $\mathscr{D} g(x_0) = [\underline{\partial} g(x_0), \overline{\partial} g(x_0)]$ *имеют место представления*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \bigcup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_\mathrm{A}(x_0)} \bigg(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha \Big(\underline{\partial} f_\alpha(x_0) + o\text{-}\sum_{\beta\neq\alpha} \overline{\partial} f_\beta(x_0) \Big) \bigg),$$
$$\overline{\partial} f(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0), \quad \underline{\partial} g(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0),$$
$$\overline{\partial} g(x_0) = \bigcup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Delta_\mathrm{A}(x_0)} \bigg(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha \Big(\overline{\partial} f_\alpha(x_0) + o\text{-}\sum_{\beta\neq\alpha} \underline{\partial} f_\beta(x_0) \Big) \bigg),$$

где, по определению,

$$\Gamma_\mathrm{A}(x_0) := \Gamma_\mathrm{A}(x_0; (f_\alpha)) := \Big\{ (\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} : \ \pi_\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E),$$

$$o\text{-}\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \pi_\alpha = I_E,\ o\text{-}\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \pi_\alpha f_\alpha(x_0) = f(x_0)\Big\},$$

$$\Delta_{\mathrm{A}}(x_0) := \Delta_{\mathrm{A}}(x_0;(f_\alpha)) := \Big\{(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} :\ \pi_\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E),$$

$$o\text{-}\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \pi_\alpha = I_E,\ o\text{-}\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \pi_\alpha f_\alpha(x_0) = g(x_0)\Big\}.$$

$\lhd$ Рассмотрим только отображение f; случай отображения g разбирается аналогично. Ограничение канонического сублинейного оператора $\varepsilon_{\mathrm{A}} : E^{\mathrm{A}} \to E$, обозначаемое тем же самым символом, порядково непрерывно и тем более mo-непрерывно и удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_{\mathrm{A}}(u) - \varepsilon_{\mathrm{A}}(u')| \leqslant p(u-u') \quad (u,u' \in E^{\mathrm{A}}),$$

где $p(u) := \varepsilon_{\mathrm{A}}|u|$ (см. 2.1.1). В соответствии с 6.3.2 (1) оператор ε_{A} дифференцируем по Адамару в любой точке, а производная по направлениям mo-непрерывна. Для $x \in X$ определим $\varphi(x) \in E^{\mathrm{A}}$ формулой $\varphi(x) : \alpha \mapsto f_\alpha(x)$. Ясно, что в силу предположения о равностепенной дифференцируемости по направлениям полученное отображение $\varphi : X \to E^{\mathrm{A}}$ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и отображение $\varphi'(x_0) : X \to E^{\mathrm{A}}$ имеет вид $\varphi'(x_0)h : \alpha \mapsto f'_\alpha(x_0)h$ для всех $h \in X$. Таким образом, к композиции $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ \varphi$ применима теорема 6.3.3. Так как $f = \varepsilon_{\mathrm{A}} \circ \varphi$, то получим формулу

$$f'(x_0)h = \varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ \varphi'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Воспользуемся теперь формулой 4.5.7 (при $\varepsilon = 0$ и $f_\alpha = I_E$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$), согласно которой

$$\varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)u = \bigvee_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha e_\alpha \quad (u = (e_\alpha) \in E^{\mathrm{A}}).$$

Таким образом, справедливо представление

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha f'_\alpha(x_0)h \quad (u = (e_\alpha) \in E^{\mathrm{A}}).$$

Дальнейшее является по существу повторением рассуждений из 6.4.4. В силу квазидифференцируемости отображений f_i в точке x_0 имеют место представления $f'_\alpha(x_0)h = p_\alpha(h) - q_\alpha(h)$ ($\alpha \in \mathrm{A}$; $h \in X$), где p_α, q_α — сублинейные операторы. Введем следующие обозначения:

$$Q(h) := o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} q_\alpha(h), \quad p'_\alpha(h) := p_\alpha(h) + o\text{-}\sum_{\beta\neq\alpha} q_\beta(h),$$
$$P(h) : \alpha \mapsto p_\alpha(h) \quad (h \in X).$$

Как видно, $P : X \to E^{\mathrm{A}}$ и $Q : X \to E$ — сублинейные операторы. Учитывая введенные обозначения, выпишем следующую цепочку равенств:

$$f'(x_0)h = \sup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} \Big\{ o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha\big(p_\alpha(h) - q_\alpha(h)\big)\Big\} =$$
$$= \sup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} \Big\{ o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha\big(p_\alpha(h) - q_\alpha(h)\big)\Big\} + o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} q_\alpha(h) - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} \Big\{ o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \Big(\pi_\alpha p_\alpha(h) - \pi_\alpha q_\alpha(h) + q_\alpha(h)\Big)\Big\} - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} \Big\{ o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \Big(\pi_\alpha p_\alpha(h) + o\text{-}\sum_{\beta\neq\alpha} \pi_\alpha q_\beta(h)\Big)\Big\} - Q(h) =$$
$$= \sup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha p'_\alpha(h) - Q(h) = \varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ P(h) - Q(h).$$

Итак, $f'(x_0) = \varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ P - Q$, следовательно, отображение f квазидифференцируемо в точке x_0, причем $\underline{\partial} f(x_0) = \partial\big(\varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ P\big)$ и $\overline{\partial} f(x_0) = \partial Q$. Остается вычислить соответствующие субдифференциалы $\partial\big(\varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ P\big)$ и ∂Q, что несложно сделать, привлекая 4.5.7 (2, 3):

$$\partial\Big(\varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0)) \circ P\Big) = \bigcup_{S\in\varepsilon'_{\mathrm{A}}(\varphi(x_0))} \partial(S \circ P) =$$
$$= \bigcup_{(\pi_\alpha)\,\in\,\Gamma_{\mathrm{A}}(x_0)} \Big(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha \Big(\partial p_\alpha + o\text{-}\sum_{\beta\neq\alpha} \partial q_\beta\Big)\Big),$$
$$\partial Q = \partial\Big(o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} q_\alpha\Big) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \partial q_\alpha.$$

Полученные соотношения совпадают с требуемыми с точностью до обозначений. $\triangleright$

6.4.6. В заключение параграфа займемся условиями квазидифференцируемости интегрального оператора. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство, X — сепарабельное банахово пространство, а E — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Рассмотрим семейство $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ отображений $f_\omega : X \to E^\bullet$, квазидифференцируемых в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)_\omega)$. Предположим, что при любом x из некоторого множества $U \subset X$ отображение $\omega \mapsto f_\omega(x)$ почти всюду принимает значения из E и интегрируемо по Бохнеру. Тогда можно определить отображение $f : X \to E^\bullet$, полагая

$$f(x) := \int\limits_\Omega f_\omega(x)\, d\mu(\omega)$$

при $x \in U$ и $f(x) = +\infty$ при $x \notin U$. Выясним, при каких условиях отображение f квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(U)$. Пусть $f'_\omega(x_0)h$ — производная f_ω в точке x_0 по направлению h. В силу квазидифференцируемости f_ω справедливо представление

$$f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega,$$

где $p_\omega, q_\omega : X \to E$ — сублинейные операторы при любом $\omega \in \Omega$.

Семейство $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ называют *равностепенно квазидифференцируемым* в точке x_0 по направлению $h \in X$, если существует последовательность интегрируемых отображений (ψ_n), $\psi : \Omega \to E$, убывающая и o-сходящаяся к нулю почти всюду, для которой выполнена оценка

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{f_\omega(x_0 + th) - f_\omega(x_0)}{t} \right| \leqslant \psi_n(\omega)$$

для всех $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть X — банахово пространство, а E — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Пусть $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ и f те же, что и выше. Определим отображение $\varphi : X \to L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)^\bullet$, сопоставив $x \in U$ класс эквивалентности интегрируемой вектор-функции $\omega \mapsto f_\omega(x)$ и положив $\varphi(x) = +\infty$ при $x \notin U$. Предположим, что семейство $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ равностепенно* *дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и для любого $\omega \in \Omega$ производная по направлениям $f'_\omega(x_0)$ допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов $f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega$, что отображения $\omega \mapsto p_\omega(h)$ и $\omega \mapsto q_\omega(h)$ интегрируемы по Бохнеру при всех $h \in X$. Тогда отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и имеет место представление*

$$\mathscr{D}f(x_0) = \int\limits_\Omega \mathscr{D}\varphi(x_0)\, d\mu.$$

Точнее, квазидифференциал $\mathscr{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ описывается следующим образом:

$$\underline{\partial} f(x_0) = \int\limits_\Omega \underline{\partial}\varphi(x_0)\, d\mu, \quad \overline{\partial} f(x_0) = \int\limits_\Omega \overline{\partial}\varphi(x_0)\, d\mu.$$

$\lhd$ При сделанных допущениях оператор $I_\mu : L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E) \to E$, определяемый интегралом Бохнера

$$I_\mu(u) := \int\limits_\Omega u(\omega)\, d\mu(\omega) \quad (u \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)),$$

является линейным оператором Магарам (см. 4.4.2 (5)). Введем два новых оператора $P, Q : X \to L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)$ посредством формул

$$P(h) : \omega \mapsto p_\omega(h), \quad Q(h) : \omega \mapsto q_\omega(h) \quad (h \in X).$$

Из условия равностепенной дифференцируемости по направлениям следует

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} \right| \leqslant \psi_n \xrightarrow{(o)} 0,$$

откуда видно, что φ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и при этом для любого $h \in X$ производная по направлению $\varphi'(x_0)h$ представляет собой отображение $\omega \mapsto f'_\omega(x_0)h$. Но это влечет справедливость представления $\varphi'(x_0) = P - Q$, означающего квазидифференцируемость отображения φ в точке x_0. Так как $f = I_\mu \circ \varphi$, то применима теорема 6.4.3 (1), в соответствии с которой f квазидифференцируемо в точке x_0 и

$$\mathscr{D}f(x_0) = I_\mu \circ \mathscr{D}\varphi(x_0) = I_\mu \circ [\partial P, \partial Q],$$

что и требовалось. $\rhd$

6.4.7. В случае сепарабельного X установленную теорему удается уточнить с помощью теоремы Штрассена. Если $(\mathscr{U}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ — семейство опорных множеств $\mathscr{U}_\omega \in \mathrm{CS}_c(X,E)$, то символом $\int_\Omega \mathscr{U}_\omega\,d\mu(\omega)$ мы обозначаем множество всех линейных операторов $T \in L(X,E)$, представимых в виде

$$Tx = \int\limits_\Omega T_\omega(x)\,d\mu(\omega) \quad (x \in X),$$

где $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$ — такое семейство линейных операторов из X в E, что $T_\omega \in \mathscr{U}_\omega$ для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $x \in X$ отображение $\omega \mapsto T\omega(x)$ интегрируемо по Бохнеру.

Теорема. *Пусть $(f_\omega)_{\omega\in\Omega}$ и f те же, что и выше. Предположим, что семейство (f_ω) равностепенно дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и для любого $\omega \in \Omega$ производная по направлениям $f'_\omega(x_0)$ допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов $f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega$, что отображения $\omega \mapsto p_\omega(h)$ и $\omega \mapsto q_\omega(h)$ интегрируемы по Бохнеру при всех $h \in X$. Тогда отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и имеет место представление*

$$\mathscr{D}f(x_0) = \int\limits_\Omega \mathscr{D}f_\omega(x_0)\,d\mu(\omega).$$

Точнее, квазидифференциал $\mathscr{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ описывается следующим образом:

$$\underline{\partial} f(x_0) = \int\limits_\Omega \underline{\partial} f_\omega(x_0)\,d\mu(\omega), \quad \overline{\partial} f(x_0) = \int\limits_\Omega \overline{\partial} f_\omega(x_0)\,d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Так как выполнены все условия теоремы 6.4.6, то $\mathscr{D}f(x_0) = I_\mu \circ (x_0) = [\partial P, \partial Q] = [\partial(I_\mu \circ P), \partial(I_\mu \circ Q)]$. Остается привлечь теорему Штрассена о дезинтегрировании 4.5.8. $\rhd$

6.5. Необходимые условия экстремума

Здесь мы приведем необходимые условия экстремума для квазидифференцируемых отображений, оставаясь на уровне алгебраических рассмотрений предыдущих параграфов. При этом придерживаемся тех же терминологии и обозначений, что и в 5.1.

6.5.1. Всюду в этом параграфе X — векторное пространство, а E — произвольное K-пространство. Рассмотрим программу (C, f), т. е. многоцелевую экстремальную задачу $x \in C$, $f(x) \to \inf$, где $C \subset X$ — некоторое множество, а $f : X \to E^\bullet$ — отображение, предполагаемое в дальнейшем квазидифференцируемым в нужной точке $\operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Локальный оптимум в этой задаче понимается в смысле 5.1.2: точка $x_0 \in C$ — идеальный локальный инфимум (супремум) в программе $x \in C$, $f(x) \to \inf$ (или $x \in C$, $f(x) \to \sup$), если существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \operatorname{core} U$ и $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$ (соответственно, $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$). Локальный экстремум ниже понимается в указанном смысле, даже если это явно не оговорено. Начнем с необходимых условий экстремума в безусловной задаче, т. е. при $C = X$.

(1) ***Теорема.*** *Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной векторной программе $f(x) \to \inf$, то $\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathscr{D} f(x_0) \geqslant 0$.*

$\lhd$ Так как точка x_0 является идеальным локальным оптимумом программы $f \to \inf$ и отображение f дифференцируемо по направлениям в этой точке, то для любого $h \in X$ при достаточно малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = f'(x_0)(h) + \frac{o(\alpha, x_0, h)}{\alpha}.$$

Переходя в этом неравенстве к o-пределу при $\alpha \downarrow 0$, мы видим, что $f'(x_0)h \geqslant 0$ для всех $h \in X$. Далее, в силу квазидифференцируемости f будет $f'(x_0)h = p(h) - q(h) \geqslant 0$ $(h \in X)$, где $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$ таковы, что $\partial p = \underline{\partial} f(x_0)$ и $\partial q = \overline{\partial} f(x_0)$. Тем самым $p \geqslant q$, что равносильно включению $\partial q \subset \partial p$, совпадающему с точностью до обозначений с требуемым. $\rhd$

(2) ***Теорема.*** *Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной векторной программе $f(x) \to \sup$, то $\underline{\partial} f(x_0) \subset \overline{\partial} f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathscr{D} f(x_0) \leqslant 0$.*

$\lhd$ Устанавливается теми же рассуждениями, что и в (1) или же применением (1) к отображению $-f$. $\rhd$

(3) *Необходимые условия оптимальности в теоремах* (1) *и* (2) *допускают следующие эквивалентные формы записи:*

$$\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0) \leftrightarrow 0 \in \bigcap_{v \in \overline{\partial} f(x_0)} \big(\underline{\partial} f(x_0) - v\big),$$

$$\underline{\partial} f(x_0) \subset \overline{\partial} f(x_0) \leftrightarrow 0 \in \bigcap_{v \in \underline{\partial} f(x_0)} \big(\overline{\partial} f(x_0) - v\big).$$

$\lhd$ В самом деле, цепочка эквивалентностей

$$\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0) \leftrightarrow (\forall v \in \overline{\partial} f(x_0))\,(v \in \underline{\partial} f(x_0)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall v \in \overline{\partial} f(x_0))\,(0 \in (\underline{\partial} f(x_0) - v)) \leftrightarrow 0 \in \bigcap_{v \in \overline{\partial} f(x_0)} \big(\underline{\partial} f(x_0) - v\big)$$

доказывает первое соотношение. Второе устанавливается аналогично. $\rhd$

6.5.2. Переходим к рассмотрению векторной программы вида (C, f), где $C := \{x \in X : g(x) \leqslant 0\}$, причем отображения f и g квазидифференцируемы в нужной точке. Эту программу мы будем обозначать символом (g, f). Введем необходимое для дальнейшего условие квазирегулярности. Пусть X — векторное пространство, а E и F — некоторые K-пространства.

(1) Рассмотрим отображения $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$. Векторную программу (g, f) называют *квазирегулярной в точке* $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, если выполнены условия:

(a) существуют сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что для любого $x \in x_0 + U$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^{-}]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^{-}$;

(b) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \overline{\partial} g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0) = \varnothing$.

Условие (a) выполняется, если, например, существует такой сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$, что для любого $x \in X$ из $g(x) \nleqslant 0$ следует $r \circ g(x) \geqslant 0$, ср. 5.2.1 (в).

(2) Предположим, что $f := l : X \to E$ и $g := L : X \to F$ — квазилинейные операторы. Тогда условие регулярности (1) квазилинейной векторной программы (L, l) перепишется в виде:

(a$'$) существует сублинейный оператор Магарам $R : F \to E$ такой, что для любого $h \in X$ будет $\pi l(h) \geqslant 0$, где $\pi := [(R \circ L(h))^-]$;

(b$'$) для любых операторов $S \in \overline{\partial} L$ и $T \in \partial R$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial} L \cap \pi T \circ \underline{\partial} L = \varnothing$.

(3) Рассмотрим векторную программу (K, L, l), где L и l те же, что и выше, а $K \subset X$ — конус (вообще говоря, невыпуклый), допускающий представление $K = \bigcup_{\xi \in \Xi} K_\xi$, где $(K_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство выпуклых конусов. В этом случае программу (K, L, l) мы будем называть *квазилинейной*.

Скажем, что квазилинейная программа (K, L, l) *квазирегулярна*, если выполнены условия:

(a$''$) существует сублинейный оператор Магарам $R : F \to E$ такой, что для любого $h \in K$ будет $\pi l(h) \geqslant 0$, где $\pi := [(R \circ L(h))^-]$;

(b$''$) для любых оператора $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial} L \cap \big(\pi T \underline{\partial} L + \pi N_E(K_\xi)\big) = \varnothing$.

Условие (a$''$) выполнено, если существует сублинейный оператор Магарам $R : F \to E$ такой, что если $h \in K$ и $L(h) \nleqslant 0$, то $R \circ L(h) \geqslant 0$, ср. 5.2.1 (в).

Если $L = P - Q$ для некоторых $P, Q \in \mathrm{QL}(X, F)$, то условие (b$''$) можно переписать в следующем эквивалентном виде: для любых операторов $S \in \overline{\partial} L$ и $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ существуют проектор $0 \neq \pi' \leqslant \pi$ и элемент $\bar{x} \in K_\xi$ такие, что $\pi' T S \bar{x} > \pi' T P \bar{x}$.

Как видно, при $K = K_\xi = X$ программа (K, L, l) совпадает с программой (L, l), а условия (a$''$) и (b$''$) превращаются в условие квазирегулярности (2).

6.5.3. *Теорема.* *Пусть для квазилинейной программы* (K, L, l) *выполнено условие квазирегулярности* 6.5.2 (3). *Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *нуль является решением программы* (K, L, l)*;*

(2) *для любых* $s \in \overline{\partial} l$, $S \in \overline{\partial} L$ *и* $\xi \in \Xi$ *существуют ортоморфизм* $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, *оператор Магарам* $\gamma \in L^+(F, E)$ *и линейный оператор* $\lambda \in L(X, E)$ *такие, что*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(K_\xi),$$
$$-\lambda \in \alpha \circ (\underline{\partial} l - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} L - S).$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): В силу квазилинейности l нуль будет идеальным решением квазилинейной векторной программы (K, L, l) в том и только в том случае, если для любого $h \in K$ из $L(h) \leqslant 0$ следует $l(h) \geqslant 0$. Отсюда видно, что нуль является идеальным оптимумом в векторной программе (K, L, l) тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in \Xi$ он является оптимальным в задаче $h \in K_\xi, \varphi(h) \to \inf$, где $\varphi : h \mapsto l(h) \vee r \circ L(h)$. Таким образом, если нуль — решение задачи (K, L, l), то для любого $\xi \in \Xi$ будет

$$l(h) \vee R \circ L(h) \geqslant 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть сублинейные операторы $p, q \in \mathrm{QL}(X, E)$ и $P, Q \in \mathrm{QL}(X, F)$ таковы, что $l = p - q$ и $L = P - Q$. Тогда ввиду 1.4.14 (2) будет

$$\inf_{\substack{s \in \partial q \\ S \in \partial Q}} (p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geqslant 0 \quad (h \in K),$$

следовательно, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ справедливо неравенство

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geqslant 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть $\delta(K)$ обозначает E-значный индикаторный оператор множества K. Тогда последнее можно переписать в эквивалентной форме:

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) + \delta(K_\xi)(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Привлекая формулы субдифференцирования 2.1.7 (1), 3.2.8 и 4.5.2, выводим

$$0 \in \partial\Big((p - s) \vee r \circ (P - S)\Big) + \partial\delta(K_\xi) =$$

$$= \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathrm{Orth}^+(E) \\ \alpha + \beta = I_E}} \left(\alpha(\partial p - s) + \beta\Big(\bigcup_{T \in \partial r} T \circ (\partial P - S)\Big)\right) + N_E(K_\xi, 0).$$

Здесь $N_E(K_\xi) := \pi_E(K_\xi) := \partial\delta(K_\xi) = \{T' : T'h \leqslant 0, h \in K_\xi\}$ — нормальный конус к выпуклому конусу K_ξ (см. 3.2.3). Таким образом, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ существуют ортоморфизмы

$\alpha, \beta \in \mathrm{Orth}^+(E)$, $\alpha + \beta = I_E$, линейный оператор Магарам $T \in \partial r$ и линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такие, что

$$-\lambda \in \alpha \circ (\partial p - s) + \beta \circ T \circ (\partial P - S)$$

или, что то же самое в силу двойственности Минковского,

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \beta \circ T(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Обозначим через π проектор на компоненту $\ker(\alpha) \subset E$ и заметим, что $\pi\alpha = 0$ и $\pi\beta = \pi(I_E - \alpha) = \pi$. Применив проектор π к последнему неравенству, получим

$$\pi T \circ (P(h) - S(h)) + \pi\lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X)$$

или эквивалентно

$$\pi T \circ S \in \pi T \circ \partial P + \pi\lambda.$$

Если теперь предположить, что $\pi \neq 0$, то в силу квазирегулярности рассматриваемой программы $\pi T S \notin \pi T \partial P + \pi N_E(K_\xi)$. Полученное противоречие означает, что $\pi = 0$ или $\ker(\alpha) = \{0\}$. Обозначив $\gamma := \beta \circ T$, получаем требуемые необходимые условия.

(2) $\to$ (1): Пусть выполнены необходимые условия (2). Субдифференциальное включение из (2) в силу двойственности Минковского равносильно неравенству

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Возьмем какую-нибудь допустимую точку $h \in X$, т. е. $h \in K$ и $L(h) \leqslant 0$. Тогда $\gamma L(h) \leqslant 0$, так как γ — положительный оператор. Подберем $s \in \overline{\partial} l$, $S \in \overline{\partial} L$ и $\xi \in \Xi$ так, чтобы $h \in K_\xi$, $s(h) = q(h)$ и $S(h) = Q(h)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \leqslant \\ &\leqslant \alpha(p(h) - q(h)) + \gamma(P(h) - Q(h)) = \\ &= \alpha l(h) + \gamma L(h) \leqslant \alpha l(h). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha l(h) \geqslant 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \{0\}$, получаем $l(h) \geqslant 0$. $\triangleright$

6.5.4. (1) *Теорема.* *Пусть $l : X \to E$ и $L : X \to F$ — квазилинейные операторы, причем L удовлетворяет условиям квазирегулярности 6.5.2 (2). Тогда нуль является решением квазилинейной векторной программы (L, l) в том и только в том случае, когда для любых $s \in \overline{\partial} l$ и $S \in \overline{\partial} L$ существуют ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$ и оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ такие, что совместна система условий:*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker \alpha = \{0\},$$
$$0 \in \alpha \circ (\underline{\partial} l - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} L - S).$$

$\lhd$ Вытекает из 6.5.3 при $K_\xi = K := X$. $\rhd$

(2) Условие квазирегулярности 6.5.2 (3) можно несколько ослабить. Пусть $\mathscr{U}$ — такое подмножество $\overline{\partial} L = \partial Q$, что для любого $h \in K$ найдется $S \in \mathscr{U}$, для которого $Sh = Qh$. Скажем, что квазилинейная программа (K, L, l) $\mathscr{U}$-квазирегулярна, если для любых оператора $T \in \partial R$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \mathscr{U} \cap \pi T \circ \underline{\partial} L = \varnothing$. Например, в качестве $\mathscr{U}$ можно взять множество всех o-крайних точек $\mathscr{E}_0(\overline{\partial} L) = \mathscr{E}_0(Q)$, см. 2.2.1. Также можно положить $\mathscr{U} := \{S \in \mathscr{E}_0(Q) : (\exists h \in K)\, Sh = Qh\}$.

При этом в необходимых и достаточных условиях экстремума будут фигурировать только операторы $S \in \mathscr{U}$. Положим по определению

$$\mathscr{U}_h := \{S \in U : S(h) = \sup_{S' \in U} S'(h)\}.$$

Точка $h = 0$ будет идеальным решением $\mathscr{U}$-квазирегулярной квазилинейной программы (K, L, l) тогда и только тогда, когда для любых $h \in K$, $s \in (\overline{\partial} l)_h$ и $S \in \mathscr{U}_h$ существуют ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что

$$0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker\{\alpha\} = 0, \quad \lambda \in N_E(K_\xi),$$
$$-\lambda \in \alpha \circ (\underline{\partial} l - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} L - S).$$

$\lhd$ Доказательство полностью повторяет рассуждения из 6.5.3, но при обосновании равенства $\ker(\alpha) = \{0\}$ вместо условия регулярности 6.5.2 (3) используется условие $\mathscr{U}$-квазирегулярности. $\rhd$

6.5.5. Теорема. *Предположим, что выполнено условие квазирегулярности* 6.5.2 (1). *Если допустимая точка x_0 есть идеальный локальный оптимум квазирегулярной квазидифференцируемой задачи (g, f), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ такие, что совместна система условий*

$$\ker \alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0,$$
$$0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

$\lhd$ Положим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 6.5.2 (1), и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в безусловной задаче $\varphi(x) \to \inf$. В силу теорем 6.3.3 и 6.3.5 о производной по направлениям композиции и максимума отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (g, f), то согласно 6.5.1

$$\varphi'(x_0)h \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Воспользовавшись формулой вычисления производной максимума из 6.3.5, получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \Big(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta} \tilde{g}'(x_0)h \Big) \quad (h \in X).$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha} \tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathrm{Orth}^+(E) : \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \, \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$. Используя найденное представление для $\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$, находим, что $\Gamma_2(x_0; \rho \tilde{f}, \rho \tilde{g}) = \{(\rho, 0)\}$ и

$$\Gamma_2(x_0; \rho^d \tilde{f}, \rho^d \tilde{g}) = \{(\rho^d \tilde{\alpha}, \rho^d \tilde{\beta}) : \ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathrm{Orth}^+(E), \, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E\}.$$

Таким образом, привлекая 2.1.5 (3) и формулу для вычисления производной по направлениям композиции из 6.3.3, выводим

$$\rho^d\varphi'(x_0)h = \rho^d \bigvee_{\tilde\alpha+\tilde\beta=I_E} \big(\tilde\alpha(f'(x_0)h + \tilde\beta\tilde g'(x_0)h\big) =$$
$$= \rho^d\big(f'(x_0)h \vee \tilde g'(x_0)h\big) = \rho^d\big(f'(x_0)h \vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)\big).$$
$$\rho\varphi'(x_0)h = \rho f'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Положим $l := \rho^d f'(x_0)$, $L := \rho^d g'(x_0)$ и $R := \rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l \in \mathrm{QL}(X, \rho^d E)$, $L \in \mathrm{QL}(X, F)$ и $R \in \mathrm{Sbl}(F, \rho^d E)$. Так как $\partial R \subset \partial r$, то согласно теореме 4.4.7 R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h) := l(h) \vee R \circ L(h) \geqslant 0$ для всех $h \in X$, а условие квазирегулярности 6.5.2 (1) влечет квазирегулярность векторной программы (L, l). Согласно 6.5.4 (1) соотношение $0 \leqslant \phi(h)$ $(h \in X)$ справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde\alpha, \tilde\beta \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и оператор $T \in \underline{\partial} r(g(x_0))$ такие, что $\ker\{\tilde\alpha\} = 0$ и

$$0 \in \rho^d\tilde\alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \rho^d\tilde\beta \circ T \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

Далее, для проектора ρ при любом $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ будет

$$0 \in \rho(\underline{\partial} f(x_0) - s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d, получим

$$0 \in (\rho + \rho^d\tilde\alpha)(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \rho^d\tilde\beta T \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

Обозначив $\alpha := \rho + \rho^d\tilde\alpha$ и $\gamma := \rho^d\tilde\beta \circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

Легко видеть, что $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и $\gamma \in L^+(F, E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T \in \partial R$ тогда и только тогда, когда $T \in \partial r$ и $T \circ g(x_0) = r \circ g(x_0) = \tilde g(x_0)$. Кроме того, $\rho^d\tilde g(x_0) = 0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma \circ g(x_0) = \rho^d\tilde\beta \circ T \circ g(x_0) = \tilde\beta\rho^d \circ \tilde g(x_0) = 0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi\alpha = 0$ и, поскольку $\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha})$ и $\pi\tilde{\beta} = \pi(I_E - \tilde{\alpha}) = \pi$, приходим к соотношению

$$0 \in \pi\alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \pi(I_E - \alpha) \circ T \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S) = \pi T \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

Последнее означает, что $\pi T \circ S \in \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0)$. Тем самым предположение $\pi \neq 0$ противоречит допущению (b) из условия квазирегулярности 6.5.2 (1). Следовательно, $\pi = 0$ или, что то же, $\ker(\alpha) = \{0\}$. $\rhd$

6.5.6. Отметим несколько следствий установленной теоремы.

(1) *Пусть для квазидифференцируемой векторной программы* (g, f) *выполнено условие квазирегулярности* 6.5.2 (1) *в некоторой допустимой точке* $x_0 \in X$ *и, кроме того,* $\pi r \circ g(x_0) < 0$, *каков бы ни был ненулевой проектор* $\pi \in \mathfrak{P}(E)$. *Если при этом* x_0 *— идеальный оптимум программы* (g, f), *то* $\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0)$.

$\lhd$ Воспользуемся теоремой 6.5.5. По условию $\rho := [(r \circ g(x_0))^-] = I_E$, поэтому $\gamma = \rho^d \beta \circ T = 0$. Следовательно, необходимые условия экстремума из 6.5.5 принимают вид: для любого $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ существует такой ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$, что $\ker(\alpha) = \{0\}$ и $0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s)$ или эквивалентно $\alpha s \in \alpha \underline{\partial} f(x_0)$. Тем самым $s \in \underline{\partial} f(x_0)$ для всех $s \in \overline{\partial} f(x_0)$, что и требовалось. $\rhd$

(2) Для выпуклых программ квазирегулярность, понимаемая как в 6.5.2 (1), согласуется с квазирегулярностью в смысле 5.2.1. В самом деле, для выпуклых отображений f и $\tilde{g} := r \circ g$ имеют место равенства

$$\underline{\partial} f(x_0) = \partial f(x_0), \quad \overline{\partial} f(x_0) = \{0\}, \quad \underline{\partial} \tilde{g}(x_0) = \partial \tilde{g}(x_0), \quad \overline{\partial} \tilde{g}(x_0) = \{0\}.$$

Кроме того, требование (b) из условия квазирегулярности 6.5.2 (1) $\pi T \circ \overline{\partial} g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0) = \varnothing$, справедливое для любого $T \in \partial r$, означает в рассматриваемой ситуации, что $0 \notin \pi \partial \tilde{g}(x_0)$, а последнее равносильно существованию такого $h_0 \in X$, что $\pi \tilde{g}'(x_0) h_0 < 0$. Но

$$\pi \tilde{g}'(x_0) h_0 = \inf_{t > 0} \frac{\pi \tilde{g}(x_0 + t h_0) - \pi \tilde{g}(x_0)}{t},$$

следовательно, существуют проектор $0 \neq \pi' \leqslant \pi$ и число $t_0 > 0$, для которых $\pi' g(x_0 + t_0 h_0) < \pi' g(x_0) \leqslant 0$. Поэтому условия регулярности 6.5.2 (1) принимают вид: для некоторых сублинейного оператора

Магарам $r : F \to E$ и поглощающего множества U, во-первых, при любом $x \in x_0 + U$ справедливо соотношение $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [g(x)^-]$, а во-вторых, для произвольного ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ существуют проектор $0 \neq \pi' \leqslant \pi$ и элемент $x' \in X$ ($x' := x_0 + t_0 h_0$) такие, что $(r \circ g)(x') < 0$, ср. 5.2.1 (в, г).

(3) *Допустимая точка* $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$ *— идеальный оптимум квазирегулярной выпуклой программы* (g, f) *в том и только в том случае, если существуют положительный ортоморфизм* $\alpha \in \operatorname{Orth}^+(E)$ *и оператор Магарам* $\gamma \in L^+(F, E)$ *такие, что совместна система условий*

$$\ker \alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0, \quad 0 \in \alpha \partial f(x_0) + \gamma \circ \partial g(x_0).$$

◁ Необходимость указанных условий вытекает из 6.5.5 с учетом того, что операторы $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ равны нулю. Достаточность устанавливается так же, как и в 5.3.1. ▷

(4) Пусть отображения $f, \varphi : X \to E^\bullet$ и $g, \psi : X \to F^\bullet$ квазидифференцируемы в нужной точке. Каждую из экстремальных задач

$$\begin{gathered} \psi(x) \geqslant 0, \quad f(x) \to \inf, \\ g(x) \leqslant 0, \quad \varphi(x) \to \sup, \\ \psi(x) \geqslant 0, \quad \varphi(x) \to \sup \end{gathered}$$

мы сводим к рассмотренной выше задаче (g, f), полагая в них $g := -\psi$, $f := -\varphi$. При этом возникают очевидные модификации условия квазирегулярности. Так, например, в программе $\psi(x) \geqslant 0$, $f(x) \to \inf$ условие квазирегулярности означает существование сублинейного оператора Магарам $r : F \to E$, для которого, во-первых, при любом $x \in X$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ \psi(x))^+]$, а во-вторых, для любых оператора $T \in \partial r(\psi(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \underline{\partial} \psi(x_0) \cap \pi T \circ \overline{\partial} \psi(x_0) = \varnothing$.

Если допустимая точка x_0 *является идеальным локальным оптимумом общей квазирегулярной квазидифференцируемой программы* $\psi(x) \geqslant 0$, $f(x) \to \inf$, *то для любых* $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ *и* $S \in \underline{\partial} \psi(x_0)$ *существуют положительный ортоморфизм* $\alpha \in \operatorname{Orth}^+(E)$ *и оператор Магарам* $\gamma \in L^+(F, E)$ *такие, что совместна система условий*

$$\begin{gathered} \ker \alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ \psi(x_0) = 0, \\ 0 \in \alpha(\underline{\partial} f - s) + \gamma \circ (\overline{\partial} g - S). \end{gathered}$$

◁ Следует из 6.5.5 при $g := -\psi$. ▷

6.6. Учет ограничений типа включения

В этом параграфе мы выведем необходимые условия экстремума в случае, когда в изучаемой задаче имеется ограничение в виде вхождения переменной в фиксированное множество. При этом условие регулярности последнего удобно формулировать, привлекая топологию в рассматриваемом векторном пространстве. В этой связи возникает необходимость определения топологических квазидифференциалов.

До сих пор мы рассматривали свойства квазидифференциалов, не привлекая топологию. Однако все результаты, полученные в параграфах 6.1–6.4, легко переносятся на случай топологических векторных пространств. Для этого достаточно изменить объем понятия квазилинейного отображения, понимая теперь под этим термином оператор, представимый в виде разности *непрерывных* сублинейных операторов.

6.6.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, E — топологическое K-пространство и A^c — алгебра непрерывных ортоморфизмов на E. Как и ранее (см. 3.2.3), конус положительных элементов топологического K-пространства считается нормальным. Поэтому в полном соответствии с утверждением 3.2.2 (1) двойственность Минковского ∂ определяет биекцию между множествами непрерывных (всюду определенных) сублинейных операторов и эквинепрерывных опорных множеств.

Символом $\mathrm{QL}^c(X, E)$ обозначим часть $\mathrm{QL}(X, E)$, состоящую из квазилинейных операторов, представимых в виде разности непрерывных сублинейных операторов. Очевидно, что $\mathrm{QL}^c(X, E)$ — решеточно упорядоченный A^c-модуль. Модульные и решеточные операции, а также отношение порядка наследуются из $\mathrm{QL}(X, E)$. Элементы $\mathrm{QL}^c(X, E)$ мы будем называть *непрерывными квазилинейными операторами.*

Аналогично, совокупность эквинепрерывных опорных множеств $\mathrm{CS}_c^c(X, E)$ определяется как часть $\mathrm{CS}_c(X, E)$, состоящая из опорных множеств непрерывных сублинейных операторов, см. 3.2.2 (1). Тождественное вложение $\mathrm{id} : \mathrm{CS}_c^c(X, E) \to \mathrm{CS}_c(X, E)$ в силу теоремы 1.5.6 продолжается до изоморфного вложения $[\mathrm{id}]$ A^c-модуля $[\mathrm{CS}_c^c(X, E)]$ в A^c-модуль $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$. Ввиду этого в дальнейшем мы будем считать, что $[\mathrm{CS}_c^c(X, E)]$ содержится в $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$. Ограничение изоморфизма $\mathscr{D}$, определенного в 6.1.3 (1), мы обозначим символом $\mathscr{D}^c$. Ясно, что $\mathscr{D}^c$ осуществляет изоморфизм A^c-модулей $[\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$ и $\mathrm{QL}^c(X,E)$.

(1) *Пусть* $l, l_1, \dots, l_n \in \mathrm{QL}^c(X,E)$ *и* $\alpha \in \mathrm{Orth}^c(E)$. *Тогда* αl, $l_1 + \ldots + l_n$, $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ *и* $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$ *— непрерывные квазилинейные операторы, и для вычисления* $\mathscr{D}^c(\alpha l)$, $\mathscr{D}^c(l_1 + \ldots + l_n)$, $\mathscr{D}^c(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ *и* $\mathscr{D}^c(l_1 \wedge \ldots \wedge l_n)$ *имеют место формулы из* 6.1.4 *с заменой* $\mathscr{D}$ *на* $\mathscr{D}^c$.

$\lhd$ Следует из 6.1.4 и 3.2.2 (1). $\rhd$

(2) Укажем условия, при которых композиция непрерывных квазилинейных операторов будет непрерывным квазилинейным оператором.

Пусть X — топологическое векторное пространство, E — топологическая векторная решетка, а F — топологическое K-пространство. Если $L \in \mathrm{QL}^c(X,E)$ *и* $l \in \mathrm{QL}^c(E,F)$ *— непрерывные квазилинейные операторы, причем имеется представление* $l = p - q$, *где* p *и* q *имеют общую непрерывную мажоранту, то* $l \circ L \in \mathrm{QL}^c(X,F)$, *т. е. оператор* $l \circ L$ *будет непрерывным квазилинейным оператором.*

$\lhd$ Доказательство проводится так же, как в 6.1.7, где в качестве общей мажоранты опорных множеств ∂p, ∂q можно взять непрерывный положительный оператор Λ. $\rhd$

6.6.2. Как видно из 6.6.1, для сохранения формул исчисления квазидифференциалов из 6.2 и 6.3 в топологическом случае достаточно потребовать, чтобы в определении квазидифференцируемости 6.2.1 производную по направлениям можно было представить в виде разности непрерывных сублинейных операторов.

Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to E^{\bullet}$ и точку $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Будем говорить, что f *топологически квазидифференцируемо* в точке x_0, если в этой точке существует производная Дини $f'(x_0)h$ по любому направлению $h \in X$ в смысле 6.2.1 и отображение $f'(x_0) : h \to f'(x_0)h$ $(h \in X)$ представляет собой непрерывный квазилинейный оператор.

Итак, если отображение f топологически квазидифференцируемо в точке x_0, то квазилинейному оператору $f'(x_0) \in \mathrm{QL}^c(X,E)$ в силу двойственности Минковского отвечает элемент $\mathscr{D}(f'(x_0)) \in [\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$, который называют *топологическим квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathscr{D}^c f(x_0)$.

Если $f'(x_0)$ допускает представление в виде разности непрерывных сублинейных операторов p и q, то $\mathscr{D}^c f(x_0) = [\partial p, \partial q]$. При этом опорные множества ∂p и ∂q называют соответственно *топологическим субдифференциалом* и *топологическим супердифференциалом* отображения f в точке x_0 и обозначают символами $\underline{\partial}^c f(x_0)$ и $\overline{\partial}^c f(x_0)$ соответственно. Итак, $\mathscr{D}^c f(x_0) := [\underline{\partial}^c f(x_0), \overline{\partial}^c f(x_0)]$.

Формулы, составляющие исчисление топологических квазидифференциалов, выводятся так же, как и в параграфе 6.2.

(1) *Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Пусть $\lambda \in \operatorname{Orth}^c(E)$ и отображения $f, f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ и $g : X \to \operatorname{Orth}^c(E)^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$ или $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)_i)$. Тогда отображения $f_1 + \ldots + f_n$, λf, gf, $f_1 \vee \ldots \vee f_n$ и $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ квазидифференцируемы в точке x_0, причем для вычисления $\mathscr{D}^c(f_1 + \ldots + f_n)$, $\mathscr{D}^c(\lambda f)$, $\mathscr{D}^c(gf)$, $\mathscr{D}^c(f_1 \vee \ldots \vee f_n)$ и $\mathscr{D}^c(f_1 \wedge \ldots \wedge f_n)$ имеют место формулы из* 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6, 6.3.7 *с заменой $\mathscr{D}$ на $\mathscr{D}^c$. Если для каждого $x \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$ ортоморфизм $g(x)$ обратим, то отображение f/g топологически квазидифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула* 6.2.9 (1) *с заменой $\mathscr{D}$ на $\mathscr{D}^c$.*

$\lhd$ Следует из 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6, 6.2.9 (1), 6.3.7 и 6.6.1 (1). $\rhd$

(2) *Пусть X — топологическое векторное пространство, а E и F — топологические K-пространства. Пусть отображения $f : X \to E^\bullet$ и $g : E \to F^\bullet$ удовлетворяют всем условиям теоремы* 6.3.4 *и, кроме того, они топологически квазидифференцируемы в точках $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ и $e_0 := f(x_0) \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$ соответственно. Предположим также, что квазидифференциал $\mathscr{D}^c g(e_0) = [\underline{\partial}^c g(e_0), \overline{\partial}^c g(e_0)]$ определяется парой опорных множеств $\underline{\partial}^c g(e_0)$ и $\overline{\partial}^c g(e_0)$, имеющих общую непрерывную равномерную мажоранту. Тогда отображение $g \circ f$ квазидифференцируемо в точке x_0 и квазидифференциал $\mathscr{D}^c(g \circ f)(x_0)$ может быть вычислен по формулам из* 6.3.4.

$\lhd$ Следует из теоремы 6.3.4 и предложения 6.6.1 (2). $\rhd$

6.6.3. Пусть X — топологическое векторное пространство $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Конус допустимых направлений $\operatorname{Fd}(C, x_0)$ множества C в точке x_0 вводится формулой:

$$\operatorname{Fd}(C, x_0) := \{h \in X : \ (\exists \varepsilon > 0)\, x_0 + [0, \varepsilon)h \subset C\}.$$

Множество C называют *K-регулярным в точке* x_0, если K — выпуклый конус и $K \subset \operatorname{cl}\big(\operatorname{Fd}(C, x_0)\big)$. Для K-регулярного в точке x_0 множества C вводится нормальный конус $N_E(C, x_0) := \pi_E(K) := \{T : Tk \leqslant 0,\ k \in K\}$ (см. 3.2.3). Как видно, нормальный конус к множеству в точке определяется неоднозначно.

(1) *Пусть множество $C \subset X$ K-регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в той же точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Для того чтобы x_0 была идеальным локальным оптимумом программы (C, f), необходимо, чтобы выполнялось включение*

$$\overline{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0).$$

$\triangleleft$ Пусть $x_0 \in$ C является идеальным оптимумом векторной программы (C, f). Так же, как и в 6.5.1 (1) выводится, что $f'(x_0)(h) \geqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{Fd}(C, x_0)$. Но в рассматриваемой ситуации оператор $f'(x_0)(\cdot)$ непрерывен, следовательно, неравенство $f'(x_0)(h) \geqslant 0$ выполняется для всех $h \in \operatorname{cl}\big(\operatorname{Fd}(C, x_0)\big)$. Если теперь $f'(x_0)(\cdot) = p(\cdot) - q(\cdot)$ для некоторых непрерывных сублинейных операторов $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$, то в силу K-регулярности множества будет

$$0 \leqslant f'(x_0)(h) = p(h) - q(h) \quad (h \in K).$$

Последнее означает справедливость неравенства $q \leqslant p + \delta_E(K)$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\partial^c q \subset \partial^c p + \partial^c \delta_E(K) = \partial^c p + N_E(C, x_0).$$

что и требовалось. $\triangleright$

(2) В предложении (1) необходимые условия оптимальности могут быть записаны в следующей эквивалентной форме: для любого $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ выполняется соотношение

$$0 \in (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + N_E(C, x_0)$$

или, что то же самое,

$$(-N_E(C, x_0)) \cap (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) \neq \varnothing.$$

$\triangleleft$ Полученное в (1) включение означает, что для любого $s \in \partial^c q$ верно включение $0 \in (\partial^c p - s) + N_E(K)$. $\triangleright$

6.6.4. Рассмотрим теперь векторную программу (C, g, f). Пусть $x_0 \in \mathrm{C} \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f : X \to E^\bullet$, $g : X \to F^\bullet$ топологически квазидифференцируемые в точке x_0. Скажем, что векторная программа (C, g, f) *квазирегулярна в точке* x_0, если выполнены условия:

(a) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и окрестность U точки x_0 такие, что для любого $x \in C \cap U$ будет $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(b) множество C является K-регулярным в точке x_0;

(c) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial}^c g(x_0) \cap \big(\pi T \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi N_E(C, x_0)\big) = \varnothing$.

6.6.5. *Теорема.* *Пусть отображения f и g квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \mathrm{C} \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$. Пусть векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в точке x_0. Если x_0 — идеальный локальный оптимум программы (C, g, f), то для любых $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial}^c g(x_0)$ существуют непрерывный ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, непрерывный оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный непрерывный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий:*

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(C, x_0), \quad \gamma \circ g(x_0) = 0, \\
-\lambda \in \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ Обозначим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 6.6.4, и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (C, g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в задаче (C, φ). В силу теорем 6.3.3 и 6.3.5 о производной по направлениям композиции и максимума отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (C, φ), то

$$
\varphi'(x_0)h \geqslant 0 \quad (h \in K).
$$

Воспользовавшись формулой вычисления производной максимума из 6.3.5, получаем

$$
\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \big(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta} \tilde{g}'(x_0)h\big) \quad (h \in X).
$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha}\tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathrm{Orth}^+(E) : \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E,\ \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$. Используя найденное выше представление для множества $\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$, находим, что

$$\Gamma_2(x_0; \rho\tilde{f}, \rho\tilde{g}) = \{(\rho, 0)\},$$
$$\Gamma_2(x_0; \rho^d\tilde{f}, \rho^d\tilde{g}) = \{(\rho^d\tilde{\alpha}, \rho^d\tilde{\beta}) : \ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathrm{Orth}^+(E),\ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E\}.$$

Таким образом, привлекая 2.1.5 (3) и формулу для вычисления производной по направлениям композиции из 6.3.3, выводим

$$\rho^d\varphi'(x_0)h = \rho^d \bigvee_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=I_E} \big(\tilde{\alpha}f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h\big) =$$
$$= \rho^d\big(f'(x_0)h \vee \tilde{g}'(x_0)h\big) = \rho^d\big(f'(x_0)h \vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)\big);$$
$$\rho\varphi'(x_0)h = \rho f'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Положим $l := \rho^d f'(x_0)$, $L := g'(x_0)$ и $R := \rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l \in \mathrm{QL}(X, \rho^d E)$, $L \in \mathrm{QL}(X, F)$ и $R \in \mathrm{Sbl}(F, \rho^d E)$. Так как $\partial R \subset \partial r$, то согласно теореме 4.4.7 R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h) := l(h) \vee R \circ L(h) \geqslant 0$ для всех $h \in K$, а условие квазирегулярности 6.6.4 влечет квазирегулярность векторной программы (K, L, l). Согласно 6.5.3 соотношение $0 \leqslant \phi(h)$ $(h \in K_\xi)$ справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial}^c g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathrm{Orth}^+(E)$, оператор $T \in \underline{\partial}^c r(g(x_0))$ и $\lambda \in N_E(K)$ такие, что $\ker\tilde{\alpha} = 0$ и

$$-\rho^d\lambda \in \rho^d\tilde{\alpha}(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d\tilde{\beta} \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Далее, для проектора ρ (см. 6.6.1) при любом $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ существует линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такой, что

$$-\rho\lambda \in \rho(\underline{\partial}^c f(x_0) - s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d, получим

$$-\lambda \in (\rho + \rho^d \tilde{\alpha})(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d \tilde{\beta} T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Обозначив $\alpha := \rho + \rho^d \tilde{\alpha}$ и $\gamma := \rho^d \tilde{\beta} \circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$-\lambda \in \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Легко видеть, что $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и $\gamma \in L^+(F, E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T \in \partial R$ тогда и только тогда, когда $T \in \partial r$ и $T \circ g(x_0) = r \circ g(x_0) = \tilde{g}(x_0)$. Кроме того, $\rho^d \tilde{g}(x_0) = 0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma \circ g(x_0) = \rho^d \tilde{\beta} \circ T \circ g(x_0) = \tilde{\beta} \rho^d \circ \tilde{g}(x_0) = 0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi\alpha = 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha})$ и $\pi\tilde{\beta} = \pi(I_E - \tilde{\alpha}) = \pi$, приходим к соотношению

$$-\pi\lambda \in \pi\alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \pi(I_E - \alpha) \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S) = \pi T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Последнее означает, что $\pi T \circ S \in (\pi T \circ \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi\lambda)$. Тем самым предположение $\pi \neq 0$ противоречит допущению (c) из условия квазирегулярности 6.6.4. Следовательно, $\pi = 0$ или, что то же, $\ker(\alpha) = \{0\}$. $\rhd$

6.6.6. Рассмотрим теперь необходимые условия обобщенного локального оптимума для векторных программ с квазидифференцируемыми данными. Для этой цели нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Пусть множество $C \subset X$ K-регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в той же точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)_k)$ $(k := 1, \dots, n)$. Если x_0 является идеальным (локальным) оптимумом программы $x \in C$, $f_1 \wedge \dots \wedge f_n(x) \to \inf$, то для любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ выполняется включение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial}^c f_k(x_0) \subset \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{\partial}^c f_k(x_0) + N_E(C, x_0).$$

◁ Положим $f := f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$. Возьмем $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \ldots, f_n)$ и введем отображение $\varphi : X \to E^\bullet$ формулой

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x).$$

Допустим, что x_0 — идеальный (локальный) оптимум программы (C, f). Тогда x_0 будет идеальным (локальным) оптимумом программы (C, φ). В самом деле, если $x \in C$, то $\varphi(x_0) = f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Отображение φ квазидифференцируемо в точке x_0 в силу 6.2.2 и 6.6.3. Согласно 6.6.3 (1) имеет место включение $\overline{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0)$. Доказательство завершается ссылкой на 6.2.2 и 6.2.3. ▷

6.6.7. Множество $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \subset C$ называют *обобщенным локальным оптимумом* программы (C, f), если существует такая окрестность нуля U, что $f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0) \leqslant f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n)$ для всех $x_i \in (x_i^0 + U) \cap C$ и $i := 1, \ldots, n$.

Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в каждой из допустимых точек $x_1^0, \ldots, x_n^0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если множество $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом безусловной программы $f(x) \to \inf$, то для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \overline{\partial}^c f(x_k) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k) \quad (k := 1, \ldots, n).$$

◁ Это утверждение является частным случаем нижеследующей теоремы 6.6.8 при $C = X$. ▷

6.6.8. *Теорема.* *Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в точках $x_1^0, \ldots, x_n^0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, а множество $C \subset X$ K_l-регулярно в точке $x_l^0 \in C$ при $l := 1, \ldots, n$, где $K_1, \ldots, K_n$ — выпуклые конусы. Если множество $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом программы (C, f), то для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ таких, что*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \overline{\partial}^c f(x_k^0) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k^0) + N_E(C, x_k^0) \quad (k := 1, \ldots, n).$$

$\lhd$ Определим отображения $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$, $\tilde{f} : X^n \to E$ равенствами

$$\tilde{f}_i(x_1, \ldots, x_n) := f(x_i) \quad (i := 1, \ldots, n),$$
$$\tilde{f} := \tilde{f}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{f}_n.$$

Легко видеть, что точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ входит в $C^n \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(\tilde{f}))$ и является идеальным локальным оптимумом в задаче $(C^n, \tilde{f})$ тогда и только тогда, когда множество $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ служит локальным обобщенным оптимумом в программе (C, f). Кроме того, очевидно, что множество C^n будет $K_1 \times \ldots \times K_n$-регулярным в точке $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$. Если $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ — обобщенный локальный оптимумом программы (C, f), то в силу предложения 6.6.6 для любых $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \ldots, f_n)$ выполняется включение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) \subset$$
$$\subset \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{\partial}^c f_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) + N_E\big(C^n, (x_1^0, \ldots, x_n^0)\big).$$

Легко подсчитать содержащиеся в этом включении субдифференциалы и супердифференциалы:

$$\overline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \overline{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\},$$
$$\underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \underline{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}.$$

Отсюда видна справедливость равенств

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \alpha_1 \overline{\partial}^c f(x_1^0) \times \ldots \times \alpha_n \overline{\partial}^c f(x_n^0),$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \alpha_1 \underline{\partial}^c f(x_1^0) \times \ldots \times \alpha_n \underline{\partial}^c f(x_n^0).$$

Ясно также, что $N_E\big(C^n, (x_1^0, \dots, x_n^0)\big) = N_E\big(C, x_1^0\big) \times \ldots \times N_E\big(C, x_n^0\big)$. Собрав теперь воедино полученные представления, получим

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial}^c f(x_k^0) \subset \prod_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k^0) + N_E\big(C, x_k^0\big)\big),$$

что равносильно требуемым n включениям. ▷

6.6.9. Приведем удобную эквивалентную форму записи необходимых условий обобщенного экстремума из 6.6.8.

Пусть выполнены условия 6.6.8 *и множество* $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ *является обобщенным* (*локальным*) *оптимумом программы* (C, f). *Тогда для любых ортоморфизмов* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Orth}^+(E)$ *таких, что*

$$\alpha_1 + \ \ldots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

и для любых операторов и $s_k \in \overline{\partial}^c f(x_k^0)$ $(k := 1, \dots, n)$ *найдутся линейные непрерывные операторы* $\lambda_k \in N_E(C, x_k^0)$ $(k := 1, \dots, n)$ *такие, что выполняются включения*

$$-\lambda_k \in \alpha_k(\underline{\partial}^c f(x_k^0) - s_k) \quad (k := 1, \dots, n).$$

6.6.10. Рассмотрим векторную программу (C, g, f). Пусть $x_i^0 \in$ C $\cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f : X \to E^\bullet$, $g : X \to F^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точках x_i^0 $(i := 1, \dots, n)$. Скажем, что векторная программа (C, g, f) *квазирегулярна на множестве* $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$, если выполнены следующие условия:

(a) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и окрестности U_i точек x_i^0 такие, что для любого $x \in C \cap U_i$ будет $\pi_x e \leqslant \pi_x f(x)$, где $e := f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0)$ и $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(b) множество C является K_i-регулярным в точке x_i^0;

(c) для каждого $i := 1, \dots, n$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial}^c g(x_i^0) \cap \big(\pi T \underline{\partial}^c g(x_i^0) + \pi N_E(C, x_i^0)\big) = \varnothing$, каковы бы ни были оператор $T \in \partial r(g(x_i^0))$ и ненулевой проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

6.6.11. *Теорема.* *Пусть отображения $g : X \to F^\bullet$ и $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в точках $x_1^0, \dots, x_n^0 \in C \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$. Предположим, что векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в смысле 6.6.10 на множестве $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ служит обобщенным локальным оптимумом программы (C, g, f), то для любых $s_i \in \overline{\partial} f(x_i^0)$ и $S_i \in \overline{\partial} g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in L^+(F, E)$ и линейные непрерывные операторы $\lambda_i \in L(X, E)$ такие, что*

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \alpha_i \leqslant I_E, \quad \ker(\alpha_1) \cap \ldots \cap \ker(\alpha_n) = \{0\}, \\ \gamma_i \circ g(x_0) = 0, \quad \lambda_i \in N_E(K_{\xi_i}), \\ -\lambda_i \in \alpha_i(\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \gamma_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i) \quad (i := 1, \dots, n). \end{gathered}$$

$\triangleleft$ Пусть выполнены условия квазирегулярности 6.6.10. Обозначим $e := f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0)$. Предположим, что множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ есть обобщенный оптимум программы (C, g, f). Тогда это множество будет обобщенным оптимумом и в задаче (C, φ) в силу 6.6.10 (a).

Согласно 6.6.8, для любых наборов ортоморфизмов $\beta_1, \dots, \beta_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\beta_1 + \ldots + \beta_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

справедливы неравенства

$$0 \leqslant \beta_i \varphi'(x_i^0) h_i \quad (h_i \in K_i, \ i := 1, \dots, n).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 6.6.5 с заменой $\varphi'(x_0)$ и K на $\beta_i \varphi'(x_i^0)$ и K_i, получим, что для любых $s_i \in \overline{\partial}^c f(x_i^0)$ и $S_i \in \overline{\partial}^c g(x_i^0)$ существуют положительный ортоморфизм $\tilde{\alpha}_i \in \operatorname{Orth}^+(E)$, непрерывный оператор Магарам $\tilde{\gamma}_i \in L^+(F, E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_i \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \tilde{\alpha}_i \leqslant I_E, \quad \ker \tilde{\alpha}_i = \{0\}, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0), \quad \tilde{\gamma}_i \circ g(x_0) = 0, \\ -\lambda_i \in \beta_i \tilde{\alpha}_i(\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \beta_i \tilde{\gamma}_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i). \end{gathered}$$

Обозначим $\alpha_i := \beta_i\tilde{\alpha}_i$ и $\gamma_i := \beta_i\tilde{\gamma}_i$. Если $e \in \ker(\alpha_i)$ для всех $i := 1,\dots,n$, то $\tilde{\alpha}_i(\beta_i|e|) = 0$, а так как $\ker(\tilde{\alpha}_i) = \{0\}$, то $\beta_i(|e|) = 0$. Просуммировав последнее равенство по i, получим $e = 0$.

Таким образом, для любых $s_i \in \overline{\partial} f(x_i^0)$ и $S_i \in \overline{\partial} g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathrm{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in L^+(F,E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in L(X,E)$ такие, что совместна система условий

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant I_E, \quad \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\alpha_i) = \{0\}, \quad \gamma_i \circ g(x_0) = 0, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0),$$
$$-\lambda_i \in \alpha_i(\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \gamma_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i) \quad (i := 1,\dots,n),$$

что и требовалось. $\rhd$

6.7. Комментарии

6.7.1. (1) Решеточно упорядоченный модуль $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ иногда называют (в случае $E = \mathbb{R}$) *решеткой Радстрёма — Хёрмандера*. Порядковая структура $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ нуждается в детальном изучении, так как это пространство широко используется в выпуклой геометрии и интервальном анализе. Даже в случае $E = \mathbb{R}$ не ясно, как в этой решетке устроены осколки, полосы, дедекиндово пополнение, порядковая сходимость и т. п. То же самое относится и к топологической структуре в случае, когда X и E — топологические векторные пространства.

(2) Элемент A-модуля $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ определяется как класс эквивалентности, поэтому возникает естественное желание выбрать в этом классе пару, наилучшую в каком-нибудь смысле. Так, например, пару (U,V) можно назвать *минимальной*, если для любой другой пары (U_1,V_1), эквивалентной (U,V), из включений $U_1 \subset U$ и $V_1 \subset V$ следует, что $U_1 = U$ и $V_1 = V$. В этом направлении нет удовлетворительных общих результатов. Укажем несколько частных результатов: Д. Паллашке и Р. Урбански [490], М. Хэндшуг [371, 372], С. Шолтс [532].

(3) Закон сокращения из 6.1.3 (1) выполняется в более сильном варианте, который может быть полезен. Именно, если $U, W \in \mathrm{CS}_c^c(X,E)$ и $V := \partial^c q$ для некоторого сублинейного оператора $q : X \to E^\bullet$, то включение $U + W \subset V + W$ влечет $U \subset V$.

$\lhd$ В самом деле, рассуждая так же, как и в 6.1.3 (1), но пользуясь 3.2.8 вместо 1.4.12 (1), получим $p+r \leqslant q+r$, где $U = \partial p$ и $W = \partial r$ для некоторых сублинейных операторов $p, r : X \to E$. Если $q(x) < +\infty$, то можно сократить на элемент $r(x)$ и, стало быть, $p(x) \leqslant q(x)$; в противном случае имеем $p(x) < +\infty = q(x)$. Итак, $p \leqslant q$, что равносильно включению $U \subset V$. $\rhd$

(4) Условия, при которых композиция двух квазилинейных операторов будет квазилинейным оператором, были получены в работе В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [329]. Предложение 6.1.7 является несколько более общей версией леммы П.III.1 из книги В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [64]. Эквивалентные условия мажорируемости из 6.1.6 взяты из статьи Е. К. Басаевой и А. Г. Кусраева [9], см. также [8].

6.7.2. (1) Квазидифференцируемые функции ввели и изучали В. Ф. Демьянов, Л. Н. Полякова и А. М. Рубинов, см. [62, 66]. Их свойства в конечномерном случае изучены в работах В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [63, 64, 329, 330], В. Ф. Демьянова и Л. Н. Поляковой [61], Л. Н. Поляковой [205–207], см. также библиографию в [331]. Систематическое изложение квазидифференциального исчисления в конечномерном случае с многочисленными примерами и приложениями имеется в книгах В. Ф. Демьянова и Л. В. Васильева [60], В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [64]. Применениям квазидифференциального исчисления к задачам механики, техники и экономики посвящена монография В. Ф. Демьянова, Г. Е. Ставроулакиса, Л. Н. Поляковой и П. Д. Панагиотопулоса [334]. Современное состояние исследований в области квазидифференциального исчисления отражено в сборнике «Квазидифференцируемость и смежные вопросы» под редакцией В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [333]. Здесь систематизируются недавние результаты, полученные в различных направлениях негладкого анализа, связанных или порожденных квазидифференциальным исчислением.

(2) Квазидифференциалы отображений, определенных в банаховых пространствах и принимающих значения в банаховых K-пространствах, изучали В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [329], см. также [64]. Подход к определению квазидифференциала вектор-функции, положенный нами в основу настоящей главы, принадлежит Е. К. Басаевой [6]. Эти два подхода принципиально различны, но совпадают, если банахово K-пространство образов имеет порядково непрерывную норму. Теоремы 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6, 6.2.8 и 6.3.7 получены Е. К. Басаевой [6].

(3) Возьмем отображение $f : X \to E^{\bullet}$ и точку $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Верхней производной Дини f в точке x_0 по направлению $h \in X$ называют элемент

$$f_D^{\uparrow}(x_0)h := \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<\alpha<\varepsilon} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha}.$$

Легко видеть, что отображение $h \mapsto f_D^{\uparrow}(x_0)h$ можно определить процедурой 1.3.5, если в качестве соответствия $\Phi \subset X \times E$ взять конус допустимых направлений к надграфику $\operatorname{epi}(f)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Аналогично, нижняя производная Дини f в точке x_0 по направлению $h \in X$ определяется формулой

$$f_D^{\downarrow}(x_0)h := \sup_{\varepsilon>0} \inf_{0<\alpha<\varepsilon} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha}.$$

Как видно, $f_D^{\downarrow}(x_0)h = -(-f)_D^{\uparrow}(x_0)h$. Если верхняя и нижняя производные Дини отображения f в точке x_0 по направлению $h \in X$ совпадают, то f имеет производную Дини в точке x_0 по направлению $h \in X$.

(4) В работах В. В. Гороховика [48, 49, 364] введено понятие ε-квазидифференциала и изучены его основные свойства, см. также монографию В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [64].

(5) Пусть (X, τ) — топологическое векторное пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to \overline{E}$ и точку $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. Обозначим

$$\mathscr{F}(x_0, h) := \sup_{r(\cdot)} \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0+\alpha h+\alpha r(\alpha)) - f(x_0)}{\alpha} \quad (h \in X),$$

где точная верхняя граница берется по всем отображениям $r(\alpha) : \operatorname{dom}(r) \to X$ таким, что $\operatorname{dom}(r) = (0, \varepsilon)$ для некоторого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $r(\alpha) \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Как видно, величина $\mathscr{F}(x_0, h)$ (конечная или бесконечная) существует всегда и отображение $\mathscr{F}(x_0, \cdot)$ положительно однородно.

Сублинейный оператор $p : X \to E^{\bullet}$ называют *верхней выпуклой аппроксимацией* отображения f в точке x_0, если

$$p(h) \geqslant \mathscr{F}(x_0, h) \quad (h \in X).$$

Аналогично, *нижней вогнутой аппроксимацией* называют сублинейный оператор $q : X \to E^{\bullet}$ такой, что

$$q(h) \leqslant \mathscr{F}(x_0, h) \quad (h \in X).$$

Если p — верхняя выпуклая аппроксимация f в точке x_0, то опорное множество $\partial f(x_0) := \partial p$ называют *субдифференциалом* f в точке x_0.

Понятно, что верхняя выпуклая (нижняя вогнутая) аппроксимация и субдифференциал определены неоднозначно. В частности, выпуклая комбинация и максимум конечного числа верхних выпуклых аппроксимаций отображения в точке будут также верхними выпуклыми аппроксимациями того же отображения в той же точке.

Понятие верхней выпуклой аппроксимации скалярных функций введено Б. Н. Пшеничным в [210].

(6) Пусть оператор $f : \mathrm{X} \to E^{\bullet}$ квазидифференцируем в некоторой точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, причем $f'(x_0) = p - q$ для некоторых $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$. Тогда для любых $S \in \underline{\partial} f(x_0)$ и $T \in \overline{\partial} f(x_0)$ справедливы неравенства

$$Sh - q(h) \leqslant f'(x_0)h \leqslant p(h) - Th \quad (h \in X).$$

Операторы $p_T := p - T$ и $q_S := q - S$ сублинейны, следовательно, по определению из (5) они представляют собой соответственно верхнюю выпуклую и нижнюю вогнутую аппроксимации отображения f в точке x_0. Тем самым квазидифференциалу $[\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ соответствуют наборы верхних выпуклых аппроксимаций $\{p_T : T \in \underline{\partial} f(x_0)\}$ и нижних вогнутых аппроксимаций $\{q_S : S \in \overline{\partial} f(x_0)\}$, причем имеют место точные формулы

$$\inf_{T \in \overline{\partial} f(x_0)} p_T(h) = f'(x_0)(h) = \sup_{S \in \underline{\partial} f(x_0)} (-q_S(h)) \quad (h \in X).$$

(7) Сублинейный оператор $p : (X, \tau) \to E$ называют τo-непрерывным, если $\inf_{V \in \tau(0)} \sup_{x \in V} |p(x)| = 0$. Предположим, что существуют τo-непрерывный сублинейный оператор $p : X \to E$ и окрестность $U \in \tau(x_0) \subset X$ такие, что

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant p(u_1 - u_2) \quad (u_1, u_2 \in U).$$

Тогда для вычисления $\mathscr{F}(x_0, h)$ справедлива более простая формула

$$\mathscr{F}(x_0, h) = \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha}.$$

В самом деле, имеют место соотношения

$$|f(x_0 + \alpha h + \alpha r(\alpha)) - f(x_0 + \alpha h)| \leqslant p(r(\alpha)),$$

следовательно, справедливы равенства

$$\mathscr{F}(x_0, h) = \sup_{r(\cdot)} \limsup_{\alpha \downarrow 0} \bigg(\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} + \\ + \frac{f(x_0 + \alpha h + \alpha r(\alpha)) - f(x_0 + \alpha h)}{\alpha} \bigg) = \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha}.$$

6.7.3. (1) Дифференцируемость по Адамару в K-пространствах, а также порядковая непрерывность производной Адамара по направлению рассмотрены в работе Е. К. Басаевой и А. Г. Кусраева [9], см. также [8]. Там же установлены теоремы 6.3.3 и 6.3.4. Варианты этих теорем в банаховых пространствах установлены в работе В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [329].

(2) Дифференцируемость по Адамару, данная в 6.3.1, также имеет топологический вариант, который в случае банаховых пространств рассмотрен, например, в книге В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [64]. Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Производная Адамара отображения $f : X \to E^{\bullet}$ в точке $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ по направлению $h \in X$ определяется формулой

$$f'(x_0)h := \lim_{\alpha \downarrow 0,\, h' \to h} \frac{f(x_0 + \alpha h') - f(x_0)}{\alpha},$$

причем предел здесь понимается в смысле топологии, т. е. для любой окрестности нуля $V \subset E$ существуют окрестность нуля $U \subset X$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любых $\alpha \in (0, \varepsilon)$ и $h' \in h + U$ выполняется

$$\left| \frac{f(x_0 + \alpha h') - f(x_0)}{\alpha} - f'(x_0)h \right| \in V.$$

(3) Так же, как и в 6.7.2 (3) можно ввести верхнюю и нижнюю производные Адамара. Верхней производной Адамара отображения $f : X \to E^{\bullet}$ в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ по направлению $h \in X$ называют элемент

$$f_H^{\uparrow}(x_0)h := \inf_{\varepsilon>0,\, U\in\tau(h)} \ \sup_{0<\alpha<\varepsilon,\, h'\in U} \frac{f(x_0+\alpha h')-f(x_0)}{\alpha}.$$

Аналогично, нижняя производная Адамара f в точке x_0 по направлению $h \in X$ определяется формулой

$$f_H^{\downarrow}(x_0)h := \sup_{\varepsilon>0,\, U\in\tau(h)} \ \inf_{0<\alpha<\varepsilon,\, h'\in U} \frac{f(x_0+\alpha h')-f(x_0)}{\alpha}.$$

Если верхняя и нижняя производные Адамара совпадают, то их общее значение можно назвать производной Адамара отображения f в точке x_0 по направлению $h \in X$. Это определение существенно отличается как от определения 6.3.2, так и от соответствующего определения из монографии В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [64].

6.7.4. (1) Основные результаты параграфа 6.4 о дезинтегрировании квазидифференциалов получены в работе Е. К. Басаевой и А. Г. Кусраева [9], см. также [8]. В случае $X = \mathbb{R}^n$ и $E = \mathbb{R}$ теорема 6.4.7 приведена в [64].

6.7.5. (1) Основные результаты параграфа 6.5 — теоремы 6.5.3 и 6.5.5 — получены в работе Е. К. Басаевой [7], см. также [8]. В скалярном случае $E = F = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^n$ теорема 6.5.5 хорошо известна, см., например, [64; теорема V.3.2]. В этой ситуации условие квазирегулярности допускает ослабление, но тогда и необходимые условия экстремума окажутся слабее. Точнее, если замыкание множества $\{h \in X : g'(x_0)h < 0\}$ равно множеству $\{h \in X : g'(x_0)h \leqslant 0\}$ (регулярность), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$

$$0 \in (\underline{\partial} f(x_0) - s) + \operatorname{cl}\operatorname{cone}(\underline{\partial} g(x_0) - S),$$

где $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\mathscr{U})$ обозначает замкнутую коническую оболочку множества $\mathscr{U}$.

(2) Условие квазирегулярности из 6.5.2 позволяет написать необходимые условия экстремума для $S \in \overline{\partial} g(x_0)$, если для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется

$\pi T\circ\overline{\partial}g(x_0)\cap\pi T\circ\underline{\partial}g(x_0)=\varnothing$. Если же последнее условие нарушается, то существует максимальный проектор ρ такой, что для всех проекторов $\pi\leqslant\rho$ это условие выполнено, и часть необходимых условий запишется как в 6.5.5, но с ограничением на проектор ρ:

$$0\in\rho\alpha(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\rho\gamma(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Необходимые условия экстремума на проекторе ρ^d будут принципиально иными: для любых $s\in\overline{\partial}f(x_0)$ и $S\in\overline{\partial}g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha\in\mathrm{Orth}^+(\rho^dE)$, $\ker\alpha=\{0\}$, такой, что

$$0\in\rho^d\alpha(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\rho^d\,\mathrm{Cop}(\partial r(g(x_0))\circ\underline{\partial}g(x_0)-S),$$

где $\mathrm{Cop}(\mathscr{U})$ обозначает множество $\mathrm{cl}(\mathrm{mix}(\mathrm{co}\,\mathscr{U}))$, co — выпуклую оболочку, mix — множество всех перемешиваний относительно $\mathfrak{P}(E)$, cl — замыкание относительно поточечной o-сходимости. Этот факт можно установить, используя векторную теорему о биполяре из [123].

(3) Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума для квазидифференцируемой целевой функции в конечномерном случае получены в [205].

В работе [57] введено понятие кодифференцируемой функции в конечномерном пространстве (см. также [58, 59, 328]). Классы кодифференцируемых и квазидифференцируемых функций совпадают, однако кодифференциал дает более квалифицированную локальную аппроксимацию. В частности, кодифференциальное отображение непрерывно, в отличие от квазидифференциального отображения. Условия минимума непрерывных кодифференцируемых функций исследовались в [64, 243].

(4) Необходимые условия экстремума иногда удобнее записывать, используя субдифференциал и супердифференциал Пено, которые интересны и сами по себе. Приведем соответствующие определения. Пусть отображение $f:X\to E^\bullet$ дифференцируемо по направлениям в точке $x_0\in\mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. *Субдифференциалом Пено* оператора f в точке x_0 называется множество $\partial^\leqslant f(x_0)$, определяемое равенством

$$\partial^\leqslant f(x_0):=\big\{T\in L(X,E):\ Th\leqslant f'(x_0)(h)\ (h\in X)\big\}.$$

Аналогично, *супердифференциал Пено* $\partial^\geqslant f(x_0)$ оператора f в точке x_0 определяется равенством

$$\partial^\geqslant f(x_0):=\big\{T\in L(X,E):\ Th\geqslant f'(x_0)(h)\ (h\in X)\big\}.$$

Субдифференциал и супердифференциал Пено введены в работе Ж.-П. Пено [497].

(5) Связь между квазидифференциалом и субдифференциалом Пено устанавливается с помощью операции $\div$, введенной в 6.1.5.

Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ *квазидифференцируемо в точке* $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ *и* $\mathscr{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
\partial^{\leqslant} f(x_0) &= \underline{\partial} f(x_0) \div \overline{\partial} f(x_0),\\
\partial^{\geqslant} f(x_0) &= \overline{\partial} f(x_0) \div \underline{\partial} f(x_0).
\end{aligned}
$$

$\lhd$ Докажем первое равенство. Если $f'(x_0) = p - q$ для некоторых $p, q \in \operatorname{Sbl}(X, E)$, то соотношение $T \in \partial^{\leqslant} f(x_0)$ равносильно неравенству $T + q \leqslant p$ или включению $T + \partial q \subset \partial p$. Последнее же по определению 6.1.5 означает, что $T \in \underline{\partial} f(x_0) \div \overline{\partial} f(x_0)$. Второе равенство устанавливается аналогично. $\rhd$

Связь квазидифференциала с субдифференциалом Пено установлена Дж.-Б. Ириартом-Уррути, см. [377].

(6) Необходимые условия экстремума из 6.1.1 (1, 2) можно записать в эквивалентной форме с использованием субдифференциала и супердифференциала Пено:

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0) \ &\leftrightarrow\ 0 \in \partial^{\leqslant} f(x_0),\\
\underline{\partial} f(x_0) \subset \overline{\partial} f(x_0) \ &\leftrightarrow\ 0 \in \partial^{\geqslant} f(x_0).
\end{aligned}
$$

В самом деле, нужно лишь заметить, что соотношения $0 \in B \div A$ и $A \subset B$ равносильны, и воспользоваться предложением (5).

6.7.6. (1) Данное в [329] определение квазидифференцируемого отображения, действующего из банахова пространства в банахово K-пространство, можно сформулировать и для топологических векторных пространств. Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to E$ и точку $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Односторонняя производная по направлению $h \in X$ определяется, как обычно, формулой

$$
f'(x_0)h := f'_{x_0}(h) := \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha},
$$

но предел здесь, в отличие от 6.6.2, понимается в смысле топологии, т. е. для любой окрестности нуля $V \subset E$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\alpha \in (0, \varepsilon)$ будет

$$\left| \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} - f'(x_0)h \right| \in V.$$

Далее, отображение f называют топологически квазидифференцируемым в точке x_0, если (a) существует односторонняя производная $f'(x_0)$ в точке x_0 по всем направлениям $h \in X$ и (b) производная по направлениям $f'(x_0) : X \to E$ — непрерывный квазилинейный оператор.

Непрерывному квазилинейному оператору $f'(x_0) \in \mathrm{QL}^c(X, E)$ в силу двойственности Минковского отвечает элемент $\mathscr{D}\big(f'(x_0)\big) \in [\mathrm{CS}_c^c(X, E)]$, который называют *топологическим квазидифференциалом.* Как видно, данные определения совпадают с определениями из 6.6.2, если в E порядково сходящиеся сети сходятся топологически.

(2) Рассмотрение топологического квазидифференциала при анализе экстремальных задач при наличии ограничений типа включения оправдана тем, что в точке минимума производная по направлениям будет положительна не только на конусе допустимых направлений, но и на его замыкании. Условие же K-регулярности множества в точке позволяет записать необходимые условия в терминах нормального конуса, см. 6.6.5. Другие виды K-регулярности будут рассмотрены в следующей главе.

(3) Классические методы невыпуклого математического программирования, основанного на локальной аппроксимации, не могут быть использованы для исследования и решения многих задач глобальной оптимизации. Таким образом, возникает потребность в развитии специальных глобальных средств для решения таких задач. Некоторые из этих методов основаны на концепции обобщенной выпуклости, в которой развивается идея представления функции довольно сложной природы, как верхней огибающей множества достаточно простых функций. Эта концепция восходит к Г. Минковскому и была модернизирована С. С. Кутателадзе и А. М. Рубиновым [167]. Современному состоянию исследований в области двойственности Минковского посвящена монография А. М. Рубинова [530], в которой рассмотрены многие теоретические и численные аспекты глобальной оптимизации, основанные на этой концепции.

Глава 7

Локальные выпуклые аппроксимации

В современных исследованиях общих негладких оптимизационных задач весьма значительное внимание принято уделять поиску удобных выпуклых аппроксимаций для достаточно широких классов функций и множеств. Один из возможных видов локальной аппроксимации отображений — квазидифференциал — был рассмотрен в шестой главе. Несмотря на все свои достоинства, концепция квазидифференциала далеко не во всех случаях оказывается наиболее удобным и эффективным инструментом исследования. Разными авторами изобретено великое множество локальных выпуклых аппроксимаций: контингенция, гиперкасательные направления, верхние (нижние) выпуклые аппроксимации, конусы Адамара, Булигана и Кларка, производные Дини, Адамара и Рокафеллара — вот далеко не полный перечень используемых аппроксимаций. Вместе с тем нет универсального, пригодного для любых классов задач, типа локальной аппроксимации. Различные локальные выпуклые аппроксимации дополняют друг друга, причем для изучения разных конкретных классов задач могут оказаться более удобными любые из имеющихся типов локальных аппроксимаций.

Важной точкой отсчета теории локальных выпуклых аппроксимаций послужили определения субдифференциала локально липшицевой функции и касательного конуса к множеству, данные Ф. Кларком [312]. Введение кларковского касательного конуса повлекло за собой бурный всплеск исследований по негладкому анализу, распространение новых идей и методов, которые оказали, в свою очередь, существенное влияние на развитие теории экстремальных задач. Вместе с тем здесь еще не достигнута та же степень полноты и завершенности, что наличествует в субдифференциальном исчислении выпуклых операторов.

Способы локальной аппроксимации множеств и функций, развиваемые в субдифференциальном исчислении, связаны с построением достаточно сложных, зачастую труднообозримых формул. Возникающие понятия — гиперкасательные, пределы по Рокафеллару, производные Кларка — при первом знакомстве вызывают недоумение, так как смысл их формальных определений уловить совсем нелегко. *Нестандартный анализ предлагает эффективные упрощающие процедуры* — привлечение легализуемых им внешних понятий «*убивает кванторы*», что существенно сокращает сложность восприятия описываемых стандартных конструкций. Необходимые предварительные сведения из инфинитезимального анализа собраны в Приложении 5. Ниже мы широко и свободно пользуемся положениями нестандартного анализа для развития теории классификаций односторонних касательных к произвольным функциям и множествам. Особое внимание уделено инфинитезимальному статуту конуса Кларка и других аналогичных регуляризирующих и аппроксимирующих конусов и аппарату оперирования с указанными конусами.

7.1. Топологии в векторных пространствах

Построение локальных аппроксимаций в векторных пространствах связано с особенностями монад, задающих топологические и родственные объекты, согласованные с имеющейся алгебраической структурой. Требуемые для дальнейшего сведения об этих объектах мы и приведем в текущем параграфе. При этом часто используется предположение о *стандартности антуража,* означающее, что областью изменения свободных переменных в исследуемых утверждениях служит класс стандартных множеств.

7.1.1. Напомним фундаментальное понятие монады.

(1) Пусть X — стандартное множество и $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра в X. Это означает, что $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$, $\varnothing \notin \mathscr{B}$ и из включений $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ следует существование такого $B \in \mathscr{B}$, что $B \subset B_1 \cap B_2$. Символом $\mu(\mathscr{B})$ обозначают *монаду* $\mathscr{B}$, т. е. внешнее множество, определяемое соотношением

$$\mu(\mathscr{B}) := \bigcap\{B : \ B \in {}^\circ\mathscr{B}\}.$$

Для стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ элементы из $\mu(\mathscr{B})$ называют *бесконечно малыми* или *удаленными* (относительно $\mathscr{B}$). Аналогично, элемент $B \in \mathscr{B}$ такой, что $B \subset \mu(\mathscr{B})$, также называют бесконечно малым или удаленным. Совокупность всех бесконечно удаленных множеств из $\mathscr{B}$ обозначают ${}^a\mathscr{B}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра и $\operatorname{fil}\mathscr{B}$ — фильтр, порожденный $\mathscr{B}$, т. е. совокупность надмножеств элементов из $\mathscr{B}$. Символически:

$$\operatorname{fil}\mathscr{B} := \{F \subset X : (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset F)\}.$$

По принципу переноса если $\mathscr{B}$ — стандартный фильтр (в стандартном множестве X), то $\operatorname{fil}\mathscr{B}$ также стандартный (базис) фильтра. При этом $\mu(\mathscr{B}) = \mu(\operatorname{fil}\mathscr{B})$. Отметим, что иногда бывает удобным рассматривать монаду произвольного внутреннего фильтра $\mathscr{F}$. Ее определяют очевидным образом: $\mu(\mathscr{F}) := \bigcap {}^\circ\mathscr{F}$. Подчеркнем, что монада фильтра $\mathscr{F}$ в стандартном множестве X обязательно является внешним надмножеством некоторого внутреннего элемента $\mathscr{F}$.

(2) *Внутреннее множество служит надмножеством некоторого стандартного элемента стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если оно содержит монаду $\mu(\mathscr{B})$.*

$\lhd$ Если $A \supset B$ и $B \in {}^\circ\mathscr{B}$, то $A \supset \mu(\mathscr{B})$ по определению. Если же, наоборот, $A \supset \mu(\mathscr{B})$, то, учитывая, что по принципу идеализации имеется внутреннее множество $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \subset \mu(\mathscr{B})$, мы выводим $A \supset B$. $\rhd$

(3) *Каждый стандартный фильтр $\mathscr{F}$ является стандартизацией внешнего главного фильтра надмножеств монады $\mu(\mathscr{F})$.*

$\lhd$ В символах требуется установить

$$(\forall^{\mathrm{st}} A)((A \in \mathscr{F}) \leftrightarrow (A \supset \mu(\mathscr{F}))).$$

Последнее соотношение, очевидно, содержится в (1). $\rhd$

(4) Пусть Ξ — стандартное направление, т. е. непустое направленное множество. В силу принципа идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие все стандартные точки Ξ.

Такие элементы Ξ называют *бесконечно большими, недоступными* или *удаленными* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{[\xi, \to) := \{\eta \in \Xi : \eta \geqslant \xi\} : \xi \in \Xi\}$. По определению $\eta \in \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\, \eta \geqslant \xi$, т. е. монада фильтра хвостов, как и следовало ожидать, составлена из бесконечно далеких элементов рассматриваемого направления. Используем обозначение ${}^a\Xi := \mu(\mathscr{B})$.

(5) Пусть $f \subset X \times Y$ и $\mathscr{F}$ — (базис) фильтра в X, причем $\mathrm{dom}(f)$ задевает $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall\, F \in \mathscr{F})\ \mathrm{dom}(f) \cap F \notin \varnothing$. Положим, как это принято,

$$f(\mathscr{F}) := \{B \subset Y : (\exists\, F \in \mathscr{F})(B \supset f(F))\}.$$

Таким образом, $f(\mathscr{F})$ — фильтр в Y, *образ* $\mathscr{F}$ при соответствии f. Если $\mathscr{G}$ — базис фильтра в Y, причем $\mathrm{dom}(f^{-1})$ задевает $\mathscr{G}$, то прообраз $f^{-1}(\mathscr{G})$ фильтра $\mathscr{G}$ при соответствии f — по определению образ этого фильтра при соответствии f^{-1}, понимаемый в смысле данного выше определения.

(6) *Образ (прообраз) монады фильтра — монада образа (прообраза) этого фильтра; символически:*

$$\mu(f(\mathscr{F})) = f(\mu(\mathscr{F})), \quad \mu(f^{-1}(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mu(\mathscr{G})).$$

$\lhd$ Принимая гипотезу стандартности антуража, т. е. считая X, Y, f, $\mathscr{F}$ стандартными объектами, с учетом принципа идеализации имеем

$$\begin{gathered} y \in \mu(f(\mathscr{F})) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in f(\mathscr{F}))(y \in B) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(y \in f(F)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists\, x)(\forall\, F \in \mathscr{F}_0)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)\ (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(y \in f(x)) \leftrightarrow (y \in f(\mu(\mathscr{F}))). \end{gathered}$$

Второе соотношение то же, что и первое, но для соответствия f^{-1}. $\rhd$

(7) *Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — два стандартных базиса фильтра в некотором стандартном множестве. Тогда*

$$\mathrm{fil}\, \mathscr{B}_1 \supset \mathrm{fil}\, \mathscr{B}_2 \leftrightarrow \mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2).$$

$\lhd$ $\to$: Если B_2 стандартно и $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_2)$, то на основании (3) $B_2 \in \operatorname{fil} \mathscr{B}_2$ и, стало быть, $B_2 \in \operatorname{fil} \mathscr{B}_1$. Отсюда $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_1)$. Следовательно, $\mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2)$.

$\leftarrow$: Пусть F_2 — стандартный элемент $\operatorname{fil} \mathscr{B}_2$, т. е. надмножество некоторого стандартного $B_2 \in \mathscr{B}_2$. По условию B_2 содержит монаду $\mu(\mathscr{B}_1)$. Значит, в силу (3) $B_2 \in \operatorname{fil} \mathscr{B}_1$. Поэтому и $F_2 \in \operatorname{fil} \mathscr{B}_1$. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

(8) *Пусть $f : X \to Y$ и $\mathscr{A}$ — базис фильтра в X, а $\mathscr{B}$ — базис фильтра в Y. В случае стандартных параметров имеют место следующие эквивалентности:*

$$f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil} \mathscr{B} \leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil} \mathscr{A} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(f(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B}).$$

$\lhd$ Эквивалентность первых двух формул видна из выкладки:

$$f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil} \mathscr{B} \leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(f(A) \subset B) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(A \subset f^{-1}(B)) \leftrightarrow (f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil} \mathscr{A}).$$

Равносильность первой и третьей формул обеспечена (7). Для завершения доказательства следует заметить, что с учетом (5) будет

$$f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset f^{-1}(\mu(\mathscr{B})) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset \mu(f^{-1}(\mathscr{B})) \leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil} \mathscr{A}.$$

Предложение доказано. $\rhd$

7.1.2. Рассмотрим теперь свойства монад фильтров окрестностей в топологических пространствах.

(1) Пусть (X, τ) — стандартное *предтопологическое пространство.* Таким образом, для каждого (стандартного) x из X задан (стандартный) фильтр $\tau(x)$ в X. Обозначим $\mu(x) := \mu_\tau(x) := \mu(\tau(x))$. Элементы $\mu(x)$ называют *бесконечно близкими точками* к x. Очевидно, что $\mu(x)$ — монада фильтра окрестностей $\tau(x)$ точки x. Предтопологическое пространство (X, τ) называют *топологическим*, если каждая окрестность точки в X содержит открытую окрестность этой точки. Иными словами, у любого $x \in {}^\circ X$ имеется бесконечно малая окрестность $U \in \tau(x)$, для которой $\mu(x') \subset \mu(x)$ при всех $x' \in U$.

Пусть G — (внешнее) множество в топологическом пространстве (X, τ). Положим $h(G) := \bigcup\{\mu(x) : x \in {}^{\circ}G\}$. Множество $h(G)$ называют *гало* G в X. Множество $G \cap h(G)$ называют *автогало* или *околостандартной частью* G и обозначают $\operatorname{nst}(G)$. Если $G \supset h(G)$, то G называют *насыщенным* или, более полно, τ-насыщенным. Если для всякого $x \in G$ верно, что $\mu(x) \subset G$, то G называют *вполне насыщенным* (*вполне τ-насыщенным*).

Стандартную точку x из X называют *микропредельной* для U, если $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Стандартное множество, образованное всеми микропредельными точками U, называют *микрозамыканием* U и обозначают $\mathrm{cl}_{\approx} U$.

(2) *Стандартное множество открыто в том и только в том случае, если оно насыщенно.*

$\lhd$ Если G открыто и $x \in {}^{\circ}G$, то $G \supset \mu(x)$. Значит, G содержит свое гало. Наоборот, если $G \supset h(G)$, то, выбирая удаленный элемент U_x из фильтра $\tau(x)$ для $x \in {}^{\circ}G$, видим, что $G \supset U_x$. По принципу переноса G открыто. $\rhd$

(3) *Микрозамыкание* $\mathrm{cl}_{\approx} U$ *каждого внутреннего множества U замкнуто. Если U — стандартное множество, то микрозамыкание* $\mathrm{cl}_{\approx} U$ *совпадает с замыканием* $\mathrm{cl}\, U$ *множества U.*

$\lhd$ Пусть $A := \mathrm{cl}_{\approx} U = {}^{*}\{x \in X : \mu(x) \cap U \neq \varnothing\}$ и $y \in \mathrm{cl}\, A$. Следует установить, что $y \in A$. По принципу переноса можно считать, что y — стандартный элемент. Возьмем стандартную открытую окрестность V точки y. По условию имеется стандартная точка $x \in V$ такая, что $x \in A$. По определению стандартизации и монады мы выводим, что $V \supset \mu(x)$ и $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Отсюда $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y))\ V \cap U \neq \varnothing$. В силу принципа идеализации заключаем: $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx} U$.

Пусть теперь U стандартно. Ясно, что ${}^{\circ}U \subset \mathrm{cl}_{\approx} U$. Стало быть, $U \subset \mathrm{cl}_{\approx} U$ и $\mathrm{cl}\, U \subset \mathrm{cl}_{\approx} U$ в силу уже доказанного. Если взять $y \in \mathrm{cl}\, U$, то $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y))\ V \cap U \neq \varnothing$. Значит, по принципу идеализации $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx} U$. $\rhd$

(4) ***Нестандартный критерий непрерывности.*** *Пусть (X, τ) и (Y, σ) — стандартные топологические пространства, $f : X \to Y$ — стандартное отображение и x — стандартная точка в X. Тогда* *отображение f непрерывно в точке x в том и только в том случае, если f переводит точки, бесконечно близкие к x, в точки, бесконечно близкие к $f(x)$, т. е. если*

$$(\forall\, x')(x' \in \mu_\tau(x) \to f(x') \in \mu_\sigma(f(x))).$$

$\lhd$ Достаточно сослаться на 7.1.1 (8). $\rhd$

(5) Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — *расширенная числовая прямая*, т. е. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где $+\infty$ и $-\infty$ — присоединенные к $\mathbb{R}$ наибольший и наименьший элементы. Число $t \in \mathbb{R}$ будет доступным, если найдется стандартное число $n \in {}^\circ\mathbb{N}$, для которого $|t| \leqslant n$. Условие доступности t из $\mathbb{R}$ записывают также в виде $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}$, не являющиеся доступными, называют *недоступными* или *актуальными бесконечными числами*. Пишут $t \approx +\infty$ для $t \notin {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $t > 0$. По аналогии понимают записи $t \approx -\infty$ и $t \approx \infty$.

Монада $\mu(\mathbb{R})$ представляет собой монаду фильтра окрестностей нуля обычной топологии на $\mathbb{R}$. Элементы монады $\mu(\mathbb{R})$ называют также *бесконечно малыми*. Как видно, число $t \in \mathbb{R}$ будет *бесконечно малым*, если для всякого $n \in {}^\circ\mathbb{N}$ верно $|t| \leqslant 1/n$. При этом пишут $t \approx 0$ или $t \in \mu(\mathbb{R})$ и говорят, что t лежит в *монаде* нуля. Бесконечно малые называют еще *инфинитезималями*.

(6) В инфинитезимальном анализе установлено, что для произвольного доступного числа существует и притом единственное бесконечно близкое к нему стандартное число. Стандартное число, являющееся бесконечно близким к доступному числу $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, называют *стандартной частью* числа t и обозначают $\mathrm{st}(t)$ или ${}^\circ t$. Для удобства полагают также ${}^\circ t = \mathrm{st}(t) = +\infty$, если $t \approx +\infty$, и соответственно ${}^\circ t = \mathrm{st}(t) = -\infty$ при $t \approx -\infty$ (при этом, конечно же, считают, что $+\infty \approx +\infty$ и $-\infty \approx -\infty$). Таким образом, каждому (стандартному) $t \in \overline{\mathbb{R}}$ отнесена его монада $\mu(t)$, т. е. элементы s из $\mathbb{R}$, для которых $s \approx t$.

(7) *Для произвольных элементов $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$ выполнены соотношения:*

$$(\exists\, t' \approx t)(t' \geqslant s) \leftrightarrow {}^\circ s \leqslant {}^\circ t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R})(s \leqslant {}^\circ t + \varepsilon);$$
$$(\forall\, t' \approx t)(t' \geqslant s) \leftrightarrow {}^\circ s < t \quad ({}^\circ t \in {}^\circ\mathbb{R}).$$

7.1.3. Рассмотрим теперь способы введения согласованной топологии в векторном пространстве и особенности соответствующих монад.

(1) *Пусть U — звездное множество в векторном пространстве, т. е. $[0,1]\,U \subset U$. Множество U поглощает множество V в том и только в том случае, если для некоторого (а тогда и для любого) положительного инфинитезимального α будет $\alpha V \subset U$.*

$\lhd$ Раз U поглощает V, то по определению имеется $\beta > 0$, для которого $\beta V \subset U$. По принципу переноса с учетом стандартности U и V можно заключить, что $(\exists^{\mathrm{st}}\beta > 0)\,\beta V \subset U$. Теперь если $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$, то $\alpha V = \alpha/\beta(\beta V) \subset \alpha/\beta U \subset U$. Оставшаяся часть утверждения очевидна. $\rhd$

Пусть x — стандартный элемент рассматриваемого стандартного векторного пространства X. Внешнее множество $\{\alpha x : \alpha > 0, \alpha \approx 0\}$ называют *радиус-монадой* x или *бесконечно малым указателем* на x, или, наконец, *направлением* на x. Объединение радиус-монад стандартных элементов X называют *монадой направлений* этого пространства и обозначают $\mathrm{md}\,(X)$.

Пусть x — стандартный элемент рассматриваемого стандартного векторного пространства X. Внешнее множество $\{\alpha x : \alpha > 0, \alpha \approx 0\}$ называют *радиус-монадой* x или *конатусом* вектора x, или, наконец, *направлением* на x. Термин «конатус» был предложен Т. Гоббсом [39, p. 173], писавшим, что конатус "is motion through a space and a time less than any given, that is, less than any determined whether by exposition or assigned by number, that is, through a point." Объединение радиус-монад стандартных элементов X называют *конатусом направлений* этого пространства и обозначают $\mathrm{cnt}(X)$.

(2) *Стандартное звездное множество U является поглощающим в X в том и только в том случае, если U содержит конатус направлений $\mathrm{cnt}(X)$ пространства X.*

$\lhd$ Следует непосредственно из определений и (1). $\rhd$

7.1.4. *Нестандартный критерий векторной топологии.* *Пусть X — стандартное векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ и $\mathscr{N}$ — стандартный фильтр в X. Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{N})$ фильтра $\mathscr{N}$ содержит конатус направлений $\mathrm{cnt}(X)$ и, кроме того, является внешним ${}^{\approx}\mathbb{F}$-подмодулем X.*

(Здесь, как обычно, ${}^{\approx}\mathbb{F} := \{t \in F : (\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})|t| \leqslant n\}$ — доступная часть основного поля скаляров $\mathbb{F}$, наделенная естественной структурой внешнего кольца. Напомним, что $\mathbb{F}$ — это $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.)

$\lhd$ $\rightarrow$: Так как сложение непрерывно в нуле, то $\mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$, т. е. $\mu(\mathscr{N})$ — внешняя подгруппа X. Пусть $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$ и $\mathscr{G}$ — какой-нибудь базис $\mathscr{N}$, состоящий из уравновешенных множеств. Если $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $|\alpha| \leqslant n$, то для $G \in {}^{\circ}\mathscr{G}$ и $x \in \mu(\mathscr{N})$ будет $\alpha/n\ x \in G$. Отсюда $\alpha/nx \in \bigcap\{G : G \in {}^{\circ}\mathscr{G}\} = \mu(\mathscr{G}) = \mu(\mathscr{N})$. Стало быть, $\alpha x \in n\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$. Окончательно $\alpha\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$ для $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$. Необходимо, наконец, отметить, что $\mathscr{N}$ имеет базис из поглощающих множеств, и сослаться на 7.1.3, чтобы заключить $\mu(\mathscr{N}) \supset \operatorname{cnt}(X)$.

$\leftarrow$: Возьмем $U \in {}^{\circ}\mathscr{N}$. В соответствии с 7.1.4 это означает, что $U \supset \mu(\mathscr{N})$. Если W — бесконечно малый элемент $\mathscr{N}$, то его уравновешенная оболочка V также бесконечно мала (ибо $V \subset \mu(\mathscr{N})$). Кроме того, $V + V \subset \mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) \subset \mu(\mathscr{N}) \subset U$. Итак,

$$(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{N})(\exists V \in \mathscr{N})(V \text{ уравновешено } \wedge V + V \subset U).$$

По принципу переноса делаем вывод, что $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$ и, кроме того, $\mathscr{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств. На основании 7.1.3 отмечаем также, что $\mathscr{N}$ составлен из уравновешенных стандартных множеств. Тем самым $\mathscr{N}$ действительно определяет векторную топологию на X. $\rhd$

7.1.5. *Для каждой точки x монады $\mu(X) := \mu(\tau(0))$ топологического векторного пространства (X, τ) имеется бесконечно большое натуральное число $N \in \mathbb{N} - {}^{\circ}\mathbb{N}$ такое, что $Nx \in \mu(X)$.*

$\lhd$ Если V — стандартная окрестность нуля и $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, то на основании 7.1.4 множество $A(n, V) := \{m \in \mathbb{N} : m \geqslant n \wedge mx \in V\}$ не пусто (ибо $\mu(X) \subset V$). По принципу переноса имеется элемент N, для которого $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall^{\mathrm{st}} U \in \tau(0))(N \in A(n, V))$. Ясно, что элемент N — искомый. $\rhd$

7.1.6. В приложениях иногда удобно рассматривать *почти векторные топологии.* Такая топология τ на пространстве X характеризуется теми свойствами, что, во-первых, непрерывно умножение векторов из X на каждый скаляр из основного поля и, во-вторых, сложение непрерывно по совокупности переменных. Пару (X, τ), равно как и само X, называют при этом *почти топологическим векторным пространством.* Естественность этого понятия легко осознать в связи со следующим очевидным утверждением.

Нестандартный критерий почти векторной топологии. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Существует почти векторная топология τ на X такая, что $\tau(0)$ совпадает с фиксированным фильтром $\mathscr{N}$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{N})$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров ${}^{\circ}\mathbb{F}$.*

$\lhd$ Доказательство аналогично 7.1.4. $\rhd$

В связи с установленным предложением отметим, что монада фильтра окрестностей нуля почти векторного пространства является выпуклым внешним множеством. Внутреннее выпуклое множество U содержит, очевидно, произвольные выпуклые комбинации своих элементов, т. е. для конечных наборов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ положительных скаляров, составляющих в сумме единицу, и набора $\{u_1, \dots, u_N\}$ элементов U будет $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \in U$. Здесь N — произвольный (внутренний) элемент $\mathbb{N}$. Сформулированное свойство, называемое *гипервыпуклостью*, для внешних выпуклых множеств не выполняется (принцип индукции по внутренним натуральным числам в мире внешних множеств просто неверен). Примеры, подтверждающие высказанное положение, легко извлечь с учетом следующего полезного предложения.

