ДВА СЮЖЕТА

С. С. Кутателадзе

Институт математики
им. С. Л. Соболева, Новосибирск

6 декабря 2011 г.

Повестка

- В 2012 г. исполняется сто лет датам рождения А. Д. Александрова и Л. В. Канторовича. В этой связи речь пойдет о двух древних математических сюжетах, связанных с исследованиями этих ученых.
- Будут обсуждены Парето-оптимальные решения модельных задач изопериметрического типа, восходящих к задаче Дидоны и осложненных ограничениями включения. Вторая известная тема — положительные решения операторного уравнения $\mathfrak{X}A = B$ или, в более привычных терминах, операторные версии леммы Фаркаша, ключевой для линейного программирования.

Поверхности и меры

- *Выпуклым телом* в $\mathbb{R}^N$ называют компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ (= выпуклую фигуру) с непустой внутренностью. Границу выпуклого тела называют (*полной*) *выпуклой поверхностью*.
- Класс эквивалентных с точностью до переноса выпуклых поверхностей $\{z + \mathfrak{x} \mid z \in \mathbb{R}^N\}$ отождествляют с соответствующей мерой на сфере S_{N-1} — с *поверхностной функцией* этого класса $\mu(\mathfrak{x})$. Полной многогранной выпуклой поверхности, заданной единичными нормалями $z_1, \dots, z_m$ ее $(N-1)$-мерных граней, имеющих площади $s_1, \dots, s_m$, сопоставляют взвешенную сумму мер Дирака в точках $z_1, \dots, z_m$. Иными словами, $\sum_{k=1}^m s_k \varepsilon_{z_k}$.
- Поверхностная функция $\mu(\mathfrak{x})$ произвольного $\mathfrak{x}$ есть слабый предел поверхностных функций сети вписанных в $\mathfrak{x}$ выпуклых многогранников. При этом $\mu(\mathfrak{x})$ — *александровская мера*, т.е. $\mu(\mathfrak{x})$ положительна, не сосредоточена ни в одном сечении сферы гиперподпространством и аннулирует точки.

Суммы Минковского и Бляшке

- В случае операций векторного сложения фигур по Минковского *объем* $V(\mathfrak{x})$ является однородным полиномом степени N. По этой причине вычисление его субдифференциала не вызывает затруднений. При сложении поверхностей по Бляшке в пространстве размерности $N \geq 3$ объем перестает быть однородным полиномом.
- В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $p : \mathfrak{x} \mapsto V^{1/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\hat{p} : \mathfrak{x} \mapsto V^{(N-1)/N}(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N$.

Объем и площадь поверхности

- *Неравенство Минковского* переписывается в виде $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \ge p(\mathfrak{x})\hat{p}(\mathfrak{y})$. По теореме Брунна — Минковского функционал p, определенный на конусе $\mathscr{V}_N$, суперлинеен. Отсюда следует, что функционал $\hat{p}$, определенный на конусе $\mathscr{A}_N$, также суперлинеен.
- *Площадь поверхности* $\mathfrak{x}$ записывается в виде $S(\mathfrak{x}) = N\langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle$, где $\mathfrak{z}_N$ — единичный шар. Изопериметрическая задача в структуре Бляшке превращается в выпуклую программу.

Векторная изопериметрическая задача

- Пусть заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется найти тело $\mathfrak{x}$, имеющее заданный объем и минимизирующее каждый из смешанных объемов $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1), \dots, V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_m)$.
- Нетрудно видеть, что мы имеет дело с регулярной в смысле Слейтера выпуклой программой в структуре Бляшке.
- Теорема. *Любое Парето-оптимальное решение $\bar{\mathfrak{x}}$ векторной изопериметрической задачи имеет вид*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \alpha_1 \mathfrak{y}_1 + \dots + \alpha_m \mathfrak{y}_m,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные числа.

