ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

С. С. Кутателадзе

Институт математики
им. С. Л. Соболева, Новосибирск

29 марта 2022 г.

Повестка

- Если сказать коротко, предмет моих занятий — линейные неравенства. С ними сталкиваются в геометрии, функциональном анализе и прикладной математике, особенно в связи с экономическими задачами.

Вид решений

- Плоский треугольник — это три таких неравенства. В случае общих пространств множество решений системы линейных неравенств — замкнутая выпуклая фигура. Граница такой фигуры — выпуклая поверхность. В приложениях рассматриваютс конечные системы линейных неравенств и среди их решений выбирают в том или ином смысле наилучшее, которое тоже задается линейным неравенством.
- Теорию выпуклых поверхностей в Сибирь имплантировал А. Д. Александров. Общий подход к неравенствам в фунциональных пространствах развивал Л. В. Канторович — это теория так называемых K-пространств. В приложениях к экономике его подход называется линейным программированием.

Задачи изопериметрического типа

- Сибирское отделение создавалось под флагом математизации знаний и симбиоза наук. В этих рамках удалось применить методы линейного программирования для решения нового класса экстремальных задач геометрии, неподдающихся классическим методам. Например, все знают, что шар имеет наибольший объем при заданной площали поверхности. А как быть, если искомую фигуру надо разместить внутри какой-то емкости, скажем, внутри комнаты — ведь рано или поздно граница фигуры начнет расплющиваться? Предложенный ответ основан на технике поверхностных мер, разработанной для внутренних вопросов выпуклой геометрии
  А. Д. Александровым и Ю. Г. Решетняком. Был выделен новый класс экстремальных задач геометрии, аналогичный проблемам многокритериального принятия решений в экономике. К этому классу относится, в частности, эффект Лейденфроста — поведение капли на раскаленной поверхности.

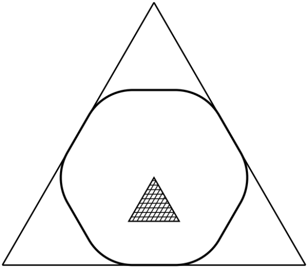
Нестандартные методы

- Важным продвижением представляется использование методов логики для задач анализа и геометрии в рамках нестандартных моделей теории множеств, разработанных А. Робинсоном, Д. Скоттом и их последователями. Методы инфинитезимального анализа позволяют предложить новые более простые формализмы приближенного решения задач линейного и выпуклого программирования. Методы булевозначного анализа обосновали эвристический принцип Л. В. Канторовича. Классические банаховы пространства анализа действительно представляют собой новые изображения плотных подрешеток обычной числовой прямой, что открывает просто фантастические возможности. Д. Скотт писал, что, знакомясь с исследованиями в этом направлении, он понял, что для успешных приложений булевой логической техники требуется владение методами функционального анализа, а у него, в отличие от Сибири, таких специалистов в окружении нет.

Планы

- Планы на ближайшее время — сохранение единства разных направлений математики в области линейных неравенств.

Внутренняя «симметричная» задача Урысона



Оптимальные выпуклые оболочки

- В пространстве $\mathbb{R}^N$ заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется разместить выпуклую фигуру $\mathfrak{x}_k$ в $\mathfrak{y}_k$, где $k := 1, \dots, m$ так, чтобы одновременно максимизировать объем каждой из фигур $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ и минимизировать интегральную ширину выпуклой оболочки объединения этих фигур:
$$\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{y}_k \ (k := 1, \dots, m);$$
$$(-p(\mathfrak{x}_1), \dots, -p(\mathfrak{x}_m), \langle \mathrm{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\}, \mathfrak{z}_N \rangle) \to \inf.$$
- Теорема. *Для того чтобы допустимые выпуклые тела $\bar{\mathfrak{x}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{x}}_m$ представляли собой Парето-оптимальное решение задачи, необходимо и достаточно, чтобы нашлись неравные нулю одновременно положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и два набора положительных мер $\mu_1, \dots, \mu_m$ и $\nu_1, \dots, \nu_m$ такие, что*
$$\nu_1 + \ldots + \nu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_k(z) = \mathfrak{y}_k(z) \quad (z \in \mathrm{spt}(\mu_k)); \quad \alpha_k \mu(\bar{\mathfrak{x}}_k) = \mu_k + \nu_k \ (k := 1, \dots, m).$$

Пример альтернативы для неравенств

- Пусть $A_1, \dots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.
- *Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*
  (1) *Существуют* $x \in L_p(\mu)$ *и измеримые подмножества* $U, V \subset T$, *причем* $\mu(U) \neq 0$, $U \subset V$ *такие, что*

$$Bx(t) > 0 \ (t \in U), A_1x(t) \leq 0, \dots, A_Nx(t) \leq 0 \ (t \in V).$$

  (2) *Найдутся положительные измеримые функции* $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ *на* T, *для которых*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$