7.1.7. ***Нестандартный критерий локально выпуклой топологии.*** *Векторная топология является локально выпуклой в том и только в том случае, если монада ее фильтра окрестностей нуля — гипервыпуклое множество.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Стандартные окрестности локально выпуклой топологии содержат стандартные выпуклые, а потому и гипервыпуклые окрестности. Пересечение же гипервыпуклых внешних множеств вновь гипервыпукло.

$\leftarrow$: Каждая стандартная окрестность нуля рассматриваемой топологии τ содержит выпуклую оболочку бесконечно малой окрестности (ибо эта оболочка целиком лежит в монаде $\tau(0)$ в силу ее гипервыпуклости). По принципу переноса заключаем, что любая окрестность в $\tau(0)$ содержит выпуклую окрестность нуля. $\rhd$

В заключение текущего параграфа, несколько уклоняясь от магистрали изложения, отметим, что инфинитезимальный анализ топологических векторных пространств и операторов в них связан с изучением расположений точек различного вида. При этом, помимо уже встречавшихся нам околостандартных точек, важное место занимают специфические понятия «борнологического типа». Остановимся здесь лишь на простейших понятиях такого рода.

7.1.8. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство и x — внутренняя точка X. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *при любом бесконечно малом $\alpha \in \mathbb{F}$ верно $\alpha x \approx_\tau 0$;*

(2) $x \in \bigcap\limits_{V \in \tau(0)} \bigcup\limits_{n \in {}^\circ\mathbb{N}} nV$;

(3) *для всякой стандартной непрерывной полунормы p (элемента зеркала τ) выполнено $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{F}$.*

$\lhd$ (1) $\leftrightarrow$ (2): Воспользуемся алгоритмом Нельсона:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, \alpha \in F)(\alpha \approx 0 \to \alpha x \approx 0) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)((\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})\, |\alpha| \leqslant n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)(\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(|\alpha| \leqslant n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(x \in nV).
\end{gathered}
$$

(1) $\to$ (3): Если p — непрерывная полунорма, то для всякого $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ будет $|t|p(x) = p(|t|x) \approx 0$ в силу 7.1.2 (4). Итак, $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{R}$.

(3) $\to$ (1): При каждой стандартной непрерывной полунорме p верно $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \approx 0$, как только $|\alpha| \approx 0$. Останется заметить, что последнее и означает инфинитезимальность αx в топологии τ. $\rhd$

7.1.9. Точка x, удовлетворяющая одному, а тогда и любому из эквивалентных условий 7.1.8 (1)–(3), называется *доступной*, реже *конечной*, в (X, τ). При этом пишут $x \in \operatorname{ltd}(X, \tau)$ или просто $x \in \operatorname{ltd}(X)$, если в указании на топологию нет особой необходимости, и говорят о принадлежности x *доступной части* пространства X.

Нестандартный критерий ограниченности. *Пусть X — это стандартное локально выпуклое пространство. Стандартное множество U в X ограничено в том и только в том случае, если оно составлено из доступных точек пространства X, т. е. $U \subset \operatorname{ltd}(X)$.*

$\lhd$ $\to$: Если U ограничено, то для произвольно взятой непрерывной полунормы $p \in \mathfrak{M}_r$ имеется стандартное $t \in {}^\circ\mathbb{R}$ такое, что $p(U) \leqslant t$. Значит, при $\alpha \approx 0$ и $x \in U$ будет $p(\alpha x) \leqslant t\alpha$, т. е. $\alpha x \approx 0$.

Разнообразия ради мы воспользуемся секвенциальным признаком ограниченности. Итак, пусть (α_n) — стандартная последовательность скаляров, сходящаяся к нулю, и (u_n) — стандартная последовательность точек U. Нужно показать, что $\alpha_n u_n \to 0$. Пусть

N — бесконечно большой номер. Тогда $\alpha_N \approx 0$ и, стало быть, на основании 7.1.8 (1) и условия будет $\alpha_N u_N \approx 0$. $\triangleright$

7.1.10. Точку x пространства X называют *ограниченной* и пишут $x \in \mathrm{bd}\,(X)$, если найдется стандартное ограниченное множество, содержащее x.

Нестандартные критерии нормируемости. *Пусть X — (отделимое) локально выпуклое пространство. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *X нормируемо;*

(2) *внешние множества доступных и ограниченных множество в X совпадают, т. е. $\mathrm{bd}\,(X) = \mathrm{ltd}(X)$;*

(3) *монада нуля $\mu(X)$ состоит из ограниченных точек, т. е. $\mu(X) \subset \mathrm{bd}\,(X)$.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Ясно, что $\mathrm{bd}\,(X) \subset \mathrm{ltd}(X)$ без каких-либо гипотез об X. Если же X нормируемо, то $\mathrm{ltd}(X) = \{x \in X : \|x\| \in {}^{\approx}\mathbb{R}\}$, где $\|\cdot\|$ — подходящая норма. Тем самым $\mathrm{ltd}(X)$ лежит, например, в шаре $B_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

(2) $\to$ (3): Поскольку $\mu(X)$ всегда лежит в $\mathrm{ltd}(X)$, то требуемое очевидно.

(3) $\to$ (1): Пусть U — бесконечно малая окрестность в X. Имеем по условию, что для каждого $x \in U$ найдется стандартное множество V такое, что V ограничено и $x \in V$. Тем самым на основании принципа идеализации U лежит в некотором ограниченном множестве. Остается сослаться на классический критерий Колмогорова. $\triangleright$

Приведенное утверждение показывает, в частности, что в общем (ненормируемом) случае доступных точек в пространстве больше, чем ограниченных. В нормированном же пространстве X, конечно, $\mathrm{ltd}(X) = \mathrm{bd}\,(X)$.

7.2. Аппроксимирующие и регуляризирующие конусы

В приложениях локального выпуклого анализа широко используются локальные аппроксимации множеств посредством конусов различных типов. В этом параграфе показано, что при обычном предположении *стандартности антуража* — в случае стандартности свободных переменных — конусы Булигана, Кларка и Адамара и связанные с ними регуляризирующие конусы определяются ясными инфинитезимальными конструкциями — прямыми апелляциями к бесконечно близким точкам и направлениям.

7.2.1. Пусть X — вещественное векторное пространство. В этом пространстве наряду с фиксированной почти векторной топологией $\sigma := \sigma_X$ с фильтром окрестностей нуля $\mathscr{N}_\sigma := \sigma(0)$ выделим почти векторную топологию τ с фильтром $\mathscr{N}_\tau := \tau(0)$. Как обычно, введем отношение бесконечной близости, ассоциированное с соответствующей равномерностью: $x_1 \approx {}_\sigma x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mu(\mathscr{N}_\sigma)$. Аналогичное правило действует для τ. Ниже, если явно не оговорено противное, мы считаем σ векторной топологией. При этом монаду фильтра окрестностей $\sigma(x)$ обозначаем $\mu(\sigma(x))$, а монаду $\mu(\sigma(0))$ — просто $\mu(\sigma)$.

7.2.2. Для фиксированных множеств F в X и точки x' из X в субдифференциальном исчислении рассматривают, в частности, следующие *конусы Адамара* $\mathrm{Ha}(F,x')$, *Кларка* $\mathrm{Cl}(F,x')$ и *Булигана* $\mathrm{Bo}(F,x')$ в точке x' соотношениями:

$$\mathrm{Ha}(F,x') := \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \mathrm{int}_\tau \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha};$$

$$\mathrm{Cl}(F,x') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \left(\frac{F-x}{\alpha}+V\right);$$

$$\mathrm{Bo}(F,x') := \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha},$$

где, как обычно, $\sigma(x') := x' + \mathscr{N}_\sigma$. Если $h \in \mathrm{Ha}(F,x')$, то иногда говорят, что F *эпилипшицево* в x' по отношению к h. Ясно, что

$$\mathrm{Ha}(F,x') \subset \mathrm{Cl}(F,x') \subset \mathrm{Bo}\,(F,x').$$

7.2.3. Выделяют также *гиперкасательный конус* $\mathrm{H}(F,x')$, *конус допустимых направлений* $\mathrm{Fd}(F,x')$ и *контингенцию* $\mathrm{K}(F,x')$ множества F в точке x' соотношениями:

$$\mathrm{H}(F,x') := \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha};$$

$$\mathrm{Fd}(F,x') := \bigcap_{\alpha'>0} \frac{F-x'}{\alpha'};$$

$$\mathrm{K}(F,x') := \bigcap_{\alpha'} \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{0<\alpha\leqslant\alpha'} \frac{F-x'}{\alpha}.$$

Для экономии слов удобно считать, что $x' \in F$. Например, можно без оговорок сказать, что конусы $\mathrm{H}(F,x')$ и $\mathrm{K}(F,x')$ — это соответственно конус Адамара и конус Булигана для случая, когда τ или σ — дискретная топология. Итак, ниже всегда $x' \in F$. При этом ради экономии места принимают следующие сокращения:

$$(\forall^\bullet x)\,\varphi := (\forall\, x \approx{}_\sigma x')\,\varphi := (\forall\, x)(x\in F \wedge x\approx{}_\sigma x') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet h)\,\varphi := (\forall\, h \approx{}_\tau h')\,\varphi := (\forall\, h)(h\in X \wedge h\approx{}_\tau h') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet \alpha)\,\varphi := (\forall\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\forall\, \alpha)((\alpha>0 \wedge \alpha\approx 0) \to \varphi).$$

Двойственным образом определяют кванторы $\exists^\bullet x$, $\exists^\bullet h$, $\exists^\bullet \alpha$, т. е. считают

$$(\exists^\bullet x)\,\varphi := (\exists\, x \approx{}_\sigma x')\,\varphi := (\exists\, x)(x\in F \wedge x\approx{}_\sigma x') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet h)\,\varphi := (\exists\, h \approx{}_\tau h')\,\varphi := (\exists\, h)(h\in X \wedge h\approx{}_\tau h') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet \alpha)\,\varphi := (\exists\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\exists\, \alpha)(\alpha>0 \wedge \alpha\approx 0) \wedge \varphi.$$

Установим, что упомянутые конусы определяются простыми инфинитезимальными конструкциями. При этом, говоря о QQQ-конусах, где Q — либо $\forall$, либо $\exists$, мы имеем в виду определение конуса с инфинитезимальной приставкой $(Q^\bullet x)\,(Q^\bullet \alpha)\,(Q^\bullet h)$, т. е. переменные, по которым действуют кванторы, рассматриваются именно в таком порядке: (x,α,h).

7.2.4. *Конус Булигана является стандартизацией $\exists\exists\exists$-конуса, т. е. для стандартного элемента h' выполняется*

$$h' \in \mathrm{Bo}\,(F,x') \leftrightarrow (\exists^\bullet\, x)(\exists^\bullet\, \alpha)(\exists^\bullet h)(x+\alpha h \in F).$$

$\lhd$ Из определения конуса Булигана следуют эквивалентности

$$
\begin{gathered}
h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, U \in \sigma(x'))(\forall\, \alpha' \in \mathbb{R})(\forall\, V \in \mathscr{N}_\tau)(\exists\, x \in F \cap U) \\
(\exists\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, U)(\forall\, \alpha')(\forall\, V)(\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h) \\
(x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

В силу принципа переноса выводим

$$
\begin{gathered}
h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha)(\exists^{\mathrm{st}} h) \\
(x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

Используя теперь принцип идеализации, получаем

$$
\begin{gathered}
h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \to (\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V) \\
(x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\exists\, x \approx_\sigma x')(\exists\, \alpha \approx 0)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\exists^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

Пусть, в свою очередь, стандартный элемент h' входит в стандартизацию «$\exists\exists\exists$-конуса». Поскольку стандартные элементы стандартного фильтра содержат элементы монады этого фильтра, получаем

$$
\begin{gathered}
(\forall^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall^{\mathrm{st}} \alpha' \in \mathbb{R})(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau) \\
(\exists\, x \in F \cap U)(\exists\, 0 < \alpha < \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

В силу принципа переноса заключаем, что $h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x')$. $\rhd$

7.2.5. Доказанное утверждение переписывается в виде

$$
\mathrm{Bo}\,(F, x') = {}^*\{h' \in X : (\exists^\bullet\, x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F)\},
$$

где, как обычно, * — символ стандартизации. В этой связи используют образные обозначения:

$$
\exists\exists\exists(F, x') := \mathrm{Bo}\,(F, x').
$$

В дальнейшем подобного рода обозначения мы будем употреблять без особых оговорок.

7.2.6. *Конус Адамара — это стандартизация* $\forall\forall\forall$*-конуса:*

$$\mathrm{Ha}(F, x') = \forall\forall\forall(F, x').$$

Иначе говоря, для стандартных h', F *и* x' *выполнено*

$$h' \in \mathrm{Ha}(F, x') \leftrightarrow (x' + \mu(\sigma)) \cap F + \mu(\mathbb{R}_+)(h' + \mu(\tau)) \subset F,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ *— внешнее множество положительных бесконечно малых чисел.*

$\lhd$ Доказательство получается по соображениям двойственности из 7.2.4, если (что, конечно же, корректно) забыть о наличии F в $\exists^{\bullet} x$. $\rhd$

7.2.7. Из уже установленного видна справедливость соотношений:

$$h' \in \mathrm{H}(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\bullet} x)(\forall^{\bullet} \alpha)(x + \alpha h' \in F),$$
$$h' \in \mathrm{K}(F, x') \leftrightarrow (\exists^{\bullet} \alpha)(\exists^{\bullet}\, h)(x' + \alpha h \in F).$$

Таким образом, гиперкасательный конус $\mathrm{H}(F, x')$ и контингенция $\mathrm{K}(F, x')$ являются стандартизациями $\forall\forall$-конуса и $\exists\exists$-конуса соответственно, причем в первом случае имеется в виду упорядоченная пара переменных (x, α), а во втором — (α, h).

7.2.8. *Для стандартных* F, x', h' *эквивалентны утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) *существуют бесконечно малые* $U \in \sigma(x')$, $V \in \mathscr{N}_\tau$ *и* $\alpha' > 0$ *такие, что*

$$h' \in \bigcap_{\substack{0<\alpha\leqslant\alpha' \\ x\in F\cap U}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V\right);$$

(3) $(\exists\, U \in \sigma(x'))(\exists\, \alpha')\,(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')$ $(\exists\, h \approx_\tau h')\ x + \alpha h \in F$.

$\lhd$ Используя очевидные сокращения, можно записать

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)$$
$$x + \alpha h \in F.$$

Привлекая принцип переноса и идеализацию, имеем последовательно

$$h \in \operatorname{Cl}(F, x') \to (\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall\, x \in F \cap V)$$
$$(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\forall^{\mathrm{st}} \{V_1, \dots, V_n\})(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\exists^{\mathrm{st}} V)(\forall\, k := 1, \dots, n)$$
$$V_k \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\exists\, V)(\forall^{\mathrm{st}} V')\, V' \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U)$$
$$(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).$$

Отсюда, без сомнения, следует, что для некоторых $V \in \mathscr{N}_\tau$, $V \subset \mu(\tau)$ и $U \in \sigma(x')$, $U \subset \mu(\sigma) + x'$ и бесконечно малого α будет (2) и тем более (3).

Если, в свою очередь, выполнено (3), то с учетом определения отношения $\approx_\tau$ будет

$$(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V)$$
$$x + \alpha h \in F.$$

Значит, по принципу переноса $h' \in \operatorname{Cl}(F, x')$. $\rhd$

7.2.9. *Конус Кларка является стандартизацией $\forall\forall\exists$-конуса:*

$$\operatorname{Cl}(F, x') = {}^{*}\!\forall\forall\exists(F, x').$$

Иными словами,

$$h' \in \operatorname{Cl}(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\bullet} x)(\forall^{\bullet} \alpha)(\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F).$$

$\lhd$ Пусть сначала $h' \in \operatorname{Cl}(F, x')$. Возьмем произвольные $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$. Для каждой стандартной окрестности V — элемента фильтра $\mathscr{N}_\tau$ — в силу принципа переноса найдется элемент h, для которого $h \in h' + V$ и $x + \alpha h \in F$. Применяя идеализацию, имеем

$$
\begin{gathered}
(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, h)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} V)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F),
\end{gathered}
$$

т. е. $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V из фильтра $\mathscr{N}_\tau$. Фиксируем бесконечно малую окрестность U точки x' и положительное бесконечно малое число α'. Тогда по условию для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет

$$
(\exists\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(x + \alpha h \in F).
$$

Иными словами,

$$
\begin{gathered}
(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists\, h \in h' + V) \\
(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

В силу принципа переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

7.2.10. Приведем пример применения найденного нестандартного критерия элементов конуса Кларка для вывода его основного (и хорошо известного) свойства. Более общее утверждение будет установлено ниже.

Конус Кларка произвольного множества в топологическом векторном пространстве является выпуклым и замкнутым.

$\triangleleft$ В силу принципа переноса достаточно рассмотреть ситуацию, в которой параметры — пространство, топология, множество и т. п. — стандартны. Итак, пусть $h_0 \in \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Cl}(F, x')$. Возьмем стандартную окрестность V из $\mathscr{N}_\tau$, и пусть стандартные элементы $V_1, V_2 \in \mathscr{N}_\tau$ таковы, что $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$ такой, что $h' - h_0 \in V'$. Кроме того, для любых $x \approx_\tau x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$ для некоторого h будет $h \in h' + V_2$ и $x + \alpha h \in F$. Ясно, что $h \in h' + V_2 \subset h_0 + V_1 + V_2 \subset h_0 + V$. Отсюда следует, что $h_0 \in \mathrm{Cl}(F, x')$.

Для доказательства выпуклости конуса Кларка достаточно заметить, что $\mu(\tau) + \mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\tau)$ ввиду непрерывности отображения $(x, \alpha, h) \mapsto x + \alpha h$. $\triangleright$

7.2.11. *Пусть θ — векторная топология и $\theta \geqslant \tau$. Тогда*

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x') \subset \forall\forall\exists(F, x').$$

Если к тому же $\theta \geqslant \sigma$, то

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x') = \forall\forall\exists(F, x').$$

$\lhd$ Пусть $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x')$ — некоторый стандартный элемент названного конуса. Возьмем элементы $x \in F$ и $\alpha > 0$ такие, что $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha \approx 0$. Ясно, что $x \in \mathrm{cl}_\theta F$. Значит, для некоторого $h \in {}_\tau h'$ будет $x + \alpha h \in \mathrm{cl}_\theta F$. Возьмем бесконечно малую окрестность W из $\mu(\theta)$. Окрестность αW также элемент $\theta(0)$ и, стало быть, для некоторого $x'' \in F$ будет $x'' - (x + \alpha h) \in \alpha W$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha$. Ясно, что $x + \alpha h'' \in F$ и, кроме того, $\alpha h'' \in \alpha h + \alpha W$. Отсюда $h'' \in h + W \subset h' + \mu(\tau) + W \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau)$, т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Итак, $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $\theta \geqslant \sigma$ и $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем положительное бесконечно малое α и какой-нибудь элемент $x \in \mathrm{cl}_\theta F$ такой, что $x \approx_\sigma x'$. Подберем $x'' \in F$, для которого $x - x'' \in \alpha W$, где $W \subset \mu(\theta)$ — бесконечно малая симметричная окрестность нуля в θ. Поскольку $\theta \geqslant \sigma$, то $\mu(\theta) \subset \mu(\tau)$, т. е. $x - x'' \in \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$. Иначе говоря, $x \approx_\sigma x' \approx_\sigma x''$. По определению (элемент h', как обычно, считается стандартным) для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет $x'' + \alpha h \in F$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha + h$. Ясно, что при этом выполнено

$$\begin{gathered} h'' \in h + W \subset h + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\theta) + \mu(\tau) \subset \\ \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau), \end{gathered}$$

т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Кроме того,

$$x + \alpha h'' = x + (x'' - x) + \alpha h = x'' + \alpha h \in F \subset \mathrm{cl}_\theta F.$$

Окончательно $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x')$. $\rhd$

7.2.12. Приведенные нестандартные критерии конусов Булигана, Адамара и Кларка показывают, что эти конусы взяты из перечня восьми возможных конусов с инфинитезимальной приставкой

$(\mathrm{Q}^{\bullet}x)\,(\mathrm{Q}^{\bullet}\alpha)\,(\mathrm{Q}^{\bullet}h)$ (здесь Q — либо $\forall$, либо $\exists$). Ясно, что для полного описания всех этих конусов достаточно привести характеризации еще $\forall\exists\exists$-конуса и $\forall\exists\forall$-конуса.

Из найденных представлений, в частности, видно:

$$\mathrm{Ha}(F,x') \subset \mathrm{H}(F,x') \subset \mathrm{Cl}(F,x') \subset \mathrm{K}(F,x') \subset \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Fd}(F,x').$$

При условии $\sigma = \tau$ для выпуклого F будет

$$\mathrm{Fd}(F,x') \subset \mathrm{Cl}(F,x') \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{Fd}(F,x'),$$

т. е.

$$\mathrm{Cl}(F,x') = K(F,x') = \mathrm{cl}\,\mathrm{Fd}(F,x').$$

7.2.13. *Имеет место представление*

$$\forall\exists\exists(F,x') = \bigcap_{\substack{\alpha' \\ V\in\mathscr{N}_\tau}} \bigcup_{U\in\sigma(x')} \bigcap_{x\in F\cap U} \left(V + \bigcup_{0<\alpha\leqslant\alpha'} \frac{F-x}{\alpha}\right).$$

$\lhd$ Для доказательства следует сначала понять, что требуемое равенство — сокращенная запись утверждения: для стандартных h', F, x' выполнено:

$$\begin{gathered}(\forall^{\bullet}x)(\exists^{\bullet}\alpha)(\exists^{\bullet}h)(x+\alpha h\in F) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, V\in\mathscr{N}_\tau)(\forall\,\alpha')(\exists\, U\in\sigma(x'))(\forall\, x\in F\cap U) \\ (\exists\, 0<\alpha\leqslant\alpha')(\exists\, h\in h'+V)(x+\alpha h\in F).\end{gathered}$$

Значит, при $h'\in\forall\exists\exists(F,x')$ и стандартных $V\in\mathscr{N}_\tau$ и $\alpha>0$ в качестве требуемой окрестности U можно взять внутреннее подмножество монады $\mu(\sigma(x'))$. В свою очередь, последовательное применение принципов переноса и идеализации дает

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}}V)(\forall^{\mathrm{st}}\alpha')(\forall x\approx{}_\sigma x')(\exists 0<\alpha\leqslant\alpha')(\exists h\in h'+V)\,x+\alpha h\in F\to \\ \to(\forall\, x\approx{}_\sigma x')(\forall^{\mathrm{st}}\{V_1,\dots,V_n\})(\forall^{\mathrm{st}}\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}) \\ (\exists h)(\exists\alpha)(\forall\, k:=1,\dots,n)(0<\alpha\leqslant\alpha'_k\wedge h\in h'+V_k\wedge x+\alpha h\in F)\to \\ \to(\forall x\approx{}_\sigma x')(\exists h)(\exists\alpha)(\forall^{\mathrm{st}}V)(h\in h'+V)\wedge(\forall^{\mathrm{st}}\alpha') \\ (0<\alpha\leqslant\alpha'\wedge x+\alpha h\in F)\to(\forall^{\bullet}\,x)(\exists^{\bullet}h)(\exists\,\alpha\approx 0)\,x+\alpha h\in F\to \\ \to h'\in{}^*\{h':(\forall^{\bullet}x)(\exists^{\bullet}\alpha)(\exists^{\bullet}h)(x+\alpha h\in F)\}\to h'\in\forall\exists\exists(F,x').\end{gathered}$$

Тем самым доказательство закончено. $\rhd$

7.2.14. Помимо указанных выше восьми инфинитезимальных конусов классического ряда имеются еще девять пар конусов, содержащих конус Адамара и лежащих в конусе Булигана. Такие конусы, понятно, порождаются изменением порядка кванторов. Пять новых пар устроены сложным образом по типу $\forall\exists\forall$-конуса. Прочие порождаются перестановками и дуализациями конуса Кларка и $\forall\exists\exists$-конуса. Например, в естественных образных обозначениях имеем

$$\forall\,\alpha\forall\,h\exists\,x\,(F,x') = \bigcap_{U\in\sigma(x')}\ \bigcup_{\alpha'}\ \mathrm{int}_\tau \bigcap_{0<\alpha\leqslant\alpha'}\ \bigcup_{x\in F\cap U} \frac{F-x}{\alpha},$$

$$\exists\,h\exists\,x\forall\,\alpha(F,x') = \bigcup_{\alpha'}\ \bigcap_{U\in\sigma(x')}\ \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{x\in F\cap U}\ \bigcap_{0<\alpha\leqslant\alpha'} \frac{F-x}{\alpha},$$

$$\exists\,h\forall\,x\forall\,\alpha(F,x') = \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcap_{\substack{0<\alpha\leqslant\alpha'\\ x\in F\cap U}} \frac{F-x}{\alpha}.$$

Последний конус у́же конуса Кларка и является выпуклым в случае, если $\mu(\sigma)+\mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau)\subset\mu(\sigma)$. Его обозначают $\mathrm{Ha}^+(F,x')$. Отметим, что $\mathrm{Ha}(F,x')\subset\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x')$. Выпуклым является $\forall\,\alpha\exists\,h\forall\,x$-конус, который обозначают символом $\mathrm{In}(F,x')$. Ясно, что

$$\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{In}(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x').$$

7.2.15. При вычислении различных касательных к композиции соответствий используют специальные *регуляризирующие конусы*.

Именно, если $F\subset X\times Y$, где векторные пространства X и Y снабжены топологиями σ_X, τ_X и σ_Y, τ_Y соответственно и $a' := (x',y')\in F$, полагают $\sigma := \sigma_X\times\sigma_Y$ и

$$\mathrm{R}^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}}\ \bigcup_{\substack{W\in\sigma(\alpha')\\ \alpha'}}\ \bigcup_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leqslant\alpha}} \left(\frac{F-a}{\alpha}+\{0\}\times V\right),$$

$$\mathrm{Q}^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}}\ \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}}\ \bigcap_{\substack{a\in W\subset F\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha}+\{x\}\times V\right),$$

$$\mathrm{QR}^2(F,a') := \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha}+(x,0)\right).$$

Конусы $\mathrm{R}^2(F,a')$, $\mathrm{Q}^2(F,a')$ и $\mathrm{QR}^1(F,a')$ определяют двойственным образом. Более того, аналогичные обозначения распространяют на случай произведений пространств в числе, большем двух, подразумевая, что верхний индекс над символом аппроксимирующего множества указывает номер координаты, на которую накладывается условие соответствующего типа. Отметим также, что в приложениях обычно рассматривают попарно совпадающие топологии: $\sigma_X=\tau_X$ и $\sigma_Y=\tau_Y$. Дадим удобные очевидные нестандартные критерии описанных регуляризирующих конусов.

7.2.16. *Для стандартных векторов $s'\in X$ и $t'\in Y$ выполнено:*

$$(s',t')\in\mathrm{R}^1(F,a')\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\, a\approx{}_\sigma a', a\in F)(\forall\,\alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, t\approx{}_{\tau_Y}t')(a+\alpha(s',t)\in F);$$
$$(s',t')\in\mathrm{Q}^1(F,a')\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall a\approx{}_\sigma a', a\in F)(\forall\alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\forall s\approx\tau_X s')(\exists t\approx{}_{\tau_Y}t')(a+\alpha(s,t)\in F);$$
$$(s',t')\in\mathrm{R}^2(F,a')\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\, a\approx{}_\sigma a', a\in F)(\forall\,\alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\forall\, s\approx{}_{\tau_X}s')(a+\alpha(s,t')\in F).$$

7.2.17. Из этих утверждений видно, что конусы типа QR^j — разновидности конуса Адамара, конусы R^j — разновидности конуса Кларка. Конусы R^j при этом получаются также специализацией конусов типа Q^j при соответствующем подборе дискретных топологий. В обычных предположениях названные конусы являются выпуклыми. Приведем доказательство указанного факта только для конуса Q^j, чего в силу уже отмеченного вполне достаточно.

Если отображение $(a,\alpha,b)\mapsto a+\alpha b$ непрерывно как действующее из $(X\times Y,\sigma)\times(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})\times(X\times Y,\tau_X\times\tau_Y)$ в $(X\times Y,\sigma)$, то конусы $\mathrm{Q}^j(F,a')$ для $j:=1,2$ выпуклые.

$\lhd$ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже, т. е. в предположении стандартности рассматриваемых параметров, и пользоваться критерием 7.2.16. Итак, пусть (s',t') и

(s'', t'') лежат в $\mathrm{Q}^1(F, x')$. Для $a \approx {}_\sigma a'$ и $a \in F$, положительного $\alpha \approx 0$ и $s \approx {}_{\tau_X}(s' + s'')$ в силу 7.2.16 при некотором $t_1 \approx {}_{\tau_Y} t'$ будет $a_1 := a + \alpha(s - s'', t_1) \in F$. По условию $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$. Стало быть, $a_1 \approx {}_\sigma a$ и $a_1 \in F$. Вновь привлекая 7.2.16, найдем $t_2 \approx {}_{\tau_Y} t''$, для которого $a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$. Ясно, что для $t := t_1 + t_2$ будет $t \approx {}_{\tau_Y}(t' + t'')$ и $a + \alpha(s, t) = a + \alpha(s - s'', t_1) + \alpha(s'', t_2) = a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$, что и требовалось доказать, ибо однородность $\mathrm{Q}^1(F, a')$ обеспечена устойчивостью монад почти векторных топологий относительно умножений на стандартные скаляры (см. 7.1.4). $\rhd$

7.2.18. Проведенный анализ показывает, что имеет смысл ввести в рассмотрение конусы P^j и S^j с помощью следующих прямых стандартизаций:

$$
\begin{gathered}
(s', t') \in \mathrm{P}^2(F, a') \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, s \approx {}_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx {}_{\tau_Y} t')(\forall\, a \approx {}_\sigma a', a \in F)(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+)) \\
(a + \alpha(s, t) \in F); \\
(s', t') \in \mathrm{S}^2(F, a) \leftrightarrow (\forall\, t \approx {}_{\tau_Y} t')(\exists\, s \approx {}_{\tau_X} s')(\forall\, a \approx {}_\sigma a', a \in F) \\
(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(a + \alpha(s, t) \in F).
\end{gathered}
$$

Явный вид конусов P^j и S^j можно в принципе выписать (мы разберем этот конус в следующем параграфе). Однако от возникающих явных формул (особенно для S^j) мало пользы ввиду их необозримой громоздкости. Впрочем, как мы уже убедились, подобные формулы фактически осложняют анализ, скрывая прозрачный «инфинитезимальный» смысл конструкций.

7.2.19. *Для $j := 1, 2$ выполнено*

$$
\mathrm{Ha}(F, a') \subset \mathrm{P}^j(F, a') \subset \mathrm{S}^j(F, a') \subset \mathrm{Q}^j(F, a') \subset \mathrm{R}^j(F, a') \subset \mathrm{Cl}(F, a').
$$

При этом названные конусы выпуклы, как только $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$ для всех $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$.

$\lhd$ Включения, которые требуется доказать, очевидны из нестандартных определений соответствующих конусов. Выпуклость большинства из указанных конусов уже отмечалась. Установим для полноты выпуклость $\mathrm{S}^2(F, a')$.

То, что $\mathrm{S}^2(F, a')$ выдерживает умножение на положительные стандартные скаляры, вытекает из неделимости монады. Проверим, что $\mathrm{S}^2(F,a')$ — полугруппа. Итак, для стандартных (s',t') и (s'',t'') из $\mathrm{S}^2(F,a')$ возьмем $t \approx_{\tau_Y} (t'+t'')$. Тогда $t-t'' \approx_{\tau_Y} t'$ и имеется $s_1 \approx_{\tau_X} s'$, обслуживающее $t-t''$ в соответствии с определением $\mathrm{S}^2(F,a')$. Подберем $s_2 \approx_{\tau_X} s''$, обслуживающее t'' в том же очевидном смысле. Ясно, что $(s_1+s_2) \approx_{\tau_X} (s'+s'')$. При этом для всяких $a \in F$ и $\alpha > 0$ таких, что $a \approx_\sigma a'$ и $\alpha \approx 0$, будет $a_1 := a + \alpha(s_1, t-t'') \in F$. Поскольку a_1, как видно, бесконечно близко (в смысле σ) к a', из условия выбора s_2 заключаем: $a_1 + \alpha(s_2, t'') \in F$. Отсюда непосредственно видно, что $a + \alpha(s_1+s_2, t) \in F$, т. е. $(s'+s'', t'+t'') \in \mathrm{S}^2(F,a')$.

Выпуклость $\mathrm{P}^j(F,a')$ проверяется вполне аналогичным прямым рассуждением. $\triangleright$

7.3. Пределы по Куратовскому и Рокафеллару

В предыдущем параграфе мы увидели, что многие интересующие нас конструкции связаны с процедурой чередования кванторов в инфинитезимальных конструкциях. Подобные образования возникают в различных задачах и соотнесены с некоторыми принципиальными фактами. О тех из них, которые наиболее часто встречаются при субдифференцировании, и пойдет сейчас речь. Начнем с общих наблюдений об алгоритме Нельсона.

7.3.1. *Пусть $\varphi = \varphi(x,y) \in$ (ZFC), т. е. φ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных переменных, кроме x, y. Тогда*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)\, \varphi(x,y),$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)\, \varphi(x,y),$$

где, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — монада стандартного фильтра $\mathscr{F}$.

$\triangleleft$ Достаточно доказать импликацию $\rightarrow$ в первой из эквивалентностей. По условию для любого удаленного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ выполнено внутреннее свойство $\psi := (\forall\, x \in F)\, \varphi(x,y)$. Значит, по принципу Коши ψ справедливо для какого-либо стандартного F. $\triangleright$

7.3.2. *Пусть $\varphi = \varphi(x,y,z) \in$ (ZFC) и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — некоторые стандартные фильтры (в каких-либо стандартных множествах). Тогда*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x,y,z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)(\exists\, y \in G)\, \varphi(x,y,z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall\, x \in F(G))(\exists\, y \in G)\, \varphi(x,y,z),$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x,y,z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)(\forall\, y \in G)\, \varphi(x,y,z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists\, x \in F(G))(\forall\, y \in G)\, \varphi(x,y,z)$$

(здесь символ $F(\,\cdot\,)$ обозначает функцию из $\mathscr{G}$ в $\mathscr{F}$).

$\triangleleft$ Доказательство состоит в апелляции к принципам идеализации и конструирования с учетом 7.3.1. $\triangleright$

7.3.3. *Пусть $\varphi = \varphi(x,y,z,u) \in$ (ZFC) и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ — три стандартных фильтра. При стандартном множестве и выполнены соотношения:*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x,y,z,u) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists\, F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{Fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x \in \mathscr{F})$$
$$(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi(x,y,z,u);$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\exists\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x,y,z,u) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, G(\,\cdot\,))(\forall\, F \in \mathscr{F})(\forall^{\mathrm{Fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\exists\, x \in F)$$
$$(\forall\, H \in \mathscr{H}_0)(\forall\, y \in G(H))(\exists\, z \in H)\, \varphi(x,y,z,u),$$

где $G(\,\cdot\,)$ — функция из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{G}$ и индекс $^{\mathrm{Fin}}$ над квантором означает ограничение на класс непустых конечных множеств.

$\triangleleft$ Реализуя алгоритм Нельсона, выводим:

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H})(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H})$$
$$(x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,Fin}} \mathscr{F}_0)(\exists^{\mathrm{st\,Fin}} \mathscr{H}_0)(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0)(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)$$
$$(F \in \mathscr{F} \wedge H \in \mathscr{H} \wedge (x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,Fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st\,Fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0)$$
$$(x \in F \to (\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{Fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{Fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x)$$

$$\leftrightarrow ((\forall F \in \mathscr{F}_0)(x \in F) \to (\exists H \in \mathscr{H}_0)(\exists y \in G(H))(\forall z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{Fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{Fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall x \in \cap \mathscr{F}_0)$$
$$(\exists H \in \mathscr{H}_0)(\exists y \in G(H))(\forall z \in H)\, \varphi.$$

Остается заметить, что для непустого конечного $\mathscr{F}_0$, лежащего в $\mathscr{F}$, обязательно $\cap \mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}$. $\rhd$

7.3.4. Приведенное предложение дает возможность охарактеризовать в явном виде $\forall\exists\forall$-конусы и им подобные образования. Легко видеть, что возникающие стандартные описания неудобоваримы. Остановимся теперь на наиболее важных для приложений конструкциях, связанных с приставками типа $\forall\exists$, $\forall\forall$, $\exists\forall$ и $\exists\exists$. Начнем с некоторых средств, позволяющих использовать распространенный язык бесконечно малых переменных величин для анализа таких конструкций.

Пусть Ξ — *направление*, т. е. непустое направленное множество. В соответствии с принципом идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие ${}^{\circ}\Xi$. Напомним (см. 7.1.1 (4)), что их называют *удаленными* или *бесконечно большими* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{\sigma(\xi) : \xi \in \Xi\}$, где σ — порядок в Ξ. Ясно, что монада фильтра хвостов составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используют записи: ${}^{a}\Xi := \mu(\mathscr{B})$ и $\xi \approx +\infty \leftrightarrow \xi \in {}^{a}\Xi$.

7.3.5. *Пусть Ξ, H — два направления и $\xi := \xi(\,\cdot\,) : \mathrm{H} \to \Xi$ — некоторое отображение. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\xi({}^{a}\,\mathrm{H}) \subset {}^{a}\Xi$;

(2) $(\forall \xi \in \Xi)(\exists \eta \in \mathrm{H})(\forall \eta' \geqslant \eta)(\xi(\eta') \geqslant \xi)$.

$\lhd$ В самом деле, (1) означает, что фильтр хвостов Ξ грубее образа фильтра хвостов H, т. е. что в каждом хвосте направления Ξ лежит образ некоторого хвоста H. Последнее утверждение и составляет содержание (2). $\rhd$

7.3.6. В случае выполнения эквивалентных условий 7.3.5 (1), 7.3.5 (2) говорят, что H — *поднаправление* Ξ (относительно $\xi(\,\cdot\,)$).

Пусть X — некоторое множество и $x := x(\,\cdot\,) : \Xi \to X$ — некоторая сеть элементов X (пишем также $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ или просто (x_ξ)). Пусть, далее, $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — еще одна сеть элементов X. Говорят, что (y_η) — *подсеть Мура* сети (x_ξ) или *строгая подсеть* (x_ξ), если H является поднаправлением Ξ относительно такого $\xi(\,\cdot\,)$, что $y_\eta = x_{\xi(\eta)}$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$, т. е. $y = x \circ \xi$. Подчеркнем, что в силу 7.1.1 (6) выполнено $y({}^a\,\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$.

7.3.7. Последнее указанное свойство подсетей Мура кладут в основу более свободного определения подсети, которое привлекает непосредственной связью с фильтрами. Именно, сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов X называют *подсетью* (или *подсетью в широком смысле слова*) сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, если

$$(\forall\,\xi \in \Xi)(\exists\,\eta \in \mathrm{H})(\forall\,\eta' \geqslant \eta)(\forall\,\xi' \geqslant \xi)(x(\xi') = y(\eta')),$$

т. е. в случае, когда каждый хвост сети x содержит некоторый хвост y. На языке монад, разумеется, выполнено $y({}^a\,\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$ или, в наглядной записи:

$$(\forall\,\eta \approx +\infty)(\exists\,\xi \approx +\infty)(y_\eta = x_\xi).$$

При этом, стремясь к образности, часто пишут $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — подсеть сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ (что может привести к недоразумениям). Полезно подчеркнуть, что в общем случае подсети не обязаны являться подсетями Мура. Отметим также, что две сети в одном множестве называют *эквивалентными*, если каждая из них — подсеть другой, т. е. если их монады совпадают.

Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и (x_ξ) — сеть элементов X, то говорят, что рассматриваемая *сеть подчинена* $\mathscr{F}$ при условии: $\xi \approx +\infty \to x_\xi \in \mu(\mathscr{F})$. Иначе говоря, сеть (x_ξ) подчинена $\mathscr{F}$, если фильтр ее хвостов тоньше $\mathscr{F}$. При этом допускают вольность и пишут $x_\xi \downarrow \mathscr{F}$, имея в виду аналогию с топологическими обозначениями сходимости. Отметим здесь же, что в случае, когда $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, $\mathscr{F}$ совпадает с фильтром хвостов любой подчиненной ему сети (x_ξ), т. е. сама такая сеть (x_ξ) — *ультрасеть*.

7.3.8. ***Теорема.*** *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных параметров, кроме x, y, z, причем z — стандартное множество. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в X, а $\mathscr{G}$ — фильтр в Y. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $(\forall\,G \in \mathscr{G})(\exists\,F \in \mathscr{F})(\forall\,x \in F)(\exists\,y \in G)\,\varphi(x, y, z)$;

(2) $(\forall\,x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\,y \in \mu(\mathscr{G}))\,\varphi(x, y, z)$;

(3) *для любой сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся сеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *элементов* Y, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и строгая подсеть* $(x_{\xi(\eta)})_{\eta\in\mathrm{H}}$ *сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *такие, что при всех* $\eta\in\mathrm{H}$ *будет* $\varphi(x_{\xi(\eta)},y_\eta,z)$, *т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi\downarrow\mathscr{F})(\exists\, y_\eta\downarrow\mathscr{G})\,\varphi(x_{\xi(\eta)},y_\eta,z);$$

(4) *для любой сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся сеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *элементов* Y, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и подсеть* $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *такие, что при всех* $\eta\in\mathrm{H}$ *будет* $\varphi(x_\eta,y_\eta,z)$, *т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi\downarrow\mathscr{F})(\exists\, y_\eta\downarrow\mathscr{G})\,\varphi(x_\eta,y_\eta,z);$$

(5) *для любой ультрасети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся ультрасеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и ультрасеть* $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, *эквивалентная* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, *такие, что* $\varphi(x_\eta,y_\eta,z)$ *при всех* $\eta\in\mathrm{H}$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Пусть $x\in\mu(\mathscr{F})$. По принципу переноса для каждого стандартного G имеется стандартное F такое, что $(\forall\, x\in F)$ $(\exists\, y\in G)$ $\varphi(x,y,z)$. Значит, для $x\in\mu(\mathscr{F})$ будет $(\forall\, G\in{}^\circ\mathscr{G})(\exists\, y\in G)$ $\varphi(x,y,z)$. Привлекая принцип идеализации, выводим: $(\exists\, y)(\forall\, G\in{}^\circ\mathscr{G})(y\in G\wedge\varphi(x,y,z))$. Итак, $y\in\mu(\mathscr{G})$ и $\varphi(x,y,z)$.

(2) $\to$ (3): Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная сеть в X, подчиненная $\mathscr{F}$. Для каждого стандартного G из $\mathscr{G}$ и $\xi\in{}^\circ\Xi$ положим

$$A_{(G,\xi)}:=\{\xi'\geqslant\xi:(\forall\,\xi''\geqslant\xi')(\exists\, y\in G)\,\varphi(x_{\xi''},y,z)\}.$$

На основании 7.1.1 (8) видим, что ${}^a\Xi\subset A_{(G,\xi)}$. Учитывая, что $A_{(G,\xi)}$ — внутреннее множество, по принципу Коши заключаем: ${}^\circ\!A_{(G,\xi)}\neq\varnothing$. Тем самым на направлении $\mathrm{H}:=\mathscr{G}\times\Xi$ (с естественным упорядочением) заданы стандартные отображения $\xi:\mathrm{H}\to\Xi$ и $y:\mathrm{H}\to Y$ такие, что $\xi(\eta)\in A_{(G,\xi)}$ и $y_\eta\in G$ при $G\in\mathscr{G}$ и $\xi\in\Xi$, для которых $\eta\in(G,\xi)$. Видно, что $\xi(\eta)\approx+\infty$ и $y_\eta\in\mu(\mathscr{G})$ при $\eta\approx+\infty$.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Если (1) не выполнено, то по условию

$$(\exists\, G\in\mathscr{G})(\forall\, F\in\mathscr{F})(\exists\, x\in F)(\forall\, y\in G)\,{}^\neg\varphi(x,y,z).$$

Для $F \in \mathscr{F}$ выбираем $x_F \in F$ так, чтобы было $\neg\varphi(x,y,z)$ при всех $y \in G$. Отметим, что получаемую сеть $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ элементов X, равно как и множество G, можно считать стандартными на основании принципа переноса. Нет сомнений, что $x_F \downarrow \mathscr{F}$ и, стало быть, в силу (3) найдутся направление H и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ такие, что для некоторой сети $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при всяком $\eta \in \mathrm{H}$. По определению 7.3.7 x_η при каждом бесконечно большом η совпадает с x_F для некоторого удаленного F, т. е. $x_\eta \in \mu(\mathscr{F})$. По условию $y_\eta \in \mu(\mathscr{G})$ и тем более $y_\eta \in G$. При этом оказывается $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ и $\neg\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, чего быть не может. Полученное противоречие свидетельствует о ложности сделанного допущения. Таким образом, (1) выполнено (как только имеет место (4)).

(1) $\leftrightarrow$ (5): Для доказательства требуемой эквивалентности достаточно заметить, что она становится очевидной в случае, когда $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ суть ультрафильтры. Остается заметить, что каждая монада есть объединение монад ультрафильтров. $\triangleright$

7.3.9. В приложениях бывает удобным рассматривать конкретизации 7.3.8, отвечающие случаям, в которых один из фильтров дискретен. Так, используя естественные обозначения, выводим

$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\xi, y);$$
$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, x_\eta \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\eta, y).$$

7.3.10. Пусть $F \subset X \times Y$ — внутреннее соответствие из стандартного множества X в стандартное множество Y. Допустим, что в X выделен стандартный фильтр $\mathscr{N}$, а в Y — топология τ. Полагаем

$$\forall\forall(F) := {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x,y) \in F\},$$
$$\exists\forall(F) := {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x,y) \in F\},$$
$$\forall\exists(F) := {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x,y) \in F\},$$
$$\exists\exists(F) := {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x,y) \in F\},$$

где, как обычно, * — символ стандартизации, а запись $y \approx y'$ означает, что $y \in \mu(\tau(y'))$. Множество $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2(F)$ называют $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$-*пределом* F (здесь Q — один из кванторов $\forall$ или $\exists$).

7.3.11. В приложениях обычно ограничиваются случаем, когда F — стандартное соответствие, определенное на некотором элементе фильтра $\mathscr{N}$. При этом изучают $\exists\exists$-предел и $\forall\exists$-предел. Первый называют *верхним пределом*, а второй — *нижним пределом* F вдоль $\mathscr{N}$.

Если рассматривается сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в области определения F, то, имея в виду фильтр хвостов сети, полагают

$$\mathrm{Li}_{\xi\in\Xi} F := \liminf_{\xi\in\Xi} := \forall\exists(F),$$
$$\mathrm{Ls}_{\xi\in\Xi} F := \limsup_{\xi\in\Xi} F(x_\xi) := \exists\exists(F).$$

В таких случаях чаще всего говорят о *пределах Куратовского.*

7.3.12. *Для стандартного соответствия F справедливы представления:*

$$\exists\exists(F) = \bigcap_{U\in\mathscr{N}} \mathrm{cl} \bigcup_{x\in U} F(x);$$
$$\forall\exists(F) = \bigcap_{U\in\ddot{\mathscr{N}}} \mathrm{cl} \bigcup_{x\in U} F(x),$$

где $\ddot{\mathscr{N}}$ — так называемый гриль $\mathscr{N}$, т. е. семейство, составленное всеми подмножествами X, задевающими монаду $\mu(\mathscr{N})$.

Иначе говоря,

$$\ddot{\mathscr{N}} = {}^*\{U' \subset X : U' \cap \mu(\mathscr{N}) \neq \varnothing\} =$$
$$= \{U' \subset X : (\forall U \in \mathscr{N})(U \cap U' \neq \varnothing)\}.$$

Отметим в этой связи соотношения:

$$\forall\exists(F) = \bigcap_{U\in\ddot{\mathscr{N}}} \mathrm{int} \bigcup_{x\in U} F(x),$$
$$\forall\forall(F) = \bigcup_{U\in\mathscr{N}} \mathrm{int} \bigcap_{x\in U} F(x).$$

Из теорем 7.3.8 мгновенно следует описание пределов на языке сетей.

7.3.13. *Элемент y лежит в $\forall\exists$-пределе F в том и только в том случае, если для каждой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\operatorname{dom}(F)$, подчиненной $\mathscr{N}$, найдутся подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, сходящаяся к y, такие, что $(x_\eta, y_\eta)\in F$ для всех $\eta\in\mathrm{H}$.*

7.3.14. *Элемент y лежит в $\exists\exists$-пределе F в том и только в том случае, если существуют сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\operatorname{dom}(F)$, подчиненная $\mathscr{N}$, и сеть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$, сходящаяся к y, для которых $(x_\xi, y_\xi)\in F$ при любых $\xi\in\Xi$.*

7.3.15. *Для любого внутреннего соответствия F выполнено:*

$$\forall\forall(F)\subset\exists\forall(F)\subset\forall\exists(F)\subset\exists\exists(F).$$

При этом $\exists\exists(F)$ и $\forall\exists(F)$ суть замкнутые, а $\forall\forall(F)$ и $\exists\forall(F)$ — открытые множества.

$\lhd$ Искомые включения бесспорны. Таким образом, с учетом соображений двойственности установим для определенности замкнутость $\forall\exists$-предела.

Если V — стандартная открытая окрестность y' из $\operatorname{cl}\forall\exists(F)$, то имеется $y\in\forall\exists(F)$, для которого $y\in V$. Для $x\in\mu(\mathscr{N})$ подыщем y'' так, чтобы было $y''\in\mu(\tau(y))$ и $(x,y'')\in F$. Ясно, что $y''\in V$, ибо V — окрестность y. Итак,

$$(\forall\, x\in\mu(\mathscr{N}))(\forall\, V\in{}^{\circ}\tau(y'))(\exists\, y''\in V)\,(x,y'')\in F.$$

Используя принцип идеализации, выводим: $y'\in\forall\exists(F)$. $\rhd$

7.3.16. Приведенные общие утверждения позволяют охарактеризовать элементы многих аппроксимирующих или регуляризирующих конусов на языке сетей, что распространено в литературе (см. [115, 116]). Отметим, в частности, что конус Кларка $\mathrm{Cl}(F,x')$ для F в X получается как предел по Куратовскому:

$$\mathrm{Cl}(F,x')=\mathrm{Li}_{\tau(x')\times\tau_{\mathbb{R}^+}(0)}\,\Gamma_F,$$

где Γ_F — *гомотетия*, связанная с F, т. е.

$$(x,\alpha,h)\in\Gamma_F\leftrightarrow h\in\frac{F-x}{\alpha}\quad(x,h\in X,\alpha>0).$$

В выпуклом анализе нередко используют специальные разновидности пределов по Куратовскому, связанные с надграфиками функций, действующих в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Прежде всего, приведем полезные признаки верхнего и нижнего пределов.