Эффект Лейденфроста

- *Эффект Лейденфроста* — это сфероидальное состояния капли жидкости на горизонтальной поверхности нагрева.
- Задача Лейденфроста. В трехмерном пространстве при заданном объеме выпуклой фигуры минимизировать ее площадь поверхности и вертикальную ширину.
- В силу симметрии дело сводится к плоской двухкритериальной задаче, каждое Парето-оптимальное решение которой представляет собой *стадион* — взвешенную сумму Минковского круга и горизонтального отрезка.
- Теорема *Плоский сфероид — Парето-оптимальное решение задачи Лейденфроста — представляет собой результат вращения стадиона вокруг вертикальной оси, проходящей через центр его симметрии.*

Внутренняя задача Урысона с уплощением

- Заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, лежащих в $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения.

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

- Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внутренней задаче Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu(\mathfrak{x}) + \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \mathrm{spt}(\mu(\mathfrak{x}))).$$

Случай поверхностей вращения

- Пусть плоская фигура $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_2$ имеет ось симметрии $A_{\bar{z}}$ с направляющим вектором $\bar{z}$. Пусть, далее, $\mathfrak{x}_{00}$ — результат вращения $\mathfrak{x}_0$ вокруг оси симметрии $A_{\bar{z}}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. При этих данных возникает задача:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_3;\ \mathfrak{x} \text{ — тело вращения вокруг оси } A_{\bar{z}};$$
$$\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_{00};\ \langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x}\rangle \geq \langle \mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}\rangle;$$
$$(-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

- В силу вращательной симметрии пространственная задача сводится к аналогичной задаче в плоскости.

Случай поверхностей вращения

- Теорема. *Парето-оптимальные решения возникают здесь в результате вращения вдоль оси симметрии Парето-оптимальных решений плоской внутренней задачи Урысона с уплощением вдоль этой оси.*
- Относительно подобных задач в произвольных размерностях известно совсем немного. Особняком стоит работа А. В. Погорелова 1994 г., в которой доказано, что «мыльный пузырь» в тетраэдре имеет форму обкатки шаром решения внутренней задачи Урысона, т. е. взвешенной суммы Бляшке тетраэдра и шара.

Внешняя задача Урысона с уплощением

- Пусть заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Среди тел, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих данную интегральную ширину, найти тела $\mathfrak{x}$, максимизирующие объем и минимизирующие толщину в направлении уплощения:

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

Внешняя задача Урысона с уплощением

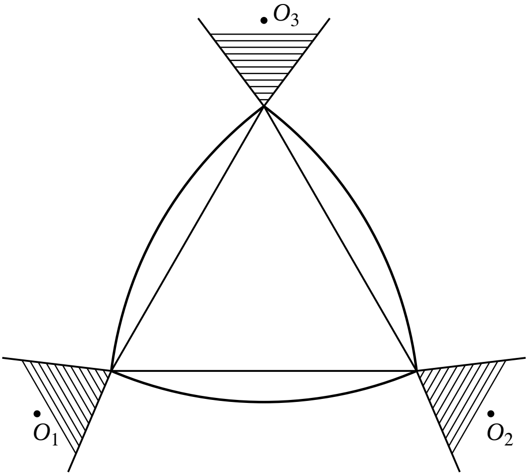
- Теорема. *Для того чтобы допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ было Парето-оптимальным решением внешней задачи Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа α, β и критическая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$V(\bar{\mathfrak{x}}) + V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = \alpha V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}) + 2N\beta b_{\bar{z}}(\bar{\mathfrak{x}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{spt}(\mu(\mathfrak{x}_0))).$$

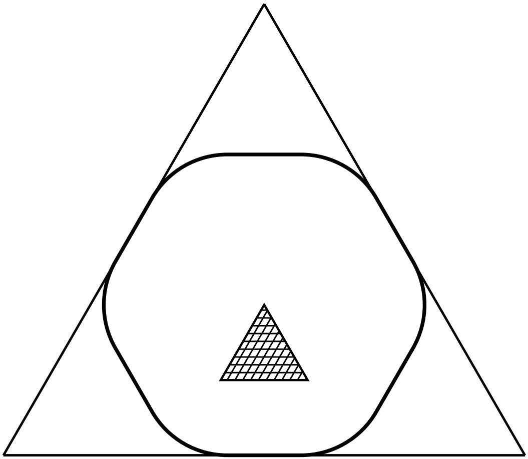
  Здесь $\gg_{\mathbb{R}^N}$ — специальное отношение мажорации мер, предложенное Ю.Г. Решетняком.

