*Владикавказский математический журнал*
*2024, Том 26, Выпуск 4, С. 66–77*

**УДК** 517.9
**DOI** 10.46698/a3118-8799-1112-n

# ОБ ИНДЕКСЕ БИСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮТИВНЫМ СДВИГОМ

**С. В. Ефимов**[1]

[1] Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики, Россия, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Серафимовича, 62/59

E-mail: EfimovSergei1960@mail.ru

**Аннотация.** В теории сингулярных операторов с инволютивным сдвигом полностью изучены вопросы нётеровости (фредгольмовости) и индекса оператора вида $A+VB$, где $A$ и $B$ — сингулярные операторы, а $V$ — оператор инволютивного сдвига в пространстве $p$-суммируемых функций на простом замкнутом контуре типа Ляпунова. Вместе с оператором $A+VB$ рассматривается соответствующий матричный сингулярный оператор без сдвига $M = \begin{pmatrix} A & VBV \\ B & VAV \end{pmatrix}$. Хорошо известно, что операторы $A+VB$ и $M$ нётеровы или нет одновременно, а их индексы относятся как 1:2. Аналогичные вопросы об одновременной нётеровости и пропорциональности индексов возникают для бисингулярных операторов с инволютивным сдвигом $A+WB$ и их соответствующих матричных операторов $M = \begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, где $A$ и $B$ — бисингулярные операторы, а $W$ — оператор инволютивного сдвига в пространстве $p$-суммируемых функций на прямом произведении простых замкнутых контуров типа Ляпунова. В настоящей работе исследованы бисингулярные операторы с инволютивным сдвигом, распадающимся на одномерные компоненты. Рассмотрены два вида таких сдвигов — покоординатный и перекрестный. В этих случаях соответствующие матричные операторы являются матричными бисингулярными операторами без сдвига. Получена одновременная нётеровость бисингулярного оператора со сдвигом и соответствующего матричного бисингулярного оператора без сдвига. Установлена пропорциональность индексов бисингулярных операторов с покоординатным сдвигом и соответствующих матричных операторов, а именно: доказано, что индексы этих операторов относятся как 1:2. В частном случае такой же результат об индексах получен и для перекрестного сдвига.

**Ключевые слова:** оператор Нётера, индекс оператора, бисингулярный оператор, инволютивный сдвиг.

**AMS Subject Classification:** 47A53, 47G10, 45E05.

**Образец цитирования:** *Ефимов С. В.* Об индексе бисингулярного оператора с инволютивным сдвигом // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 4.—С. 66–77. DOI: 10.46698/a3118-8799-1112-n.

## 1. Введение и постановка задачи

Пусть $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — простые замкнутые контуры типа Ляпунова в комплексной плоскости, ориентированные против часовой стрелки, $\Gamma$ — любой из этих контуров, $1 < p < +\infty$. В пространстве $L_p(\Gamma)$ введем оператор сингулярного интегрирования Коши $S$, который иногда будем обозначать также $S_\Gamma$. Рассмотрим две операторные алгебры: $\mathfrak{B}_p(\Gamma)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $L_p(\Gamma)$; $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ — банахова подалгебра в $\mathfrak{B}_p(\Gamma)$, порожденная оператором $S$ и всеми операторами умножения на функции класса $C(\Gamma)$.

© 2024 Ефимов С. В.

Операторы из алгебры $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ называются *сингулярными операторами*.

Всякий гомеоморфизм $\Gamma_i \to \Gamma_j$ с невырождающейся гёльдеровской производной будем называть *одномерным сдвигом* $(i, j = 1, 2)$. С одномерным сдвигом $\varphi$ $(\Gamma_i \to \Gamma_j)$ связан обратимый оператор $V_\varphi$, действующий из $L_p(\Gamma_j)$ в $L_p(\Gamma_i)$ по правилу $V_\varphi f = f \circ \varphi$, $f \in L_p(\Gamma_j)$. Оператор $V_\varphi$ назовем о*ператором сдвига* $\varphi$.

Как обычно, биективное отображение $g$ некоторого множества на себя называется инволютивным, если $g^{-1} = g$ и отображение $g$ не является тождественным. Очевидно, что если одномерный сдвиг на $\Gamma$ инволютивный, то связанный с ним оператор сдвига в $L_p(\Gamma)$ тоже будет инволютивным.

В теории сингулярных операторов со сдвигами полностью изучены вопросы нётеровости (фредгольмовости) и индекса сингулярного оператора с инволютивным сдвигом, т. е. оператора $A + V_\varphi B$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p(\Gamma)$ и $\varphi$ — инволютивный одномерный сдвиг на $\Gamma$, путем перехода к соответствующему матричному сингулярному оператору без сдвигов $\begin{pmatrix} A & V_\varphi B V_\varphi \\ B & V_\varphi A V_\varphi \end{pmatrix}$, действующему в $L_p(\Gamma) \oplus L_p(\Gamma)$. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1** [1, с. 75; 2, с. 107]**.** *Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_p(\Gamma)$ и $\varphi$ — инволютивный одномерный сдвиг на $\Gamma$. Тогда операторы $A + V_\varphi B$ и $\begin{pmatrix} A & V_\varphi B V_\varphi \\ B & V_\varphi A V_\varphi \end{pmatrix}$ нётеровы или нет одновременно. При этом в случае нётеровости операторов их индексы связаны отношением*

$$\operatorname{Ind}(A + V_\varphi B) = \frac{1}{2} \operatorname{Ind} \begin{pmatrix} A & V_\varphi B V_\varphi \\ B & V_\varphi A V_\varphi \end{pmatrix}.$$

Основная задача работы — поиск аналога теоремы 1 для бисингулярных операторов со сдвигом.