7.3.17. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция, определенная на стандартном X, и $\mathscr{F}$ — некоторый стандартный фильтр в X. Для каждого стандартного $t \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\sup_{F\in\mathscr{F}} \inf f(F) \leqslant t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \leqslant t,$$
$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \leqslant t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \leqslant t.$$

$\lhd$ Проверим сначала первую эквивалентность. Применяя последовательно принципы переноса и идеализации, выводим

$$\sup_{F\in\mathscr{F}} \inf f(F) \leqslant t \to (\forall\, F \in \mathscr{F})\, \inf f(F) \leqslant t \to$$
$$\to (\forall F \in \mathscr{F})(\forall \varepsilon > 0) \inf f(F) < t + \varepsilon \to (\forall \varepsilon)(\forall F)(\exists\, x \in F)$$
$$(f(x) < t + \varepsilon) \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}} F)(\exists\, x)(x \in F \wedge f(x) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}} F)(x \in F \wedge f(x) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(f(x) < t + \varepsilon) \to (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))^\circ\! f(x) \leqslant t.$$

Теперь заметим, что для всякого стандартного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ будет $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset F$. Значит, $\inf f(F) \leqslant t$ (ибо $\inf f(F) \leqslant f(x) < t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$). Отсюда в силу принципа переноса для внутреннего F из $\mathscr{F}$ выполнено $\inf f(F) \leqslant t$, что и нужно.

Ввиду уже доказанного и с учетом стандартности $-f$ и t выводим

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \geqslant t \leftrightarrow -\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \leqslant -t \leftrightarrow \sup_{F\in\mathscr{F}} \inf (-f)\ (F) \geqslant t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ(-f(x)) \leqslant -t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \geqslant t.$$

Таким образом, получается

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t \leftrightarrow \neg\big(\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \geqslant t\big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg((\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \geqslant t \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \leqslant t.$$

Окончательно на основе доказанного заключаем

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \leqslant t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)\ \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, {}^\circ\! f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ\! f(x) \leqslant t,$$

ибо число ${}^\circ\! f(x)$ стандартно. $\rhd$

7.3.18. *Пусть X, Y — стандартные множества, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и в Y соответственно. Для каждого стандартного вещественного числа t выполнено*

$$\sup_{G\in\mathscr{G}} \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, {}^\circ f(x,y) \leqslant t.$$

$\lhd$ Положим $f_G(x) := \inf\{f(x,y) : y \in G\}$. Заметим, что f_G — стандартная функция, если только G — стандартное множество. Привлекая принцип переноса, предложение 7.3.17 и идеализацию, последовательно выводим

$$\sup_{G\in\mathscr{G}} \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t \leftrightarrow (\forall\, G \in \mathscr{G}) \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} f_G(x) \leqslant t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G}) \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} f_G(x) \leqslant t \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f_G(x) \leqslant$$
$$\leqslant t \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{y\in G} f(x,y) < t + \varepsilon \to$$
$$\to (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists\, y \in G)(f(x,y) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(f(x,y) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, {}^\circ f(x,y) \leqslant t.$$

Из последнего соотношения для внутреннего элемента $F \subset \mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ и стандартного элемента G фильтра $\mathscr{G}$ выводим

$$\sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t \to \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t \to$$
$$\to (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G}) \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t \to$$
$$\to (\forall\, G \in \mathscr{G}) \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y) \leqslant t$$

в силу принципа переноса. $\rhd$

7.3.19. В связи с 7.3.18 величину

$$\lim \sup_{\mathscr{F}} \inf_{\mathscr{G}} f := \sup_{G\in\mathscr{G}} \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x,y)$$

называют *пределом f по Рокафеллару.*

Если $f := (f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство функций, действующих из топологического пространства (X,σ) в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathscr{N}$ — фильтр в Ξ, то определяют *нижний предел* в точке x' из X семейства f и его *верхний предел* или *предел по Рокафеллару*

$$\mathrm{li}_{\mathscr{N}} f(x') := \sup_{V\in\sigma(x')} \sup_{U\in\mathscr{N}} \inf_{\xi\in U} \inf_{x\in V} f_\xi(x),$$

$$\mathrm{ls}_{\mathscr{N}}(x') := \sup_{V\in\sigma(x')} \inf_{U\in\mathscr{N}} \sup_{\xi\in U} \inf_{x\in V} f_\xi(x).$$

Последние пределы часто называют *эпипределами.* Смысл этого определения раскрывает следующее очевидное утверждение.

7.3.20. *Нижний и верхний пределы произвольного семейства надграфиков служат соответственно надграфиками нижнего и верхнего пределов рассматриваемого семейства функций.*

7.4. Аппроксимации, определяемые набором инфинитезималей

В этом параграфе мы займемся проблемой анализа классических аппроксимирующих конусов кларковского типа с помощью детализации вклада бесконечно малых чисел, участвующих в их определении. Такой анализ позволяет выделить как новые аналоги касательных конусов, так и новые описания конуса Кларка.

7.4.1. Вновь рассмотрим вещественное векторное пространство X, наделенное линейной топологией σ и почти векторной топологией τ. Пусть, далее, в X выделены множество F и точка x' из F. Указанные объекты считаются стандартными множествами.

Фиксируем некоторую инфинитезималь — вещественное число α, для которого $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$. Положим

$$\mathrm{Ha}_\alpha(F,x') := {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\tau x', x \in F)(\forall\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},$$

$$\mathrm{In}_\alpha(F,x') := {}^*\{h' \in X : (\exists\, h \approx_\tau h')(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(x + \alpha h \in F)\},$$

$$\mathrm{Cl}_\alpha(F,x') := {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},$$

где, как обычно, * — символ стандартизации внешнего множества.

Рассмотрим теперь некоторое непустое, вообще говоря, внешнее множество инфинитезималей Λ и положим

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Ha}_\alpha(F,x'),$$
$$\mathrm{In}_\Lambda(F,x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{In}_\alpha(F,x'),$$
$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Cl}_\alpha(F,x').$$

Аналогичную политику обозначений мы примем и для других вводимых типов аппроксимаций. В качестве примера стоит подчеркнуть, что в силу определений для стандартного h' из X выполнено:

$$h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F,x') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\,\alpha\in\Lambda)(\exists\,h\approx_\tau h')(\forall\,x\approx_\sigma x', x\in F)(x+\alpha h\in F).$$

Полезно отметить, что в случае, когда Λ — это монада соответствующего стандартного фильтра $\mathscr{F}_\Lambda$, где $\mathscr{F}_\Lambda := {}^*\{A\subset\mathbb{R} : A\supset\Lambda\}$, то, например, для $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ будет

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') = \bigcap_{V\in\mathscr{N}}\ \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ A\in\mathscr{F}_\Lambda}}\ \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ \alpha\in A,\alpha>0}} \left(\frac{F-x}{\alpha}+V\right).$$

Если же Λ — не монада (например, нестандартное одноточечное множество), то явный вид $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ связан с той моделью анализа, в которой фактически ведется исследование. Подчеркнем, что ультрафильтр $\mathscr{U}(\alpha) := {}^*\{A\subset\mathbb{R} : \alpha\in A\}$ имеет монаду, не сводящуюся к исходной инфинитезимали α, т. е. множество $\mathrm{Cl}_\alpha(F,x')$, вообще говоря, шире, чем $\mathrm{Cl}_{\mu(\mathscr{U}_{(\alpha)})}(F,x')$. В то же время оказывается, что введенные аппроксимации обладают многими достоинствами, присущими кларковским конусам. При детализации и обосновании последнего положения без особых оговорок, как и в 7.2, мы используем предположение непрерывности отображения $(x,\beta,h)\mapsto x+\beta h$ пространства $(X\times\mathbb{R}\times X, \sigma\times\tau_{\mathbb{R}}\times\tau)$ в (X,σ) в нуле (эквивалентное в стандартном антураже включению $\mu(\sigma)+\mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau)\subset\mu(\sigma)$).

7.4.2. *Теорема.* *Для каждого множества Λ положительных бесконечно малых чисел справедливы утверждения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F,x')$, $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ — *полугруппы, причем*

$$\begin{gathered}\mathrm{Ha}(F,x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') \subset \mathrm{In}_\Lambda(F,x') \subset \\ \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') \subset K(F,x'), \\ \mathrm{Cl}(F,x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x');\end{gathered}$$

(2) *если* Λ — *внутреннее множество, то* $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ *является* τ*-открытым;*

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ — *это* τ*-замкнутое множество, причем для выпуклого* F *будет* $K(F,x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$, *как только* $\sigma = \tau$;

(4) *если* $\tau = \sigma$, *то имеет место равенство*

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(\mathrm{cl}\, F,x');$$

(5) *выполнена формула Рокафеллара*

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') + \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x');$$

(6) *если* x' — *это* τ*-граничная точка* F, *то для* $F' := (X - F) \cup \{x'\}$ *выполнено*

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') = -\,\mathrm{Ha}_\Lambda(F',x').$$

$\lhd$ (1): Проверим для определенности, что полугруппой является $\mathrm{In}_\Lambda(F,x')$. Если стандартные h', h'' входят в $\mathrm{In}_\Lambda(F,x')$, то для каждого $\alpha \in \Lambda$ при некотором $h_1 \approx_\tau h'$ будет $x'' := x + \alpha h_1 \in F$, как только $x \in F$ и $x \approx_\sigma x'$. По условию имеется $h_2 \approx_\tau h''$, для которого $x'' + \alpha h_2 \in F$, ибо $x'' \approx_\sigma x$. Окончательно $h_1 + h_2 \approx_\tau h' + h''$ и $h_1 + h_2$ «обслуживает» вхождение $h' + h'' \in \mathrm{In}_\Lambda(F,x')$.

Если $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ и h' стандартен, то $x' + \alpha h \in F$ для каких-нибудь $\alpha \in \Lambda$ и $h \approx_\tau h'$. Это означает, что $h' \in K(F,x')$. Прочие включения, выписанные в (1), не вызывают сомнений.

(2): Если h' — стандартный элемент $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, то

$$(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall\, h \approx_\tau h')(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F).$$

С учетом 7.3.2, используя то, что Λ — внутреннее множество, выводим

$$(\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h' + V)(\forall\, \alpha \in \Lambda)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Подберем стандартные окрестности V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_\tau$, так, чтобы было $V_1 + V_2 \subset V$. Тогда для всех стандартных $h'' \in h' + V_1$ выполнено

$$(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h'' + V_2)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F),$$

т. е. $h'' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ при любых $h'' \in h + V_1$.

(3): Пусть теперь h' — стандартный элемент $\mathrm{cl}_\tau\,\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V точки h' и выберем вновь стандартные V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_\tau$, из условия $V_1 + V_2 \subset V$. По определению замыкания имеется $h'' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ такой, что $h'' \in h' + V_1$. На основании 7.4.1 и в силу 7.3.2 будет

$$(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h'' + V_2)(x + \alpha h \in F).$$

При этом $h \in h'' + V_2 \subset h' + V_1 + V_2 \subset h' + V$. Иначе говоря,

$$(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h' + V)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Значит, $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

Если теперь $h' \in \mathrm{Fd}(F, x')$ и h' стандартен, то для некоторого стандартного $\alpha' > 0$ по принципу переноса будет $x' + \alpha' h' \in F$. Если $x \approx_\sigma x'$ и $x \in F$, то $(x - x')/\alpha' \approx_\sigma 0$. Для $h := h' + (x - x')/\alpha'$ будет $h \approx_\tau h'$ и, кроме того, $x + \alpha' h \in F$. С учетом выпуклости F верно: $x + (0, \alpha']h \subset F$. В частности, $x + \Lambda h \subset F$. Итак, $(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Следовательно,

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset K(F, x') \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{Fd}(F, x').$$

С учетом τ-замкнутости $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ заключаем: $K(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

(4): Устанавливается как и в предложении 7.2.10.

(5): Для стандартных $k' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ и $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$ и любом $x \in F$ таком, что $x \approx_\sigma x'$, подобрав h из условий $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha h \in F$, получаем последовательно

$$x + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) = x + \alpha h + \alpha(k' + (h - h') + \mu(\tau)) \subset$$
$$\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau) + \mu(\tau)) \subset$$
$$\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau)) \subset F,$$

что и означает вхождение $h' + k'$ в $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(6): Пусть $-h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F', x')$. Тогда для некоторого $\alpha \in \Lambda$ найдется $h \approx_\tau h'$ так, что при подходящем $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ выполнено $x - \alpha h \in F$. Если все же $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, то, в частности, $h \in \mathrm{Ha}_\alpha(F, x')$ и $x = (x - \alpha h) + \alpha h \in F$, ибо $x - \alpha h \approx_\sigma x$. Итак, $x \in F \cap F'$, т. е. $x = x'$. Кроме того, $(x' - \alpha h) + \alpha(h + \mu(\tau)) \subset F$, ибо $h + \mu(\tau) \subset \mu(\tau(h'))$. Стало быть, x' — это τ-внутренняя точка F, что противоречит условию. Следовательно, $h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, что обеспечивает включение $-\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset (F', x')$. Меняя в приведенном рассуждении F' и $F = (F')'$ местами, приходим к требуемому. $\triangleright$

7.4.3. Важно подчеркнуть, что во многих случаях описанные аналоги конусов Адамара и Кларка являются выпуклыми. В самом деле, имеют место следующие утверждения.

Пусть τ — векторная топология и $t\Lambda \subset \Lambda$ для некоторого стандартного $t \in (0, 1)$. Тогда $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — выпуклый конус. Если к тому же Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ также выпуклый конус.

$\triangleleft$ Предположим, что рассматривается $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, и $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ — стандартный элемент этого множества. На основании 7.4.2 (2) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ открыто в топологии τ. Кроме того, $th \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, где t — фигурирующее в условии стандартное положительное число. $\triangleright$

7.4.4. *Пусть $t\Lambda \subset \Lambda$ для каждого стандартного $t \in (0, 1)$. Тогда множества $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$ и $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ являются выпуклыми конусами.*

$\triangleleft$ Предположим для определенности, что речь идет о $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Пусть h' — какой-либо стандартный вектор из названного множества и $0 < t < 1$ — стандартное число. Пусть $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ и $\alpha \in \Lambda$. Для x и $t\alpha \in \Lambda$ подберем h, для которого $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha t h \in F$. Поскольку $th \approx_\tau th'$ на основании 7.1.6, то $th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Иначе говоря, на основании принципа переноса $(0,1)\,\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. Остается сослаться на 7.4.2 (1). $\triangleright$

7.4.5. Множество Λ назовем *представительным*, если $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,$ $x')$ и $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ суть (выпуклые) конусы. Предложения 7.4.3 и 7.4.4 дают примеры представительных Λ.

7.4.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, действующая в расширенную числовую прямую. Для инфинитезимали α, точки x' из $\mathrm{dom}(f)$ и вектора $h' \in X$ полагаем

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{Ha}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{Ha}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\},\\
f(\mathrm{In}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{In}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\},\\
f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{Cl}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\}.
\end{aligned}
$$

Производные $f(\mathrm{Ha}_\Lambda)$, $f(\mathrm{In}_\Lambda)$ и $f(\mathrm{Cl}_\Lambda)$ вводятся естественным образом. Отметим, что производную $f(\mathrm{Cl}) := f(\mathrm{Cl}_{\mu(\mathbb{R}_+)})$ называют *производной Рокафеллара* и обозначают символом $f^\uparrow$. В этой связи мы пишем

$$f^\uparrow_\alpha(x') := f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x'), \quad f^\uparrow_\Lambda(x') := f(\mathrm{Cl}_\Lambda)(x').$$

Если τ — это дискретная топология, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') = \mathrm{In}_\Lambda(F,x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. При этом производную Рокафеллара называют *производной Кларка* и используют обозначения

$$f^\circ_\alpha(x') := f^\uparrow_\alpha(x'), \quad f^\circ_\Lambda(x') := f^\uparrow_\Lambda(x').$$

При $\Lambda = \mu(\mathbb{R}_+)$ указание на Λ опускают.

Рассматривая эпипроизводные, предполагают, что пространство $X \times \mathbb{R}$ наделено обычными произведениями топологий $\sigma \times \tau_\mathbb{R}$ и $\tau \times \tau_\mathbb{R}$, где $\tau_\mathbb{R}$ — стандартная топология $\mathbb{R}$. Иногда удобно наделять $X \times \mathbb{R}$ парой топологий $\sigma \times \tau_0$ и $\tau \times \tau_\mathbb{R}$, где τ_0 — тривиальная топология в $\mathbb{R}$. При использовании таких топологий говорят о *производных Кларка и Рокафеллара вдоль эффективной области* $\mathrm{dom}(f)$ и добавляют индекс d в обозначениях: f°_d, $f^\uparrow_{\Lambda,d}$ и т. п.

7.4.7. *Справедливы утверждения:*

$$f^\uparrow_\alpha(x')(h') \leqslant t' \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_{\sigma} x', t \approx f(x'), t \geqslant f(x))\, (\exists\, h \approx_{\tau} h')\ {}^{\circ}((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) \leqslant t';$$
$$f^{\circ}_{\alpha}(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_{\sigma} x', t \approx f(x'), t \geqslant f(x))\, (\forall\, h \approx_{\tau} h')\ {}^{\circ}((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) < t';$$
$$f^{\uparrow}_{\alpha,d}(x')(h') \leqslant t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_{\sigma} x', x \in \operatorname{dom}(f))(\exists\, h \approx_{\tau} h')\,{}^{\circ}((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) \leqslant t';$$
$$f^{\circ}_{\alpha,d}(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_{\sigma} x', x \in \operatorname{dom}(f))(\forall\, h \approx_{\tau} h')\,{}^{\circ}((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) < t'.$$

$\lhd$ Для доказательства нужно апеллировать к 7.1.2 (7). $\rhd$

7.4.8. *Если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$f^{\uparrow}_{\alpha}(x')(h') \leqslant t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall\, x \approx_{\sigma} x', f(x) \approx f(x'))(\exists\, h \approx_{\tau} h')\,{}^{\circ}\!\left(\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right) \leqslant t';$$
$$f^{\circ}_{\alpha}(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_{\sigma} x', f(x) \approx f(x'))(\forall\, h \approx_{\tau} h')\,{}^{\circ}\!\left(\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right) < t'.$$

$\lhd$ Нуждаются в проверке только импликации вправо. В силу идентичности таких проверок осуществим первую из них. На основании полунепрерывности f снизу выводим: $x' \approx_{\sigma} x \to {}^{\circ}f(x) \geqslant f(x')$. Значит, при x, t таких, что $t \approx f(x')$ и $t \geqslant f(x)$, выполнено ${}^{\circ}t \geqslant {}^{\circ}f(x) \geqslant f(x') = {}^{\circ}t$. Иначе говоря, ${}^{\circ}f(x) = f(x')$ и $f(x) \approx f(x')$. Подбирая подходящее h с помощью условий, видим

$${}^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h)-t)) \leqslant {}^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h)-f(x))) \leqslant t',$$

что и обеспечивает требуемое. $\rhd$

7.4.9. *Для непрерывной функции f имеют место равенства*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda}(x'), \quad f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x').$$

$\lhd$ Достаточно заметить, что непрерывность f в стандартной точке означает $(x \approx_{\sigma} x', x \in \operatorname{dom}(f)) \to f(x) \approx f(x')$ (см. 7.1.2 (4)). $\rhd$

7.4.10. Теорема. *Пусть Λ — монада. Тогда справедливы представления:*

(1) *если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_\Lambda}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha},$$

$$f^{\circ}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_\Lambda}} \frac{f(x+\alpha h') - f(x)}{\alpha},$$

где $x \to_f x'$ означает, что $x \to_\sigma x'$ и $f(x) \to f(x')$;

(2) *для непрерывной функции f выполнено*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_\Lambda}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha},$$

$$f^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_\Lambda}} \frac{f(x+\alpha h') - f(x)}{\alpha}.$$

$\lhd$ Для доказательства достаточно привлечь критерий для предела по Рокафеллару 7.3.20 и 7.4.8, 7.4.9. $\rhd$

7.4.11. Теорема. *Пусть Λ — представительное множество инфинитезималей. Справедливы утверждения:*

(1) *если f — отображение, липшицевое по направлениям в точке x', т. е. такое, что $\mathrm{Ha}(\mathrm{epi}(f),\, (x', f(x'))) \neq \varnothing$, то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x');$$

если к тому же f непрерывно в точке x', то

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x');$$

(2) *если f — произвольное отображение, причем конус Адамара эффективного множества f в точке x' — непустое множество, т. е. $\mathrm{Ha}(\mathrm{dom}(f),\, x') \neq \varnothing$, то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x').$$

◁ Доказательство обоих искомых утверждений проводится по одному образцу, связанному с применением теоремы 7.4.2. Разберем подробно случай липшицевости f по направлениям. Положим $\mathscr{A} := \operatorname{epi}(f)$, $a' := (x', f(x'))$.

В силу условий $\mathrm{Cl}_\Lambda(\mathscr{A}, a')$ и $\mathrm{Ha}_\Lambda(\mathscr{A}, a')$ — выпуклые конусы. При этом $\mathrm{Ha}_\Lambda(\mathscr{A}, a') \supset \mathrm{Ha}(\mathscr{A}, a')$ и, стало быть, $\operatorname{int}_{\tau\times\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Ha}_\Lambda(\mathscr{A}, a') \neq \varnothing$. На основании формулы Рокафеллара выводим:

$$\operatorname{cl}_{\tau\times\tau_{\mathbb{R}}} \mathrm{Ha}_\Lambda(\mathscr{A}, a') = \mathrm{Cl}_\Lambda(\mathscr{A}, a').$$

Отсюда и вытекает требуемое утверждение. ▷

7.4.12. *Теорема.* *Пусть $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — произвольные функции и $x' \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2)$. Тогда*

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') \leqslant (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x').$$

Если, кроме того, f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') \leqslant (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda}(x').$$

◁ Пусть стандартный элемент h' выбран следующим образом:

$$h' \in \operatorname{dom}\big((f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}\big) \cap \operatorname{dom}\big((f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}\big).$$

Если такого h' нет, то искомые оценки очевидны.

Возьмем $t' \geqslant (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h')$ и $s' > (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h')$. Тогда на основании 7.4.8 для каждого $x \approx_\sigma x'$, $x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2)$ и любого $\alpha \in \Lambda$ имеется h, для которого $h \approx_\tau h'$ и, кроме того,

$$\delta_1 := {}^\circ((f_1(x + \alpha h) - f_1(x))/\alpha) \leqslant t';$$
$$\delta_2 := {}^\circ((f_2(x + \alpha h) - f_2(x))/\alpha) < s'.$$

Отсюда выводим: $\delta_1 + \delta_2 < t' + s'$, что обеспечивает (1). Если f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то следует привлечь 7.4.9. ▷

7.4.13. В заключение текущего пункта разберем специальные представления конуса Кларка, возникающие в конечномерном пространстве и связанные со следующим замечательным результатом.

Теорема Корне. *В конечномерном пространстве конус Кларка представляет собой предел контингенций по Куратовскому:*

$$\mathrm{Cl}(F, x') = \mathrm{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x).$$

7.4.14. *Следствие.* *Пусть* Λ *— (внешнее) множество строго положительных инфинитезималей, содержащее сходящуюся к нулю (внутреннюю) последовательность. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x') = \mathrm{Cl}(F, x').$$

$\triangleleft$ По принципу Лейбница можно работать в стандартном антураже. Поскольку включение $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x') \supset \mathrm{Cl}(F, x')$ очевидно, возьмем стандартную точку h' из $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x')$ и установим, что h' лежит в конусе Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$.

Поскольку с учетом 7.3.10 справедливо представление

$$\mathrm{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x) = {}^*\{h' : (\forall\, x \approx x', x \in F)(\exists\, h \approx h')\, h \in K(F, x)\},$$

убедимся в том, что при $x \approx x'$, $x \in F$ будет $h \in K(F, x)$ для некоторого элемента h, бесконечно близкого к h'.

Если (α_n) — последовательность элементов Λ, сходящаяся к нулю, то по условию выполнено

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, h_n)(x + \alpha_n h_n \in F \wedge h_n \approx h').$$

Для всякого стандартного $\varepsilon > 0$ и обычной нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ будет $\|h_n - h'\| \leqslant \varepsilon$. Стало быть, с учетом конечномерности можно подыскать последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$ такие, что

$$\overline{\alpha}_n \to 0, \quad \overline{h}_n \to \overline{h}, \quad \|\overline{h} - h'\| \leqslant \varepsilon, \quad x + \overline{\alpha}_n \overline{h}_n \in F \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Используя принцип идеализации, заключаем, что имеются последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$, обслуживающие одновременно все стандартные положительные числа ε. Ясно, что соответствующий предельный вектор h бесконечно близок к h' и в то же время $h \in K(F, x)$ по определению контингенции. $\triangleright$

7.4.15. В качестве множества Λ в приведенной теореме может фигурировать монада любого сходящегося к нулю фильтра, например, фильтра хвостов фиксированной стандартной последовательности (α_n), составленной из строго положительных чисел и стремящейся к нулю. Приведем характеризации конуса Кларка, относящиеся к этому случаю и дополняющие приведенные выше. Для формулировки условимся символом $d_F(x)$ обозначать расстояние от точки x до множества F.

7.4.16. *Теорема.* *Для сходящейся к нулю последовательности (α_n) строго положительных чисел эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ n \to \infty}} \frac{d_F(x+\alpha_n h') - d_F(x)}{\alpha_n} \leqslant 0$;

(3) $\limsup\limits_{x \to x'} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x) \leqslant 0$;

(4) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1} d_F(x + \alpha_n h') = 0$;

(5) $\limsup\limits_{x \to x'} \liminf\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x)) \leqslant 0$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \liminf\limits_{n \to \infty} \frac{d_F(x+\alpha_n h')}{\alpha_n} = 0$.

$\triangleleft$ Прежде всего заметим, что при $\alpha > 0$ имеет место эквивалентность:

$$^\circ(\alpha^{-1} d_F(x + \alpha h')) = 0 \leftrightarrow (\exists\, h \approx h')(x + \alpha h \in F),$$

где $^\circ t$ — это, как обычно, стандартная часть числа t.

Действительно, для установления импликации влево положим $y := x + \alpha h'$. Тогда

$$d_F(x + \alpha h')/\alpha = \|x + \alpha h' - y\|/\alpha \leqslant \|h - h'\|.$$

При проверке противоположной импликации, привлекая принцип идеализации, последовательно получаем

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}(\alpha^{-1} d_F(x+\alpha h')) = 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, d_F(x+\alpha h')/\alpha < \varepsilon \to \\
\to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in F)\, \|x + \alpha h' - y\|/\alpha < \varepsilon \to \\
\to (\exists\, y \in F)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, \|h' - (y-x)/\alpha\| < \varepsilon \to \\
\to (\exists\, y \in F)\, \|h - (y-x)/\alpha\| \approx 0.
\end{aligned}
$$

Полагая $h := (y-x)/\alpha$, видим: $h \approx h'$ и при этом $x + \alpha h \in F$.

Перейдем теперь собственно к доказательству искомых эквивалентностей.

Поскольку импликации (3) $\to$ (4) $\to$ (6) и (3) $\to$ (5) $\to$ (6) очевидны, установим только, что (1) $\to$ (2) $\to$ (3) и (6) $\to$ (1).

(1) $\to$ (2): Работая в стандартном антураже, возьмем $x \approx x'$ и $N \approx +\infty$. Подберем $x'' \in F$ так, чтобы было $\|x - x''\| \leqslant d_F(x') + \alpha_N^2$. Поскольку имеет место неравенство

$$
d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x'' + \alpha_N h') \leqslant \|x - x''\|,
$$

выводим следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
(d_F(x+\alpha_N h') - d_F(x))/\alpha_N \leqslant (d_F(x'' + \alpha_N h') + \|x - x''\| - \\
- d_F(x))/\alpha_N \leqslant d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N + \alpha_N.
\end{aligned}
$$

В силу того, что $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$, с учетом выбора x'' и N для некоторого $h \approx h'$ будет $x'' + \alpha_N h \in F$. Значит, на основании уже доказанного ${}^{\circ}(d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N) = 0$. Отсюда

$$
(\forall\, x \approx x')(\forall\, N \approx +\infty)\, {}^{\circ}(\alpha_N^{-1}(d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x))) \leqslant 0.
$$

Последнее в соответствии с 7.3.17 составляет нестандартный критерий справедливости (2).

(2) $\to$ (3): Достаточно заметить, что для $f : U \times V \to \overline{\mathbb{R}}$ и фильтров $\mathscr{F}$ в U и $\mathscr{G}$ в V будет

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\mathscr{F}} \limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \leqslant t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}\limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \leqslant t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, G \in \mathscr{G}) \sup_{y \in G} f(x, y) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x, y) t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x, y) \leqslant t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall\, y \in G)\, {}^\circ f(x, y) \leqslant t.$$

Здесь, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — монада фильтра $\mathscr{F}$.

(6) $\to$ (1): Прежде всего, в обозначениях предыдущего фрагмента доказательства, выполнено

$$\limsup_{\mathscr{F}} \liminf_{\mathscr{G}} f(x, y) \leqslant t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F})) \sup_{G \in \mathscr{G}} \inf_{y \in \mathscr{G}} [(x, y) \leqslant t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, G \in \mathscr{G}) \inf_{y \in G} f(x, y) \leqslant t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{y \in G} f(x, y) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in G)(f(x, y) < t + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\exists\, y \in G)\, {}^\circ f(x, y) \leqslant t.$$

Привлекая условия, из установленного признака выводим:

$$(\forall\, x \approx x', x \in F)(\forall\, n)(\exists\, N \geqslant n)\, {}^\circ(\alpha_N^{-1} d_F(x + \alpha_N h')) = 0.$$

Иначе говоря, для некоторого h_N такого, что $h_N \approx h'$, будет $x + \alpha_N h_N \in F$. На основе приведенных соображений, как и при доказательстве 7.4.16, можно сделать вывод, что h' лежит в нижнем пределе по Куратовскому контингенций множества F в точках, близких к x', т. е. в конусе Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$. $\rhd$

7.5. Аппроксимация композиции и суммы соответствий

Перейдем к изучению касательных кларковского типа, суперпозиции и суммы соответствий. При этом нам придется начать с некоторых топологических рассмотрений, относящихся к открытым и почти открытым операторам.

7.5.1. Пусть, помимо рассматриваемого векторного пространства X с топологиями σ_X и τ_X, задано еще одно векторное пространство Y с топологиями σ_Y и τ_Y. Рассмотрим линейный оператор T из X в Y и изучим, прежде всего, вопрос о связи аппроксимирующих множеств F в точке x', где $F \subset X$, и образа $T(F)$ в точке Tx'.

Скажем, что тройка T, F и x' удовлетворяет *условию* (*относительной*) *предоткрытости* или условию (ρ_-), если для любой окрестности $U \in \sigma_X(x')$ существует окрестность $V \in \sigma_Y(Tx')$ такая, что $T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$. Условие (ρ_-) вместе с требованием непрерывности T как отображения (X, σ_X) в (Y, σ_Y) мы назовем *условием* (*относительной*) открытости для указанной тройки. Если же для любой окрестности $U \in \sigma_X(x')$ существует окрестность $V \in \sigma_Y(Tx')$ такая, что $\operatorname{cl}_{\tau_Y} T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$, то будем говорить, что тройка (T, F, x') удовлетворяет *условию* (*относительной*) *почти открытости* или условию $(\overline{\rho})$.

7.5.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *включение*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)$$

равносильно соотношению

$$(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, V \in \sigma_Y(Tx'))\, T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$$

— условию (относительной) *предоткрытости или условию* (ρ_-) (*для параметров* T, F *и* x');

(2) *условие* (ρ_-) *вместе с требованием непрерывности* T *как отображения* (X, σ_X) *в* (Y, σ_Y) *равносильно следующему условию* (относительной) *открытости:*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) = \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F);$$

(3) *оператор* T *удовлетворяет условию* (относительной) *почти открытости или условию* $(\overline{\rho})$, *т. е.*

$$(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, V \in \sigma_Y(Tx'))$$
$$(\operatorname{cl}_{\tau_Y} T(U \cap F) \supset V \cap T(F))$$

в том и только в том случае, если

$$(\forall\, W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})$$
$$(T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) + W \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)).$$

$\lhd$ Утверждения (1) и (2) получаются специализацией 7.3.2. Для доказательства (3) обозначим

$$\mathscr{A} := T(\sigma_X(x') \cap F), \quad \mathscr{B} := \sigma_Y(Tx') \cap T(F),$$
$$\mathscr{N} := \big\{N \subset Y^2 : (\exists\, W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})\, N \supset \{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \in W\}\big\},$$

т. е. $\mathscr{N}$ — равномерность в Y, отвечающая рассматриваемой топологии. Используя введенные обозначения и привлекая 7.3.2, а также принципы идеализации и переноса, последовательно получаем:

$$(\forall\, N \in \mathscr{N})\, N(\mu(\mathscr{A})) \supset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall\, b \in \mu(\mathscr{B}))(\exists\, a \in \mu(\mathscr{A}))(b \in N(a)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b \in N(a)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\forall\, N \in \mathscr{N})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset N(A)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, N \in \mathscr{N})(B \subset N(A)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset \operatorname{cl} A) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, A \in \mathscr{A})(\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset \operatorname{cl} A),$$

где замыкание вычисляется в соответствующей равномерной топологии. $\rhd$

7.5.3. *Теорема.* *Имеют место утверждения:*

(1) *если оператор T удовлетворяет условию (ρ) и непрерывен как отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx'),$$
$$T(\mathrm{In}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx');$$

если, сверх того, T — открытое отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то

$$T(\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(T(F), T(x'));$$

(2) *если τ_Y — векторная топология, а линейный оператор $T : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ непрерывен и удовлетворяет условию $(\overline{\rho})$, то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx').$$

$\lhd$ (1): Проверим, например, второе из требуемых включений. Для этого, зафиксировав $h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, при $\alpha \in \Lambda$ возьмем $h \approx \tau_X h'$ такой, что при всех $x \approx {}_{\sigma_X} x'$, $x \in F$ будет $x + \alpha h \in F$. Видно, что $Th \approx {}_{\sigma_Y} Th'$ и $Tx + \alpha Th \in T(F)$. Привлекая условие (ρ), заключаем: $Th' \in \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx')$.

Пусть теперь известно, что T удовлетворяет указанному выше дополнительному условию открытости, т. е. на основании 7.5.2 (1) $T(\mu(\tau_X)) \supset \mu(\tau_Y)$. Вместе с непрерывностью T это означает совпадение выписанных монад. Если теперь $y \in T(F)$, $y \approx {}_{\sigma_Y} Tx'$, то по условию (ρ) будет $y = Tx$, где $x \in F$ и $x \approx {}_{\sigma_X} x'$. При этом для $z \approx {}_{\tau_Y} Th'$ можно подыскать $h \approx {}_{\tau_X} h'$, для которого $z = Th$. Значит, при всех $\alpha \in \Lambda$ выполнено $x + \alpha h \in F$, т. е. $y + \alpha z = Tx + \alpha Th \in T(F)$, как только стандартный h' таков, что $h' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(2): Возьмем инфинитезималь $\alpha \in \Lambda$ и какой-либо стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Пусть W — некоторая бесконечно малая окрестность нуля в τ_Y. Тогда αW также окрестность нуля по условию. На основании $(\overline{\rho})$, взяв $y \approx {}_{\sigma_Y} Tx'$, $y \in T(F)$, найдем $x \in \mu(\sigma_X(x')) \cap F$ так, чтобы $y = Tx + \alpha w$ и $w \approx {}_{\tau_Y} 0$. По условию вхождения h' в конус Кларка имеется элемент $h'' \approx {}_{\tau_Y} h'$, для которого $x + \alpha h'' \in F$. Итак, $y + \alpha(Th'' - w) = y - \alpha w + \alpha Th'' = T(x + \alpha h'') \in T(F)$. Действительно, отсюда выводим, что $Th'' - w \in Th' + \mu(\tau_Y) - w \in Th' + \mu(\tau_Y) + \mu(\tau_Y) = Th' + \mu(\tau_Y)$. Тем самым установлено: $Th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(T(F), Tx')$. $\rhd$

7.5.4. Рассмотрим теперь некоторые векторные пространства X, Y, Z, снабженные топологиями σ_X, τ_X; σ_Y, τ_Y и σ_Z, τ_Z соответственно. Пусть, далее, $F \subset X \times Y$, а $G \subset Y \times Z$ — два соответствия и точка $d' := (x', y', z') \in X \times Y \times Z$ такова, что $a' := (x', y') \in F$ и $b' := (y', z') \in G$. Обозначим $H := X \times G \cap F \times Z$, $c' := (x', z')$. Введем следующие сокращения:

$\sigma_1 := \sigma_X \times \sigma_Y$; $\sigma_2 := \sigma_Y \times \sigma_Z$; $\sigma := \sigma_X \times \sigma_Z$; $\overline{\sigma} := \sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z$;
$\tau_1 := \tau_X \times \tau_Y$; $\tau_2 := \tau_Y \times \tau_Z$; $\tau := \tau_X \times \tau_Z$; $\overline{\tau} := \tau_X \times \tau_Y \times \tau_Z$.

Полезно напомнить, что оператор $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$ непрерывен и открыт (при использовании «однобуквенных» топологий). По-прежнему фиксируем некоторое множество Λ, составленное из инфинитезимальных чисел.

Напомним, что если $P := \mathrm{Pr}_{X\times Z}$ — естественная проекция из $X \times Y \times Z$ на $X \times Z$, то имеет место представление $G \circ F = P(H)$. Сформулируем *условие* $(\overline{\rho c})$ *для соответствий* F *и* G *в точке* d': для каждой окрестности $V = \tau_Y(y')$ существуют окрестности $U \in \tau_X(x')$ и $W \in \tau_Z(z')$ такие, что $\mathrm{cl}_\tau\,(G \circ I_V \circ F) \supset G \circ F \cap U \times W$.

Легко видеть, что условие $(\overline{\rho c})$ вытекает из следующего несколько более жесткого требования: для каждой окрестности $V = \tau_Y(y')$ существуют окрестности $U \in \tau_X(x')$ и $W \in \tau_Z(z')$ такие, что будет $\mathrm{cl}_\tau \bigl(F(x) \cap G^{-1}(z)\bigr) \cap V \neq \varnothing$ для любых $(x, z) \in (U \times W) \cap (G \circ F)$.

7.5.5. Отметим также необходимое нам свойство монад.

Монада суперпозиции — это суперпозиция монад.

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{A}$ — фильтр в $X \times Y$, а $\mathscr{B}$ — в $Y \times Z$. Имеем

$$\mathscr{B} \circ \mathscr{A} := \mathrm{fil}\{B \circ A : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\},$$

причем можно считать, что множества, фигурирующие в определении $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$, непусты. Ясно, что

$$B \circ A = \mathrm{Pr}_{X\times Z}(A \times Z \cap X \times B).$$

Итак, интересующий нас фильтр $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ — это образ $\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C} := \mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_1 := \mathscr{A} \times \{Z\}$, $\mathscr{C}_2 := \{X\} \times \mathscr{B}$. Поскольку монада произведения есть произведение монад, монада точной верхней границы фильтров — пересечение их монад и монада образа фильтра совпадает с образом монады этого фильтра, приходим к соотношению

$$\mu(\mathscr{B} \circ \mathscr{A}) = \mathrm{Pr}_{X\times Z}\bigl(\mu(\mathscr{A}) \times Z \cap X \times \mu(\mathscr{B})\bigr) = \mu(\mathscr{B}) \circ \mu(\mathscr{A}).$$

Это и требовалось установить. $\triangleright$

7.5.6. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* d' *выполнено условие* (ρ);

(2) $G \circ F \cap \mu(\sigma(c')) = G \cap \mu(\sigma_2(b')) \circ F \cap \mu(\sigma_1(a'))$;
(3) $(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, W \in \sigma_Z(z'))$
$G \circ F \cap U \times W \subset G \circ I_V \circ F$,

где I_V *— это, как обычно, тождественное отношение на* V.

$\lhd$ Применяя 7.3.2, перепишем (3) в эквивалентной форме

$$
\begin{gathered}
(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, O \in \sigma(c'))(\forall\,(x,z) \in O\,(x,z) \in G \circ F)\\
(\exists\, y \in V)(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow (\forall\,(x,z) \approx_{\sigma} c'\,(x,z) \in G \circ F)\\
(\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F \subset\\
\subset \mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap F.
\end{gathered}
$$

Остается заметить, что

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Pr}_{X\times Z}\big(\mu(\overline{\sigma}(d')) \cap H\big) = \{(x,z) \in G \circ F : x \approx_{\sigma_X} x' \wedge\\
\wedge z \approx_{\sigma_Z} z' \wedge (\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')\,(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G\} =\\
= \mu\big(\sigma_2(b')\big) \cap G \circ \mu\big(\sigma_1(a')\big) \cap F.
\end{gathered}
$$

Тем самым предложение доказано полностью. $\rhd$

7.5.7. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* $(\overline{\rho})$;
(2) $(\forall\, W \in \mathscr{N}_\tau)\,\mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap$
$F + W \supset \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F$;
(3) $(\forall\, V \in \sigma_2(b'))(\forall\, U \in \sigma_1(a'))(\exists\, W \in \sigma(c'))$
$W \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(V \cap G \circ U \cap F)$;
(4) $(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\forall\, W \in \sigma_Z(z'))$
$(\exists\, O \in \sigma(c'))O \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(G \circ I_V \circ F \cap U \times W)$;
(5) *если* $\tau \geqslant \sigma$, *то для соответствий* F *и* G *выполнено условие* $(\overline{\rho c})$ *в точке* $d' := (x', y', z')$.

$\lhd$ Из предложения 7.5.2 (3) и выкладки, проведенной при доказательстве 7.5.2 (3), непосредственно заключаем: (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3).

Для доказательства эквивалентности (3) $\leftrightarrow$ (4) достаточно заметить:

$$
\begin{gathered}
(V \times W) \cap G \circ (U \times V) \cap F = \{(x,z) \in X \times Z : x \in U \wedge z \in W \wedge\\
\wedge (\exists\, y \in V)(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G\} = G \circ I_V \circ F \cap U \times W
\end{gathered}
$$

для всяких $U \subset X$, $V \subset Y$, $W \subset Z$.

Таким образом, остается установить только, что (4) $\leftrightarrow$ (5). При этом импликация (4) $\to$ (5) не вызывает сомнений, ибо (5) получается специализацией (4) при $U := X$ и $W := Z$.

Для проверки (5) $\to$ (4), взяв $V \in \sigma_Y(y')$, подберем открытую окрестность $C \in \sigma(c')$, чтобы было $G \circ F \cap C \subset \operatorname{cl}_\tau A$, где $A := G \circ I_V \circ F$. Взяв открытые $U \in \sigma_X(x')$ и $W \in \sigma_Z(z')$, положим $B := U \times W$ и $O := B \cap C$. Очевидно, что $G \circ F \cap O \subset (\operatorname{cl}_\tau A) \cap B$. Работая в стандартном антураже, для $a \in (\operatorname{cl}_\tau A) \cap B$ найдем точку $a' \in A$ такую, что $a' \approx_\tau a$. Ясно, что $a' \approx_\sigma a$, ибо $\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$ по условию. Ввиду σ-открытости B будет $a' \in B$, т. е. $a' \in A \cap B$ и $a \in \operatorname{cl}_\tau(A \cap B)$. Окончательно $G \circ F \cap O \subset \operatorname{cl}_\tau(A \cap B)$, что и нужно было обеспечить. $\triangleright$

7.5.8. *Имеют место включения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(H, d') \supset X \times \mathrm{Ha}_\Lambda(G, b') \cap \mathrm{Ha}_\Lambda(F, a') \times Z$;

(2) $R^2_\Lambda(H, d') \supset X \times R^1_\Lambda(G, b') \cap R^2_\Lambda(F, a') \times Z$;

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H, d') \supset X \times Q^1_\Lambda(G, b') \cap \mathrm{Cl}_\Lambda(F, a') \times Z$;

(4) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H, d') \supset X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap Q^2_\Lambda(F, a') \times Z$;

(5) $\mathrm{Cl}^2(H, d') \supset X \times P^2(G, b') \cap S^2(F, a') \times Z$, *где множество* $\mathrm{Cl}^2(H, d')$ *определено соотношением*

$$\mathrm{Cl}^2(H, d') := {}^*\{(s', t', r') \in X \times Y \times Z : (\forall\, d \approx_{\overline{\sigma}} d', d \in H)$$
$$(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx_{\tau_Y} t')(\exists\, r \approx_{\tau_Z} z')(d + \alpha(s, t, r) \in H)\}.$$

$\triangleleft$ Проверим только (1) и (5), так как прочие утверждения проверяются по той же схеме.

(1): Пусть элемент (s', t', r') стандартен и входит в правую часть рассматриваемого соотношения. Возьмем $d \approx_{\overline{\sigma}} d'$ и $\alpha \in \Lambda$, где $d := (x, y, z) \in H$. Ясно, что $a := (x, y) \in F$ и $a \approx_{\sigma_1} a'$, а $b := (y, z) \in G$, $b \approx_{\sigma_2} b'$. В этой связи для $\alpha \in \Lambda$ и $(s, t, r) \approx_{\overline{\tau}} (s', t', r')$ будет $a + \alpha(s, t) \in F$ и $b + \alpha(t, r) \in G$. Итак,

$$d + \alpha(s, t, r) = (a + \alpha(s, t), z + \alpha r) \in F \times Z,$$
$$d + \alpha(s, t, r) = (x + \alpha s, b + \alpha(t, r)) \in X \times G,$$

т. е. $(s', t', r') \in \mathrm{Ha}_\Lambda(H, d')$.

(5): Возьмем стандартный элемент (s', t', r') из правой части (4). По определению имеется элемент $s \approx_{\tau_X} s'$ такой, что для всякого $t \approx_{\tau_Y} t'$ при некотором $r \approx_{\tau_Z} r'$ и всех $a \approx_{\sigma_1} a'$ и $b \approx_{\sigma_2} b'$ будет $a + \alpha(s,t) \in F$ и $b + \alpha(t,r) \in G$. Ясно, что и подавно $d + \alpha(s,t,r) \in H$, как только $b \approx_{\overline{\sigma}} d'$ и $d \in H$. $\triangleright$

7.5.9. Рассмотрим теперь критерий топологического общего положения выпуклых конусов на языке бесконечно малых.

(1) *Нестандартный критерий общего положения конусов.* *Конусы $K_1, \dots, K_n$ в топологическом векторном пространстве (X, τ) находятся в (топологическом) общем положении, если множество $Z := \Delta_n(X) - K_1 \times \ldots \times K_n$ является дополняемым подпространством в X^n и выполняется равенство*

$$Z \cap \mu(\tau(0))^n = \Delta_n(\mu(\tau(0)) - K_1 \times \ldots \times K_n \cap \mu(\tau(0))^n.$$

$\triangleleft$ Требуемое вытекает из 7.3.2. В самом деле, если τ^n — топология произведения X^n, то нужно лишь выбрать указанные в 7.3.2 фильтры и ZF-формулу в виде $\mathscr{F} = \tau^n(0)$, $\mathscr{G} := \tau^n(0) \times \tau^n(0)$ и $\varphi(x, y, A, B) \equiv (y := (y_1, y_2) \in A \times B) \wedge (x = y_1 - y_2)(y \in B)$, $A := \Delta_n(X)$, $B := K_1 \times \ldots \times K_n$. $\triangleright$

(2) *Если конусы $K_1, \dots, K_n$ в топологическом векторном пространстве (X, τ) находятся в (топологическом) общем положении, то*

$$\mathrm{cl}_\tau(K_1 \cap \ldots \cap K_n) = \mathrm{cl}_\tau(K_1) \ldots \mathrm{cl}_\tau(K_n).$$

$\triangleleft$ Включение $\subset$ очевидно; докажем противоположное включение. Если $h \in \mathrm{cl}_\tau(K_l)$ $(l := 1, \dots, n)$, то h — микропредельная точка для всех конусов K_l, следовательно, найдутся $h_l \in \mu(\tau(0))$ такие, что $k_l := h + h_l \in K_l$ при $l := 1, \dots, n$. Тем самым

$$(h_1, \dots, h_n) = (k_1, \dots, k_n) - (h, \dots, h) \in Z \cap \mu(\tau(0))^n,$$

стало быть, согласно (1) имеет место представление $(h_1, \dots, h_n) = (k, \dots, k) - (u_1, \dots, u_n)$, где $u_l \in K_l \cap \mu(\tau(0))$ и $k \in \mu(\tau(0))$. Из двух разных представлений вектора $(h_1, \dots, h_n)$ находим $k + h = k_l + u_l \in K_l$ $(l := 1, \dots, n)$, значит, $k + h \in K_1 \cap \ldots \cap K_n$ и $k + h \in \mu(\tau(h))$, т. е. h — микропредельная точка пересечения $K_1 \cap \ldots \cap K_n$. $\triangleright$

7.5.10. *Теорема.* *Пусть τ — векторная топология, $\tau \geqslant \sigma$ и соответствия $F \subset X \times Y$ и $G \subset Y \times Z$ таковы, что $\mathrm{Ha}(F, a') \neq \varnothing$ и конусы $\mathrm{Q}^2(F, a') \times Z$ и $X \times \mathrm{Cl}(G, b')$ находятся в общем положении (относительно топологии $\overline{\tau}$). Тогда*

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') \supset \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a'),$$

если выполнено условие ($\overline{\rho c}$) в точке d'.

$\lhd$ Доказательство состоит в констатации выполнения (уже установленных) условий (см. 7.5.2, 7.5.7, 7.5.9), обеспечивающих справедливость следующих выкладок:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Cl}(G \circ F, c') = \mathrm{Cl}(\mathrm{Pr}_{X \times Z} H, \mathrm{Pr}_{X \times Z} d') \supset \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{Cl}(H, d') \supset \\
\supset \mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Q}^2(F, a') \times Z) = \\
= \mathrm{Pr}_{X \times Z}(\mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b')) \cap \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(\mathrm{Q}^2(F, a') \times Z)) = \\
= \mathrm{Pr}_{X \times Z}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Cl}(F, a') \times Z) = \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a').
\end{gathered}$$

Тем самым доказательство завершено. $\rhd$

7.5.11. Покажем, как изложенный метод применяется к нахождению аппроксимации к сумме соответствий. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — соответствия из X в Y. Напомним (см. 1.2.4), что (правая частичная) сумма этих соответствий допускает представление $\Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \Phi_n = \Lambda(H)$ где отображения $\sigma_n : (X \times Y)^n \mapsto X^n \times Y^n$ и $\Lambda : X^n \times Y^n \mapsto X \times Y$ и множество $H \subset X^n \times Y^n$ определены соотношениями:

$$\sigma_n : ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

$$\Lambda : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i \right),$$

$$H := \sigma_n \left(\prod_{i=1}^n \Phi_i \right) \cap \Delta_n(X) \times Y^n.$$

Положим $\Phi := \Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \Phi_n$ и возьмем $(x', y') \in \Phi$, где $y' = y'_1 + \ldots + y'_n$ и $(x', y'_k) \in \Phi_k$ $(k := 1, \dots, n)$. Обозначим $a' := (x', y')$, $a'_k := (x', y'_k)$ $(k := 1, \dots, n)$, $d' := (x', \dots x', y'_1, \dots y'_n) \in X^n \times Y^n$ и заметим, что $a' = \Lambda(d')$.