- Также рассматриваются многомерные обобщения задач с зонными ограничениями и текущими гиперплоскостями, задачи в классе центрально-симметричных фигур, задачи типа Линделёфа и др. Такие задачи выпуклы в структуре Бляшке или Минковского.

Внешняя задача Урысона



Внутренняя «симметричная» задача Урысона



Оптимальные выпуклые оболочки

- Остановимся на задачах несколько иного типа, где поиск формы ведется для нескольких фигур одновременно.
- В пространстве $\mathbb{R}^N$ заданы выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$. Требуется разместить выпуклую фигуру $\mathfrak{x}_k$ в $\mathfrak{y}_k$, где $k := 1, \dots, m$ так, чтобы одновременно максимизировать объем каждой из фигур $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ и минимизировать интегральную ширину выпуклой оболочки объединения этих фигур:

$$\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{y}_k \ (k := 1, \dots, m);$$
$$(-p(\mathfrak{x}_1), \dots, -p(\mathfrak{x}_m), \langle \mathrm{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\}, \mathfrak{z}_N\rangle) \to \inf .$$

- Теорема. *Для того чтобы допустимые выпуклые тела $\bar{\mathfrak{x}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{x}}_m$ представляли собой Парето-оптимальное решение задачи, необходимо и достаточно, чтобы нашлись неравные нулю одновременно положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и два набора положительных мер $\mu_1, \dots, \mu_m$ и $\nu_1, \dots, \nu_m$ такие, что*

$$\nu_1 + \dots + \nu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);$$

Спуск леммы Фаркаша

- Классическая лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации.
- Скаляризация, предлагаемая булевозначным анализом, открывает некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств.

Пример

- Пусть $A_1, \dots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.
- *Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*
  (1) *Существуют $x \in L_p$ и измеримые подмножества $U, V \subset T$, причем $\mu(U) \neq 0$, $U \subset V$ такие, что*

$$Bx(t) > 0 \ (t \in U), A_1x(t) \leq 0, \dots, A_Nx(t) \leq 0 \ (t \in V).$$

  (2) *Найдутся положительные измеримые функции $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ на T, для которых*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Постановка

- Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича с базой $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$, а $m(Y)$ — максимальное расширение Y. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y. Если X снабжено некоторой Y-полунормой, то $L^{(m)}(X, Y)$ — пространство мажорированных линейных операторов из X в Y. Для $T : X \to Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем
$\{T \leq y\} := \{T(\cdot) \leq y\} := \{x \in X \mid Tx \leq y\}$ и
$\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.
- $\mathrm{Orth}(Y)$ — коммутант $\mathbb{B}$ в пространстве регулярных операторов $L^{(r)}(Y)$.

Хан, Банах и Канторович

- Рассмотрим еще одно вещественное векторное пространство W и диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & W \arrow[dl, "\mathfrak{X}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

  Как известно,
  (i) $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$;

- (ii)*Если W упорядочено конусом W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, т. е. $A(X)$ мажорирует W, то*

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

- Будем считать, что $W = Y$, а X — вещественное Y-полунормированное пространство.

