С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ и А. Д. ТАЙМАНОВ (Новосибирск)

ТЕОРЕМА МАЙКЛА М. О СЕЛЕКТОРАХ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ

В анализе фундаментальную роль играют теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов с сохранением нормы, непрерывность и различные ее усиления; в частности теорема Крейна-Рутмана о продолжении положительного функционала.

Большое число разнообразных приложений этих теорем породила проблему продолжения линейных операторов. Наиболее общие результаты дают теоремы Л. В. Канторовича о продолжении линейных отображений нормированных пространств в K-пространства с сохранением абстрактной нормы или монотонности. Эти теоремы, в известном смысле, окончательные. Поэтому интересно получение аналогичных теорем для конкретных пространств и для специальных классов операторов. Одним из интересных пространств являются пространства $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q (или KB-линеал ограниченных элементов). В качестве соответствующего класса операторов естественно рассматривать класс компактных операторов. В этом случае применяя теорему Майкла М. о селекторах можно получить решение проблемы продолжения операторов и охарактеризовать случаи, когда оператор допускает единственное продолжение. Они выражены в следующих теоремах.

Теорема 1. (*Линденштраусса*). *Пусть* L, E, $L \subset E$, *линейные нормированные пространства,* $f: L \to C(Q)$ *компактный оператор. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует продолжение* $\bar{f}$ *оператора* f *на* E *такое, что* $\|f\|_L \leqslant \|\bar{f}\|_E \leqslant \|f\|_L + \varepsilon$.

Аналогичная теорема верна для положительных операторов.

В некоторых случаях существуют точные продолжения. Введем следующее определение. Подпространство L, $L \subset E$, назовем хорошим, если для любых $\varepsilon > 0$ и функционалов f, g из L' таких, что $\|f-g\|_L < \varepsilon$ существуют продолжения $\bar{f}$, $\bar{g}$ с сохранением нормы такие, что $\|\bar{f}-\bar{g}\| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть L, $L \subset E$, хорошее подпространство нормированного пространства E, $Y = C(Q)$, где Q компакт, $f: L \to Y$ компактный оператор. Тогда существует компактный оператор $\bar{f}$ из E в Y такой, что $\bar{f}x = fx$ $(x \in L)$*

$$\|\bar{f}\|_E = \|f\|_L.$$

Аналогичный факт верен для положительных операторов.

Характеристика единственности продолжения операции частично решается теоремой 3.

Пусть $f: E \to C(Q)$ компактный оператор и отображение

$$x \to \widetilde{\Phi}(x) = (\{f_x\} + L^*) \cap \|f\| \overline{S},$$

где

$$f_x(h) = (fh)(x) \quad (h \in L,\ x \in Q)$$

$$L^* = \{f \in L',\quad f(x) \geqslant 0 \quad (x \in L)\},$$

сильно полунепрерывно снизу. Тогда справедлива

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Если последовательность операторов $f_n: E \to C(Q)$ такова, что $\varlimsup\limits_n \|f_n\| \leqslant \|f\|$, равномерный $\lim\limits_n f_n h \geqslant fh$ для всех $h \in L$, то $\|f_n x - fx\|_{n \to \infty} \to 0$ для всех $x \in E$;*

2) *Для любого компактного оператора $f': E \to C(Q)$ такого, что $f'h \geqslant fh$ для всех h из L и $\|f'\| \leqslant \|f\|$, имеет место равенство $f' = f$.*

Перечисленные выше теоремы доказываются по одной схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Тайманов, Продолжение линейных операторов, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, том 133, 1972.

2. С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, Двойственность Минковского и ее приложения. УМН, т. 27, № 3, 1972.