Ниже покажем, что условие $\overline{\rho}$ для параметров Λ, H, d' равносильно следующему: для любых $V_k \in \tau_Y(y'_k)$ $(k := 1, \dots, n)$ найдутся $U \in \tau_X(x')$ и $V \in \tau_Y(y')$, такие, что

$$\mathrm{cl}_{\tau_1}\,(X \times V_1 \cap \Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus X \times V_n \cap \Phi_n) \supset U \times V \cap \Phi.$$

Это условие в выписанном виде назовем *условием* $(\overline{\rho s})$ для соответствий $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ в точке $(x, y_1, \dots, y_n)$.

Полезно иметь в виду, что условие $(\overline{\rho s})$ вытекает из следующего: для любых $V_k \in \tau_Y(y'_k)$ найдутся $U \in \tau_X(x')$ и $V \in \tau_Y(y')$, такие, что

$$\mathrm{cl}_{\tau_Y}\,(V_1 \cap \Phi_1(x) + \ldots + V_n \cap \Phi_n(x)) \supset \Phi(x) \cap V$$

для всех $x \in U$.

7.5.12. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* Λ, *соответствия* H *и точки* d' *выполнено условие* $(\overline{\rho})$;

(2) $(\forall\, W \in \mathscr{N}_\tau)\, \mu(\sigma_1(a'_1)) \cap \Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu(\sigma_1(a'_n)) \cap \Phi_n + W \supset \mu(\sigma(a')) \cap \Phi$;

(3) $(\forall\, W_1 \in \sigma_1(a'_1)) \ldots (\forall\, W_n \in \sigma_1(a'_n))(\exists\, W \in \sigma_1(a'))$ $W \cap \Phi \subset \mathrm{cl}_\tau\,\big(W_1 \cap \Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus W \cap \Phi_n\big)$;

(4) $(\forall\, V_1 \in \sigma_Y(y'_1)) \ldots (\forall\, V_n \in \sigma_Y(y'_n))(\forall\, U_0 \in \sigma_X(x'))$ $(\exists\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))$ $U \times V \cap \Phi \subset \mathrm{cl}_\tau\,\big(U_0 \times V_1 \cap \Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus U_0 \times V_n \cap \Phi_n\big)$;

(5) *для соответствий* $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ *выполнено условие* $(\overline{\rho s})$ *в точке* $(x, y_1, \dots, y_n)$.

$\lhd$ Доказательство основано на тех же соображениях, что и в 7.5.7. $\rhd$

7.5.13. *Теорема.* *Пусть соответствия* $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ *из* X *в* Y *удовлетворяют* $(\overline{\rho s})$ *в точке* $(x, y_1, \dots, y_n)$. *Допустим, что заданные конусы* $K_1, \dots, K_n$ *в* $X \times Y$ *таковы, что либо* $K_i = \mathrm{R}^1(\Phi_i; (x, y_i))$ *для всех* i, *либо* $K_1 = \mathrm{Cl}(\Phi_1; (x, y_1))$ *и* $K_i = \mathrm{Q}^1(\Phi_i; (x, y_i))$ *при* $i \geqslant 2$. *Предположим, что соответствие* Φ_i *является* K_i*-регулярным в точке* (x, y_i) *для всех* i, *а конусы* $\sigma_n\,\big(\prod_{i=1}^n K_i\big)$ $\Delta_n(X) \times Y_n$ *находятся в общем положении. Тогда*

$$\mathrm{Cl}(\Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \Phi_n, (x, y)) \supset \mathrm{Cl}(\Phi_1, (x, y_1)) \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{Cl}(\Phi_n, (x, y_n)).$$

◁ Доказательство следует той же схеме. Установленные выше утверждения 7.5.2, 7.5.7 и 7.5.9 обеспечивают справедливость следующих выкладок:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Cl}(\Phi_1 \dotplus \ldots \dotplus \Phi_n, (x,y)) = \\
= \mathrm{Cl}\Bigg(\Lambda\Bigg(\sigma_n\Bigg(\prod_{i=1}^{n} \Phi_i\Bigg) \cap \Delta_n(X) \times Y^n\Bigg), (x,y)\Bigg) \supset \\
\supset \mathrm{cl}_\tau \, \Lambda\Bigg(\mathrm{Cl}\Bigg(\sigma_n\Bigg(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(\Phi_i(x,y_i))\Bigg) \cap \Delta_n(X) \times Y^n\Bigg), (x,y)\Bigg) \supset \\
\supset \Lambda\Bigg(\mathrm{cl}_\tau\Bigg(\sigma_n\Bigg(\prod_{i=1}^{n} K_i\Bigg) \cap \Delta_n(X) \times Y^n\Bigg), (x,y)\Bigg) \supset \\
\supset \Lambda\Bigg(\sigma_n\Bigg(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(\Phi_i(x,y_i))\Bigg) \cap \Delta_n(X) \times Y^n, (x,y)\Bigg) = \\
= \mathrm{Cl}(\Phi_1, (x,y_1) \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{Cl}(\Phi_n, (x,y_n)).
\end{gathered}
$$

Тем самым доказательство завершено. ▷

7.6. Субдифференциалы негладких операторов

В этом параграфе мы рассмотрим метод субдифференцирования отображений со значениями в K-пространстве и коротко остановимся на необходимых условиях в негладких многоцелевых экстремальных задачах. Для разнообразия здесь используется стандартный подход.

7.6.1. Пусть E — топологическое K-пространство, а X — топологическое векторное пространство. *Нормальным конусом* со значениями в E или *E-нормальным конусом к множеству $C \subset X$ в точке $x \in \mathrm{cl}(C)$* называют множество

$$
\mathrm{N}_E(C,x) := \{T \in \mathscr{L}(X,E) : Th \leqslant 0, \, h \in \mathrm{Cl}(C,x)\}.
$$

Если $x \notin \mathrm{cl}(C)$, то полагают $\mathrm{N}_E(C,x) := \mathscr{L}(X,E) \cup \{\infty\}$, где ∞ — оператор из X в $E^\bullet$, равный тождественно $+\infty$. Как видно, нормальный конус $\mathrm{N}_E(C,x)$ является выпуклым и замкнутым относительно топологии поточечной сходимости в $\mathscr{L}(E,F)$.

Заметим, что если C — выпуклое множество и $x \in C$, то $T \in \mathrm{N}_E(C, x)$ в том и только в том случае, когда $Th \leqslant 0$ для всех $h \in \mathrm{Fd}(C, x)$, так как в этом случае $\mathrm{Cl}(C, x) = \mathrm{cl}\left(\mathrm{Fd}(C, x)\right)$, см. 7.2.13.

Понятие E-значного нормального конуса позволяет единообразно рассмотреть субдифференциалы нелинейных операторов со значениями в K-пространстве E.

7.6.2. Рассмотрим отображение $f : X \to \overline{E}$, точку $x \in X$ и предположим, что $f(x) \in E$. Введем следующее обозначение $\mathrm{N}_E(f, x) := \mathrm{N}_E(\mathrm{epi}(f),\, (x, f(x)))\}$. *Субдифференциалом* f в точке x называют множество

$$\partial f(x) := \{T \in \mathscr{L}(X, E) :\ (T, I_E) \in \mathrm{N}_E(f, x)\}.$$

Оператор $f^{\uparrow}(x) : X \to \overline{E}$, определяемый равенством

$$f^{\uparrow}(x) : h \mapsto \inf\{k \in E :\ (h, k) \in \mathrm{Cl}(f, x)\},$$

называют *обобщенной производной по направлениям* или *производной Рокафеллара по направлениям*. Как видно, $\partial f(x) = \partial(f^{\uparrow}(x))$.

Для выпуклого оператора f данное определение принимает вид:

$$\partial f(x) := \{T \in \mathscr{L}(X, E) :\ Ty - Tx \leqslant f(y) - f(x),\, y \in X\},$$
$$f^{\uparrow}(x)h = f'(x)h := \inf_{t>0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

В частности, опорное множество ∂P сублинейного оператора P совпадает с его субдифференциалом в нуле. Следует также заметить, что для выпуклого оператора f объекты $\partial f(x)$ и $f'(x)$ не зависят от топологий пространств X и E.

Опишем общий метод вычисления нормальных конусов и субдифференциалов, основанный на концепции общего положения.

7.6.3. *Пусть $C, C_1, \dots, C_n$ — произвольные множества, а $K, K_1, \dots, K_n$ — выпуклые конусы в топологическом векторном пространстве X. Рассмотрим точку $x \in X$ и предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) $C = C_1 \cap \ldots \cap C_n,\ K \supset K_1 \cap \ldots \cap K_n$;

(2) $K \subset \mathrm{Cl}(C, x)$; $\mathrm{cl}(K_l) \supset \mathrm{Cl}(C_l, x)\, (l := 1, \dots, n)$;

(3) *конусы $K_1, \dots, K_n$ находятся в топологическом общем положении.*

Тогда имеют место следующие формулы:

$$\mathrm{Cl}(C, x) \supset \mathrm{Cl}(C_1, x) \cap \ldots \cap \mathrm{Cl}(C_n, x),$$
$$\mathrm{N}_E(C, x) \subset \mathrm{N}_E(C_1, x) + \ldots + \mathrm{N}_E(C_n, x),$$

причем, правая часть последнего включения замкнута в топологии поточечной сходимости в $\mathscr{L}(X, E)$.

$\lhd$ Первая формула вытекает из 7.5.9 с учетом замкнутости конуса Кларка. Вторая формула выводится из первой с привлечением 3.2.4. $\rhd$

7.6.4. Конусы K_l, фигурирующие в 7.6.3, называют *регуляризирующими*, в то время как условие $\mathrm{cl}(K) \supset \mathrm{Cl}(C, x)$ принято называть *K-регулярностью* множества C в точке x. Заметим, что конус допустимых направлений выпуклого множества C служит одним из его регуляризирующих конусов (см. 7.2.12). Более того, если x содержится в пересечении выпуклых множеств $C_1, \dots, C_n$, то

$$\mathrm{Fd}(C_1 \cap \ldots \cap C_n, x) = \mathrm{Fd}(C_1, x) \cap \ldots \cap \mathrm{Fd}(C_n, x).$$

Поэтому включение в 7.6.3 фактически является равенством при том условии, что конусы $\mathrm{Fd}(C_1, x), \dots, \mathrm{Fd}(C_n, x)$ находятся в общем положении.

7.6.5. Пусть множество $C \subset X$, точка $x \in C$ и оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ удовлетворяют условию $(\overline{\rho})$. Предположим, что T — открытый оператор. Тогда

$$\mathrm{Cl}(T(C), Tx) \supset \mathrm{cl}\, T(\mathrm{Cl}(C, x)),$$
$$\mathrm{N}_E(T(C), Tx) \subset \{S \in \mathscr{L}(X, Y) : S \circ T \in \mathrm{N}_E(C, x)\}.$$

$\lhd$ Первая формула была уже установлена в 7.5.3, а вторая непосредственно следует из первой в силу 3.2.6. $\rhd$

7.6.6. Указанные выше предложения составляют основу предлагаемого метода.

(1) Предположим, что отображение

$$\psi : \prod_{j=1}^{n} 2^{X_j} \to 2^Y$$

представимо в виде конечной комбинации операции пересечения и линейного непрерывного образа, причем выполнены следующие соотношения $\{y\} = \psi(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ $(x_j \in X_j)$. Тогда, применяя предложения 7.6.3 и 7.6.5, по индукции получим

$$\begin{gathered}\mathrm{Cl}(\psi(C_1, \dots, C_n),\, y) \supset \psi(\mathrm{Cl}(C_1, x_1), \dots, \mathrm{Cl}(C_n, x_n)),\\ \mathrm{N}_E(\psi(C_1, \dots, C_n), y) \subset \psi^*(\mathrm{N}_E(C_1, x_1), \dots, \mathrm{N}_E(C_n, x_n)),\end{gathered}$$

где правая часть последнего включения замкнута в топологии поточечной сходимости в $\mathscr{L}(Y, E)$. Отображение ψ^* однозначно определяется отображением ψ и может быть легко восстановлено при использовании 7.6.3 и 7.6.5. Индукционные шаги, на которых применяется предложение 7.6.3, требуют выполнения некоторых условий регулярности рассматриваемых множеств и общего положения соответствующих регуляризирующих конусов, а шаги индукции, обеспеченные предложением 7.6.5, предполагают определенные взаимосвязи этих множеств.

(2) Регуляризирующие конусы, введенные в 7.2.15, часто применяются в описанном в (1) методе. Пусть Ψ обозначает R или Q. Если $z \notin \mathrm{cl}(G)$, то полагаем $\Psi^j(G, z) = \varnothing$. Как мы видели в 7.2.17, $\Psi^j(G, z)$ — выпуклый конус и $\Psi^j(G, z) \subset \mathrm{Cl}(G, z)$. Вместо $\Psi^j(G, z)$-регулярности мы будем говорить о Ψ^j-*регулярности* множества G в точке z. Полагая $\Psi(f, x) := \Psi(\mathrm{epi}(f),\, (x, f(x))$, мы будем называть отображение $f : X \to E$ Ψ-*регулярным* в точке x, если его надграфик $\mathrm{epi}(f)$ Ψ-регулярен в точке $(x, f(x))$.

Обратимся теперь к вопросу о вычислении нормального конуса к композиции и правой частичной суммы соответствий. Рассмотрим $\Gamma_1 \subset X \times Y$ и $\Gamma_2 \subset Y \times Z$, где X, Y, Z — топологические векторные пространства. Если $\Lambda := P_{X \times Z}$ — естественная проекция из $X \times Y \times Z$ на $X \times Z$, то мы имеем представление

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \Lambda\big((\Gamma_1 \times Z) \cap (X \times \Gamma_2)\big).$$

Возьмем $u_1 := (x, y) \in \Gamma_1$, $u_2 := (y, z) \in \Gamma_2$ и положим $u_0 := (x, z) \in \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ и $u := (x, y, z) \in X \times Y \times Z$. Напомним также, что ввиду наших соглашений из 2.1.7 будет

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_E(\Gamma_1, u_1) := \{(S, T) \in \mathscr{L}(X, E) \times \mathscr{L}(Y, E) :\\ Sh - Tk \leqslant 0,\ (h, k) \in \mathrm{Cl}(\Gamma_1, u_1)\}, \end{aligned}$$

а используемые ниже условия $(\overline{\rho c})$ и $(\overline{\rho s})$ введены в 7.5.4 и 7.5.11 соответственно.

7.6.7. *Теорема.* *Допустим, что Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условию $(\overline{\rho c})$ в точке u и выполняется одно из следующих допущений:*

(1) *Γ_1 R^2-регулярно в точке u_1, Γ_2 R^1-регулярно в точке u_2, а конусы $\mathrm{R}^2(\Gamma_1, u_1) \times Z$ и $X \times \mathrm{R}^1(\Gamma_2, u_2)$ находятся в общем положении;*

(2) *Γ_1 Q^2-регулярно в точке u_1, а конусы $\mathrm{Q}^2(\Gamma_1, u_1) \times Z$ и $X \times \mathrm{Cl}(\Gamma_2, u_2)$ находятся в общем положении;*

(3) *Γ_2 Q^1-регулярно в точке u_2, а конусы $\mathrm{Cl}(\Gamma_1, u_1) \times Z$ и $X \times \mathrm{Q}^1(\Gamma_2, u_2)$ находятся в общем положении.*

Тогда имеют место формулы

$$\mathrm{Cl}(\Gamma_2 \circ \Gamma_1, u_0) \supset \mathrm{Cl}(\Gamma_2, u_2) \circ \mathrm{Cl}(\Gamma_1, u_1),$$
$$\mathrm{N}_E(\Gamma_2 \circ \Gamma_1, u_0) \subset \mathrm{N}_E(\Gamma_2, u_2) \circ \mathrm{N}_E(\Gamma_1, u_1);$$

причем, множество в правой части замкнуто в топологии поточечной сходимости в $\mathscr{L}(X \times Z, E)$.

Если же Γ_1 и Γ_2 — выпуклые соответствия, то они автоматически R-регулярны в точках u_1 и u_2 соответственно, и указанные включения являются равенствами, если выполнено предположение об общем положении из (1).

$\triangleleft$ Проектор $P := \mathrm{Pr}_{X \times Z}$ является непрерывным и открытым оператором, а условие $\overline{\rho c}$ обеспечивает справедливость условия $\overline{\rho}$ для M, P и u. Таким образом, в силу 7.6.5 будет

$$\mathrm{Cl}(\Gamma_2 \circ \Gamma_1, u_0) = \mathrm{Cl}(\Lambda(M), u_0) \supset \Lambda\big(\mathrm{Cl}(M, u)\big).$$

Каждое из допущений (1)–(3) позволяет применить предложение 7.6.3. Отсюда, принимая во внимание 7.5.8, а также очевидные соотношения

$$\mathrm{Cl}(U \times V, (u, v)) = \mathrm{Cl}(U, u) \times \mathrm{Cl}(V, v),$$
$$\mathrm{R}^1(U \times V, (u, v)) = \mathrm{R}\,(U, u) \times \mathrm{Cl}(V, v),$$
$$\mathrm{Q}^1(U \times V, (u, v)) = \mathrm{Q}\,(U, u) \times \mathrm{Cl}(V, v),$$

мы приходим к первому из требуемых включений посредством тех же выкладок, что и в 7.5.10. Используя вновь предложения 7.6.3 и 7.6.5, заключаем, что если $(A, B) \in \mathrm{N}_E(\Gamma_2 \circ \Gamma_1, u_0)$, то

$$(A, B) \circ \Lambda = (A_1, B_1, 0) + (0, -B_2, C)$$

для некоторых $(A_1, B_1) \in \mathrm{N}_E(\Gamma_1, u_1)$ и $(B_2, C_2) \in \mathrm{N}_E(\Gamma_2, u_2)$. Отсюда $A = A_1$, $B = C_2$ и $B_1 = B_2$ и, стало быть, $(A, B) \in \mathrm{N}_E(\Gamma_2, u_2) \circ \mathrm{N}_E(\Gamma_1, u_1)$.

Далее, легко видеть, что для выпуклого множества V будет $\mathrm{cl}(\mathrm{R}\,(V, v)) \supset \mathrm{Fd}\,(V, v)$ в любой точке $v \in V$, откуда следует его R-регулярность. Остается заметить, что $\mathrm{R}^i(V, v) \supset \mathrm{R}(V, v)$, и сослаться на 7.2.10, 7.6.4 и 7.6.5. $\triangleright$

7.6.8. *Теорема.* *Пусть соответствия $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ удовлетворяют условию $(\overline{\rho s})$ в точке $(x, y_1, \dots, y_n) \in X \times Y^n$, $\Gamma := \Gamma_1 \dotplus \dots \dotplus \Gamma_n$. Допустим, что конусы $K_1, \dots, K_n$ в $X \times Y$ таковы, что либо $K_i = R^1(\Gamma_i; (x, y_i))$ для всех $i := 1, \dots, n$, либо $K_1 = \mathrm{Cl}(\Gamma_1; (x, y_1))$ и $K_i = Q^1(\Gamma_i; (x, y_i))$ при $i \geqslant 2$. Предположим, что Γ_i K_i-регулярно в точке (x, y_i) для всех i, а конусы $\sigma_n\,(\prod_{i=1}^n K_i)$ и $\Delta_n(X) \times Y_n$ находятся в общем положении. Тогда*

$$\mathrm{Cl}(\Gamma; (x, y)) \supset \mathrm{Cl}(\Gamma_1; (x, y_1) \dotplus \dots \dotplus \mathrm{Cl}(\Gamma_n; (x, y_n)),$$
$$\mathrm{N}_E(\Gamma; (x, y)) \subset \mathrm{N}_E(\Gamma_1; (x, y_1) \underset{\cdot}{+} \dots \underset{\cdot}{+} \mathrm{N}_E(\Gamma_n; (x, y_n)),$$

причем множество, стоящее в правой части последнего включения, замкнуто в топологии поточечной сходимости.

Если же $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — выпуклые соответствия, то они автоматически R-регулярны в точках $(x, y_1), \dots, (x, y_n)$ соответственно, и указанные включения являются равенствами, если выполнено предположение об общем положении конусов $K_i = R^1(\Gamma_i; (x, y_i))$ $(i := 1, \dots, n)$.

$\triangleleft$ Первая формула установлена в 7.5.12, а вторая вытекает из первой и теоремы 3.2.7. $\triangleright$

Из теорем 7.6.7 и 7.6.8 можно вывести различные следствия относительно вычисления субдифференциалов составных функций и нормальных конусов составных множеств. При этом, варьируя регуляризирующие конусы K_j, можно показать различные условия регулярности и различные области справедливости формул субдифференцирования. Ограничимся лишь несколькими примерами.

7.6.9. (1) *Пусть $C_1, \dots, C_n$ — множества в топологическом векторном пространстве X, и возьмем точку $x \in X$. Предположим, что либо C_j является* R*-регулярным в точке x при $j := 1, \dots, n$, а конусы $\mathrm{R}(C_1, x), \dots, \mathrm{R}(C_n, x)$ находятся в общем положении, либо C_j является* Q*-регулярным в точке x при $j := 2, \dots, n$, а конусы $\mathrm{Cl}(C_1, x), \mathrm{Q}(C_2, x), \dots, \mathrm{Q}(C_n, x)$ находятся в общем положении.*

Тогда справедливы формулы из 7.6.3.

$\lhd$ В предложении 7.6.3 нужно положить $K_l := \mathrm{R}(C_l, x)$ $(l := 1, \dots, n)$ в случае (1) и $K_l := \mathrm{Cl}(C_l, x)$ $(l := 1, \dots, n)$ в случае (2). $\rhd$

(2) *Пусть при $l := 1, \dots, n$ отображение $f_l : X \to \overline{E}$ конечно и K_l-регулярно в точке x, где либо $K_l = \mathrm{R}^1(f_i, x)$ $(l := 1, \dots, n)$, либо $K_1 = \mathrm{Cl}(f_1, x)$ и $K_l = \mathrm{Q}^1(f_i, x)$ при $l \geqslant 2$. Если при этом конусы $K_1, \dots, K_n$ находятся в общем положении, то имеют место формулы:*

$$(f_1 \vee \dots \vee f_n)^{\uparrow}(x)h \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma(x)} \big\{ (\alpha_1 \circ f_1^{\uparrow}(x)h + \dots + \alpha_n \circ f_n^{\uparrow}(x)h) \big\} \quad (h \in X),$$

$$\partial(f_1 \vee \dots \vee f_n)(x) \subset$$
$$\subset \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma(x)} \big\{ \partial(\alpha_1 \circ f_1^{\uparrow}(x)) + \dots + \partial(\alpha_n \circ f_n^{\uparrow}(x)) \big\},$$

где

$$\Gamma(x) = \Bigg\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathscr{L}^+(E)^n : \ \sum_{i=1}^n \alpha_i = I_E,$$
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \circ f_i(x) = \sup_{i:=1,\dots,n} f_i(x) \Bigg\}.$$

$\lhd$ Это утверждение можно вывести из (1), если положить $C_l := \mathrm{epi}(f_l)$ и учесть представление $\mathrm{epi}(f_1 \vee \dots \vee f_n) = \mathrm{epi}(f_1) \cap \dots \cap \mathrm{epi}(f_n)$. $\rhd$

(3) *Пусть отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ таковы, что соответствия $\mathrm{epi}(f_1), \dots, \mathrm{epi}(f_n)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.6.8 *при $x := x_0$, $y_i := f_i(x_0)$ $(i := 1, \dots, n)$. Тогда для $f :=$*

$f_1 + \ldots + f_n$ *имеют место представления:*

$$f^{\uparrow}(x_0) \leqslant f_1^{\uparrow}(x_0) + \ldots + f_n^{\uparrow}(x_0),$$
$$\partial f(x_0) \subset \partial f_1(x_0) + \ldots + \partial f_n(x_0).$$

$\lhd$ В 7.6.8 нужно положить $\Gamma_i := \operatorname{epi}(f_i)$ $(i := 1, \ldots, n)$ и заметить, что $\operatorname{epi}(f) = \operatorname{epi}(f_1) \dotplus \ldots \dotplus \operatorname{epi}(f_n)$. $\rhd$

7.6.10. Отображение $f : X \to E^{\bullet}$ называют *эпиточным в точке* x *по направлению* $h \in X$ если $f^{\circ}(x)h \in \mathrm{Cl}_{f,x}(h) \cup \{+\infty\}$, где

$$\mathrm{Cl}_{f,x}(h) := \big\{k \in E : \ (h,k) \in \mathrm{Cl}(f,x) := \mathrm{Cl}\big(\operatorname{epi}(f),\, (x, f(x))\big)\big\}.$$

Допустим, что подпространство $E_0 := E^+ - E^+$ дополняемо в E. Если $f^{\circ}(x)h > -\infty$ и E — порядково полная топологическая векторная решетка, в которой из o-сходимости вытекает топологическая сходимость, то f будет эпиточной в точке x по направлению h. Действительно, при указанных предположениях множество $\mathrm{Cl}_{f,x}(h)$ будет нижней полурешеткой, т. е.

$$k_1, k_2 \in \mathrm{Cl}_{f,x}(h) \to k_1 \wedge k_2 \in \mathrm{Cl}_{f,x}(h),$$

поэтому $f^{\circ}(x)h = \inf \mathrm{Cl}_{f,x}(h) = o\text{-}\lim \mathrm{Cl}_{f,x}(h)$.

Скажем, что отображения $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : E \to F^{\bullet}$ *удовлетворяют условию* (ρf) *в точке* $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, если для любой окрестности V точки $y := f(x)$ существуют окрестности $U \in \tau(x)$ и $W \in \tau(g(y))$ такие, что $V \cap (f(x) + F^+) \cap g^{-1}(z - E^+) \neq \varnothing$ для всех $(x, z) \in (U \times W) \cap \operatorname{epi}(g \circ f)$. Имеются простые достаточные условия для справедливости условия (ρf). Так, например, если ограничение f на $\operatorname{dom}(f)$ непрерывно в точке x, то f и g удовлетворяют условию (ρf) в этой точке, каково бы ни было g.

7.6.11. *Теорема.* *Предположим, что отображения* $f : X \to F$ *и* $g : F \to E$ *удовлетворяют условию* (ρf) *в точке* $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ *и* g *возрастает на множестве* $(f(U) + V) \cap \operatorname{dom}(g)$ *для некоторых окрестностей* $U \in \tau(x)$ *и* $V \in \tau(0)$. *Пусть* g *является* Q^1*-регулярным в точке* $y = f(x)$, *а конусы* $\mathrm{Cl}(f,x) \times E$ *и* $X \times \mathrm{Q}^1(g,y)$ *находятся в общем положении. Тогда*

$$\partial(g \circ f)(x) \subset \bigcup_{S \in \partial g(y)} \{T \in \mathscr{L}(X,E) : \ (T,S) \in \mathrm{N}_E(f,x)\}.$$

Более того, если f эпиточно в точке x по направлению $h \in X$, то

$$(g \circ f)^{\uparrow}(x)h \leqslant g^{\uparrow}(y) \circ f^{\uparrow}(x)h;$$

если же f эпиточно в точке x по всем направлениям, то

$$\partial(g \circ f)(x) \subset \bigcup_{S \in \partial g(y)} \{\partial(S \circ f^{\uparrow}(x))\}.$$

Правые части этих включений замкнуты в топологии поточечной сходимости в $\mathscr{L}(X, E)$.

$\lhd$ Положим $\Gamma_1 := \operatorname{epi}(f)$ и $\Gamma_2 := \operatorname{epi}(g)$. Для окрестности $y + V$ точки y выберем $V_1 \in \tau(x)$ и $W_1 \in \tau(g(y))$ в соответствии с условием (ρf); при этом можно предположить, что $U_1 \subset U$. Тогда g возрастает на $f(U_1) + V$ и несложно проверить равенство $(U_1 \times W_1) \cap \operatorname{epi}(\varphi) = (U_1 \times W_1) \cap \Gamma_2 \circ \Gamma_1$, где $\varphi := g \circ f$. Тем самым $\operatorname{Cl}(\varphi, x) = \operatorname{Cl}(\Gamma_2 \circ \Gamma_1, (x, \varphi(x)))$. Условие (ρf) влечет справедливость условия (ρc) для Γ_1 и Γ_2 в точке $(x, f(x), \varphi(x))$, причем выполнено условие (3) из теоремы 7.6.10. Таким образом, в силу теоремы 7.6.10 будет

$$\operatorname{Cl}(\varphi, x) \supset \operatorname{Cl}(\Gamma_2, (y, g(y))) \circ \operatorname{Cl}(\Gamma_1, (x, f(x))) = \operatorname{Cl}(g, y) \circ \operatorname{Cl}(f, x).$$

Если $\partial\varphi(x) \neq \varnothing$, то первая формула очевидна.

Предположим, что $T \in \partial\varphi(x)$. Тогда $(T, I_E) \in \mathrm{N}_E(\varphi, x)$ и по теореме 7.6.9 существует $S \in \mathscr{L}(F, E)$ такой, что $(T, S) \in \mathrm{N}_E(f, x)$ и $(S, I_E) \in \mathrm{N}_E(g, y)$. Последнее включение означает, что $S \in \partial g(y)$, откуда вытекает первая из требуемых формул.

Поскольку g возрастает в окрестности точки y, то нетрудно убедиться, что неравенство $k_1 \leqslant k_2$ влечет $\operatorname{Cl}_{g,y}(k_1) \supset \operatorname{Cl}_{g,y}(k_2)$, а значит, $g^{\uparrow}(y)k_1 \leqslant g^{\uparrow}(y)k_2$. Отсюда ввиду эпиточности f по направлениям получаем вторую формулу. Наконец, последняя из требуемых формул является прямым следствием 3.2.10 (2) и доказанного выше. $\rhd$

7.6.12. Рассмотренные нами выше объекты локального выпуклого анализа, а именно касательные конусы, производные по направлениям, субдифференциалы с различными их модификациями составляют основу теории необходимых условий экстремума. Детальное ее изложение выходит за рамки настоящей книги, и мы ограничимся простейшими фактами.

(1) *Рассмотрим отображение $f : X \to E^\bullet$ и точку $x_0 \in X$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум безусловной задачи $f(x) \to \inf$, то $0 \in \partial f(x_0)$.*

$\lhd$ Пусть $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех x из некоторой окрестности $U' \in \tau(x_0)$. Возьмем $(h, k) \in \mathrm{Cl}(f, x_0)$ и произвольную окрестность $W \in \tau(k)$, а окрестность $W' \in \tau(h)$ подберем так, чтобы $x_0+(0,1)W' \subset U'$. По определению конуса $\mathrm{Cl}(f, x_0)$ существуют число $0 < \varepsilon < 1$ и окрестности $U \in \tau(x_0)$ и $V \in \tau(f(x_0))$ такие, что при любых $0 < t < \varepsilon$, $x \in U$ и $y \in V$, $f(x) \leqslant y$ можно выбрать $h' \in W'$ и $k' \in W$, для которых $t^{-1}(f(x+th')-f(x)) \leqslant k'$. Полагая в этом утверждении $x := x_0$ и $y := f(x_0)$, найдем такие $h_0 \in W'$ и $k_W \in W$, что $0 \leqslant t^{-1}(f(x_0 + th_0) - f(x_0)) \leqslant k_W$. Сеть (k_W) состоит из положительных элементов и сходится к k, следовательно, $k \geqslant 0$. Тем самым $f^\uparrow(x_0)h \geqslant 0$ и в силу произвола в выборе $h \in X$ будет $0 \in \partial f(x_0)$. $\rhd$

(2) *Теорема.* *Пусть отображения $f, g : X \to E^\bullet$ удовлетворяют условию R^1-регулярности в точке x_0, а конусы $\mathrm{R}^1(f, x_0)$ и $\mathrm{R}^1(g, x_0)$ находятся в общем положении. Если x_0 — локальный оптимум в программе $g(x) \not\geqslant 0$, $f(x) \to \inf$, то существуют такие $\alpha, \beta \in \mathscr{L}^+(E)$, что*

$$
\alpha + \beta = I_E, \quad \beta \circ g(x_0) = 0,
$$
$$
0 \in \partial(\alpha \circ f^\uparrow(x_0)) + \partial(\beta \circ g^\uparrow(x_0)).
$$

Если, кроме того, для некоторого $h_0 \in X$ элемент $-(g(x_0)+g^\uparrow(x_0)h_0)$ служит порядковой единицей в E, то $\ker(\alpha) = \{0\}$.

$\lhd$ Пусть выполнены условия теоремы и x_0 — локальный оптимум в программе $g(x) \not\geqslant 0$, $f(x) \to \inf$. Рассмотрим штраф $\varphi(x) := (f(x) - f(x_0)) \vee g(x)$ $(x \in X)$ и заметим, что x_0 будет идеальным локальным оптимумом в безусловной задаче $\varphi(x) \to \inf$. Согласно предложению (1) будет $0 \in \partial\varphi(x_0)$, и остается применить утверждение 7.6.9 (2), из которого вытекают требуемые условия. Отсюда следует, в частности, что $0 \leqslant \alpha \circ f^\uparrow(x_0)h + \beta \circ g^\uparrow(x_0)h$ для любого $h \in X$. Если π — проектор на ядро ортоморфизма α, то $\pi\beta = \pi$ и $\pi \circ g^\uparrow(x_0)h \geqslant 0$. В то же время предполагая, что элемент $e := -(g(x_0) + g^\uparrow(x_0)h_0)$ служит порядковой единицей в E и $\pi \neq 0$, получим противоречие: $0 \geqslant -\pi\beta \circ g^\uparrow(x_0)h = \pi e > 0$. $\rhd$

(3) *Теорема.* *Пусть для отображения $f : X \to E^\bullet$ и набора точек $x_1, \dots, x_n \in X$ существуют непрерывный сублинейный* *оператор* $p : X \to E$ *и окрестность нуля* $U \subset X$ *такие, что при каждом* $i := 1, \dots, n$ *выполняется неравенство* $|f(x') - f(x'')| \leqslant p(x' - x'')$ $(x', x'' \in x_i + U)$. *Пусть* C — *произвольное подмножество в* X. *Если множество* $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C$ *является обобщенным локальным оптимумом программы* (C, f), *то для любых* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathscr{L}^+(E)$ *таких, что*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ f(x_i) = f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n),$$

выполняются включения

$$0 \in \alpha_i \circ \partial f(x_i) + N_E(F; x_i) \quad (i := 1, \dots, n).$$

$\lhd$ Рассмотрим оператор $\varphi : X^n \to E$, определенный по формуле

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \alpha_1 \circ f(x_1) + \ldots + \alpha_n \circ f(x_n),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathscr{L}^+(E)$ удовлетворяют условию теоремы. Если $\{x_1, \dots, x_n\}$ — обобщенный локальный оптимум программы (C, f), то элемент $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ будет идеальным локальным оптимумом программы

$$\xi \in \mathrm{C}^n, \quad \varphi(\xi) \to \inf.$$

Остается применить (1) и вычислить субдифференциалы с привлечением 7.6.9 (3). $\rhd$

7.6.13. В заключение приведем еще один простой пример необходимых условий оптимальности в конечношаговой терминальной динамической задаче.

Пусть $X_0, \ \dots, \ X_n$ — топологические векторные пространства, G_i — соответствие из X_{i-1} в X_i $(i := 1, \dots, n)$. Как и в 5.3.6, множество соответствий $G_1, \dots, G_n$ определяет динамическую систему процессов $(G_{i,j})_{i<j\leqslant n}$, где $G_{i,j}$ — соответствие из X_i в X_j, определяемое формулами

$$G_{i,j} := G_{i+1} \circ \cdots \circ G_j, \quad \text{если } j > i + 1,$$
$$G_{i,i+1} := G_{i+1}, \quad i := 0, 1, \dots, n - 1.$$

Как видно, $G_{i,j} \circ G_{j,k} = G_{i,k}$ для всех $i < j < k \leqslant n$. Траектория семейства процессов определяется так же, как и в 5.5.4.

Пусть E — топологическое K-пространство, f — отображение из X в $\overline{E}$ и $G_0 \subset X_0$. Траекторию $(x_0, \dots, x_n)$ называют *локально оптимальной,* если существует окрестность U точки x_n такая, что для любой траектории $(y_0, \dots, y_n)$ с началом $y_0 \in G_0$ и концом $y_n \in U$ выполняется неравенство $f(x_n) \leqslant f(y_n)$.

Рассмотрим конусы

$$
\begin{aligned}
K_1 &:= \mathrm{R}(G_1, (x_0, x_1)) \times \prod_{i=2}^{n} X_i, \dots, \\
K_n &:= \prod_{i=0} X_i \times \mathrm{R}(G_n, (x_{n-1}, x_n)) \times E, \\
K_{n+1} &:= \prod_{i=0}^{n-1} X_i \times \mathrm{R}^1(f, x), \\
K_0 &:= \mathrm{R}(G_0, x_0) \times \prod_{i=1}^{n+1} X_i
\end{aligned}
$$

и положим $X_{n+1} := E$.

7.6.14. *Теорема.* *Пусть f является R^1-регулярным отображением в точке x, а множество G_0 является R-регулярным в точке x_0 и G_i R-регулярно в точке (x_{i-1}, x_i) для всех $i := 1, \dots, n$. Пусть, далее, $(x_0, \dots, x_n)$ — локально оптимальная траектория и конусы $K_0, \dots, K_n$ находятся в общем положении. Тогда существуют операторы $\alpha_i \in \mathscr{L}(X_i, E)$ $(i := 0, 1, \dots, n)$, удовлетворяющие условиям*

$$
\begin{gathered}
\alpha_0 \in \mathrm{N}_E(G_0; x_0), \quad \alpha_n \in \partial f(x_n), \\
(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \in \mathrm{N}_E(G_i,\, (x_{i-1}, x_i)) \quad (i := 1, \dots, n).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ Положим $W := \prod_{j=0}^{n+1} X_j$. Определим множества $\Phi_0, \dots, \Phi_{n+2}$ в W равенствами

$$
\Phi_0 := \left(\prod_{j=0}^{n-1} X_j \right) \times U \times E, \quad \Phi_1 := G_1 \times \prod_{j=2}^{n+1} X_j,
$$

$$\Phi_2 := X_0 \times G_2 \times \prod_{j=3}^{n+1} X_j, \ldots, \quad \Phi_n := \left(\prod_{j=0}^{n-2} X_j\right) \times G_n \times E,$$

$$\Phi_{n+1} := \left(\prod_{j=0}^{n-1} X_j\right) \times \operatorname{epi}(f), \quad \Phi_{n+2} := G_0 \times \prod_{j=1}^{n+1} X_j$$

и обозначим $\Phi := \bigcap_{j=0}^{n+2} \Phi_j$. Если $v := (x_0, \ldots, x_n)$ — локально оптимальная траектория, то $e \geqslant f(x_n)$ для любой пары $(v, e) \in \Phi$. Отсюда мы легко выводим, что $k \geqslant 0$, как только $(h_0, h_1, \ldots, h_n, k) \in \mathrm{Cl}(\Phi, (v, f(x_n)))$, следовательно,

$$(0, \ldots, 0, I_E) \in \mathrm{N}_E(\Phi, (v,\, f(x_n))).$$

В силу 7.6.9 (1) существуют операторы $\mathscr{A}_i \in \mathrm{N}_E(\Phi_i, (v,\, f(x_n)))$ $(i := 0, 1, \ldots, n+2)$ такие, что $\mathscr{A}_0 + \ldots + \mathscr{A}_{n+2} = (0, \ldots, 0, I_E)$. Это равенство влечет $\mathscr{A}_0 = 0$, $\mathscr{A}_1 = (\alpha_0, \alpha_1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathscr{A}_n = (0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, 0)$, $\mathscr{A}_{n+1} = (0, \ldots, 0, \alpha_n, \beta)$, $\mathscr{A}_{n+2} = (\alpha_0, 0, \ldots, 0)$ для некоторых $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta$, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha_0 \in \mathrm{N}_E(G_0; x_n),\ \beta = I_E,\ (\alpha, \beta) \in \mathrm{N}_E(f, x_n),$$
$$(\alpha_{j-1}, \alpha_j) \in \mathrm{N}_E(G_j, (x_{j-1}, x_j)) \quad (j := 1, \ldots, n).$$

Отсюда вытекает требуемое включение. ▷

7.7. Комментарии

Литература по негладкому анализу слишком обширна, чтобы сколько-нибудь полно и подробно ее осветить. Дадим лишь несколько стандартных ссылок. Имеется несколько превосходных монографий, в которых отражены основные направления исследования и состояние предмета: [64, 202, 268, 315, 448, 521, 526].

В данной главе рассмотрены в основном вопросы классификации и исчисления локальных выпуклых аппроксимаций. Изложение базируется на комбинации трех основных идей. Это метод субдифференцирования, построенный А. Г. Кусраевым на основе концепции общего положения, унификация определения касательных за счет рассмотрения пространства с двумя топологиями и пределов Куратовского, предложенная Ш. Долецким, и анализ касательных с помощью средств инфинитезимального анализа, развитый С. С. Кутателадзе.

7.7.1. (1) Универсальный подход к изучению таких важных понятий, как близость, аппроксимация, непрерывность и т. п., был выработан в общей топологии, оформившейся в рамках теоретико-множественной установки математики в начале XX века. Начиная с 1960-х годов, стали интенсивно развиваться инфинитезимальные методы, вновь легитимизированные нестандартным анализом А. Робинсона, см. [47, 401]. В рамках новой теории получила обоснование логическая мечта Г. В. Лейбница и возникла перспектива развития общей монадологии. Понятие монады фильтра осуществляет определенный синтез общетопологических и инфинитезимальных идей.

(2) Простейшим примером фильтра служит, как известно, совокупность всех надмножеств некоторого непустого множества. Инфинитезимальный анализ позволяет подобным же образом изучать произвольный стандартный фильтр как стандартизацию фильтра внешних надмножеств, подходящим образом задаваемого внешнего множества — монады этого фильтра. Данное обстоятельство дает возможность изучения общетопологических понятий и конструкций с помощью идеализации, допустимой в нестандартной теории множеств.

(3) Удобное обоснование инфинитезимальных методов дают теории внутренних и внешних множество. Минимальный объем сведений об указанных формализмах, необходимый для понимания материала этой главы, приведен в Приложении 5. Более подробно об этом можно прочитать в книгах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [139], Р. Лутца и М. Гуза [454], К. Д. Стройана и В. Люксембурга [546].

(4) В текущей главе представлены необходимые сведения как по адаптации, так и по применению аппарата инфинитезимального анализа для изучения локальных выпуклых аппроксимаций множеств и функций. Широкий спектр других приложений инфинитезимальных методов можно найти в монографиях С. Альбеверио, Й. Фенстада, Р. Хёэг-Крона, Т. Линдстрёма [4], Е. И. Гордона, А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [47], а также в указанной в них литературе.

7.7.2. (1) Ренессанс теории локальных приближений связан с открытием Ф. Кларком выпуклого касательного конуса, носящего теперь его имя (см. [312, 315]). Конус Кларка порождает соответствующее понятие нормального конуса и субдифференциала (об этом подробнее сказано в 7.6). Радикальные изменения в негладком анализе, вызванные появлением конуса Кларка, отражены в десятках обзоров и монографий. Отметим часть из них: [60, 64, 202, 315, 448]. Изобретение общего определения кларковского касательного конуса в произвольном топологическом векторном пространстве оказалось нетривиальным и осуществлено Р. Т. Рокафелларом [519, 521].

(2) Разнообразие используемых в негладком анализе касательных конусов сделало насущной задачу их классификации. Из пионерских исследований в этом направлении следует выделить статьи Ш. Долецкого [340, 342] и Д. Уарда [568–570]. Классификация касательных конусов с помощью инфинитезималей, изложенная в текущей главе, принадлежит С. С. Кутателадзе [160].

(3) Трудно сказать, кто первый применил идею регуляризации с помощью выпуклого касательного конуса. Регуляризирующие конусы типа R^1 и Q^1 были введены соответственно А. Г. Кусраевым [107, 109, 113] и Л. Тибо [554, 555]. Другой подход к регуляризации см. в [60, 64].

(4) Из доказательства 7.2.19 видно, что можно рассматривать выпуклые расширения конусов P^j и S^j — конусы P^{+j} и S^{+j}, получающиеся «переносом квантора $\forall\,\alpha$». Например, определяют конус $\mathrm{P}^{+2}(F, a')$ соотношением

$$
\begin{gathered}
(s', t') \in \mathrm{P}^{+2}(F, a') \leftrightarrow (\forall\,\alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx_{\tau_Y} t') \\
(\forall\, a \approx_{\sigma} a', a \in F)(a + \alpha(s, t) \in F).
\end{gathered}
$$

В связи с 7.2.16 ясно, что имеет смысл использовать и регуляризации, получающиеся специализацией конуса Ha^+ при подборе дискретных топологий. Соответствующие явные формулы опускаются. Значение регуляризирующих конусов связано с их ролью при субдифференцировании сложных отображений, которым посвящен параграф 7.6.

(5) Для сравнения предъявим стандартное доказательство предложения 7.3.20.

Множества $\mathrm{R}^j(C, z)$ *и* $\mathrm{Q}^j(C, z)$ $(j := 1, 2)$ *являются выпуклыми конусами для любого множества* $C \subset X \times Y$ *и произвольной точки* $z \in X \times Y$.

$\lhd$ Достаточно будет установить данное предложение для какого-нибудь j, например, для $j = 1$. Рассмотрим две пары (h_1, k_1) и (h_2, k_2) из $\mathrm{R}^1(C, z)$ и положим $(h, k) := (h_1 + h_2, k_1 + k_2)$. Для произвольной окрестности $V \in \tau(k)$ выберем окрестность $V_i \in \tau(k_j)$ со свойством $V_1 + V_2 \subset V$. В силу включения $(h_2, k_2) \in \mathrm{R}^1(C, z)$ существуют $\varepsilon_2 > 0$ и $U_2 \in \tau(z)$ такие, что

$$(z' + t \cdot \{h_2\} \times V_2) \cap C \neq \varnothing$$

для всех $z' \in U \cap C$ и $t \in (0, \varepsilon)$. Пусть число $\varepsilon' > 0$, множества $U' \in \tau(z)$ и $V' \in \tau(k_1)$ удовлетворяют условиям

$$V' \subset V, \quad U' + (0, \varepsilon') \cdot \{h_1\} \times V' \subset U_2.$$

Наконец, используя включение $(h_1, k_2) \in \mathrm{R}^1(C, z)$, выберем $U_1 \in \tau(z)$ и $0 < \varepsilon_1$ так, чтобы

$$(z' + t \cdot \{h_1\} \times V') \cap C \neq \varnothing$$

для всех $z' \in U_1 \cap C$ и $t \in (0, \varepsilon_1)$. Положим $U := U_1 \cap U_2 \cap U'$ и $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'\}$. Если $z' \in U \cap C$ и $t \in (0, \varepsilon)$, то $z' + t(h_1, v_1) \in C$ для некоторого $v_1 \in V'$. Так как $z' + t(h_1, v_1) \in U_2$, то при подходящем выборе $v_2 \in V_2$ справедливо также и включение

$$z' + t(h_1, v_1) + t(h_2, v_2) \in C.$$

Учитывая включение $z' + t(h_1, v_1) + t(h_2, v_2) \in z' + t \cdot \{h\} \times V$, приходим к соотношению

$$(z' + t\{h\} \times V) \cap C \neq \varnothing.$$

Но поскольку окрестность $V \in \tau(k)$ была выбрана произвольным образом, то получаем $(h, k) \in \mathrm{R}^1(C, z)$.

Предположим теперь, что $(h_i, k_i) \in \mathrm{Q}^1(C, z)$, $i := 1, 2$, где (h, k), V, V_1 и V_2 те же, что и выше. По определению $\mathrm{Q}^1(C, z)$ существуют $\varepsilon_2 > 0$, $U_2 \in \tau(z)$ и $W_2 \in \tau(h_2)$ такие, что

$$(z' + t\{w_2\} \times V_2) \cap C \neq \varnothing$$

для всех $z' \in U_2 \cap C$, $t \in (0, \varepsilon_2)$ и $w_2 \in W_2$. Рассмотрим число $\varepsilon' > 0$ и множества $U' \in \tau(z)$, $W' \in \tau(h_1)$ и $V' \in \tau(k_1)$, удовлетворяющие условиям

$$V' \subset V, \ U' + (0, \varepsilon') \cdot W' \times V' \subset U_2.$$

Вновь используя определение $\mathrm{Q}^1(C, z)$, мы можем выбрать $\varepsilon_1 > 0$, $U_1 \in \tau(z)$ и $W_1 \in \tau(h_1)$ так, что

$$(z' + t \cdot \{w_1\} \times V') \cap C \neq \varnothing$$

для всех $z' \in U_1 \cap C$, $t \in (0, \varepsilon)$ и $w_1 \in W_1$. Положим $U := U_1 \cap U_2 \cap U'$, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'\}$ и $W := W_1 \cap W'$. Предположим, что $z' \in U \cap C$, $t \in (0, \varepsilon)$, $w_1 \in W_1 \cap W'$, $w_1 \in W_2$ и $w := w_1 + w_2$. Тогда в силу сказанного выше $u = z' + t(w_1, v_1) \in C$ для некоторого $v_1 \in V'$, и поскольку $u \in U_2$, существует такой $v_2 \in V_2$, что $u + t(w_2, v_2) \in C$. Так как $u + t(w_2, v_2) \in z' + t \cdot \{w\} \times V$, то из сказанного выводим

$$(z' + t\{w\} \times V) \cap C \neq \varnothing.$$

Следовательно, $(h, k) \in \mathrm{Q}^1(C, z)$. Кроме установленного очевидны включения

$$\lambda \mathrm{R}^1(C, x) \subset \mathrm{R}^1(C, x),$$
$$\lambda \mathrm{Q}^1(C, x) \subset \mathrm{Q}^1(C, x),$$

завершающие доказательство. $\rhd$

7.7.3. (1) Вопросу сходимости дифференциальных характеристик (субдифференциалов, преобразований Юнга — Фенхеля и т. п.) при различных типах сходимости функций уделяется большое внимание в выпуклом и негладком анализе, поскольку он оказывается весьма существенным при изучении оптимизационных задач. Исследования в этом направлении выросли в теорию сходимости соответствий, основанную на изучении поведения надграфиков. Важную роль в теории эписходимости сыграла книга Х. Этуша [261]. Подчеркнем также вклад Ш. Долецкого [341], изучившего, в частности, взаимосвязи с теорией пространств со сходимостью.