Операторная лемма Фаркаша

- Теорема. *Заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы* $P_1, \dots, P_N \in \mathrm{PSub}^{(m)}(X, Y)$ *и мажорированный сублинейный оператор* $P \in \mathrm{Sub}^{(m)}(X, Y)$. *Пусть, далее,* $v \in Y$ *и элементы* $u_1, \dots, u_N$ *таковы, что неоднородная система* $P_1(x) \le u_1, \dots, P_N(x) \le u_N$ *совместна.*
- *Следующие утверждения эквивалентны:*
- (1) *для всех* $b \in \mathbb{B}$, *где* $\mathbb{B}$ — *база* Y, *неоднородное сублинейное операторное неравенство* $bP(x) \ge bv$ *является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств* $bP_1(x) \le bu_1, \dots, bP_N(x) \le bu_N$, *т. е.*

$$\{bP \ge bv\} \supset \{bP_1 \le bu_1\} \cap \dots \cap \{bP_N \le bu_N\};$$

- (2) *найдутся положительные ортоморфизмы* $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ *такие, что*

$$(\forall x \in X)\ P(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k P_k(x) \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \le -v.$$

Полиэдральный принцип Лагранжа

- Теорема. *Для экстремальной задачи*

$$P_1(x) \le u_1, \dots, P_N(x) \le u_N, \quad P(x) \to \inf$$

справедлив принцип Лагранжа для значений — конечное значение задачи минимизации с ограничениями является значением безусловной задачи минимизации подходящего лагранжиана.

- Дополнительной к полиэдральности квалификации ограничений при этом не предполагается. В то же время важно подчеркнуть, что условие Слейтера позволяет отказаться как от полиэдральности, так и от условий связи областей прибытия ограничений и цели. Это обстоятельство давно известно в практически предельной общности.

Послойное сравнение ядер

- В случае следствий одного неравенства не надо никаких предположений, ограничивающих класс рассматриваемых функционалов. Аналогичный вариант операторной леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто неверен. Достаточно рассмотреть $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{R}$ и тождественное отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.
- Теорема. *Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича и $A, B \in L(X, Y)$. Эквивалентны утверждения:*
  (1) $(\exists \alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$;
  (2) *Существует проектор $\varkappa \in \mathbb{B}$ такой, что для всякого $b \in \mathbb{B}$ выполнено*
  $$\{\varkappa bB \leq 0\} \supset \{\varkappa bA \leq 0\},$$
  $$\{\neg\varkappa bB \leq 0\} \supset \{\neg\varkappa bA \geq 0\}.$$

  Как обычно, $\neg\varkappa := \mathbb{1} - \varkappa$.

Альтернатива

- Теорема. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Пусть также заданы мажорированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$. Тогда имеет место в точности одна из следующих возможностей.*
  (1) *Найдутся точка $x \in X$ и проекторы $b, b' \in \mathbb{B}$ такие, что $b' \le b$ и*
  $$b'Bx > 0,\ bA_1x \le 0,\ \dots,\ bA_Nx \le 0.$$
  (2) *Существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ такие, что*
  $$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Интервальные уравнения

- Рассмотрим линейные неравенств с неточными данными в духе интервального анализа.
- Предположим дополнительно, что X является векторной решеткой. Напомним, под *интервальным оператором* $\mathbf{T}$ из X в Y понимают просто порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$. По умолчанию разумеется, что $\underline{T} \leq \overline{T}$. Говорят, что интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ имеет *слабое интервальное решение*, если для некоторых $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$ решение имеет уравнение $B = \mathfrak{X}A$.
- С каждым интервальным оператором $\mathbf{T}$ свяжем сублинейный оператор
$$P_{\mathbf{T}}(x) = \overline{T}x_{+} - \underline{T}x_{-}.$$
- Оператор $\mathbf{T}$ назовем *адаптированным*, если $P_{\mathbf{T}} \in \mathrm{PSub}(X, Y)$, т. е. если $P_{\mathbf{T}}$ — поточечный супремум конечного числа операторов. Отметим, что если X и Y — конечномерные пространства, то все интервальные операторы из X в Y

Интервальная лемма Фаркаша

- Теорема. *Пусть X — векторная решетка, а Y пространство Канторовича. Допустим, что $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ — адаптированные интервальные операторы и $\mathbf{B}$ — произвольный интервальный оператор в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
- (1) *Интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$.
(2) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ выполнено*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^{\sim} \leq 0\} \cap \dots \cap \{b\mathfrak{A}_N^{\sim} \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^{\sim} := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ для $k := 1, \dots, N$ и $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.