(2) Наше изложение в 7.3 следует статье С. С. Кутателадзе [164]. Вопросам сходимости в классе абстрактных выпуклых функций посвящена статья А. Д. Иоффе и А. М. Рубинова [396]. Отметим также работу Х. Этуша и Г. Бира [262] о сходимости субдифференциалов. Аналогичные результаты для выпуклых операторов отсутствуют.

7.7.4. (1) Аппроксимирующие конусы для надграфиков служат, в свою очередь, надграфиками некоторых функций. Последние принято называть эпипроизводными. К ним, наряду с классическими дифференциалами, относятся контингентная производная, производные Кларка и Рокафеллара, а также их модификации. Использование фиксированных наборов инфинитезималей дает принципиально новые возможности построения аппроксимирующих отображений и позволяет усовершенствовать способ построения эпипроизводных и вывода правил оценивания производной суммы.

(2) Идея выделения конкретных наборов инфинитезималей для построения локальных аппроксимаций была предложена в работе С. С. Кутателадзе [165], откуда и взяты основные результаты параграфа 7.4 об эпипроизводных (см. также [164]). Для производной Кларка оценку производной суммы получили Р. Т. Рокафеллар [518], А. Г. Кусраев [121]. В изложении вопросов, связанных с теоремой Корне, мы следуем работе Ж.-Б. Ириар-Уррути [376].

7.7.5. В этом параграфе дается нестандартный вариант общего метода субдифференцирования композиции и суммы, развитого А. Г. Кусраевым в [113, 121]. В изложении данного материала следуем работе С. С. Кутателадзе [164], в которой благодаря использованию техники монад достигнут ряд усовершенствований и уточнений, связанных как с использованием пар топологий, так и с формулировкой необходимых и достаточных условий почти открытости.

7.7.6. (1) Первоначально определение кларковского субдифференциала было основано на идее предельного нормального конуса, т. е. конус был определен как замкнутая выпуклая оболочка пределов дифференциалов функции в гладких точках, стремящихся к заданной точке [312]. Позже Ф. Кларк [313] распространил введенный им субдифференциал на произвольные банаховы пространства, следуя другой схеме с использованием функции расстояния, см. также [315]. Оба подхода дают один и тот же результат в конечномерном случае, в связи с чем возникла проблема: найти бесконечномерные банаховы пространства, которые обладают тем же самым свойством. В этом направлении важные результаты получили Дж. Борвейн и М. Стройвоз, см. [297, 298]. Предельные субдифференциалы без перехода к выпуклой оболочке использовали также Б. Ш. Мордухович [196–198] и А. Я. Кругер [102, 103]. В некоторых случаях такой субдифференциал лучше, чем кларковский субдифференциал [469].

(2) Субдифференциал кларковского типа для общих вектор-функций со значениями в упорядоченном векторном пространстве впервые ввели в рассмотрение А. Г. Кусраев [105] и Л. Тибо [552, 553], затем Н. С. Папагеоргиу [493], Ж.-П. Пено [497] и Т. В. Рейланд [509, 510]. В этих работах были введены различные понятия локальной липшицевости и субдифференциала для отображений и получены необходимые условия экстремума первого порядка для негладких векторных программ, см. также [107, 109, 192, 461]. В [510] можно также найти обсуждение и сравнение различных понятий, предложенных в этих работах.

(3) Метод субдифференцирования, изложенный в 7.6.3–7.6.7, предложен А. Г. Кусраевым [109, 113, 121] (см. также [123, 134]). Основу метода составляют понятия общего положения и регуляризирующего конуса.

(4) Фундаментальный вклад в теорию локальных аппроксимаций внес А. Д. Иоффе. В [385, 389, 391, 392] он развил общую теорию аппроксимативных субдифференциалов. В другом цикле статей [384, 386, 388] им разработан иной подход к субдифференцированию вектор-функций в банаховом пространстве; о других важных результатах в области негладкого анализа см. также 1.6.6 и [385, 389, 391, 392, 394].

(5) Как уже отмечалось в начале главы 7, при изучении разных классов задач могут оказаться удобными разные типы локальных выпуклых аппроксимаций. Кларковский касательный конус не является исключением: легко привести примеры, в которых строение функции или множества вблизи некоторой точки лучше отражается другим типом аппроксимации. Иногда предпочтительнее использовать производные по направлениям функции. В книгах А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [78], Б. Н. Пшеничного [211] рассматривались локальные выпуклые и квазидифференцируемые функции, т. е. функции, у которых производная по направлениям существует и является выпуклой. Дальнейшее развитие этой идеи ведет к квазидифференциальному исчислению в смысле главы 6.

Отметим еще несколько локальных выпуклых аппроксимаций.

(6) Выпуклые аппроксимации первого порядка. Рассмотрим множество Ω в топологическом векторном пространстве X. Выпуклое множество $F \subset X$ называют *выпуклой аппроксимацией пер-*

вого порядка к Ω, если выполнены следующие условия:

(a) $0 \in F$ и $F \neq \{0\}$,

(b) если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное конечное подмножество F и U — произвольная окрестность нуля в X, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ можно подобрать непрерывное отображение $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to X$, удовлетворяющее соотношению

$$\varphi_\varepsilon(a) = \varphi_\varepsilon(a_1, \ldots, a_n) \in \left[\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + U\right)\right] \cap \Omega$$

для всех $a \in \mathbb{R}^n$.

На основе понятия выпуклой аппроксимации первого порядка Л. Нойштадт в [478] развил абстрактную вариационную теорию.

(7) Шатры. Пусть Ω — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^n$ называют *шатром* множества Ω в точке x_0, если существует гладкое отображение φ, определенное в окрестности точки x_0 из $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $\varphi(x) = x + r(x)$ и $\lim_{x \to x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0$;

(b) $f(x) \in \Omega$ для $x \in U \cap (x_0 + K)$, где U — шар с центром в x_0.

Конус K называют *локальным шатром* множества Ω в точке x_0, если для каждой точки $x' \in \operatorname{ri} K$ существует конус $L \subset K$ такой, что L — шатер множества Ω в точке x', $x' \in \operatorname{ri} L$, и $L - L = K - K$. Относительно применения шатров к экстремальным задачам см. [18].

(8) ЛМО-аппроксимации. Так называют некоторую модификацию понятия тонкой выпуклой аппроксимации, введенной первоначально Е. С. Левитиным, А. А. Милютиным и Н. П. Осмоловским [180], см. также [385].

Пусть f — вещественная функция, заданная в некоторой окрестности U точки x_0 нормированного пространства X. Функцию $\varphi : U \times X \to \mathbb{R}$ называют ЛМО-*аппроксимацией* f в точке x_0, если выполнены следующие условия:

(a) $\varphi(x, 0) = f(x)$, $x \in U$;

(b) функция $h \mapsto \varphi(x, h)$ выпукла и непрерывна для всех $x \in U$;

(c) $\lim_{x \to x_0} \inf_{h \to 0} \|h\|^{-1}[\varphi(x, h) - f(x + h)] \geqslant 0$.

ЛМО-аппроксимация (как метод выбора ЛМО-аппроксимаций) является одним из наиболее мощных и элегантных средств анализа экстремальных задач. ЛМО-аппроксимация доставляет необходимые и достаточные условия экстремума высших порядков, см. [180, 181].

(9) Отметим некоторые другие типы локальных аппроксимаций недифференцируемых функций. Н. З. Шор в [244] ввел понятие почти-градиента для класса почти дифференцируемых функций. Множество всех почти-градиентов такой функции в некоторой точке представляет собой замкнутое множество, выпуклая оболочка которого совпадает с субдифференциалом Кларка. Понятие, несколько более общее, чем субдифференциал Кларка, изучал Дж. Варга [26]. Близкие понятия субградиента были введены в работах А. Я. Кругера [103]; М. Базара и Дж. Гуда [275]; М. Базара, Дж. Гуда и М. Нэшда [276]. В этом же круге идей лежат понятия слабо выпуклой функции и ее квазиградиента, введенные А. Я. Кругером [102, 103].

Приложение 1. Векторные решетки

Здесь эскизно представлены основные понятия теории векторных решеток. Более детализированное изложение можно найти в [1, 29, 87, 88, 255, 271, 406, 433, 457, 534, 582].

П1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченным векторным пространством над полем* $\mathbb{F}$ называют пару $(E, \leqslant)$, где E — векторное пространство над $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — порядок в E, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) если $x \leqslant y$ и $u \leqslant v$, то $x + u \leqslant y + v$ для любых $x, y, u, v \in E$;

(2) если $x \leqslant y$, то $\lambda x \leqslant \lambda y$ для всех $x, y \in E$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F}$.

Наделение векторного пространства E над $\mathbb{F}$ векторным порядком эквивалентно указанию множества $E^+ \subset E$, называемого *положительным конусом* в E и обладающего свойствами:

$$E^+ + E^+ \subset E^+, \quad \lambda E^+ \subset E^+ \ (0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F}), \quad E^+ \cap -E^+ = \{0\}.$$

При этом порядок $\leqslant$ и положительный конус E^+ связаны соотношением $x \leqslant y \ \leftrightarrow \ y - x \in E^+$ $(x, y \in E)$. Элементы E^+ именуют *положительными*. Если положительный конус E^+ не является *острым*, т. е. не выполнено условие $E^+ \cap -E^+ = \{0\}$, то E называют *предупорядоченным векторным пространством.*

Упорядоченное векторное пространство E называют *архимедовым*, если для любой пары элементов $x, y \in E$ из отношения $(\forall n \in \mathbb{N})$ $nx \leqslant y$ следует $x \leqslant 0$.

П1.2. *Векторная решетка* — это по определению упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, если рассматривать это пространство только как упорядоченное множество. Таким образом, в каждой векторной решетке существуют точная верхняя граница $\sup\{x_1, \ldots, x_n\} := x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и точная нижняя граница $\inf\{x_1, \ldots, x_n\} := x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ для каждого конечного множества $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$. В частности, каждый элемент x векторной решетки имеет *положительную часть* $x^+ := x \vee 0$, *отрицательную часть* $x^- := (-x)^+ := -x \wedge 0$ и *модуль* $|x| := x \vee (-x)$.

Пусть E — векторная решетка. Для произвольных $x, y, z \in E$ верны следующие соотношения:

(1) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^-$;

(2) $x \leqslant y \leftrightarrow x^+ \leqslant y^+ \,\&\, y^- \leqslant x^-$;

(3) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;

(4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$, $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$;

(5) $x + y = x \vee y + x \wedge y$, $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

Предположим, что (x_α) и (y_α) — семейства в E, для которых $\sup(x_\alpha)$ и $\inf(y_\alpha)$ существуют. Тогда для любого $z \in E$ выполнены *бесконечные дистрибутивные законы*:

(6) $z \wedge \sup_\alpha(x_\alpha) = \sup_\alpha(z \wedge x_\alpha)$;

(7) $z \vee \inf_\alpha(y_\alpha) = \inf_\alpha(z \vee y_\alpha)$.

Для тех же (x_α), (y_α) и z имеют место следующие полезные равенства:

(8) $z + \sup_\alpha(x_\alpha) = \sup_\alpha(z + x_\alpha)$;

(9) $z + \inf_\alpha(y_\alpha) = \inf_\alpha(z + y_\alpha)$;

(10) $\sup_\alpha(x_\alpha) = -\inf_\alpha(-x_\alpha)$.

П1.3. *Порядковым интервалом* в E называют множество вида $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$, где $a, b \in E$. Рассмотрим два часто используемых свойства векторной решетки.

(1) В любой векторной решетке выполнено *декомпозиционное свойство Рисса*:

$$[0, x + y] = [0, x] + [0, y] \quad (x, y \in E^+).$$

(2) В любой векторной решетке выполнено *интерполяционное свойство Рисса*, т. е. для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$, удовлетворяющих неравенствам $x_k \leqslant y_l$ $(k, l := 1, 2)$, существует $z \in E$ такой, что $x_k \leqslant z \leqslant y_l$ $(k, l := 1, 2)$.

Можно показать, что в произвольном упорядоченном векторном пространстве декомпозиционное свойство Рисса равносильно интерполяционному свойству Рисса. Приведем несколько полезных следствий из (1). Следующее утверждение часто называют *леммой о двойном разбиении.*

(3) Пусть $x, y, z \in E^+$ и $x = y + z$. Если $x = x_1 + \ldots + x_n$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in E^+$, то существуют такие $y_k, z_k \in E^+$ $(k := 1, \ldots, n)$, что

$$x_k = y_k + z_k \quad (k := 1, \ldots, n),$$
$$y = y_1 + \ldots + y_n, \quad z = z_1 + \ldots + z_n.$$

Следующие два факта вытекают из леммы о двойном разбиении.

(4) Если $x_1, \ldots, x_n, y \in E^+$, то $(x_1 + \ldots + x_n) \wedge y \leqslant x_1 \wedge y + \ldots + x_n \wedge y$.

(5) Пусть $x_{k,l} \in E^+$ при $k := 1, \ldots, n$ и $l := 1, \ldots, m$. Тогда

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} x_{k,l} \leqslant \sum_{j \in J} x_{1,j(1)} \wedge \ldots \wedge x_{n,j(n)},$$

где J — множество всех функций $j : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$.

П1.4. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$.

Следующие свойства отношения дизъюнктности легко следуют из П1.2:

(1) $x \perp y \leftrightarrow |x + y| = |x - y| \leftrightarrow |x| \vee |y| = |x| + |y|$;
(2) $x^+ \perp x^-$; $(x - x \wedge y) \perp (y - x \wedge y)$;
(3) $x \perp y \to |x + y| = |x| + |y|$, $(x + y)^+ = x^+ + y^+$, $(x + y)^- = x^- + y^-$.

Для непустого $M \subset E$ множество

$$M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M)\, x \perp y\}$$

именуют *дизъюнктным дополнением* M. Отметим некоторые простые свойства дизъюнктного дополнения:

(4) $M \subset N \to N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(5) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(6) $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$;

(7) $(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha})^{\perp} = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}^{\perp}$.

П1.5. Важнейшие структурные свойства каждой векторной решетки связаны с ее *базой* — полной булевой алгеброй *полос* или *компонент*. Непустое множество $K \subset E$, удовлетворяющее равенству $K = K^{\perp\perp}$, называют *полосой* или *компонентой* векторной решетки E. Полосу, имеющую вид $\{x\}^{\perp\perp}$, для некоторого $x \in E$ называют *главной*.

(1) *Упорядоченное по включению множество всех полос векторной решетки E (обозначаемое символом $\mathfrak{B}(E)$) представляет собой полную булеву алгебру. Булевы операции в $\mathfrak{B}(E)$ имеют вид:*

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^{\perp} \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$ именуют *базой* E. Пусть K — полоса векторной решетки E. Если существует элемент $\sup\{u \in K : 0 \leqslant u \leqslant x\}$ в E, то его называют *проекцией* элемента x на полосу K и обозначают символом $[K]x$ (или $\pi_K x$). Для произвольного $x \in E$ положим $[K]x := [K]x^+ - [K]x^-$. Проекция элемента $x \in E$ на полосу K существует тогда и только тогда, когда x представим как $x = y + z$, где $y \in K$, а $z \in K^{\perp}$. Более того, в этом случае будет $y = [K]x$ и $z = [K^{\perp}]x$. Предположим, что у каждого элемента $x \in E$ имеется проекция на полосу K. Тогда оператор $x \mapsto [K]x$ $(x \in E)$ линеен, идемпотентен и $0 \leqslant [K]x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$. Этот оператор называют *проектором на полосу* или *порядковым проектором*. Проектор на главную полосу называют *главным*.

(2) *Множество $\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов, упорядоченное правилом $\pi \leqslant \rho \leftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$, является булевой алгеброй. Булевы операции в $\mathfrak{P}(E)$ имеют вид*

$$\pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

(3) *Главный проектор $\pi_u := [u] := [u^{\perp\perp}]$, где $0 \leqslant u \in E$, можно вычислить по следующему правилу:*

$$\pi_u x = \sup\{x \wedge (nu) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Векторную решетку E называют *решеткой с проекциями* (*решеткой с главными проекциями*), если каждая полоса (каждая главная полоса) в $\mathfrak{B}(E)$ допускает порядковый проектор. Каждое K-пространство является решеткой с проекциями, а каждое K_σ-пространство — решеткой с главными проекциями (см. определения в П1.9).

Пусть $u \in E^+$ и $e \wedge (u - e) = 0$ для некоторого $0 \leqslant e \in E$. Тогда e называют *осколком* или *фрагментом* элемента u. Говорят также, что e — *единичный элемент относительно* u.

(4) *Множество $\mathfrak{E}(u)$ всех осколков элемента u с порядком, индуцированным из E, является булевой алгеброй. Решеточные операции в $\mathfrak{E}(u)$ индуцированы из E, а булево дополнение имеет вид $e^* := u - e$ $(e \in \mathfrak{E}(u))$.*

П1.6. (1) Линейное подпространство J векторной решетки E называют *порядковым идеалом* или *o-идеалом* (или, наконец, просто *идеалом*, когда понятно из контекста, о чем идет речь), если для произвольных $x \in E$ и $y \in J$ из неравенства $|x| \leqslant |y|$ следует $x \in J$.

Каждый порядковый идеал векторной решетки сам является векторной решеткой. Если идеал J удовлетворяет условию $J^{\perp\perp} = E$ (или, что то же самое, $J^\perp = \{0\}$), то J именуют *порядково плотным идеалом* или *фундаментом* E.

Идеал $J \subset E$ называют *максимальным*, если в E не существует идеала, отличного от E и содержащего J. Пересечение непустого множества порядковых идеалов будет порядковым идеалом. Поэтому существует наименьший порядковый идеал $I(M)$, содержащий непустое множество $M \subset E$, которое называют *порядковым идеалом, порожденным* M.

(2) *Векторной подрешеткой* (или просто *подрешеткой*, если ясно из контекста, о чем идет речь) именуют векторное подпространство $E_0 \subset E$ такое, что $x \wedge y, x \vee y \in E_0$ для любых $x, y \in E_0$. Скажем, что подрешетка E_0 является *минорирующей*, если для каждого $0 \neq x \in E^+$ существует элемент $x_0 \in E_0$, удовлетворяющий неравенствам $0 < x_0 \leqslant x$. Назовем E_0 *мажорирующей* или *массивной* подрешеткой, если для каждого $x \in E$ существует $x_0 \in E_0$ такой, что $x \leqslant x_0$. Таким образом, E_0 — минорирующая или мажорирующая подрешетка в том и только в том случае, когда соответственно $E^+ \setminus \{0\} = E^+ + E_0^+ \setminus \{0\}$ или $E = E^+ + E_0$.

(3) Множество в векторной решетке называют (*порядково*) *ограниченным* (или *о-ограниченным*), если оно содержится в некотором порядковом интервале. Порядковый идеал, порожденный элементом $0 \leqslant u \in E$, обозначают символом $E(u)$, т. е. $E(u) := I(\{u\})$. Ясно, что $E(u) := \bigcup_{n=1}^{\infty}[-nu, nu]$. Если $E(u) = E$, то элемент u называют *сильной единицей* или *сильной порядковой единицей*, а E — *векторной решеткой ограниченных элементов.*

(4) Элемент $x \geqslant 0$ векторной решетки называют *дискретным*, если $[0, x] = [0, 1]x$, т. е. если из $0 \leqslant y \leqslant x$ следует, что $y = \lambda x$ для некоторого скаляра $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Векторную решетку E именуют *дискретной* или *атомической*, если для каждого $0 \neq y \in E^+$ существует дискретный элемент $x \in E$ такой, что $0 < x \leqslant y$. В случае, когда в E нет ненулевых дискретных элементов, векторную решетку E именуют *непрерывной* или *диффузной.*

П1.7. Отношение порядка в векторной решетке порождает разные виды сходимости сетей и последовательностей. Пусть $(\mathrm{A}, \leqslant)$ — направленное множество. Сеть $(x_\alpha) := (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в E называют *возрастающей* (*убывающей*), если $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (соответственно $x_\beta \leqslant x_\alpha$) при $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$. Будем говорить, что сеть (x_α) в векторной решетке E *порядково сходится* или *о-сходится* к $x \in E$, если существует убывающая сеть $(e_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ в E такая, что $\inf\{e_\beta : \beta \in \mathrm{B}\} = 0$ и для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ существует индекс $\alpha(\beta) \in \mathrm{A}$, для которого $|x_\alpha - x| \leqslant e_\beta$ при всех $\alpha(\beta) \leqslant \alpha \in \mathrm{A}$. В этом случае элемент x называют *порядковым пределом* или *о-пределом* сети (x_α) и пишут $x = o\text{-}\lim x_\alpha$ или $x_\alpha \overset{(o)}{\to} x$.

Если в этом определении сеть (e_β) заменить последовательностью $(\lambda_n e)_{n\in\mathbb{N}}$, где $0 \leqslant e \in E^+$, а $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — числовая последовательность с пределом $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, то говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *сходится с регулятором*, или, более точно, *сходится с регулятором e* к $x \in E$. Элементы e и x называют соответственно *регулятором сходимости* и *r-пределом* сети (x_α). При этом используют обозначения $x = r\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha$ и $x_\alpha \overset{(r)}{\to} x$.

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называют r-фундаментальной, если $(x_n - x_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ — это r-сходящаяся к нулю последовательность.

Векторную решетку называют *полной* относительно сходимости с регулятором или *r-полной*, если каждая r-фундаментальная последовательность в ней r-сходится.

Наличие порядковой сходимости в векторной решетке позволяет определить также сумму бесконечного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, для данных $\theta := \{\xi_1,\dots,\xi_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ положим $y_\theta := x_{\xi_1}+\ldots+x_{\xi_n}$. Тем самым получаем сеть $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$, где множество конечных подмножеств $\Theta := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ упорядочено по включению. Если существует o-предел $x := o\text{-}\lim_{\theta\in\Theta} y_\theta$, то семейство (x_ξ) называют *порядково суммируемым* или *о-суммируемым*. Элемент x называют при этом *о-суммой* семейства (x_ξ) и пишут $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Очевидно, если $x_\xi \geqslant 0$ $(\xi\in\Xi)$, то для существования o-суммы семейства (x_ξ) необходимо и достаточно наличие точной верхней границы сети $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$. В этом случае $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\theta\in\Theta} y_\theta$.

П1.8. Векторные решетки называют *изоморфными*, если между ними существует взаимнооднозначное отображение, сохраняющее алгебраические операции и отношение порядка.

Теорема Крейнов — Какутани. *Векторная решетка ограниченных элементов, полная относительно сходимости с регулятором, порядково изоморфна решетке непрерывных функций $C(Q)$ на некотором компакте Q.*

П1.9. Векторную решетку называют (*условно*) *порядково полной*, если каждое непустое порядково ограниченное множество в нем имеет точные границы. Порядково полную векторную решетку принято называть *пространством Канторовича* или, короче, *K-пространством*. Если в векторной решетке точные границы существуют у произвольных счетных порядково ограниченных множеств, то ее называют *σ-полной* векторной решеткой или чаще *K_σ-пространством.*

(1) ***Теорема.*** *Пусть E — произвольное K-пространство. Тогда E — решетка с проекциями и отображение $K \mapsto [K]$ $(K \in \mathfrak{B}(E))$ определяет изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если существует порядковая единица $\mathbb{1}$ в E, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

Приведем полезные признаки порядковой сходимости в K-пространстве. Рассмотрим порядково ограниченную сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в K-пространстве E, и пусть $e \in E$.

(2) *Порядково ограниченная сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ o-сходится к e в том и только в том случае, когда в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$ выполнено соотношение $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}[d][(|e_\alpha - e| - d)^+] = 0$ для любого положительного $d \in E$.*

(3) *Предположим, что E — это K-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Если $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — ограниченная сеть в E и $e \in E$, то $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ в том и только в том случае, когда в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$ выполнено соотношение $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}\left[(|e_\alpha - e| - \mathbb{1}/n)^+\right] = 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

П1.10. К архимедовой векторной решетке можно применить процедуру пополнения по Дедекинду.

(1) ***Теорема.*** *Для любой архимедовой векторной решетки E существуют единственное с точностью до порядкового изоморфизма K-пространство $\widehat{E}$ и порядковый изоморфизм $\iota : E \to \widehat{E}$, сохраняющий точные границы любых непустых множеств, такие, что любой элемент $\hat{x} \in \widehat{E}$ допускает представление $x = \sup_\alpha \iota(u_\alpha)$ и $x = \inf_\beta \iota(v_\beta)$ для подходящих семейств $(u_\alpha) \subset E$ и $(v_\beta) \subset E$.*

Пространство $\widehat{E}$ называют *порядковым пополнением* E. Приняты также названия *дедекиндово пополнение* и *K-пополнение*.

(2) *Порядковое пополнение E допускает представление $\widehat{E} = rd(E)$, где*

$$
\begin{aligned}
r(U) &:= \Big\{ y = br\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n : \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset U \Big\},\\
d(U) &:= \Big\{ y = bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y_\xi : \ (y_\xi)_{\xi\in\Xi} \ \subset U \Big\}.
\end{aligned}
$$

(В последней формуле (π_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\widehat{E})$).

П1.11. Пусть E — произвольное K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Проекцию порядковой единицы на полосу $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* x и обозначают символом e_x. Из П1.5 (3) видно, что $e_x := \sup\{\mathbb{1} \wedge (n|x|) : n \in \mathbb{N}\}$. След e_x является порядковой единицей в полосе $\{x\}^{\perp\perp}$, а также единичным элементом в E. Для данного вещественного числа λ символом e_λ^x обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbb{1} - x$, т. е. полагают $e^x_\lambda := e_{(\lambda\mathbb{1}-x)^+}$. Так возникающую функцию $\lambda \mapsto e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой* элемента x.

Сформулируем один из наиболее фундаментальных фактов теории векторных решеток — теорему о разложении любого элемента K_σ-пространства в интеграл типа Стилтьеса по булевозначной мере.

Спектральная теорема Фрейденталя. *Пусть E — произвольное K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Каждый элемент $x \in E$ допускает интегральное представление*

$$x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de^x_\lambda,$$

где интеграл понимают как предел с регулятором $\mathbb{1}$ интегральных сумм

$$x(\beta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n(e^x_{t_{n+1}} - e^x_{t_n}), \quad t_n \leqslant \tau_n \leqslant t_{n+1},$$

соответствующих разбиениям действительной прямой

$$\beta := (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \ \ t_n < t_{n+1}, \ \ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \ \ \lim_{n\to-\infty} t_n = -\infty,$$

при $\delta(\beta) := \sup_{n\in\mathbb{Z}}(t_{n+1} - t_n) \to 0$.

В частности, спектральная теорема Фрейденталя утверждает, что если E — это K_σ-пространство и $e \in E^+$, то каждый элемент $x \in E(e)$ может быть аппроксимирован с регулятором e (т. е. e-равномерно) линейными комбинациями осколков e, т. е. элементами вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{E}(e)$.

П1.12. *Упорядоченной алгеброй* над полем $\mathbb{F}$ называют упорядоченное векторное пространство E над $\mathbb{F}$, которое одновременно является алгеброй над этим полем и удовлетворяет следующему условию: если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $xy \geqslant 0$ для всех $x, y \in E$. Положительный конус E^+ упорядоченной алгебры E обладает свойствами, указанными в П1.1, но сверх того выполнено $E^+ \dots E^+ \subset E^+$. Будем говорить, что E — *решеточно упорядоченная алгебра*, если E — векторная решетка и упорядоченная алгебра одновременно. Решеточно упорядоченную алгебру именуют *f-алгеброй*, если для любых $a, x, y \in E^+$

из условия $x \perp y$ следует, что $(ax) \perp y$ и $(xa) \perp y$. Если для произвольных элементов $x, y \in E$ равенство $xy = 0$ влечет $x \perp y$, то f-алгебру называют *точной.*

Легко показать, что f-алгебра является точной в том и только в том случае, когда в ней нет ненулевых нильпотентных элементов. Точность f-алгебры эквивалентна также отсутствию строго положительных элементов, являющихся делителями нуля.

П1.13. Пространство Канторовича (K_σ-пространство) называют *расширенным*, если в нем каждое множество (соответственно каждое счетное множество) попарно дизъюнктных элементов ограничено.

(1) Пример расширенного K-пространства представляет пространство $C_\infty(Q)$ всех непрерывных функций $x : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, определенных на экстремально несвязном компакте Q и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на разреженных (= нигде не плотных) множествах. Сложение, умножение и порядок в $C_\infty(Q)$ вводятся поточечно. Поясним, например, способ введения суммы. Возьмем $x, y \in C_\infty(Q)$ и положим $Q_0 := \{|x| < +\infty\} \cap \{|y| < +\infty\}$. По определению, каждое из множеств $\{|x| < +\infty\}$ и $\{|y| < +\infty\}$ открыто и плотно в Q, поэтому Q_0 открыто и плотно в Q. Существует единственная непрерывная функция $z : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $z(t) = x(t) + y(t)$ для $t \in Q_0$. Эту функцию z и принимают за сумму элементов x и y, т. е. $x + y := z$. Аналогично определяют произведение xy.

(2) *Расширенное K-пространство E порядково изоморфно K-пространству $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$.*

(3) *Для любого K-пространства E имеется единственное с точностью до порядкового изоморфизма расширенное K-пространство mE такое, что E изоморфно (линейно и порядково) некоторому фундаменту в mE.*

Приложение 2. Положительные операторы

Здесь представлен круг понятий, систематически используемый в книге. Более развернутые изложения теории положительных операторов см. в [1, 29, 87, 88, 255, 271, 433, 457, 534, 582].

П2.1. Пусть E и F — векторные решетки. Символом $L(E,F)$ мы будем обозначать пространство всех линейных операторов из E в F. Линейный оператор $T : E \to F$ именуют: *положительным*, если $T(E^+) \subset F^+$; *регулярным*, если его можно представить в виде разности двух положительных операторов; *порядково ограниченным* или, короче, *o-ограниченным*, если T отображает каждое порядково ограниченное подмножество E в порядково ограниченное подмножество F. Говорят, что оператор $S \in L(E,F)$ является *мажорантой* оператора $T \in L(E,F)$, если $|Tx| \leqslant S(|x|)$ при всех $x \in E$. Оператор, имеющий положительную мажоранту, называют *мажорируемым* или *доминируемым*.

(1) *Линейный оператор мажорируем в том и только в том случае, когда он регулярен.*

Множество всех регулярных, порядково ограниченных и положительных операторов из E в F обозначают соответственно символами $L^r(E,F)$, $L^\sim(E,F)$ и $L^+(E,F) := L^\sim(E,F)^+$. Классы $L^r(E,F)$ и $L^\sim(E,F)$ являются векторными подпространствами векторного пространства $L(E,F)$ всех линейных операторов из E в F. Отношение порядка в пространствах регулярных и порядково ограниченных операторов вводят с помощью конуса положительных операторов $L^+(E,F)$, т. е. формулами $T \geqslant 0 \leftrightarrow T \in L^+(E,F)$ и $S \geqslant T \leftrightarrow S - T \geqslant 0$.

Ясно, что каждый положительный оператор порядково ограничен. Следовательно, порядково ограниченной будет и разность порядково ограниченных операторов. Таким образом, каждый регулярный оператор порядково ограничен. Обратное утверждение в общем случае неверно, но выполнено при условии порядковой полноты F. Последнее следует непосредственно из основополагающей теоремы Рисса — Канторовича.

(2) *Пусть E — векторная решетка, F — произвольное действительное векторное пространство и пусть U — аддитивное и положительно однородное отображение из E^+ в F, т. е. отображение $U : E^+ \to F$ удовлетворяет условиям*

$$U(x+y) = Ux + Uy, \quad U(\lambda x) = \lambda U x \quad (0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R};\, x, y \in E^+).$$

Тогда U имеет единственное линейное продолжение T на всю векторную решетку E. Если, сверх того, F — векторная решетка и $U(E^+) \subset F^+$, то оператор T положителен.

П2.2. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть E — векторная решетка, а F — некоторое K-пространство. Множество всех порядково ограниченных операторов $L^\sim(E,F)$, упорядоченное конусом положительных операторов $L^\sim(E,F)^+$, является K-пространством.*

Известны явные формулы для вычисления решеточных операций в K-пространстве $L^\sim(E,F)$. Именно, для любых $x \in E^+$, $S, T \in L^\sim(E,F)$ и порядково ограниченного множества $\mathscr{T} \subset L^\sim(E,F)$ имеют место представления:

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sx_1 + Tx_2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(3) $S^+x = \sup\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(4) $S^-x = -\inf\{Sy : 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(5) $|S|x = \sup\{|Sy| : |y| \leqslant x\}$;

(6) $|S|x = \sup\{\sum_{k=1}^n |Sx_k| : x_1, \dots, x_n \geqslant 0,$
$x = \sum_{k=1}^n x_k,\, n \in \mathbb{N}\}$;

(7) $|Sx| \leqslant |S|(|x|)$ $(x \in E)$;

(8) $(\sup \mathscr{T})x = \sup\{\sum_{k=1}^n T_k x_k : T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},$
$x_1, \dots, x_n \in E^+,\, x = \sum_{k=1}^n x_k,\, n \in \mathbb{N}\}$;

(9) $(\inf \mathscr{T})x = \inf\{\sum_{k=1}^{n} T_k x_k : T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},$
$x_1, \dots, x_n \in E^+,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ n \in \mathbb{N}\}.$

П2.3. Пусть X и E — векторные решетки. Линейный оператор T из X в E называют *решеточным гомоморфизмом*, если T сохраняет точные верхние границы непустых конечных множеств, т. е.

$$T(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = Tx_1 \vee \ldots \vee Tx_n \quad (x_1, \dots, x_n \in X).$$

Легко понять, что линейный оператор $T : X \to E$ будет решеточным гомоморфизмом, если выполнено одно из следующих соотношений (и в этом случае имеют место все эти соотношения):

$$\begin{gathered} T(x \vee y) = Tx \vee Ty \quad (x, y \in E), \\ T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad (x, y \in E), \\ x \wedge y = 0 \to Tx \wedge Ty = 0 \quad (x, y \in E), \\ T(x^+) = (Tx)^+ \quad (x \in E), \\ T(|x|) = |Tx| \quad (x \in E). \end{gathered}$$

Векторные решетки называют *изоморфными*, если между ними имеется биекция, являющаяся решеточным гомоморфизмом. *Порядковым пополнением* векторной решетки E называют пару $(\widehat{E}, \iota)$, где $\widehat{E}$ — некоторое K-пространство, а ι — решеточный изоморфизм из E на минорирующую подрешетку в $\widehat{E}$. При этом вложение ι будет порядково непрерывным, см. П2.4. Порядковое пополнение называют также *K-пополнением* или *дедекиндовым пополнением.*

Теорема. *Для любой архимедовой векторной решетки существует единственное с точностью до решеточного изоморфизма K-пополнение.*

П2.4. Оператор $T : E \to F$ называют *порядково непрерывным* (*порядково σ-непрерывным*), если Tx_α порядково сходится к Tx для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (любой последовательности $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$) в E, порядково сходящейся к x. Множество всех порядково непрерывных регулярных операторов (всех порядково σ-непрерывных регулярных операторов) с индуцированной из $L^\sim(E, F)$ векторной и порядковой структурой обозначают символом $L_n^\sim(E, F)$ (соответственно $L_{n\sigma}^\sim(E, F)$).

(1) *Положительный оператор $T \in L^{\sim}(E, F)$ порядково непрерывен (порядково σ-непрерывен) в том и только в том случае, когда $Tx_\alpha \overset{(o)}{\to} 0$ для каждой убывающей сети (последовательности) (x_α) в E, такой что $\inf_\alpha x_\alpha = 0$.*

Оператор $T \in L^{\sim}(E, F)$ называют *сингулярным*, если он обращается в нуль на некотором порядково плотном идеале $G \subset E$. Множество сингулярных операторов обозначают символом $L^{\sim}_{s\sigma}(E, F)$,

(2) ***Теорема.*** *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Оператор $T \in L^{\sim}(E, F)$ порядково непрерывен тогда и только тогда, когда T дизъюнктен всем сингулярным операторам:*

$$L^{\sim}_n(E, F) = L^{\sim}_s(E, F)^{\perp}.$$

(3) *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Пространства $L^{\sim}_n(E, F)$ и $L^{\sim}_{n\sigma}(E, F)$ являются полосами в $L^{\sim}(E, F)$.*

(4) *Пусть $\widehat{E}$ — порядковое пополнение векторной решетки E, а F — некоторое K-пространство. Тогда регулярный порядково непрерывный оператор $T : E \to F$ имеет единственное регулярное порядково непрерывное продолжение $\widehat{T} : \widehat{E} \to F$. Отображение $T \mapsto \widehat{T}$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между пространствами $L^{\sim}_n(E, F)$ и $L^{\sim}_n(\widehat{E}, F)$. В частности, операторы T и $\widehat{T}$ положительны или нет одновременно.*

П2.5. Рассмотрим векторную решетку E и некоторую ее подрешетку $D \subset E$. Говорят, что линейный оператор T из D в E *сохраняет полосы* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из следующих равенств:

$$\begin{gathered} Te \in \{e\}^{\perp\perp} \quad (e \in D), \\ e \perp f \to Te \perp f \quad (e \in D,\ f \in E), \\ T(K \cap D) \subset K \quad (K \in \mathfrak{B}(E)), \end{gathered}$$

где дизъюнктные дополнения вычисляются в E. Нерасширяющий оператор может не быть порядково ограниченным.

(1) *Пусть E — векторная решетка с главными проекциями. Тогда линейный оператор T из фундамента $D \subset E$ в E будет* *нерасширяющим в том и только в том случае, когда для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполнено $\pi T x = T \pi x$ $(x \in D)$.*

Множество всех порядково ограниченных нерасширяющих операторов из D в некоторую векторную подрешетку $D' \subset E$ обозначают символом $\mathrm{Orth}(D, D')$. Порядково ограниченный нерасширяющий оператор $\alpha : D \to E$, определенный на фундаменте $D \subset E$, именуют *расширенным ортоморфизмом* в E. Расширенный ортоморфизм регулярен. Более того, множество всех расширенных ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(D, E)$, определенных на фиксированном порядково плотном идеале D, является векторной решеткой. При этом формула для вычисления решеточных операций в $\mathrm{Orth}(D, E)$ имеет вид $(S \vee T)x = Sx \vee Tx$, $(S \wedge T)x = Sx \wedge Tx$ $(x \in E^+)$.

(2) *Каждый расширенный ортоморфизм в векторной решетке порядково непрерывен.*

Теперь можно определить пространство всех расширенных ортоморфизмов $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ на векторной решетке E. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех пар (D, π), где D — фундамент в E и $\pi \in \mathrm{Orth}(D, E)$. Элементы (D, π) и (D', π') в $\mathfrak{M}$ называют эквивалентными (в символах $(D, \pi) \sim (D', \pi')$), если ортоморфизмы π и π' совпадают на пересечении $D \cap D'$. Такое отношение в $\mathfrak{M}$ действительно будет эквивалентностью из-за (2). Фактор-множество $\mathfrak{M}/\sim$ по модулю этой эквивалентности обозначают $\mathrm{Orth}^\infty(E)$. Множество $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ относительно поточечного сложения, скалярного умножения и решеточных операций становится векторной решеткой. Это утверждение легко обосновать, привлекая (2), так как множества $\mathrm{Orth}(D, E)$ являются векторными решетками. Элемент $\alpha \in \mathrm{Orth}^\infty(E)$, определенный на всем пространстве E, называют *ортоморфизмом*. Множество всех ортоморфизмов в E обозначают символом $\mathrm{Orth}(E)$.

(3) *Если E — порядково полная векторная решетка, то $\mathrm{Orth}(E)$ совпадает с полосой в $L^\sim(E)$, порожденной тождественным оператором в E.*

(4) *Ядро расширенного ортоморфизма $T \in \mathrm{Orth}(D, E)$ является полосой в D. Если два расширенных ортоморфизма из $\mathrm{Orth}(D, E)$ совпадают на некотором подмножестве D, то они совпадают на полосе, порожденной этим множеством в D.*

В векторной решетке $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ можно ввести структуры решеточно упорядоченной алгебры, используя для этой цели композицию. В самом деле, если (π, D_π) и (ρ, D_ρ) входят в $\mathfrak{M}$, то идеал $\pi^{-1}(D_\rho)$ будет фундаментом в E и можно определить произведение $(\sigma, D_\sigma) := (\pi, D_\pi)(\rho, D_\rho)$, полагая $D_\sigma := \pi^{-1}(D_\rho)$ и $\sigma x := \rho(\pi x)$. Так как решеточные операции в $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ вычисляются поточечно на E^+, то легко понять, что $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ будет f-алгеброй.

(5) *Всякая (архимедова) f-алгебра A коммутативна. В частности, расширенные ортоморфизмы коммутируют.*

Пусть $\mathscr{Z}(E)$ — это o-идеал, порожденный тождественным оператором I_E в $L^\sim(E)$. Пространство $\mathscr{Z}(E)$ часто называют *идеальным центром* векторной решетки E. Будем считать, что $\mathrm{Orth}(E) \subset \mathrm{Orth}^\infty(E)$, сопоставив каждому ортоморфизму $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ соответствующий ему класс эквивалентности в $\mathrm{Orth}^\infty(E)$.

(6) *Пространство $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ является дизъюнктно полной точной f-алгеброй с единицей I_E. Более того, $\mathrm{Orth}(E)$ — это f-подалгебра $\mathrm{Orth}^\infty(E)$, а $\mathscr{Z}(E)$ — это f-подалгебра $\mathrm{Orth}(E)$.*

(7) *Каждая архимедова f-алгебра E с единицей $\mathbb{1}$ алгебраически и решеточно изоморфна f-алгебре ортоморфизмов в E. Более того, идеал в E, порожденный $\mathbb{1}$, отображается при этом изоморфизме на $\mathscr{Z}(E)$.*

(8) *Если E — порядково полная векторная решетка, то $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ — расширенное K-пространство, а $\mathrm{Orth}(E)$ и $\mathscr{Z}(E)$ — фундаменты в нем.*

(9) *Пусть E и F — фундаменты в расширенном K-пространстве G с фиксированной порядковой и кольцевой единицей. Тогда для каждого ортоморфизма $\pi \in \mathrm{Orth}(E, F)$ существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $\pi x = g \cdot x$ $(x \in E)$.*

(10) *Для каждого ортоморфизма α и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдутся конечнозначные элементы (= «ступенчатые» ортоморфизмы) π_ε и ρ_ε такие, что $0 \leqslant \alpha - \pi_\varepsilon \leqslant \varepsilon I_E$, $0 \leqslant \rho_\varepsilon - \alpha \leqslant \varepsilon I_E$.*

Оператор $\pi \in L(E)$ называют *конечнозначным элементом*, если найдутся проекторы $\pi_1, \dots, \pi_n$ и числа $t_1, \dots, t_n$ такие, что $\pi = t_1\pi_1 + \dots + t_n\pi_n$.

Приложение 3. Векторные меры

Рассмотрим коротко несколько фактов о мерах со значениями в векторных решетках. Подробности можно найти в [29, 143, 433].

П3.1. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная булева алгебра. Отображение μ, определенное на $\mathscr{A}$ и действующее в произвольное векторное пространство Z, называют (*конечно аддитивной векторной*) *мерой*, если $\mu(a_1 \vee a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$ для любой пары дизъюнктных элементов $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$. Пусть $Z = E$ — векторная решетка. Меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *ограниченной*, если $\mu(\mathscr{A})$ — порядково ограниченное множество в E. Если же $\mu(a) \geqslant 0$ для всех $a \in \mathscr{A}$, то μ именуют *положительной мерой.* Обозначим символом $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ ($\mathrm{ba}^+(\mathscr{A}, E)$) пространство всех ограниченных (положительных) векторных мер. Алгебраические операции $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ индуцированы из $F(\mathscr{A})$, т. е. если $\mu, \nu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$ и $t \in \mathbb{R}$, то полагают по определению

$$(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A) \quad (A \in \mathscr{A});$$
$$(t\mu)(A) := t\mu(A) \quad (A \in \mathscr{A});$$
$$\mu \geqslant \nu \leftrightarrow \mu - \nu \geqslant 0.$$

Пространство $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ с положительным конусом $\mathrm{ba}^+(\mathscr{A}, E)$ будет упорядоченным векторным пространством. Меру μ называют *счетно аддитивной*, если для любой последовательности (a_n) попарно дизъюнктных элементов $a_n \in \mathscr{A}$ выполнено соотношение

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n) := o\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(a_k).$$

Множество всех E-значных счетно аддитивных мер на алгебре $\mathscr{A}$ обозначим символом $\mathrm{bca}(\mathscr{A}, E)$.

Если E — произвольное K-пространство, то $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ *также будет K-пространством; множество* $\mathrm{bca}(\mathscr{A}, E)$ *является полосой K-пространства* $\mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$.

В частности, для каждой векторной меры $\mu : \mathscr{A} \to E$ существуют *положительная часть* $\mu^+ := \mu \vee 0$, *отрицательная часть* $\mu^- := (-\mu)^+ = -\mu \wedge 0$ и *модуль* $|\mu| := \mu \vee (-\mu)$. Нетрудно проверить, что для любых $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathrm{ba}(\mathscr{A}, E)$ и $a \in \mathscr{A}$ имеют место следующие формулы:

$$
\begin{gathered}
(\nu_1 \vee \nu_2)(a) = \sup\{\nu_1(a_1) + \nu_2(a_2) : a_1 \vee a_2 = a,\ a_1 \wedge a_2 = 0\}; \\
(\nu_1 \wedge \nu_2)(a) = \inf\{\nu_1(a_1) + \nu_2(a_2) : a_1 \vee a_2 = a,\ a_1 \wedge a_2 = 0\}; \\
\nu^+(a) = \sup\{\nu(a') : a' \leqslant a\}; \\
\nu^-(a) = -\inf\{\nu(a') : a' \leqslant a\}; \\
|\nu|(a) = \sup\{|\nu(a')| : a' \leqslant a\}.
\end{gathered}
$$

П3.2. Предположим теперь, что $\mathfrak{A}$ — (компактное) топологическое пространство и $\mathscr{A}$ — борелевская σ-алгебра. Сформулируем векторнозначный вариант теоремы Рисса — Маркова, полученный М. Райтом.

Счетно аддитивную меру $\mu : \mathscr{A} \to E$ называют *регулярной* (или *квазирегулярной*), если для любого $C \in \mathscr{A}$ (соответственно для каждого открытого $C \in \mathscr{A}$) выполнено $\mu(C) = o\text{-}\lim\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_C\}$, где $\mathscr{K}_C$ — множество всех замкнутых подмножеств множества C. Это определение равносильно данному в 2.1.12. Как и в 2.1.12 $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ — соответственно множества регулярных и квазирегулярных E-значных борелевских мер.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ дано направленное множество $\mathrm{A}(n)$. Возьмем последовательность убывающих сетей $(e_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathrm{A}(n)} \subset [0, e]$ в K-пространстве E таких, что $\inf\{e_{\alpha,n} : \alpha \in \mathrm{A}(n)\} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если для каждой такой последовательности выполнено

$$
\inf_{\varphi \in \mathrm{A}} \sup_{n \in \mathbb{N}} e_{\varphi(n),n} = 0, \quad \mathrm{A} := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}(n),
$$

то говорят, что K-пространство E является (σ, ∞)-*дистрибутивным.* В K-пространствах счетного типа условие (σ, ∞)-дистрибутивности равносильно *регулярности* базы. Последнее означает, что в булевой алгебре $\mathscr{B}(E)$ выполнен *принцип диагонали*: если двойная последовательность $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{B}(E)$ такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ убывает и o-сходится к нулю, то существует некоторая строго возрастающая последовательность $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$, для которой $o\text{-}\lim_{n\to\infty} x_{n,m(n)} = 0$.

(1) ***Теорема Райта.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ — компактное топологическое пространство, а E — произвольное K-пространство. Отображение $\mu \mapsto I_\mu$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм между K-пространствами $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E)$ и $L^r(C(\mathfrak{A}), E)$.*

(2) ***Теорема.*** *Пусть K-пространство E является (σ, ∞)-дистрибутивным. Тогда*

$$\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, E) = \mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E).$$

При этом отображение $\mu \mapsto I_\mu$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм K-пространств $\mathrm{rca}(\mathfrak{A}, E)$ и $L^r(C(\mathfrak{A}), E)$.

П3.3. Опишем некоторые необходимые нам пространства непрерывных вектор-функций.

Положим $E(e) := \bigcup\{[-ne, ne] : n \in \mathbb{N}\}$ для $e \in E^+$. Как видно, $E(e)$ — это K-пространство с сильной единицей e. В $E(e)$ можно ввести норму

$$\|u\|_e := \inf\{\lambda > 0 : |u| \leqslant \lambda e\} \quad (u \in E(e)).$$

Хорошо известно, что $(E(e), \|\cdot\|_e)$ — банахова решетка.

Пусть $C(\mathfrak{A}, E(e))$ — пространство всех непрерывных по норме $\|\cdot\|_e$ отображений из $\mathfrak{A}$ в $E(e)$. Положим, далее,

$$C_r(\mathfrak{A}, E) := \bigcup\big\{C(\mathfrak{A}, E(e)) : e \in E^+)\big\}$$

и назовем элементы этого множества *r-непрерывными функциями.*

Понятно, что $C_r(\mathfrak{A}, E)$ содержится в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, ибо в $E(e)$ ограниченность по норме совпадает с порядковой ограниченностью. Более того, $C_r(\mathfrak{A}, E)$ есть векторная подрешетка в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$.

(1) *Для любых $f \in C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $\varepsilon > 0$ существуют $e \in E^+$ и конечные наборы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(\mathfrak{A})$ и $e_1, \dots, e_n \in E$ такие, что*

$$\left|f - \sum_{k=1}^n \varphi_k(\cdot)e_k\right| = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left|f(\alpha) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(\alpha)e_k\right| \leqslant \varepsilon e.$$

$\triangleleft$ По условию, $f \in C(\mathfrak{A}, E(e))$ для некоторого $e \in E^+$. По теореме Крейнов — Какутани $E(e)$ линейно изометрично и решеточно изоморфно $C(Q)$ для некоторого экстремального компакта Q. Поэтому можно считать, что $f \in C(\mathfrak{A}, C(Q))$. Однако пространства $C(\mathfrak{A}, C(Q))$ и $C(\mathfrak{A} \times Q)$ изоморфны как банаховы решетки. Остается заметить, что в силу теоремы Стоуна — Вейерштрасса в $C(\mathfrak{A} \times Q)$ плотно подпространство функций вида

$$(\alpha, q) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\alpha) e_k(q),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(\mathfrak{A})$ и $e_1, \ldots, e_n \in C(Q)$. $\triangleright$

(2) Обозначим временно через $C(\mathfrak{A}) \odot E$ множество всех отображений $f : \mathfrak{A} \to E$ вида

$$f(\alpha) = o\text{-}\sum_{\xi} \varphi_\xi(\alpha) e_\xi \quad (\alpha \in \mathfrak{A}),$$

где (φ_ξ) — равномерно ограниченное семейство непрерывных функций на $\mathfrak{A}$, а (e_ξ) — порядково ограниченное семейство попарно дизъюнктных элементов в E. Отображение $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ называют *кусочно r-непрерывным*, если для любого ненулевого проектора π в E найдутся проектор $0 \neq \rho \leqslant \pi$ и элемент $e \in E^+$ такие, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует элемент $h \in C(\mathfrak{A}) \odot E$, для которого $\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \rho |f(\alpha) - h(\alpha)| \leqslant \varepsilon e$. Пусть $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ — пространство всех кусочно r-непрерывных отображений из $\mathfrak{A}$ в E. Как видно, $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ также векторная подрешетка в $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$. Можно дать описание пространства $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$, используя реализацию E в виде фундамента $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт K-пространства E. Именно, отображение $f : \mathfrak{A} \to E \subset C_\infty(Q)$ входит в $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ в том и только в том случае, если существуют *котощее* (= дополнительное к тощему) множество $Q_0 \subset Q$ и элемент $e \in E$ такие, что соотношение

$$g(t) : \alpha \mapsto f(\alpha)(t) \quad (\alpha \in \mathfrak{A},\, t \in Q_0)$$

определяет непрерывную вектор-функцию $g : Q_o \to C(\mathfrak{A})$, причем $\|g(t)\|_{C(\mathfrak{A})} \leqslant e(t)$ $(t \in Q_0)$.

П3.4. Интеграл по векторной мере $\mu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, E)$ можно распространить на пространства вектор-функций $C_r(\mathfrak{A}, E)$ и $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$.

(1) Пусть F — еще одно K-пространство и

$$\mu \in \mathrm{ca}(\mathfrak{A}, \mathscr{A}, L^r(E, F)),$$

где, как обычно, $L^r(E, F)$ — пространство регулярных операторов из E в F. Тогда интеграл $I_\mu : C(\mathfrak{A}) \to E$ допускает продолжение на $C_r(\mathfrak{A}, E)$.

Отождествим алгебраическое тензорное произведение $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ с подпространством $C_r(\mathfrak{A}, E)$, сопоставив элементу $\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes e_k$, где $e_k \in E$ и $\varphi_k \in C(\mathfrak{A})$, отображение $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi_k(\alpha) e_k$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$. Определим I_μ на $C(\mathfrak{A}) \otimes E$ по формуле

$$I_\mu \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes e_k \right) := \sum_{k=1}^n I_\mu(\varphi_k) e_k.$$

Если $f \in C_r(\mathfrak{A}, E)$, то согласно 2.1.12 (1) существуют $e \in E^+$ и последовательность $(f_n) \subset C(\mathfrak{A}) \otimes E$ такие, что

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} |f(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{n} e.$$

Положим по определению $I_\mu(f) := o\text{-}\lim I_\mu(f_n)$. Корректность приведенных определений проверяется без труда.

Для любой конечно аддитивной меры $\mu : \mathscr{A} \to L^r(E, F)$ отображение $I_\mu : C_r(\mathfrak{A}, E) \to F$ является регулярным оператором. Если $\mu \geqslant 0$, то $I_\mu \geqslant 0$.

(2) Наконец, рассмотрим меру μ со значениями в пространстве $L^n(E, F)$, составленном из o-непрерывных (= нормальных) линейных операторов. Тогда I_μ можно распространить на пространство $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$.

Пусть вновь интеграл I_μ определен на $C(\mathfrak{A})$ как в (1). Тогда I_μ — регулярный оператор из $C(\mathfrak{A})$ в $L^n(E, F)$. Возьмем отображение $f \in C(\mathfrak{A}) \odot E$ вида

$$f(\alpha) = \sum_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(\alpha) e_\xi \quad (\alpha \in \mathfrak{A}),$$

где $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — ограниченное множество попарно дизъюнктных элементов в E, а $(\varphi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — равномерно ограниченное семейство непрерывных функций на $\mathfrak{A}$. Положим

$$I_\mu(f) := \sum\nolimits_{\xi\in\Xi} I_\mu(\varphi_\xi)e_\xi.$$

Это определение корректно, ибо для любого ограниченного семейства попарно дизъюнктных $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и произвольного $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ в силу o-непрерывности $I_\mu(\varphi)$ будет

$$I_\mu\left(\varphi\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi\right) = I_\mu(\varphi)\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi.$$

Дальнейшее распространение I_μ на $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ можно осуществить с помощью 2.1.12 (2). Действительно, если $f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)$, то существует такое *разбиение единицы* (= семейство попарно дизъюнктных элементов, точная верхняя граница которых есть тождественный элемент) (π_ξ) в алгебре проекторов $\mathfrak{P}(E)$ пространства E, что каждое из отображений $\pi_\xi f$ равномерно аппроксимируется элементами из $C(\mathfrak{A}) \odot E$. Точнее, для каждого $\xi \in \Xi$ существуют $e \in E$ и последовательность $(f_n) \subset C(\mathfrak{A}) \odot E$ такие, что

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |\pi_\xi f(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{n}e.$$

Положим $I_\mu(\pi_\xi f) := o\text{-}\lim I_\mu(f_n)$ и вновь $I_\mu(f) := \sum_\xi I_\mu(\pi_\xi f)$.

Легко проверить, что I_μ — регулярный оператор из $C_\pi(\mathfrak{A}, E)$ в F, причем соотношения $I_\mu \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$ равносильны.

Заметим, что в определениях (1) и (2) нигде не использована счетная аддитивность меры μ. Однако она с необходимостью появляется при аналитическом описании интересующих нас классов операторов.

П3.5. Сформулируем теперь несколько результатов об аналитическом представлении линейных операторов, которые приводят к новым формулам субдифференцирования.

(1) *Для любого регулярного оператора*

$$T : C(\mathfrak{A}) \to L^r(E, F)$$

существует единственный регулярный оператор $'T : C_r(\mathfrak{A}, E) \to F$ *такой, что* $'T(\varphi \otimes e) = (T\varphi)e$ *для всех* $\varphi \in C(\mathfrak{A})$ *и* $e \in E$. *Сопоставление* $T \mapsto {}'T$ *осуществляет линейный и решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L^r(C(\mathfrak{A}), L^r(E, F))$ *и* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$.

$\lhd$ Это можно установить с помощью П3.4 по схеме распространения интеграла на пространство $C_r(\mathfrak{A}, E)$ (см. П3.3 (1)). $\rhd$

(2) ***Теорема.*** *Для любого регулярного оператора*

$$T : C(\mathfrak{A}) \to L^n(E, F)$$

существует единственный оператор $'T \in L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *такой, что* $'T(\varphi \otimes e) = T(\varphi)e$ *для всех* $e \in E$ *и* $\varphi \in C(\mathfrak{A})$. *Отображение* $T \mapsto {}'T$ *является линейным и решеточным изоморфизмом* K*-пространств* $L^r(C(\mathfrak{A}), L^n(E, F))$ *и* $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$.

$\lhd$ Этот факт устанавливают так же, как и (1), с привлечением П3.4, П3.3 (2) и следующего утверждения. Регулярный оператор $S : E \to F$ порядково непрерывен в том и только в том случае, когда $Se = \sum_{\xi \in \Xi} S(\pi_\xi e)$ для любого $e \in E$ и разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{P}(E)$. $\rhd$

Подводя итог сказанному, сформулируем нужные факты об общем виде линейных операторов.

(3) ***Теорема.*** *Для любого оператора* T *из* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ *существует единственная квазирегулярная борелевская мера* $\mu := \mu_T$ *такая, что*

$$Tf = \int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)\, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_r(\mathfrak{A}, E)).$$

Отображение $T \mapsto \mu_T$ *осуществляет решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L^r(C_r(\mathfrak{A}, E), F)$ *и* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^r(E, F))$.

(4) ***Теорема.*** *Для оператора* $T \in L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *существует единственная квазирегулярная борелевская мера* $\mu := \mu_T$ *из* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$ *такая, что*

$$Tf = \int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)\, d\mu(\alpha) \quad (f \in C_\pi(\mathfrak{A}, E)).$$

Отображение $T \mapsto \mu_T$ *осуществляет решеточный изоморфизм* K*-пространств* $L_\pi(C_\pi(\mathfrak{A}, E), F)$ *и* $\mathrm{qca}(\mathfrak{A}, L^n(E, F))$.

Приложение 4. Булевозначные модели

Здесь мы эскизно представим основные приемы нестандартного моделирования на основе булевозначных моделей теории множеств. Более полное изложение имеется в [139, 142, 280, 549].

П4.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. *Булевозначной интерпретацией* n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X.

Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяют элемент $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!]$ из B, называемый *оценкой истинности* φ.

Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*,$$

$$[\![\, (\forall x)\, \varphi \,]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$

$$[\![(\exists x)\, \varphi]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $(\,\cdot\,)^*$, $\bigwedge$, $\bigvee$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

П4.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m \in X$, а $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ — формула, *истинно* (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1, \dots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — наибольший элемент полной булевой алгебры B.

Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 представляет собой равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

П4.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \quad [\![\in (x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполнены все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам П4.1 справедливость аксиомы экстенсиональности $x = y \leftrightarrow (\forall z)\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{z \in X} ([\![z \in x]\!] \Leftrightarrow [\![z \in y]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

П4.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x, y) \in X^2 : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [279]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\cdot = \cdot]\!]', [\![\cdot \in \cdot]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![x = y]\!] = [\![\beta x = \beta y]\!]$ и $[\![x \in y]\!] = [\![\beta x \in \beta y]\!]$ при всех $x, y \in X$.

П4.5. *Теорема.* *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) *$\mathbb{X}$ — отделимая B-система;*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности и фундирования истинны в $\mathbb{X}$;*

(4) *если функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такова, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$ и $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(f)} f(z) \wedge [\![z = y]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такая, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$, $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

П4.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям П4.5 (1–5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)} := (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ именуют также *булевозначным универсумом.* Основные свойства $\mathbb{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Каждая теорема теории множеств ZFC истинна в $\mathbb{V}^{(B)}$; символически $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.*

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, а $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют *перемешиванием семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$* и обозначают $\mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}\, b_\xi x_\xi$.

Для $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$ обозначим символом bx перемешивание x с вероятностью b и $\varnothing$ с вероятностью $b^* := \mathbb{1} - b$, т. е. $b \leqslant [\![bx = x]\!]$ и

$b^* \leqslant [\![bx = \varnothing]\!]$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено

$$[\![x \in by]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!];$$
$$[\![bx = by]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!];$$
$$[\![x = bx]\!] = [\![b'x = \varnothing]\!] = b' \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!].$$

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(u)$ теории* ZFC (*возможно, с константами из* $\mathbb{V}^{(B)}$) *существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![\, (\exists u)\varphi(u) \,]\!] = [\![\, \varphi(x_0) \,]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\, (\exists! x)\, \varphi(x) \,]\!] = \mathbb{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого выполнено $[\![\, \varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$.

П4.7. Существует единственное отображение $x \mapsto x^\wedge$ из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее требованиям:

(1) $x = y \leftrightarrow [\![\, x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{1}$;
$x \in y \leftrightarrow [\![\, x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V})$,

(2) $[\![\, z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![\, x^\wedge = z \,]\!] \quad (z \in \mathbb{V}^{(B)},\, y \in \mathbb{V})$.

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид $(\forall u)(u \in v \to \ldots)$ и $(\exists u)(u \in v \wedge \ldots)$, или же в сокращенной записи $(\forall u \in v)$ и $(\exists u \in v)$. Тогда для произвольных $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ выполнено*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge, \ldots, x_n^\wedge).$$

П4.8. Для элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\, x \in X \,]\!] = \mathbb{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

П4.9. *Пусть F — соответствие из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что для любого множества $A \subset X{\downarrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$. При этом $[\![F$ — отображение из X в $Y]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $F{\downarrow}$ — отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$.*

В частности, отображение $f : Z^{\wedge} \to Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbb{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^{\wedge})$ для всех $z \in Z$.

П4.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Определим функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ формулами: $\mathrm{dom}(f) = X$ и $\mathrm{im}(f) = \{\mathbb{1}\}$. Согласно П4.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![y \in X]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad (y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbb{V}^{(B)})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)}))$,

где $\mathrm{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}\, b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

П4.11. *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что имеет место равенство $\mathrm{dom}(F{\uparrow}) = \mathrm{dom}(F){\uparrow}$ и для каждого подмножества A множества $\mathrm{dom}(F)$ выполнено*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow};$$

(2) *соответствие F экстенсионально т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$.

В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^{\wedge} \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

П4.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-*структура*, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x, y) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) \vee d(z, y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}\!\downarrow$ такие, что $d(x, y) = [\![\iota(x) \neq \iota(y)]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \operatorname{mix} b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

П4.13. Сформулируем сейчас полезный признак перемешивания функций внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть Ξ — множество, $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, являющихся функциями из непустого множества X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B. Тогда перемешивание $f := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi$ является функцией из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем

$$\left[\!\!\left[(\forall x \in X) f(x) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi(x) \right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

П4.14. Рассмотрим теперь факты, связанные с переводом понятий, возникающих при изображении поля вещественных чисел.

(1) В силу принципа максимума имеется объект $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого верно

$$[\![\mathscr{R} \ \text{— это } K\text{-пространство вещественных чисел}]\!] = \mathbb{1}.$$

Здесь подразумевают, что $\mathscr{R}$ — это несущее множество пространства вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отметим здесь же, что $\mathbb{R}^\wedge$ (= стандартное имя поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел), будучи архимедово упорядоченным полем внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, является плотным подполем в $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (с точностью до изоморфизма).

Осуществим спуск структур из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$ по общим правилам П4.8 и П4.9:

$$
\begin{gathered}
x+y=z \leftrightarrow [\![x+y=z]\!]=\mathbb{1};\\
xy=z \leftrightarrow [\![xy=z]\!]=\mathbb{1};\\
x\leqslant y \leftrightarrow [\![x\leqslant y]\!]=\mathbb{1};\\
\lambda x=y \leftrightarrow [\![\lambda^{\wedge}x=y]\!]=\mathbb{1}\\
(x,y,z\in\mathscr{R}{\downarrow},\lambda\in\mathbb{R}).
\end{gathered}
$$

(2) ***Теорема Гордона.*** *Множество $\mathscr{R}{\downarrow}$ со спущенными структурами представляет собой расширенное K-пространство с базой $\mathfrak{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$ (= булева алгебра проекторов в $\mathscr{R}{\downarrow}$), изоморфной B. Такой изоморфизм осуществляется отождествлением B со спуском поля $\{0^{\wedge},1^{\wedge}\}$, т. е. отображением $\chi : B \to \mathfrak{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, определенным правилом*

$$
[\![\chi(b)=1^{\wedge}]\!]=b,\ [\![\chi(b)=0^{\wedge}]\!]=b' \quad (0,1\in\mathbb{R}).
$$

При этом для каждых $x,y\in\mathscr{R}$ выполнено

$$
\begin{gathered}
[\![\chi(b)x=\chi(b)y]\!]=b \Rightarrow [\![x=y]\!];\\
b\chi(b)x=bx,\quad b'\chi(b)x=\mathbb{0}.
\end{gathered}
$$

В частности, справедливы эквивалентности:

$$
\begin{gathered}
\chi(b)x=\chi(b)y \leftrightarrow [\![x=y]\!]\geqslant b;\\
\chi(b)x\geqslant\chi(b)y \leftrightarrow [\![x\geqslant y]\!]\geqslant b.
\end{gathered}
$$

П4.15. Используя те же обозначения, что и в П4.14, выясним смысл некоторых утверждений в терминах K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$.

(1) Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда

$$
\operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)=o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\chi(b_\xi)x_\xi.
$$

(2) Для множества $A\subset\mathscr{R}{\downarrow}$ и произвольных $a\in\mathscr{R}{\downarrow}$ и $b\in B$ справедлива эквивалентность

$$
\chi(b)a=\sup(\chi(b)(A)) \leftrightarrow b\leqslant[\![a=\sup(A{\uparrow})]\!].
$$

(3) Рассмотрим сеть $s : \mathrm{A} \to \mathscr{R}{\downarrow}$, где A — направленное множество. Тогда подъем $s{\uparrow} : \mathrm{A}^{\wedge} \to \mathscr{R}$ является сетью внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем для любых $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ выполнено

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ s) \leftrightarrow b \leqslant [\![x = \lim(s{\uparrow})]\!].$$

(4) Пусть элементы s и $\mathrm{A} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что имеет место равенство $[\![s : \mathrm{A} \to \mathscr{R} — \text{сеть}]\!] = \mathbb{1}$. Тогда спуск $s{\downarrow}$: $\mathrm{A}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ является сетью, причем для всяких $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ верно

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ (s{\downarrow})) \leftrightarrow b \leqslant [\![x = \lim(s)]\!].$$

(5) Для каждого элемента $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеют место равенства

$$e_x = \chi([\![x \neq 0]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

П4.16. *Теорема.* *Пусть X — архимедова векторная решетка с базой $B := \mathfrak{B}(X)$. Пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath$ из X в расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что выполнены условия:*

(1) *изоморфизм $\imath$ сохраняет точные границы произвольных непустых ограниченных множеств;*

(2) *порядковый идеал $J(\imath(X))$, порожденный множеством $\imath(X)$, есть фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$;*

(3) *для любого $y \in J(\imath(X))$ справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\inf\{\imath(x) : x \in X \wedge \imath(x) \geqslant y\} = \\ = y = \sup\{\imath(x) : x \in X \wedge \imath(x) \leqslant y\};\end{gathered}$$

(4) *для $x \in X$ и $b \in B$ выполнено $b \leqslant [\![\imath(x) = 0]\!]$ в том и только в том случае, если $x \in b^{\perp}$.*

Приложение 5. Инфинитезимальный анализ

Удобное обоснование инфинитезимальных методов анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном [473] в конце семидесятых годов, теория IST. Формализм этой теории мгновенно приобрел широкую популярность. Причина этого в том, что подход Э. Нельсона развеял бытовавшие до него представления об особом «идеальном» характере актуальных бесконечно больших и малых величинах.

П5.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством.* Иначе говоря, в число допустимых фрагментов текстов IST мы включаем записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST служит мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно. Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними.* Таким образом, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Классификация формул IST приводит к вычленению внешних и внутренних классов. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин *класс* в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества.

Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внутреннее множество.

Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения. Вот некоторые из них:

$$x \in \mathbb{V}^{\mathrm{st}} := x \text{ стандартно} := (\exists\, y)\ \mathrm{St}(y) \wedge y = x;$$

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно} \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно} \wedge \varphi);$$

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi);$$

$$^{\circ}x := \{y \in x :\ y \text{ стандартно}\}.$$

Внешнее множество $^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

П5.2. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название принципов нестандартной теории множеств:

(1) Принцип переноса:
$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)\, (\forall^{\mathrm{st}} x_2) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)\, ((\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to$
$\to (\forall\, x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$
для каждой внутренней формулы φ;

(2) Принцип идеализации:
$(\forall\, x_1)\, (\forall\, x_2)\ \ldots (\forall\, x_n)$
$((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)\, (\exists\, x)\, (\forall\, y \in z)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists\, x)\, (\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$
где φ — произвольная внутренняя формула;

(3) Принцип стандартизации:
$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)$
$\big((\forall^{\mathrm{st}} x)\, (\exists^{\mathrm{st}} y)\, (\forall^{\mathrm{st}} z) z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \dots, x_n)\big)$
для всякой формулы φ.

Последний принцип аналогичен классическому *принципу свертывания.* Он дополняет общеизвестный способ введения множества A_φ с помощью отбора элементов из A с наперед заданным свойством φ: $A_\varphi := \{x \in A : \varphi(x)\}$. Здесь подобная процедура дополняется возможностью отбора стандартных элементов с наперед заданным свойством. Именно, по принципу стандартизации для стандартного A существует стандартное ${}^*A_\varphi$ такое, что $(\forall^{\mathrm{st}} z)\ z \in {}^*A_\varphi \leftrightarrow z \in A_\varphi$. Множество ${}^*A_\varphi$ называют *стандартизацией* (точнее, стандартизацией A_φ), часто опуская указания на φ. Используют более образную запись: ${}^*A := {}^*A_\varphi := {}^*\{x \in A : \varphi(x)\}$. Пусть A — стандартное множество и ${}^\circ A := \{a \in A : \mathrm{St}(a)\}$ — *внешнее множество* (= канторовское множество, заданное внешней формулой IST). Множество ${}^\circ A$ называют *стандартным ядром* A. Очевидно, $A = {}^{*\circ}A$. Подобные символы используют и для внешних подмножеств стандартных множеств и также говорят об их стандартизации.

П5.3. *Теорема Поуэлла.* *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств IST являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC.

Многие формулы IST, выражающие «нечто необычное» о стандартных объектах, можно преобразовать в эквивалентные формулы ZFC, представляющие собой обычные математические записи рассматриваемых выражений. Процедура, приводящая к описанному результату, называется *алгоритмом Нельсона.* Суть алгоритма «дешифровки» состоит в том, что, вводя стандартные функции, привлекая идеализацию и перестановки кванторов, мы редуцируем утверждение к форме, приспособленной для переноса. В конечном счете перевод состоит в приведении формулы к виду, пригодному для элиминации — исключения — внешнего понятия стандартности.

П5.4. Выразительные возможности, которыми обладает аксиоматическая теория множеств IST, весьма значительны, но имеется все же существенное ограничение, связанное с отсутствием в ней переменных для внешних множеств. Этот недостаток не позволяет, например, работать некоторыми важными инфинитезимальными конструкциями.

В настоящее время имеется несколько вариантов формального обоснования инфинитезимальных методов в рамках аксиоматических теорий внешних множеств, см. [273, 363, 383, 411, 412]. С точки зрения приложений все эти формализмы практически равнозначны. Здесь мы приведем один из наиболее сильных вариантов теории внешних множеств NST, предложенный Т. Каваи [411, 412].

Алфавит теории NST получается обогащением алфавита ZFC двумя постоянными $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$. Содержательно $\mathbb{V}^S$ мыслят как *универсум стандартных множеств*, а $\mathbb{V}^I$ — как *мир внутренних множеств* (в любой содержательной интерпретации).

При этом стоит подчеркнуть, что $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$ рассматриваются как конкретные внешние множества, т. е. $\mathbb{V}^S \in \mathbb{V}^E$ и $\mathbb{V}^I \in \mathbb{V}^E$, где $\mathbb{V}^E := \{x : x = x\}$ — *класс* всех *внешних множеств.* Иногда вместо $x \in \mathbb{V}^S$ пишут $\mathrm{St}(x)$ или «x — стандартное множество». Аналогичным образом вводят предикат $\mathrm{Int}(\cdot)$, выражающий свойство быть внутренним множеством.

Обычным способом определяются формулы. При этом для формулы φ теории ZFC символом φ^S (соответственно φ^I) обозначается *релятивизация* φ на $\mathbb{V}^S$ (соответственно на $\mathbb{V}^I$), т. е. формула, получающаяся заменой всех переменных в φ на переменные, пробегающие стандартные (соответственно внутренние) множества.

Если φ — формула теории ZFC, то, рассматривая ее как формулу теории NST, иногда пишут φ^E и применяют термин *E-формула.* Аналогичный смысл вкладывают в понятия *S-формулы* и *I-формулы.*

Используют обычные сокращения типа $(\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\forall x \in \mathbb{V}^S)\,\varphi$; $(\exists^{\mathrm{Int}} x)\,\varphi := (\exists x \in \mathbb{V}^I)\,\varphi$; $\mathrm{fin}(x) :=$ x конечно ($=$ не имеет взаимно однозначного отображения на собственное подмножество) и т. п.

П5.5. *Специальные аксиомы* NST делятся на три группы (так же обстоит дело и в иных вариантах теории внешних множеств). Первую группу составляют так называемые *правила образования внешних множеств.* Вторую — *аксиомы связи миров множеств* $\mathbb{V}^S$, $\mathbb{V}^I$ и $\mathbb{V}^E$. Наконец, в третью группу входят обычные *постула-*

ты нестандартного анализа — принципы переноса, идеализации и стандартизации.

П5.6. Начнем с устройства универсума $\mathbb{V}^E$.

(1) Суперправило образования внешних множеств: *если* φ — *аксиома* ZFC, *за исключением аксиомы фундирования, то* φ^E — *аксиома* NST.

Таким образом, в NST действуют аксиомы теории Цермело и выполнена схема аксиом подстановки. Более того, принимается

(2) Суженная аксиома фундирования: $(\forall A)\,(A = \varnothing \vee A \cap \mathbb{V}^I = \varnothing) \to (\exists x \in A)\, x \cap A = \varnothing$.

Иными словами, регулярность постулируется у внешних множеств, не имеющих внутренних элементов.

Подчеркнем, что $\mathbb{V}^S \in \mathbb{V}^E$. Иначе говоря, выполнена обычная *аксиома приемлемости* [401, 3.4.17].

Напомним в этой связи, что внешнее множество A имеет *приемлемый размер* (или S-*размер*), если существует некоторая внешняя функция, отображающая $\mathbb{V}^S$ на A. При этом пишут $A \in \mathbb{V}^{\text{a-size}}$.

П5.7. Вторая группа аксиом NST содержит следующие утверждения:

(1) принцип моделирования для мира стандартных множеств: $\mathbb{V}^S$ — *это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории ZFC стандартизация φ^S — аксиома NST;

(2) аксиома транзитивности для внутренних множеств: $(\forall x \in \mathbb{V}^I) x \subset \mathbb{V}^I$, т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения: $\mathbb{V}^S \subset \mathbb{V}^I$, т. е. стандартные множества являются внутренними.

П5.8. Третью группу постулатов NST составляют такие схемы аксиом:

(1) принцип переноса:
$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n) \varphi^S(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I(x_1, \ldots, x_n)$
для каждой формулы $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ теории ZFC;

(2) принцип стандартизации:
$(\forall A)\,(\exists^{\mathrm{st}\, t})\,({}^\circ\! A \subset t) \to (\exists^{\mathrm{st}\, a})\,(\forall^{\mathrm{st}\, x})\,(x \in A \leftrightarrow x \in a)$,
где ${}^\circ\! A := A \cap \mathbb{V}^S$ — *стандартное ядро* A.

Возникающее множество a, очевидно, единственно. Его обозначают ${}^*A$ и называют *стандартизацией* A.

(3) принцип идеализации (схема аксиом насыщения):
$(\forall^{\mathrm{Int}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}} x_n)\,(\forall A \in \mathbb{V}^{\mathrm{a-size}})$
$\Big(\big((\forall z)\, z \subset A \wedge \mathrm{fin}^E(z) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,(\forall y \in z)\,\varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n)\big) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,(\forall^{\mathrm{Int}} y \in A)\,\varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n)\Big)$
для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ теории ZFC.

П5.9. *Теорема Каваи.* *Теория* NST *является консервативным расширением теории* ZFC.

П5.10. Как обычно, внутри $\mathbb{V}^E$ можно выделить универсум $\mathbb{V}^C$, составленный *классическими* (= стандартными или обычными в робинсоновском формализме) множествами, используя класс стандартных ординалов $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$. Именно,

$$\mathbb{V}^C_\beta := \{x : (\exists^{\mathrm{st}} \alpha \in \beta)\, x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^C_\alpha)\},$$
$$\mathbb{V}^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{\mathrm{St}}} \mathbb{V}^C_\beta.$$

При этом возникает робинсоновская стандартизация $* : \mathbb{V}^C \to \mathbb{V}^S$, определенная схемой рекурсии:

$$*\varnothing := \varnothing, \quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}.$$

Робинсоновская стандартизация обеспечивает справедливость *принципа Лейбница* в форме

$$(\forall x_1 \in \mathbb{V}^C)\ldots(\forall x_n \in \mathbb{V}^C)\,\varphi^C(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^S(x_1, \ldots, x_n)$$

для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ теории ZFC и ее релятивизаций φ^C и φ^S на $\mathbb{V}^C$ и $\mathbb{V}^S$ соответственно.

П5.11. Мир радикальной (и классической) установки нестандартного анализа также допускает аксиоматическое описание.

Опишем теорию UNST, проанализированную Т. Каваи. В UNST переменные изображают внешние множества. Имеются выделенные константы $\mathbb{V}^C$, $\mathbb{V}^I$ и $*$. Соответствующие внешние множества, естественно, называют *классическим миром, универсумом внутренних множеств* и *робинсоновской стандартизацией.* Специальные аксиомы UNST аналогичны NST.

П5.12. Устройство универсума UNST определяют следующие постулаты:

(1) Суперправило образования внешних множеств
(аналогичное 1.3.6 (1));

(2) Суженная аксиома фундирования
(ср. 1.3.6 (2)).

П5.13. Аксиомы связи миров множеств:

(1) Принцип моделирования для классических множеств:
мир $\mathbb{V}^C$ *— это универсум фон Неймана*;

(2) Аксиома транзитивности для внутренних множеств:
в форме 1.3.7 (2);

(3) Аксиома транзитивности для классических множеств:
$(\forall x \in \mathbb{V}^C)\, x \subset \mathbb{V}^C$
— классические множества составлены из классических элементов;

(4) Аксиома внешней сборки:
внешние подмножества классического множества являются классическими;

(5) Аксиома робинсоновской стандартизации:
$*$ *является* (*внешним*) *отображением* $\mathbb{V}^C$ в $\mathbb{V}^I$.

Очевидно, что в связи с П5.2 (3) существует единственное множество $\mathbb{V}^S$, составленное из стандартизаций $\mathbb{V}^S := *(\mathbb{V}^C)$. В UNST элементы $\mathbb{V}^S$ называют *стандартными множествами.* По аналогии с 1.3.6 (2), говорят, что множество A имеет *классический размер* (или *c-размер*), если существует внешняя функция из $\mathbb{V}^C$ на A. При этом пишут $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{c-size}}$.

П5.14. Постулаты нестандартного анализа в UNST имеют следующий вид:

(1) принцип переноса в форме Лейбница (см. 1.3.10);

(2) ПРИНЦИП ИДЕАЛИЗАЦИИ В ВИДЕ СХЕМЫ АКСИОМ НАСЫЩЕНИЯ для множеств классического размера (см. 1.3.8 (3)).

Наконец, *стандартизация* ${}^*A$ в UNST множества A (представляющего собой подмножество элемента $\mathbb{V}^S$) состоит в процедуре

$$
{}^*A := *(*^{-1}(A \cap \mathbb{V}^S)).
$$

Можно показать, что справедливо следующее утверждение.

П5.15. *Теорема.* *Теория* UNST *является консервативным расширением теории* ZFC.

При работе с аналитическими объектами удобно придерживаться свободной точки зрения, близкой к неоклассической и радикальной установкам нестандартного анализа. В частности, поле вещественных чисел нами часто рассматривается как стандартный элемент мира внутренних множеств, а классическая реализация $\mathbb{R}$ отождествляется со стандартным ядром ${}^\circ\mathbb{R}$. Символика, принятая в нестандартном анализе для бесконечно малых, монад и т. п., совпадает с представленной в [401]. Для специализации обозначений напомним некоторые детали.

П5.16. Простейшим примером фильтра служит, как известно, совокупность надмножеств некоторого непустого множества. Нестандартный анализ позволяет подобным же образом изучать произвольный стандартный фильтр как стандартизацию фильтра внешних надмножеств подходящим образом задаваемого внешнего множества — монады этого фильтра. Способ введения таких монад и их простейшие свойства рассматриваются в текущем параграфе.

П5.17. Пусть X — стандартное множество и $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра в X. Таким образом, $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$, $\varnothing \notin \mathscr{B}$ и B_1, $B_2 \in \mathscr{B} \to (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset B_1 \cap B_2)$. Символом $\mu(\mathscr{B})$ обозначают *монаду* $\mathscr{B}$, т. е. внешнее множество, определенное соотношением

$$
\mu(\mathscr{B}) := \bigcap \{B : B \in {}^\circ\mathscr{B}\}.
$$

П5.18. *Внутреннее множество является надмножеством некоторого стандартного элемента стандартного базиса фильтра* $\mathscr{B}$ *в том и только в том случае, если оно содержит монаду* $\mu(\mathscr{B})$.

П5.19. Нестандартные натуральные числа называют *актуальными бесконечно большими* или *недоступными.* Используя традиционную вольность речи, говорят о *бесконечных* числах.

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *доступным*, если найдется стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, для которого $|t| \leqslant n$. Условие доступности t из $\mathbb{R}$ символически записывают как $t \in \mathrm{ltd}(\mathbb{R})$ или $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}$, не являющиеся доступными, называют *недоступными* или *актуальными бесконечными числами.* Пишут $t \approx +\infty$ для $t \notin {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $t > 0$. По аналогии понимают записи $t \approx -\infty$ и $t \approx \infty$. Часто используют условное соглашение $t \approx +\infty \leftrightarrow t \in \mu(+\infty)$ и словесные обороты типа «число лежит в *монаде* бесконечно удаленной точки (в монаде плюс-бесконечности)».

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *бесконечно малым* или, более полно, *актуальным бесконечно малым*, если для всякого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ верно $|t| \leqslant 1/n$. При этом пишут $t \approx 0$ или $t \in \mu(\mathbb{R})$ и говорят, что t лежит в *монаде* нуля. Символ $\mu(\mathbb{R})$ используют наряду с обозначением $\mu(0)$, подчеркивая очевидную связь с единственной отделимой векторной топологией на $\mathbb{R}$. Бесконечно малые называют также *инфинитезималями.*

Если $x \leqslant y$ и разность между x и y не бесконечно мала, то пишут $x \ll y$. Поскольку $t \in {}^{\approx}\mathbb{R} \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)(|t| \ll N)$, доступность $t \in \mathbb{R}$ записывают также и формулой $|t| \ll +\infty$.

П5.20. Вся «нестандартная» расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}}$ и, что наиболее нетривиально, ее доступная часть ${}^{\approx}\mathbb{R}$ представляют собой наборы монад, размещенных в стандартных точках.

П5.21. *Для произвольного доступного числа существует и притом единственное бесконечно близкое к нему стандартное число.*

П5.22. Стандартное число, являющееся бесконечно близким к доступному числу $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, называют *стандартной частью* или *тенью* числа t и обозначают $\mathrm{st}(t)$ или ${}^{\circ}t$. Для удобства полагают также ${}^{\circ}t = \mathrm{st}(t) = +\infty$, если $t \approx +\infty$, и соответственно ${}^{\circ}t = \mathrm{st}(t) = -\infty$ при $t \approx -\infty$ (при этом, конечно же, считают, что $+\infty \approx +\infty$ и $-\infty \approx -\infty$). Таким образом, каждому (стандартному) $t \in \overline{\mathbb{R}}$ отнесена его монада $\mu(t)$, т. е. элементы s из $\mathbb{R}$, для которых $s \approx t$.

П5.23. В инфинитезимальном анализе распространен способ доказательств, основанный на том, что внешние множества, заданные «теоретико-множественным способом», — внутренние.

П5.24. *Пусть A — бесконечное множество. Для любого внутреннего свойства φ не верно, что $\{x : \varphi(x)\} = A - {}^{\circ}A$.*

В приложениях полезны и многие другие несложные формы принципов нестандартного анализа, основанные на различии внешних и внутренних множеств.

П5.25. *Имеют место утверждения:*

(1) **Принцип продолжения**. *Произвольная последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств A_n продолжается до внутренней последовательности $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$;*

(2) **Принцип переполненности**. *Если множество A внутреннее и ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset A$, то A содержит некоторое бесконечно большое число;*

(3) **Принцип незаполненности**. *Если множество A внутреннее и каждое бесконечно большое натуральное число принадлежит A, то A содержит некоторое стандартное натуральное число;*

(4) **Принцип доступности**. *Если внутреннее множество $B \subset \mathbb{R}$ состоит только из доступных элементов, то существует стандартное $t \in \mathbb{R}$, такое, что $B \subset [-t, t]$;*

(5) **Принцип перманентности**. *Если внутреннее множество B содержит все положительные доступные числа, то оно содержит и интервал $[0, \Omega]$ для некоторого бесконечно большого Ω;*

(5) **Принцип Коши.** *Если внутреннее множество B содержит все бесконечно малые числа, то оно содержит и интервал $[-a, a]$ для некоторого стандартного $a \in \mathbb{R}$;*

(6) **Принцип Робинсона.** *Если внутреннее множество B состоит только из бесконечно малых чисел, то B содержится в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$, где ε — бесконечно малое число.*

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. Александров А. Д. Выпуклые многогранники.—М.-Л.: ГТТИ, 1950.—428 с.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—430 с.
4. Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.
5. Бакан А. Г. Равенство Моро — Рокафеллара.—Киев, 1986.—40 с.—(Препринт/Ин-т математики АН УССР; 86.48).
6. Басаева Е. К. Квазидифференциалы в K-пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 3.—С. 14–30.
7. Басаева Е. К. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых программах // Владикавк. мат. журн. — 2004. — Т. 6, № 1 (в печати).
8. Басаева Е. К. Кусраев А. Г. Выпуклый анализ 6. Квазидифференциалы.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН.—2003.
9. Басаева Е. К. Кусраев А. Г. О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 4.—С. 10–25.
10. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960.—400 с.
11. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование.—М.: Изд-во МГУ, 1977.—196 с.
12. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды.—М.: Наука, 1983.—447 с.
13. Берже М. Геометрия. I, II.—М.: Мир, 1984.—559 с.; 336 с.

14. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—564 с.

15. Бляшке В. Круг и шар.—М.: Наука, 1967.—232 с.

16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1969.

17. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.—446 с.

18. Болтянский В. Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, вып. 3.—С. 3–55.

19. Буземан Г. Выпуклые поверхности.—М.: Наука, 1964.—238 с.

20. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства.—Л.: Наука, 1980.—288 с.

21. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.—410 с.

22. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.—М.: Наука, 1968.—272 с.

23. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.—М.: Наука, 1975.—408 с.

24. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

25. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

26. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.—М.: Наука, 1977.—624 с.

27. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.—М.: Наука, 1981.—340 с.

28. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

29. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

30. Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Калининск. ун-т, 1977.—84 с.

31. Вулих Б. З. Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Калининск. ун-т, 1978.—84 с.

32. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах // Мат. сб.—1971.—Т. 84, № 3.—С. 331–354.

33. Галеев Э., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—204 с.

34. Гамкрелидзе Р. В. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР Сер. мат.—1969.—Т. 33, № 4.—С. 781–839.

35. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления.—Тбилиси: Тбилисск. ун-т, 1977.

36. Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л. Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1971.—Т. 112.—С. 152–180.

37. Гирсанов И. В. Математическая теория экстремальных задач. —М.: Изд-во МГУ, 1970.—118 с.

38. Глазырина И. П. Об интегральном представлении субдифференциала // Тр. VIII Школы по теории операторов в функциональных пространствах.—Рига, 1983.—Т. 1.—С. 55–56.

39. Гоббс Т. Избранные произведения. Т. 1.—М.: Мысль, 1965.—583 с.

40. Гольштейн Е. Г. Задачи наилучшего приближения элементами выпуклого множества и некоторые свойства опорных функционалов // Докл. АН СССР.—1967.—Т. 173, № 5.—С. 995–998.

41. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.—М.: Наука, 1971.—352 с.

42. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

43. Гордон Е. И. Измеримые функции и интеграл Лебега в булевозначных моделях теории множеств с нормированными булевыми алгебрами// Деп. в ВИНИТИ, 1979, № 291–80.

44. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

45. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

46. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

47. Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Части 1 и 2.—Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 2001.—318 с.+248 с.

48. Гороховик В. В. О квазидифференцируемости вещественно-значных функций // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 266, № 6.— С. 1294–1298.

49. Гороховик В. В. О квазидифференцируемости вещественно-значных функций и условия локального экстремума // Сиб. мат. журн.— 1984.—Т. 25, № 3.—С. 62–70.

50. Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации.—Минск: Навука і тэхніка, 1990.—239 с.

51. Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач.—Киев: Наукова думка, 1979.—150 с.

52. Гусейнов Ф. В. О неравенстве Йенсена // Мат. заметки.— 1987.—Т. 41, № 6.—С. 798–806.

53. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. — С. 63–211.

54. Данфорд Н., Щварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—895 с.

55. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.— М.: Мир, 1968.—159 с.

56. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

57. Демьянов В. Ф. Кодифференцируемость и кодифференциалы негладких функций // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 303, № 5.— С. 1038–1042.

58. Демьянов В. Ф. О кодифференцируемых функциях // Вестн. Ленингр. ун-та.—1988.—№ 2 (8).—С. 22–26.

59. Демьянов В. Ф. Аппроксимация второго порядка для негладкой функции // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 3. — С. 529–532.

60. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука, 1981.—384 с.

61. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н. Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1980.—Т. 20, № 4.—С. 849–856.

62. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 250, № 1. — С. 21–25.

63. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О некоторых подходах к задачам негладкой оптимизации // Экономика и мат. методы.—1981.—Т. 17, № 6.—С. 1153–1174.

64. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.—432 с.

65. Демьянов В. Ф., Шомесова В. К. Условные субдифференциалы выпуклых функций // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 4.—С. 753–756.

66. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М. Об одном обобщении понятия субдифференциала // Тез. Всесоюз. конф. по динамическому управлению.—Свердловск.—1979.—С. 79–84.

67. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы.—Киев: Вища школа, 1980.—214 с.

68. Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, вып. 6.—С. 11–46.

69. Дорофеева А. В., Тихомиров В. М. От правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина // Историко-математические исследования.—1979.—Т. XXV.

70. Дубовицкий А. Я. Отделимость и трансляция уравнений Эйлера в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 1.—С. 200–211.

71. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1965.—Т. 5, № 3.—С. 395–453.

72. Дэй М. Нормированные линейные пространства.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—232 с.

73. Ерёмин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.—М.: Наука, 1976.—192 с.

74. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. —М.: Наука, 1976.—259 с.

75. Заславский А. Я. Описание некоторых классов опорных множеств // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 2.—С. 270–277.

76. Иоффе А. Д., Левин В. Л. Субдифференциалы выпуклых функций// Тр. Московск. мат. о-ва.—1972.—Т. 26.—С. 3–72.

77. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып. 6. — С. 51–116.

78. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.

79. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

80. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

81. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

82. Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

83. Канторович Л. В. О проблеме моментов для конечного интервала // Докл. АН СССР.—1937.—Т. 14, № 9.—С. 531–536.

84. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.—68 с.

85. Канторович Л. В. Функциональный анализ (Основные идеи) // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 7–16.

86. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, вып. 6. —С. 3–50.

87. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

88. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

89. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.—М.: Мир, 1964.—839 с.

90. Карманов В. Г. Математическое программирование.—М.: Наука, 1980.—256 с.

91. Келли Дж. Гиперполные линейные топологические пространства // Математика.—1960.—Т. 4, № 6.—С. 80–92.

92. Келли Дж. Общая топология.—М.: Наука, 1968.—383 с.

93. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т математики, № 26).

94. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М: Наука, 1981.—542 с.

95. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

96. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.—394 с.

97. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматгиз, 1958.—271 с.

98. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—256 с.

99. Крейн М. Г. О минимальном разложении функционала на положительные составляющие// Докл. АН СССР.—1940.—Т. 28, № 1.—С. 18–21.

100. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1.—С. 3–95.

101. Кругер А. Я. Субдифференциалы невыпуклых функций и обобщенные производные по направлениям // Деп. в ВИНИТИ в 1977, № 2661–77.

102. Кругер А. Я. О свойствах обобщенных дифференциалов // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 6.—С. 54–66.

103. Кругер А. Я. Обобщенные дифференциалы негладких функций и необходимые условия экстремума // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 3.—С. 78–90.

104. Куратовский К. Топология.—М.: Мир, 1966.—Т. 1.—594 с.

105. Кусраев А. Г. О необходимых условиях экстремума для негладких векторнозначных отображений // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 1.—С. 44–47.

106. Кусраев А. Г. О субдифференциальных отображениях выпуклых операторов // Оптимизация.—1978.—Вып. 21.—С. 36–40.

107. Кусраев А. Г. Субдифференцирование негладких операторов и необходимые условия экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями // Оптимизация.—1980.—Вып. 24.—С. 75–117.

108. Кусраев А. Г. Некоторые применения несплющенности в выпуклом анализе // Сиб. мат. журн. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 102–125.

109. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 257, № 4.—С. 822–826.

110. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

111. Кусраев А. Г. Некоторые правила подсчета касательных конусов // Оптимизация.—1982.—Вып. 29.—С. 48–55.

112. Кусраев А. Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе.—Новосибирск, 1982.—42 с. —(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).

113. Кусраев А. Г. О субдифференциалах композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 116–127.

114. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

115. Кусраев А. Г. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике для выпуклых соответствий // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 3.—С. 526–529.

116. Кусраев А. Г. О дискретном принципе максимума // Мат. заметки.—1983.—Т. 34, № 2.—С. 267–272.

117. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2. — С. 283–286.

118. Кусраев А. Г. Об одном классе выпуклых соответствий // Оптимизация.—1983.—Вып. 32.—С. 20–33.

119. Кусраев А. Г. Об открытости измеримых выпуклых соответствий // Мат. заметки.—1983.—Т. 33, № 1.—С. 41–48.

120. Кусраев А. Г. Абстрактное дезинтегрирование в пространствах Канторовича // Сиб. мат. журн.—1984.—Т. 25, № 5.—С. 79–89.

121. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы // Сиб. мат. журн. —1984.—Т. 25, № 4.—С. 107–110.

122. Кусраев А. Г. Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1984.—Т. 25, № 1.—С. 69–79.

123. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

124. Кусраев А. Г. О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.

125. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. Т. 9.—Новосибирск: Наука, 1987. —С. 84–123.

126. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 1: Булевы алгебры. Векторные решетки.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2000.—86 с.

127. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 2: Решеточно нормированные пространства.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2000.— 87 с.

128. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 3: Положительные операторы.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2001.—110 с.

129. Кусраев А. Г. Порядковый анализ. 4: Мажорируемые операторы.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2001.—100 с.

130. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.— 619 с.

131. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы в псевдотопологических векторных пространствах // Оптимизация. —1980.—Вып. 25.—С. 5–41.

132. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Свёртка Рокафеллара и характеристика оптимальных траекторий // Докл. АН СССР.— 1980.—Т. 290, № 2.—С. 280–283.

133. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

134. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Локальный выпуклый анализ // Современные проблемы математики.—М.: ВИНИТИ, 1982.—Т. 19.—С. 155–206.

135. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.— 1983.—Т. 24, № 5.—С. 109–132.

136. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1984.—80 с.

137. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы и их применения.—Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1985.—88 с.

138. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление.—Новосибирск: Наука, 1987.—224 с.

139. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—286 с.

140. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—170 с.

141. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна —Мильмана и пространства Канторовича// Оптимизация. — 1992. — Т. 51 (68). — С. 5–18.

142. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

143. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.—190 с.

144. Кусраев А. Г., Незе Р. О продолжении выпуклых операторов // Оптимизация.—1983.—Вып. 33.—С. 5–16.

145. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157. (Тр. Ин-та математики АН СССР, Сиб. отд-ние. Т. 7.)

146. Кутателадзе С. С. Выпуклость относительно конуса и ее приложения // Оптимизация.—1974.—Вып. 15 (32).—С. 115–125.

147. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.

148. Кутателадзе С. С. Субдифференциалы выпуклых операторов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 5.—С. 1057–1064.

149. Кутателадзе С. С. Формулы для вычисления субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 232, № 4.—С. 770–772.

150. Кутателадзе С. С. Крайние точки субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.

151. Кутателадзе С. С. Линейные задачи выпуклого анализа // Оптимизация.—1978.—Вып. 22.—С. 38–52.

152. Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. —1979.—Т. 34, вып. 1.—С. 167–196.

153. Кутателадзе С. С. Выпуклое ε-программирование // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 245, № 5.—С. 1048–1050.

154. Кутателадзе С. С. О признаках крайних операторов // Оптимизация.—1979.—Вып. 23.—С. 5–8.

155. Кутателадзе С. С. Модули, допускающие выпуклый анализ // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 252, № 4.—С. 789–791.
156. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
157. Кутателадзе С. С. ε-субдифференциалы и ε-оптимальность // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 3.—С. 120–130.
158. Кутателадзе С. С. О выпуклом анализе в модулях // Сиб. мат. журн.—1981.—Т. 22, № 4.—С. 118–128.
159. Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 3.—С. 521–524.
160. Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ касательных конусов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 284, № 3.—С. 525–527.
161. Кутателадзе С. С. Шапки и грани множеств операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 2.—С. 285–288.
162. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. — С. 84–92.
163. Кутателадзе С. С. Признаки субдифференциалов, изображающих шапки и грани // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 134–141.
164. Кутателадзе С. С. Инфинитезимали и исчисление касательных // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 123–135.
165. Кутателадзе С. С. Эпипроизводные, определяемые набором инфинитезималей // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 4. — С. 140–144.
166. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева, 2001. — 354 с.
167. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—254 с.
168. Кутателадзе С. С., Фельдман М. М. Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации // Докл. АН СССР.—1976. —Т. 231, № 1.—С. 28–31.
169. Левашов В. А. Внутренняя характеризация классов опорных множеств // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 3.—С. 131–143.
170. Левашов В. А. Операторные аналоги теоремы Крейна — Мильмана//Функц. анализ и его прил.—1980.—Т. 14, № 2.—С. 61–62.

171. Левашов В. А. Об операторных ортогональных дополнениях // Мат. заметки.—1980.—Т. 28, № 1.—С. 127–130.

172. Левашов В. А. Субдифференциалы сублинейных операторов в пространствах непрерывных функций // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 252, № 1.—С. 33–36.

173. Левин В. Л. Условия B-полноты ультрабочечных и бочечных пространств//Докл. АН СССР.—1962.—Т. 145, №2.—С. 273–276.

174. Левин В. Л. О некоторых свойствах опорных функционалов // Мат. заметки.—1968.—Т. 4, № 6.—С. 685–696.

175. Левин В. Л. О субдифференциалах выпуклых функционалов // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 25, вып. 4.—С. 183–184.

176. Левин В. Л. О субдифференциале составного функционала // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 194, № 2.—С. 268–269.

177. Левин В. Л. Субдифференциалы выпуклых отображений и сложных функций // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 6.—С. 1295–1303.

178. Левин В. Л. Выпуклые интегральные функционалы и теория лифтинга // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30, вып. 2. — С. 115–178.

179. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

180. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Об условиях локального минимума в задачах с ограничениями // Математическая экономика и функциональный анализ.—М.: Наука, 1974.—С. 139–202.

181. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, вып. 6.—С. 85–148.

182. Лехтвейс К. Выпуклые множества.—М.: Наука, 1985.—335 с.

183. Линке Ю. Э. Сублинейные операторы со значениями в пространствах непрерывных функций // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 228, № 3.—С. 540–542.

184. Линке Ю. Э. Проблема существования субдифференциала для непрерывных и компактных сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 315, № 4.—С. 784–787.

185. Линке Ю. Э., Толстоногов А. А. О свойствах пространств сублинейных операторов//Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 4.—С. 792–806.

186. Лифшиц Е. А. Идеально выпуклые множества // Функциональный анализ и его приложения.—1970.—Т. 4, № 4.—С. 76–77.

187. Лозановский Г. Я. О дискретных функционалах в пространствах Марцинкевича и Орлича //Исследования по теории функций многих вещественных переменных / Межвузовск. тематич. сб.—Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1987.—Вып. 2—С. 132–147.

188. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.—М.: Мир, 1975. —496 с.

189. Магарил-Иляев Г. Г. Теорема о неявной функции для липшицевых отображений // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, вып. 1.—С. 221–222.

190. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Едиториал УРСС, 2003.—176 с.

191. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 27, вып. 5.—С. 125–169.

192. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.—М.: Наука, 1973.—335 с.

193. Малюгин С. А. О квазирадоновых мерах // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 101–111.

194. Михалевич В. С., Гупала А. М., Норкина В. И. Методы невыпуклой оптимизации. —М.: Наука, 1987.—280 с.

195. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.—М.: Наука, 1978.—352 с.

196. Мордухович Б. Ш. Принцип максимума в задаче оптимального быстродействия с негладкими ограничениями // Прикл. мат. мех.—1976.—Т. 40.—С. 1004–1023.

197. Мордухович Б. Ш. Негладкий анализ с невыпуклыми обобщенными дифференциалами и сопряженными отображениями // Докл. АН БССР.—1984.—Т. 28, № 11.—С. 976–979.

198. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления.—М.: Наука, 1988.

199. Никишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 25, вып. 6.—С. 129–191.

200. Никкайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.—М.: Мир, 1972.—518 с.

201. Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач.—Киев: Наукова думка, 1979.—159 с.

202. Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.

203. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. —М.: Мир, 1989.—492 с.

204. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.—М.: Наука, 1983.—384 с.

205. Полякова Л. Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестн. Ленингр. ун-та.—1980.— № 13.—С. 57–62.

206. Полякова Л. Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестн. Ленингр. ун-та.—1982.—№ 7.—С. 75–80.

207. Полякова Л. Н. Достаточные условия локального экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестн. Ленингр. ун-та.—1985.—№ 22.— С. 26–30.

208. Птак В. Полнота и теорема об открытом отображении // Математика.—1960.—Т. 4, № 6.—С. 39–67.

209. Птак В. Теорема о замкнутом графике // Математика.—1960. —Т. 4, № 6.—С. 69–72.

210. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. —М.: Наука, 1980.—320 с.

211. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума.—М.: Наука, 1982.—144 с.

212. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.—М.: Наука, 1975.—320 с.

213. Раднаев В. А. О решеточно безатомных субдифференциалах // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 853–859.

214. Раднаев В. А. О метрической n-неразложимости в упорядоченных решеточно нормированных пространствах и ее приложения. Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук., ИМ СО РАН, Новосибирск, 1997.

215. Райков Д. А. Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. журн.— 1966.—Т. 7, № 2.—С. 353–372.

216. Ржевский С. В. О структуре метода условного ε-субградиента одновременного решения прямой и двойственной задач выпуклого программирования // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1055–1059.

217. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.

218. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.

219. Рокафеллар Р. Т. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами // Математическая экономика. — М.: Мир, 1974. — С. 170–204.

220. Рокафеллар Р. Т. Выпуклые интегральные функционалы и двойственность// Математическая экономика.—М.: Мир, 1974. —С. 222–237.

221. Рубинов А. М. Сублинейные операторы и операторно-выпуклые множества // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 370–380.

222. Рубинов А. М. Сублинейные операторы и их приложения // Успехи мат. наук.—1977.—Т. 32, вып. 4.—С. 113–174.

223. Рубинов А. М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.— Л.: Наука, 1980.—166 с.

224. Рубинштейн Г. Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 25, вып. 5.—С. 171–201.

225. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.—443 с.

226. Смейл С. Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, вып. 3.—С. 177–187.

227. Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. —Кишинёв: Штиинца, 1984.—223 с.

228. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.—306 с.

229. Тихомиров В. М. Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления.—М.: Изд-во МГУ, 1982.—110 с.

230. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Анализ II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 14.—С. 5–102.

231. Тихомиров В. М. Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 19.—С. 103–260.

232. Толстоногов А. А. О некоторых свойствах пространств сублинейных функционалов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 2.—С. 429–443.

233. Федоренко Р. П. О минимизации негладких функций // Журн. вычислит. математики и мат. физики.—1981.—Т. 21, № 3.—С. 572–584.

234. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке.—М.: Мир, 1968.—112 с.

235. Фельдман М. М. О достаточных условиях существования опорных к сублинейным операторам // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 1.—С. 132–138.

236. Фельдман М. М. О сублинейных операторах, определенных на конусе // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 6.—С. 1308–1321.

237. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации.—М.: Мир, 1972.

238. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.

239. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.

240. Шамаев И. И. О разложении и представлении регулярных операторов //Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 2.—С. 192–202.

241. Шашкин Ю. А. Выпуклые множества, экстремальные точки, симплексы // Итоги науки. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1972.—Т. 11.—С. 5–51.

242. Шеффер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.—359 с.

243. Шомесова В. К. Минимизация одного класса субдифференцируемых функций // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. VII Всесоюз. конф. Ч. 2.—Горький.—1988.—С. 167.

244. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.—Киев: Наукова думка, 1979.

245. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
246. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Мир, 1979.—400 с.
247. Энгелькинг Р. Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.
248. Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—234 с.
249. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования.—М.: Сов. радио, 1979.—392 с.
250. Яковенко С. Ю. О понятии бесконечной экстремали в стационарных задачах динамической оптимизации // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 308, № 4.—С. 798–812.
251. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.
252. Achilles A., Elster K.-H., and Nehse R. Bibliographie zur Vectoroptimierung // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1972.—V. 10, No. 2.—P. 227–321.
253. Alfsen E. M. Compact Convex Sets and Boundary Integrals.—Berlin etc.: Springer, 1971.—ix+210 p.
254. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York: Academic Press, 1978.—198 p.
255. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—359 p.
256. Andenaes P. S. Hahn–Banach extensions which are maximal on a given cone // Math. Ann.—1970.—V. 188.—P. 90–96.
257. Arrow K. J., Hurwicz L., and Uzawa H. Studies in Linear and Non-Linear Programming.—Stanford: Stanford University Press, 1958.—229 p.
258. Asimow L. Extremal structure of well-capped convex sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—V. 138.—P. 363–375.
259. Asimow L. and Ellis A. S. Convexity Theory and Its Applications in Functional Analysis.—London: Academic Press, 1980.—266 p.
260. Asplund E. Fréchet differentiability of convex functions // Acta Math.—1968.—V. 121, No. 1–2.—P. 31–47. Imperial College, 1980.—P. 1–44.
261. Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators.—Boston etc.: Pitman, 1984.

262. Attouch H. and Beer G. On the convergance of subdifferentials of convex functions // Arch. Math.—1993.—V. 60.—P. 389–400.
263. Attouch H. and Wets R. J.-B. Isometries for the Legendre–Fenchel transform // Trans. Amer. Math. Soc.—1986.—V. 296, No. 1.—P. 33–60.
264. Aubin J.-P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory. —Amsterdam: North-Holland, 1979.
265. Aubin J.-P. Nonlinear Analysis and Motivations from Economics [in French].—Paris: Masson, 1984.
266. Aubin J.-P. Graphical Convergence of Set-Valued Maps.—Laxenburg: IIASA, 1987.
267. Aubin J.-P. Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1993.
268. Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis.—Boston etc.: Birkhäuser, 1990.—xix+461 p.
269. Aubin J.-P. and Vinter R. B. (eds.) Convex Analysis and Applications.—London: Imperial College, 1980.—210 p.
270. Aubin J.-P. and Wets R. J.-B. Stable approximations of set-valued maps // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.—1988.—V. 5, No. 6.—P. 519–535.
271. Baker J. W. Continuity in ordered spaces // Math. Z.—1968.—V. 104, No. 3.—P. 231–246.
272. Balinski M. L., Wolfe P. (eds.) Nondifferentiable Optimization.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1975. (Math. Programming Stud. 3).
273. Ballard D. and Hrbáček K. Standard foundations of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1992.—V. 57.—No. 2.—P. 741–748.
274. Barbu V. and Precupanu Th. Convexity and Optimization in Banach Spaces.—Bucureshti: Acad. R. S. R., Nordkoff etc., Int. Publ., 1978.—316 p.
275. Bazaraa M. S. and Goode J. J. Necessary optimality criteria in mathematical programming in normed linear spaces // J. Optim. Theory Appl.—1973.—V. 11, No. 3.—P. 235–244.
276. Bazaraa M. S., Goode J. J., and Nashed M. Z. On the cones of tangent with applications to mathematical programming // J. Optim. Theory Appl.—1974.—V. 13, No. 4.—P. 389–426.
277. Beer G. On Mosco convergence of convex sets // Bull. Austral. Math. Soc.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 239–253.

278. Beer G. On the Young–Fenchel transformation for convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — V. 104, No. 4. — P. 1115–1123.

279. Beer G. Conjugate convex functions and the epi-distance topology // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 108, No. 1. — P. 117–126.

280. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—Oxford: Clarendon Press, 1979.—126 p.

281. Benko I. and Scheiber E. Monotonic linear extensions for ordered modules, their extremality and uniqueness // Mathematica.—1989. —V. 25, No. 2.—P. 119–126.

282. Berger M. Nonlinearity and Functional Analysis.—New York: Academic Press, 1977.

283. Bernau S. J. Sums and extensions of vector lattice homomorphisms // Acta Appl. Math.—1992.—V. 27, No. 1–2.—P. 33–45.

284. Bernau S. J., Huijsmans C. B., and de Pagter B. Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 115, No. 1.—P. 151–156.

285. Bigard A. Modules ordonnes injectifs // Mathematica.—1973.— V. 15, No. 1.—P. 15–24.

286. Bishop E. and Phelps R. R. The support functional of a convex set // V. L. Klee (ed.) Convexity.— AMS Proc. Symp. Pure Math.—1963.—V. 4.—P. 27–35.

287. Bonnesen T. and Fenchel W. Theorie der Konvexen Körper.— Berlin: Springer, 1934.—164 p.

288. Bonnice W. and Silvermann R. The Hahn–Banach extension and the least upper bound properties are equivalent // Proc. Amer. Math. Soc.—1967.—V. 18, No. 5.—P. 843–850.

289. Bonsall F. F. Endomorphisms of partially ordered spaces without order unit // J. London Math. Soc. — 1955. — V. 30, No. 2. — P. 144–153.

290. Bonsall F. F., Lindenstrauss J., and Phelps R. R. Extreme positive operators on algebras of functions // Math. Scand.—1966.—V. 18, No. 2.—P. 161–182.

291. Borwein J. M. A multivalued approach to the Farkas lemma // Math. Programming Stud.—1979.—V. 10, No. 1.—P. 42–47.

292. Borwein J. M. A Lagrange multiplier theorem and sandwich theorems for convex relations // Math. Scand.—1981.—V. 48, No. 2.—P. 189–204.

293. Borwein J. M. Convex relations in analysis and optimization // Generalized Concavity.—New York etc.: Academic Press, 1981.—P. 336–377.

294. Borwein J. M. Continuity and differentiability properties of convex operators // Proc. London Math. Soc.—1982.—V. 44.—P. 420–444.

295. Borwein J. M. Subgradients of convex operators // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization. — 1984. — V. 15. — P. 179–191.

296. Borwein J. M. and Preiss D. A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 303, No. 2. —P. 517–527.

297. Borwein J. M. and Strojwas H. M. Tangential approximations // Nonlinear Analysis.—1985.—V. 9.—P. 1347–1366.

298. Borwein J. M. and Strojwas H. M. Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. Part I: Theory // Canad. J. Math. — 1986. — V. 38. — P. 431–452; Part II: Applications // Canad. J. Math.—1987.—V. 39.—P. 428–472.

299. Borwein J. M., Penot J.-P., and Thera M. Conjugate convex operators // J. Math. Anal. Appl.—1989.—V. 102.—P. 399–414.

300. Bouligand G. Introduction a la Géometrie Infinitésimale Directe.—Paris: Gautie-Villars, 1932.

301. Bourgin R. D. Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon–Nikodým Property.—Berlin etc.: Springer, 1993.— (Lecture Notes in Math. 993).

302. Breckner W. W. and Orban G. Continuity Properties of Rationally s-Convex Mappings with Values in Ordered Topological Linear Spaces.—Cluj-Napocoi: Babes-Bolyai University, 1978.—92 p.

303. Breckner W. W. and Scheiber E. A Hahn-Banach type extension theorem for linear mappings into ordered modules // Mathematica. —1977.—V. 19, No. 1.—P. 13–27.

304. Bronsted A. Conjugate convex functions in topological vector spaces // Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.—1962.—V. 34, No. 2.—P. 1–26.

305. Bronsted A. and Rockafellar R. T. On the subdifferentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1965.—V. 16.—P. 605–611.

306. Buskes G. Extension of Riesz homomorphisms // Austral. Math. Soc. Ser. A.—1987.—V. 43.—P. 35–46.

307. Buskes G. The Hahn–Banach Theorem Surveyed // Dissertationes Math.—1993.—49 p.

308. Buskes G. and van Rooij A. Hahn–Banach extensions for Riesz homomorphisms // Indag. Math. (N.S.)—1989.—V. 51, No. 1.—P. 25–34.

309. Carathéodory K. Uber den Variabilitätsbereich Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Functionen // Rend. Circ. Mat. Palermo.—1911.—V. 32.—P. 193–217.

310. Castaing Ch. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. — Berlin etc.: Springer, 1977. — 278 p. — (Lecture Notes in Math. 580).

311. Christensen J. P. R. Topology and Borel Structure.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1974.—138 p.

312. Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 205, No. 2.—P. 247–262.

313. Clarke F. H. A new approach to Lagrange multipliers // Math. Oper. Res.—1976.—V. 1, No. 2.—P. 165–174.

314. Clarke F. H. On the inverse function theorem // Pacific J. Math.—1976.—V. 64, No. 1.—P. 97–102.

315. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.—New York: Wiley, 1983.

316. Clarke F. H. Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization. —Philadelphia: SIAM, 1989.—(CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics; 57).

317. Cochrane J. L., Zeleny M. (eds.) Multiple Criteria Decision Making. —Columbia, S.C.: University of South Carolina Press, 1973.

318. Collins H. S. Completeness and compactness in linear topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79.—P. 256–280.

319. Cooper J. L. B. Coordinated spaces // Proc. London Math. Soc.—1953.—V. 3, No. 3.—P. 305–327.

320. Cooper J. L. B. On generalization of the Köthe coordinate spaces// Math. Ann.—1966.—V. 162, No. 3.—P. 351–363.

321. Cornet B., Nguyen V. H., Vial J. P. (eds.) Nonlinear Analysis and Optimization. (Papers of the Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Belgium, June 16–17, 1983). Math. Programming Stud. 30.—Amsterdam: North-Holland, 1987.—vii+182 p.

322. Crenshaw J. A. Extreme positive linear operators // Math. Scand. —1969.—V. 25, No. 2.—P. 195–217.

323. Dales H. G. Automatic continuity: a survey // Bull. London Math. Soc.—1978.—V. 10, No. 29.—P. 129–183.

324. Debieve C. On Banach spaces having a Radon–Nikodým dual // Pacific J. Math.—1985.—V. 120, No. 2.—P. 327–330.

325. Deimling K. Nonlinear Functional Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1985.—xiv+450 p.

326. Demulich R. and Elster K.-H. F-conjugation and nonconvex optimization (Part 3) // Optimization. — 1985. — V. 16, No. 6. — P. 789–804.

327. Demulich R., Elster K.-H., and Nehse R. Recent results on the separation of convex sets // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1978.—V. 9.—P. 273–296.

328. Demyanov V. F. Continuous generalized gradients for nonsmooth functions // Lecture Notes Econ. Math. Syst.—Berlin: Springer, 1988.—V. 304.—P. 24–27.

329. Demyanov V. F. and Rubinov A. M. On quasidifferentiable mappings// Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14.—P. 3–21.

330. Demyanov V. F. and Rubinov A. M. Quasidifferential Calculus.—New York: Optimization Software, 1986.— 301 p.

331. Demyanov V. F., Dixon L. C. W. (eds.) Quasidifferential Calculus. — Amsterdam: North-Holland, 1986.—221 p. (Math. Programming Stud. 29).

332. Demyanov V. F., Pallaschke D. (eds.) Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications.—Berlin etc.: Springer, 1985.—349 p.—(Lecture Notes Econ. Math. Syst. 225).

333. Demyanov V., Rubinov A. (eds.) Quasidifferentiability and Related Topics.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—400 p.—(Nonconvex Optim. Its Appl. 43).

334. Demyanov V. F., Stavroulakis G. E., Polyakova L. N., and Panagiotopoulos P. D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in

Mechanics, Engineeing and Economics.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.—349 p.

335. Deville R., Godefroy G., and Zizler V. Un principle variationel utilisant des fonctions bosses // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1991.—V. 312, No. 1.—P. 281–286.

336. De Wilde M. Closed-Graph Theorems and Webbed Spaces.— London: Pitman, 1978.—150 p.

337. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.—(Series: Mathematical Surveys; **15**).

338. Dieudonné J. History of Functional Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—312 p.

339. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

340. Dolecki S. A general theory of necessary optimality conditions // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 78, No. 12.—P. 267–308.

341. Dolecki S. Tangency and differentiation: Some applications of convergence theory // Ann. Mat. Pura Appl.—1982.—V. 130.—P. 223–255.

342. Dolecki S. Tangency and differentiation: Marginal functions // Adv. in Appl. Math.—1990.—V. 11, No. 4.—P. 388–411.

343. Dulst van D. Characterization of Banach Spaces Not Containing l_1.—Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1969.

344. Egglestone M. Convexity.—Cambridge: Cambridge Univ., 1958.—136 p.

345. Ekeland I. On a variational principle // J. Math. Anal. Appl.—1974.—V. 47.—P. 324–353.

346. Ekeland I. Nonconvex optimization problems//Bull. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 1, No. 3.—P. 443–474.

347. Elster K.-H. and Nehse R. Konjugierte operatoren und Subdifferentiale // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1975.—V. 6.—P. 641–657.

348. Elster K.-H. and Nehse R. Necessary and sufficient conditions for the order completeness of partially ordered vector spaces // Math. Nachr.—1978.—V. 81.—P. 301–311.

349. Elster K.-H. and Thierfelder J. Abstract cone approximations and generalized differentiability in nonsmooth optimization // Optimization.—1983.—V. 19, No. 3.—P. 315–341.

350. Essays on Nonlinear Analysis and Optimization Problems.—Hanoi: Not. Center Ser. Res., Inst. of Math., 1987.

351. Evers J. and Maaren H. Duality principles in mathematics and their relations to conjugate functions // Nieuw Arch. Wisk.—1985.—V. 3, No. 1.—P. 23–68.

352. Fabian M. On minimum principles // Acta Polytech. — 1983. — V. 20. — P. 109–118.

353. Fenchel W. On conjugate convex functions // Canad. J. Math. Soc. —1949.—V. 1, No. 1.—P. 73–77.

354. Fenchel W. Convex Cones, Sets and Functions.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1953.

355. Floret K. Weakly Compact Sets.—Berlin etc.: Springer, 1980.—(Lecture Notes in Math. 81).

356. Fuchssteiner B. and Lusky W. Convex Cones.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1981.—x+428 p.

357. Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. —New York etc.: Oxford Univ. Press, 1990.

358. van Gaans O. W. Seminorms on Ordered Vector Spaces.—Nijmegen: Univ. Nijmegen, 1999.—115 p. (Ph. D. Thesis University of Nijmegen.)

359. Georgiev P. G. Locally Lipschitz and regular functions are Fréchet differentiable almost everywhere in Asplund spaces // C. R. Acad. Bulgare Sci.—1989.—V. 2, No. 5.—P. 13–15.

360. Giles J. R. Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions.—Boston etc.: Pitman, 1982.—x+ 278 p.

361. Giles J. R. On the characterization of Asplund spaces // J. Austral. Math. Soc.—1982.—V. 32.—P. 134–144.

362. Godefroy G. and Suphar P. Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces // Illinois J. Math.—1988.—V. 32, No. 4.—P. 672–695.

363. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

364. Gorokhovik V. V. ε-quasidifferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems// V. F. Demyanov, L. C. W. Dixon (eds.) Quasidifferential Calculus.—Amsterdam: North-Holland, 1986.—P. 203–218.

365. Groussoub N. Perturbation Methods in Critical Point Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

366. Gruber P. M. Results of Baire category type in convexity // Discrete Geometry and Convexity, Ann. New York Acad. Sci.—1985.—V. 440.—P. 163–169.

367. Gruber P. M., Wills J. M. (eds.) Handbook on Convex Geometry. Vol. A. and B.—Amsterdam: Elsevier, 1993.

368. Gruder S. and Schroeck F. Generalized convexity // SIAM J. Math. Anal.—1980.—V. 11, No. 6.—P. 984–1001.

369. Grünbaum B. Convex Polytopes.—New York: Wiley, 1967.—238 p.

370. Halkin H. Nonlinear nonconvex programming in infinite-dimensional spaces // Mathematical Theory of Control.—New York: Academic Press, 1967.—P. 10–25.

371. Handschug M. On equivalent quasidifferentials in the two-dimensional case // Optimization.—1989.—V. 20, No. 1.—P. 37–43.

372. Handschug M. On one class of equivalent quasidifferentials // Vestnik Leningrad Univ. Math.—1989.—No. 8.—P. 28–31.

373. Helly E. Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinschaflichen Punkten // Iber. Deutsch. Math. Verein. — 1923. — V. 32. — P. 175–176.

374. Hiriart-Urruty J.-B. On optimality conditions in nondifferentiable programming // Math. Programming.—1978.—V. 14, No. 1.—P. 73–86.

375. Hiriart-Urruty J.-B. New concepts in nondifferentiable programming // Bul. Soc. Math. France.—1979.—Mem. 60.—P. 57–85.

376. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Res.—1979.—V. 4, No. 1.—P. 79–97.

377. Hiriart-Urruty J.-B. Miscellanies on nonsmooth analisys and optimization // V. F. Demyanov, D. Pallaschke (eds.) Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications.—Berlin etc.: Springer, 1985.—P. 8–24.

378. Hiriart-Urruty J.-B. and Seeger B. The second order subdifferential and the Dupin indicatrices of a nondifferentiable convex function // Proc. London Math. Soc.—1989.—V. 58, No. 2.—P. 351–365.

379. Hochstadt H. Edward Helly, father of the Hahn–Banach theorem // Math. Intelligencer.—1980.—V. 2, No. 3.—P. 123–125.

380. Hogbe-Nlend H. Theorie des Bornologie et Applications.— Berlin etc.: Springer, 1971.—168 p.

381. Holmes R. B. Geometric Functional Analysis and Its Applications. —Berlin etc.: Springer, 1975.—239 p.

382. Hörmander L. Notions of Convexity.—Basel: Birkhäuser, 1994.—viii+414 p.

383. Hrbáček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

384. Ioffe A. D. Differentielles generalisees d'applications localement lipschitziennes d'un espace de Banach dans un autre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1979.—V. 289.—P. 637–640.

385. Ioffe A. D. Necessary and sufficient conditions for a local minimum. 1–3 // SIAM J. Control Optim.—1979.—V. 17, No. 2.—P. 245–288.

386. Ioffe A. D. On foundations of convex analysis // Ann. New York Acad. Sci.—1980.—V. 337.—P. 103–117.

387. Ioffe A. D. A new proof of the equivalence of the Hahn–Banach extension and the least upper bound properties // Proc. Amer. Math. Soc.—1981.—V. 82, No. 3.—P. 385–389.

388. Ioffe A. D. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings // Trans. Amer. Math. Soc.—1981.—V. 266, No. 1.—P. 1–56.

389. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. I: The finite-dimensional case // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 281.—P. 389–416.

390. Ioffe A. D. Necessary conditions in nonsmooth optimization // Math. Oper. Res.—1984.—V. 9, No. 2.—P. 159–189.

391. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. II // Mathematika.—1986.—V. 33.—P. 111–128.

392. Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. III: The metric theory // Mathematika.—1989.—V. 36, No. 1.—P. 1–38.

393. Ioffe A. D. On some recent developments in the theory of second order optimality conditions // Optimization (S. Dolecki, ed.).—New York etc.: Springer, 1989.—(Lecture Notes in Math. 1405).

394. Ioffe A. D. Proximal analysis and approximate subdifferentials // J. London Math. Soc.—1990.—V. 41, No. 1.—P. 175–192.

395. Ioffe A. D. Variational analysis of a composite function: a formula for the lower second order epi-derivative // J. Math. Anal. Appl.—1991.—V. 160, No. 2.—P. 379–405.

396. Ioffe A. D. and Rubinov A. M. Abstract convexity and nonsmooth analysis. Global aspects // Adv. in Math. Econom.—2002.—V. 4.—P. 1–23.

397. Jahn J. Duality in vector optimization // Math. Programming.—1983.—V. 25.—P. 343–355.

398. Jahn J. Zur vektoriellen linearen Tschebyscheff Approximation // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14, No. 4.—P. 577–591.

399. Jameson G. J. O. Ordered Linear Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1970.—194 p.—(Lecture Notes in Math. 141).

400. Jameson G. J. O. Convex series // Proc. Cambridge Philos. Soc.—1972.—V. 72, No. 1.—P. 37–47.

401. Jameson G. J. O. The duality of pairs of wedges // Proc. London Math. Soc.—1972.—V. 24, No. 3.—P. 531–547.

402. Jarchow H. Locally Convex Spaces.—Stuttgart: Teubner, 1981.

403. Jarosz K. Nonlinear generalizations of the Banach–Stone theorem // Studia Math.—1989.—V. 93, No. 2.—P. 97–107.

404. Jofre A. and Thibault L. D-representation of subdifferentials of directionally Lipschitz functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—V. 110, No. 1.—P. 117–123.

405. Johnson W. B. and Zippin M. Extension of operators from subspaces of $c_0(E)$ into $C(K)$ spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 107, No. 1.—P. 751–754.

406. de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.—ix+229 p.

407. Jourani A. and Thibault L. The use of metric graphical regularity in approximate subdifferential calculus rules in finite dimensions // Optimization.—1990.—V. 21, No. 4.—P. 509–520.

408. Jürg M. Konvexe Analysis.—Stuttgart etc.: Birkhäuser Verlag, 1977. —xi+273 p.

409. Kantorovich L. V. The method of successive approximation for functional equations // Acta Math.—1939.—V. 71.—P. 63–97.

410. Karush W. Minima of Functions of Several Variables with Inequialities as Side Conditions. Master's Thesis.—Chicago: University of Chicago, 1939.

411. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer, 1981.—P. 57–65.

412. Kawai T. Nonstandard analysis by axiomatic method // Southeast Asian Conf. on Logic.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—P. 55–76.

413. Kay D. C., Breen M. (eds.) Convexity and Related Combinatorial Geometry.—New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1982.—viii+243 p.—(Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 76).

414. Kelley J. and Namioka I. Linear Topological Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1976.—256 p.

415. Kindler J. Sandwich theorems for set functions // J. Math. Anal. Appl.—1988.—V. 133, No. 2.—P. 529–542.

416. Kirov N. K. Generalized monotone mappings and differentiability of vector-valued convex mappings // Serdica.—1983.—V. 9.—P. 263–274.

417. Kirov N. K. Generic Fréchet differentiability of convex operators // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 94, No. 1.—P. 97–102.

418. Kjeldsen T. H. A contextualized historical analysis of the Kuhn–Tucker theorem in nonlinear programming: the impact of World War II // Historia Math.—2000.—V. 27, No. 4.—P. 331–361.

419. Klee V. Extremal structures of convex sets // Math. Z.—1958.—V. 69.—P. 98.

420. Kollatz L. Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.—Berlin etc.: Springer, 1964.

421. Komuro N. On basic properties of convex functions and convex integrands // Hokkaido Math. J.—1989.—V. 18, No. 1.—P. 1–30.

422. Konig H. On the abstract Hahn–Banach theorem due to Rodé // Aequationes Math.—1987.—V. 34, No. 1.—P. 89–95.

423. Koshi Sh. and Komuro N. A generalization of the Fenchel-Moreau theorem // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.—1983.—V. 59.—P. 178–181.

424. Koshi Sh., Lai H. C., and Komuro N. Convex programming on spaces of measurable functions // Hokkaido Math. J. — 1985. — V. 14. — P. 75–84.

425. Köthe G. Topological Vector Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1969.

426. Köthe G. Topological Vector Spaces. II.—Berlin etc.: Springer, 1980.—331 p.

427. Krein M. G. and Mil′man D. P. On the extreme points of regularly convex sets // Studia Math.—1940.—V. 9.—P. 133–138.

428. Kuhn H. Nonlinear programming: a historical view // Nonlinear Programming.—Providence: Amer. Math. Soc., 1976.—P. 1–26.

429. Kuhn H. and Tucker A. Nonlinear programming // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.—Berkeley: University of California Press, 1951.—P. 481–492.

430. Kurepa G. Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés // C. R. Acad. Sci Paris Sér. I Math. — 1934. — V. 198. — P. 1563–1565.

431. Kusraev A. G. Boolean-valued convex analysis // Mathematische Optimierung. Theorie und Anvendungen.—Eisenach: Wartburg, 1983.—P. 106–109.

432. Kusraev A. G. Reflexivity of lattice-normed spaces // Sem. Inst. Prikl. Mat. Dokl.—1984.—No. 18.—P. 55–57.

433. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—446 p.

434. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.

435. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl.—1992.—V. 151, No. 2.—P. 91–105.

436. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Subdifferentials: Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.

437. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1975.—247 p.

438. Levi F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity // J. Indian Math. Soc.—1951.—V. 7, No. 4.—P. 44–78.

439. Lifshitz E. A. Ideally convex sets // Funct. Anal. Appl.—1970.—V. 4, No. 4.—P. 76–77.

440. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1979.—243 p.

441. Lipecki Z. Extension of positive operators and extreme points. II, III // Colloq. Math.—1979.—V. 42, No. 2.—P. 285–289; 1982.—V. 46, No. 2.—P. 263–268.

442. Lipecki Z. Extension of vector lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 79.—P. 247–248.

443. Lipecki Z. Maximal-valued extensions of positive operators// Math. Nachr.—1984.—V. 117.—P. 51–55.

444. Lipecki Z. and Thomsen W. Extension of positive operators and extreme points. IV // Colloq. Math.—1982.—V. 46.—P. 267–273.

445. Lipecki Z., Plachky D., and Thomsen W. Extension of positive operators and extreme points. I // Colloq. Math.—1979.—V. 42, No. 2.—P. 279–284; 1982.—V. 46, No. 2.—P. 269–273.

446. Loeb P. A., Wolff M. (eds.) Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.—2000.—311 p.

447. Loewen P. The proximal subgradient formula in Banach space // Canad. J. Math.—1988.—V. 31, No. 3.—P. 353–361.

448. Loewen P. D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.—ix+153 p.

449. Lomonosov V. I. A countrexample to Bishop–Phelps theorem in complex spaces // Israel J. Math.—2000.—V. 115.—P. 25–28.

450. Loridan R. ε-solutions in vector minimization problems // J. Optim. Theory Appl.—1984.—V. 43, No. 2.—P. 256–276.

451. Lucchetti R. and Mabivert C. Variational convergences and level sets of multifunctions // Ricerche Mat.—1989.—V. 38, No. 2.—P. 223–237.

452. Luc Dinh The. On duality theory in multiobjective programming // J. Optim. Theory Appl.—1984.—V. 43, No. 4.—P. 557–582.

453. Luenberger P. G. Optimization by Vector Methods.—New York: Wiley, 1969.

454. Lutz R. and Goze M. Nonstandard Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1981.

455. Luxemburg W. A. J. and Schep A. R. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.—1978.—V. 40, No. 3.—P. 357–375.

456. Luxemburg W. A. J. and Schep A. R. An extension theorem for Riesz homomorphisms // Indag. Math. (N.S.).—1979.—V. 41.—P. 145–154.

457. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1971.—514 p.

458. Maharam D. Decompositions of measure algebras and spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—V. 69, No. 1.—P. 142–160.

459. Maharam D. The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, No. 1.—P. 154–184.

460. Maharam D. On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, No. 1.—P. 229–255.

461. Maharam D. On positive operators // Contemp. Math.—1984.—V. 26.—P. 263–277.

462. Martin R. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces.—New York: Wiley, 1976.

463. Martinez-Legar J. E. Weak lower subdifferentials and applications // Optimization.—1990.—V. 21, No. 3.—P. 321–341.

464. Martinez Maurica J. and Perez Garsia C. A new approach to the Krein–Milman theorem // Pacific J. Math.—1985.—V. 120, No. 2.—P. 417–422.

465. McShane E. I. The calculus of variations from beginning through optimal control theory // SIAM J. Control Optim.—1989.—V. 27, No. 5.—P. 916–939.

466. McShane E. J. Jensen's inequality // Bull. Amer. Math. Soc.—1937.—V. 43.—P. 521–527.

467. Michael E. Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc.—1951.—V. 71.—P. 152–182.

468. Mitrinović D. C., Pečarić J. E., and Volenec V. Recent Advances in Geometric Inequalities.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

469. Mordukhovich B. S. Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions // Trans. Amer. Math. Soc.—1993.—V. 340, No. 1.—P. 1–35.

470. Moreau J.-J. Fonctions Convexes en Dualite, Multigraph.—Montpellier: Univ. de Montpellier, Seminaires Mathematique, Faculte des Sciences, 1962.

471. Motzkin T. S. Endovectors in convexity // Proc. Symp. Pure Math. V. 7.— Providence: Amer. Math. Soc.—1963.—P. 361–387.

472. Nehse R. The Hahn–Banach property and equivalent conditions // Comment. Math. Univ. Carolin.—1978.—V. 19, No. 1.—P. 165–177.

473. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

474. Nemeth A. B. On the subdifferentiability of convex operators // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 592–598.

475. Nemeth A. B. Between Pareto efficiency and Pareto ε-efficiency // Optimization.—1989.—V. 20, No. 5.—P. 615–637.

476. Neumann M. On the Strassen disintegration theorem // Arch. Math.—1977.—V. 29, No. 4.—P. 413–420.

477. Neumann M. Continuity of sublinear operators on F-spaces // Manuscripta Math.—1978.—V. 26, No. 1–2.—P. 37–61.

478. Neustadt L. W. Optimization—A Theory of Necessary Conditions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.

479. Ng K.-F. and Law C. K. Monotonic norms in ordered Banach spaces // J. Austral. Math. Soc. — 1988. — V. 45, No. 2. — P. 217–219.

480. Noll D. Generic Fréchet-differentiability of convex functions on small sets // Arch. Math.—1990.—V. 54, No. 5.—P. 487–492.

481. Nonlinear and Convex Analysis. Proceedings in Honor of Ky Fan.—New York etc.: Dekker, 1987.

482. Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

483. Nowakowski A. Sufficient conditions for ε-optimality // Control Cybernet.—1988.—V. 17, No. 1.—P. 29–43.

484. Nozicka F., Grygorova L., and Lommatzsch K. Geometrie, Konvexer Mengen und Konvexe Analysis.—Berlin: Academic Verlag, 1988.

485. Oates D. K. A non-compact Kreĭn–Mil′man theorem // Pacific J. Math.—1971.—V. 36, No. 3.—P. 781–788.

486. Orhon M. On the Hahn–Banach theorem for modules over $C(S)$ // J. London Math. Soc.—1969.—V. 1, No. 2.—P. 363–368.

487. Pagter B. de and Wnuk W. Some remarks on Banach lattices with nonatonic duals // Indag. Math. (N.S.)—1990.—V. 1, No. 3.—P. 391–394.

488. Pales Z. A generalization of the Dubovitskiĭ–Milyutin separation theorem for commutative semigroups // Arch. Math.—1989.—V. 52, No. 4.—P. 384–392.

489. Pallaschke D. and Recht P. On the steepest-descent method for a class of quasidifferentiable optimization problems // Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications, Proc. IIASA

Workshop, Sopron/Hung. 1984. — Lecture Notes Econ. Math. Syst. —1985.—V. 255.—P. 252–263.

490. Pallashke D. and Urbański R. Reduction of quasidifferentials and minimal representations // Math. Programming.—1994.—V. 66.—P. 161–180.

491. Pallaschke D. and Urbański R. Decompositions of compact convex sets // J. Convex Anal.—1997.—V. 4, No. 2.—P. 333–342.

492. Papageorgiou N. Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces. Part 1: Convex case // Pacific J. Math.—1983.—V. 107, No. 2.—P. 403–458.

493. Papageorgiou N. Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces. Part 2: Nonconvex case, Clarke's theory // Pacific J. Math.—1983.—V. 109, No. 2.—P. 469–491.

494. Papagiotopulos T. D. Nonconvex energy functions // Acta Mech. —1983.—V. 48.—P. 160–183.

495. Pascali D. and Sburlan S. Nonlinear Mappings of Monotone Type. —Bucuresti: Editura Academiei, 1978.—341 p.

496. Patrone F. and Tijs S. H. Unified approach to approximations in games and multiobjective programming // J. Optim. Theory Appl.—1987.—V. 52, No. 2.—P. 273–278.

497. Penot J.-P. Calculus sous-differentiel et optimization // Funct. Anal.—1978.—V. 27, No. 2.—P. 248–276.

498. Penot J.-P. and Thera M. Polarite des applications convexes a valeurs vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1979.—V. 288, No. 7.—P. A419–A422.

499. Penot J.-P. and Volle M. On quasi-convex duality // Math. Oper. Res.—1990.—V. 15, No. 4.—P. 597–625.

500. Phelps R. R. Extreme positive operators and homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc.—1963.—V. 108.—P. 265–274.

501. Phelps R. R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.—Berlin etc.: Springer, 1993.—xi+117 p.

502. Polyakova L. N. On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type quasidifferentiable constraints // Math. Programming Stud.—1986.—V. 29.—P. 44–55.

503. Pourciau B. H. Analysis and optimization of Lipschitz continuous mappings // J. Optim. Theory Appl.—1977.—V. 22, No. 3.—P. 311–351.

504. Preiss D. Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces // J. Funct. Anal.—1990.—V. 91.—P. 312–345.

505. Pták V. The principle of uniform boundedness and the closed graph theorem // Czechoslovak. Math. J.—1962.—V. 12.—P. 523–528.

506. Pták V. On complete topological vector spaces // Amer. Math. Soc. Transl.—1977.—V. 110.—P. 61–106.

507. Radnaev V. A. On n-disjoint operators // Siberian Adv. Math.—1997.—V. 7, No. 4.—P. 44–78.

508. Raffin C. Sur les programmes convexes definis dans des espaces vectoriels topologiques // Ann. Inst. Fourier.—1970.—V. 20, No. 1.—P. 457–491.

509. Reiland T. W. Nonsmooth analysis and optimization for a class of nonconvex mappings // Proc. Internat. Conf. of Infinite-Dimensional Programming (eds. E. J. Anderson and A. B. Philot). —Berlin etc.: Springer, 1985.

510. Reiland T. W. Nonsmooth analysis and optimization on partially ordered vector spaces // Internat. J. Math. Sci.—1991.—V. 15, No. 1.—P. 65–81.

511. Riccen B. Sur les multifonctions a graphe convexe // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1984.—V. 229, 1, No. 5.—P. 739–740.

512. Ritter K. Optimization theory in linear spaces. Part 3: Mathematical programming in linear ordered spaces // Math. Anal.—1970.—V. 184, No. 2.—P. 133–154.

513. Robertson W. Closed graph theorems and spaces with webs // Proc. London Math. Soc.—1972.—V. 24, No. 4.—P. 692–738

514. Robertson A. P. and Robertson W. On the closed graph theorem // Proc. Glasgow Math. Assoc.—1956.—V. 3.—P. 9–12.

515. Robinson S. M. Regularity and stability for convex multivalued functions // Math. Oper. Res.—1976.—V. 1, No. 2.—P. 130–143.

516. Rockafellar R. T. Monotone Processes of Convex and Concave Type.—Providence: Rhode Island, 1967.—74 p. (Mem. Amer. Math. Soc. 77).

517. Rockafellar R. T. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings // Pacific J. Math.—1970.—V. 33, No. 1.—P. 209–216.

518. Rockafellar R. Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus // Proc. London Math. Soc.—1979.—V. 37, No. 6.—P. 331–355.

519. Rockafellar R. T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Canad. J. Math.—1980.—V. 32.—P. 157–180.

520. Rockafellar R. T. Proximal subgradients, marginal values, and augmented Lagrangians in nonconvex optimization // Math. Oper. Res.—1981.—V. 6.—P. 424–436.

521. Rockafellar R. T. The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions.—Berlin etc.: Springer, 1981.

522. Rockafellar R. T. Extensions of subgradient calculus with applications to optimization // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.—1985.—V. 9.—P. 665–698.

523. Rockafellar R. T. First- and second-order epi-differentiability in nonlinear programming // Trans. Amer. Math. Soc.—1988.—V. 307, No. 1.—P. 75–108.

524. Rockafellar R. T. Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.—1989.—V. 6.—P. 449–482.

525. Rockafellar R. T. Generalized second order derivatives of convex functions and saddle functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1990.—V. 322, No. 1.—P. 51–77.

526. Rockafellar R. T. and Wets R. J.-B. Variational Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1998.—733 p.

527. Rodriguez-Salinas B. and Bou L. A Hahn–Banach theorem for an arbitrary vector space // Boll. Un. Mat. Ital.—1974.—V. 10, No. 4.—P. 390–393.

528. Rolewicz S. Analiza Functionala i Theoria Steravania.—Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.

529. Rosenthal H. L_1-convexity // Funct. Anal.—1988.—P. 156 –174. —(Lecture Notes in Math.; **1332**).

530. Rubinov A. M. Abstract Convexity and Global Optimization / Nonconvex Optimization and Its Applications. V. 44.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—xvii+490 p.

531. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.— Berlin etc.: Springer, 1974.

532. Scholtes S. Minimal pairs of convex bodies in two dimensions // Mathematika.—1992.—V. 39.—P. 267–273.

533. Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1965.—V. 66.—P. 111–116.

534. Schwarz H.-V. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

535. Shapiro A. On optimality condition in quasidifferentiable optimization // SIAM J. Control Optim.—1984.—V. 23, No. 4.—P. 610–617.

536. Slater M. Lagrange multipliers revisited: a contribution to nonlinear programming // Cowles Commission Discussion Paper; Math. —1950.—V. 403.

537. Smale S. Global analysis and economics. III: Pareto optima and price equilibria // J. Math. Econom. — 1974. — V. 1, No. 2. — P. 107–117.

538. Smith P. Convexity Methods in Variational Calculus.—New York: Wiley, 1985.

539. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. — 1972. — V. 94, No. 2. — P. 201–245.

540. Sontag Y. and Zalinescu C. Scalar convergence of convex sets // J. Math. Anal. Appl.—1992.—V. 164, No. 1.—P. 219–241.

541. Sorensen D. C., Wets R. J.-B. (eds.) Nondifferential and Variational Techniques in Optimization.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1982.—(Math. Programming Stud. 17).

542. Stadler W. A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem. Part 1: 1776-1960 // J. Optim. Theory Appl.—1979.—V. 29, No. 1.—P. 1–52.

543. Strassen V. The existence of probability measures with given martingals // Ann. Math. Stat.—1965.—V. 36.—P. 423–439.

544. Strodiot J. J., Nguyen V. H., and Heukemes N. ε-optimal solutions in nondifferentiable convex programming and some related questions // Math. Programming.—1983.—V. 25.—P. 307–328.

545. Strodiot J. J., Nguyen V. H., and Heukemes N. A note on the Chebyshev ε-approximation problem // Optimization. Theory and Algorithms.—New York: Dekker, 1983.—P. 103–110.

546. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York: Academic Press, 1976.

547. Takeuti G., Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo; Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—viii+137 p.

548. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theoryto Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Berlin etc.: Springer, 1979.—P. 714–731.—(Lecture Notes in Math. 753).

549. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer, 1973.—viii+238 p.

550. Thera M. Calcul epsilon-sous-differentiel des applications convexes vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290.—P. 549–551.

551. Thera M. Subdifferential calculus for convex operators // J. Math. Anal. Appl.—1981.—V. 80, No. 1.—P. 78–91.

552. Thibault L. Fonctions compactement Lipschitziennes et programmation mathematique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1978.—V. 287, No. 4.—P. 213–216.

553. Thibault L. Sous-differentiels de fonctions vectorielles compactement lipschitziennes // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1978.—V. 286, No. 21.—P. 995–999.

554. Thibault L. Epidifferentiels de fonctions vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290, No. 2.—P. 87–90.

555. Thibault L. Subdifferentials of nonconvex vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl.—1982.—V. 86, No. 2.—P. 319–344.

556. Thiriez H., Zionts S. (eds.) Multiple Criteria Decision Making, Jony–Joasas, France, 1975.—Berlin etc.: Springer, 1976.—409 p.—(Lecture Notes Econ. Math. Syst. 130).

557. To T.-O. The equivalence of the least upper bound property in ordered vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1970.—V. 30, No. 2.—P. 287–296.

558. Treiman J. Clarke's gradients and epsilon-subgradients in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — V. 294, No. 1. — P. 65–78.

559. Ursescu C. Multifunctions with convex closed graph // Czechoslovak Math. J.—1975.—V. 25, No. 3.—P. 432–441.

560. Ursescu C. Tangency and openness of multifunctions in Banach spaces // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Sect. I a Mat. (N.S.).—1988.—V. 34, No. 3.—P. 221–226.

561. Valadier M. Sous-differentiabilite de fonctions convexes a valeurs dans un espace vectoriel ordonne // Math. Scand.—1972.—V. 30, No. 1.—P. 65–74.

562. Valdivia M. B_r-complete spaces which are not B-complete // Math. Z.—1984.—V. 185, No. 2.—P. 253–259.

563. Valentine F. A. Convex Sets.—New York etc.: McGraw-Hill, 1964. —ix+238 p.

564. Valyi Is. Strict approximate duality in vector spaces // Appl. Math. Comput.—1988.—V. 25, No. 3.—P. 227–246.

565. Verona M. E. More on the differentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—V. 103, No. 1.—P. 137–140.

566. Vincent-Smith G. The Hahn–Banach theorem for modules // Proc. London Math. Soc.—1967.—V. 17, No. 3.—P. 72–90.

567. Vuza D. The Hahn–Banach extension theorem for modules over ordered rings // Rev. Roumanie Math. Pures Appl.—1982.—V. 27.—P. 989–995.

568. Ward D. E. Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, No. 2.—P. 661–682.

569. Ward D. E. The quantification tangent cones // Canad. J. Math. —1988.—V. 40, No. 3.—P. 666–694.

570. Ward D. E. Corrigendum to "Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization" // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 311, No. 1.—P. 429–431.

571. Ward D. E. and Borwein J. M. Nonsmooth calculus in finite dimensions // SIAM J. Control Optim.—V. 25.—1987.—P. 1312–1340.

572. Warga J. Derivative containers, inverse functions and controllability // Calculus of Variations and Control Theory (ed. D. L. Russel), Academic Press, 1976, No. 4, pp. 33–46.

573. White D. I. Epsilon efficiency // J. Optim. Theory Appl.—1986.—V. 49, No. 2.—P. 319–337.

574. Whitfield J. H. M. and Zizler V. E. Extremal structure of convex sets in spaces not containing c_0 // Math. Z.—1988.—V. 197, No. 2.—P. 219–221.

575. Wittmann R. Ein neuer Zugang zu den Hahn–Banach Satzen von Anger und Lembcke // Exposition. Math.—1985.—V. 3, No. 3.—P. 273–278.

576. Wong Y. Ch. and Ng K.-F. Partially Ordered Topological Vector Spaces.—Oxford: Clarendon Press, 1973.—217 p.

577. Wright J. D. M. A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—V. 139.—P. 75–94.

578. Wright J. D. M. Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—V. 19, No. 3.—P. 107–122.

579. Wright J. D. M. Measures with values in a partially ordered vector space // Proc. London Math. Soc. — 1972. — V. 25, No. 3. — P. 675–688.

580. Wright J. D. M. An algebraic characterization of vector lattices with the Borel regularity property // J. London Math. Soc.—1973.—V. 7.—P. 277–285.

581. Yongxin L. and Shuzhong S. A Generalization of Ekeland's ε- and of Borwein–Preiss' Smooth ε-Variational Principle.—Preprint, 1992.

582. Zaanen A. C. Riesz Spaces. II.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

583. Zagrodny D. Approximate mean value theorem for upper subderivatives // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.—1988.—V. 12, No. 12.—P. 1413–1428.

584. Zalinescu C. The Fenchel–Rockafellar Duality Theory for Mathematical Programming in Order Complete Vector Lattices and Applications.—Bucureshti, 1980.

585. Zalinescu C. Duality for vectorial nonconvex optimization by convexification and applications // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Sect. I a Mat. (N.S.).—1983.—V. 39, No. 1.—P. 16–34.

586. Zalinescu C. Duality for vectorial convex optimization, conjugate operators and subdifferentials. The continuous case // Mathematische Optimierung. Theorie und Anvendungen, Eisenach.—1984.—P. 135–138.

587. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. 2/A: Linear Monotone Operators; Vol. 2/B: Nonlinear Monotone Operators.—Berlin etc.: Springer, 1985.

588. Zeleny M. (ed.) Multiple Criteria Decision Making, Kyoto, 1975. — Berlin etc.: Springer, 1976. — 345 p. — (Lecture Notes Econ. Math. Syst. 123).

589. Zowe J. Subdifferentiability of convex functions with values in an ordered vector space // Math. Scand. — 1974. — V. 34, No. 1. — P. 69–83.

590. Zowe J. A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—1975.—V. 50, No. 2.—P. 273–287.

591. Zowe J. Linear maps majorized by a sublinear map // Arch. Math. —1975.—V. 36.—P. 637–645.

592. Zowe J. The saddle point theorem of Kuhn and Tucker in ordered vector spaces // J. Math. Anal. Appl.—1977.—V. 57, No. 1.—P. 41–55.

593. Zowe J. Sandwich theorems for convex operators with values in an ordered vector space // J. Math. Anal. Appl.—1978.—V. 66, No. 2.—P. 282–296.

Авторский указатель

Указатель обозначений

Предметный указатель

Кусраев Анатолий Георгиевич

Кутателадзе Семён Самсонович

Субдифференциалы.
Теория и приложения

Часть 2

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system

Подписано в печать 25.12.03. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 24,7. Уч.-изд. л. 24,7. Тираж 200 экз. Заказ № 79.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.

Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.