Пусть $\mathfrak{B}_p$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, а $\mathfrak{A}_p$ — банахова подалгебра в $\mathfrak{B}_p$, порожденная операторами $S \otimes I$, $I \otimes S$ и всеми операторами умножения на функции класса $C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ (здесь и дальше во всех тензорных произведениях операторов вида $A \otimes B$ оператор $A$ действует в $L_p(\Gamma_1)$, а $B$ — в $L_p(\Gamma_2)$).

Операторы из алгебры $\mathfrak{A}_p$ называются *бисингулярными операторами*.

Пусть $\alpha$ — инволютивное отображение тора $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ на себя (инволютивный сдвиг на торе) одного из двух видов:

1) покоординатный сдвиг

$$\alpha(t_1; t_2) = (\alpha_1(t_1); \alpha_2(t_2)), \quad t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2, \tag{1}$$

где $\alpha_1$ $(\Gamma_1 \to \Gamma_1)$ и $\alpha_2$ $(\Gamma_2 \to \Gamma_2)$ — инволютивные одномерные сдвиги,

2) перекрестный сдвиг

$$\alpha(t_1; t_2) = (\alpha_1(t_2); \alpha_2(t_1)), \quad t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2, \tag{2}$$

где $\alpha_1$ $(\Gamma_2 \to \Gamma_1)$ — одномерный сдвиг и $\alpha_2 = \alpha_1^{-1}$.

Со сдвигом $\alpha$ связан обратимый оператор $W$, действующий в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ по правилу $Wf = f \circ \alpha$, $f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. При этом оператор $W$ является инволютивным: $W^2 = I$ и $W \neq I$. Отметим, что если $\alpha$ — сдвиг (1), то $W = V_{\alpha_1} \otimes V_{\alpha_2}$.

В работе рассматриваются бисингулярные операторы со сдвигом $\alpha$, т. е. операторы вида $A + WB$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$, и соответствующие матричные бисингулярные операторы

без сдвигов $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, действующие в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \oplus L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Получена одновременная нётеровость операторов $A + WB$ и $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$. Установлена пропорциональность индексов бисингулярных операторов со сдвигом (1) и соответствующих матричных операторов. В частном случае такой же результат об индексах получен и для сдвига (2).

Исследование основано на символических исчислениях, построенных для бисингулярных операторов со сдвигом в работах [3–5].

Другие конструкции бисингулярных операторов со сдвигами исследовались на нётеровость и индекс автором в [6–10].

## 2. Необходимые сведения о сингулярных и бисингулярных операторах

Пусть $\mathfrak{K}_p(\Gamma)$ — идеал всех компактных операторов алгебры $\mathfrak{B}_p(\Gamma)$.

**Лемма 1** [1, с. 31; 2, с. 14]**.** *Если $a \in C(\Gamma)$, то $aS - SaI \in \mathfrak{K}_p(\Gamma)$.*

В пространстве $L_p(\Gamma)$ введем проекторы Рисса $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$. Тогда из леммы 1 следует, что алгебра $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ совпадает с множеством всех операторов в $L_p(\Gamma)$ вида $a_+P_+ + a_-P_- + K$, где $a_\pm \in C(\Gamma)$ и $K \in \mathfrak{K}_p(\Gamma)$.

Отметим, что алгебра бисингулярных операторов $\mathfrak{A}_p$ представима в виде топологического тензорного произведения алгебр сингулярных операторов: $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p(\Gamma_1)\widehat{\otimes}\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$.

Рассмотрим также топологические тензорные произведения $\mathfrak{K}_p^1 = \mathfrak{K}_p(\Gamma_1)\widehat{\otimes}\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, $\mathfrak{K}_p^2 = \mathfrak{A}_p(\Gamma_1)\widehat{\otimes}\mathfrak{K}_p(\Gamma_2)$ и $\mathfrak{K}_p = \mathfrak{K}_p(\Gamma_1)\widehat{\otimes}\mathfrak{K}_p(\Gamma_2)$, являющиеся идеалами алгебры $\mathfrak{A}_p$. Из результатов [11] известно, что $\mathfrak{K}_p^1 \cap \mathfrak{K}_p^2 = \mathfrak{K}_p$ и $\mathfrak{K}_p$ совпадает с идеалом всех компактных операторов алгебры $\mathfrak{B}_p$.

Операторы $A$ и $B$ из алгебры $\mathfrak{B}_p$ называются частично локально эквивалентными по первой переменной в точке $t_1$ ($\in \Gamma_1$), если для любого $\varepsilon$ ($> 0$) найдется такая окрестность $u$ ($\subset \Gamma_1$) точки $t_1$, что

$$\|(A - B)(P_u \otimes I)\| < \varepsilon,$$

где $P_u$ — оператор умножения на характеристическую функцию окрестности $u$, действующий в $L_p(\Gamma_1)$. Кратко этот факт будем отмечать следующим образом: $A \overset{1,t_1}{\sim} B$. Симметрично вводится отношение частичной локальной эквивалентности по второй переменной в точке $t_2$ ($\in \Gamma_2$), отмечаемое как $A \overset{2,t_2}{\sim} B$. Следует отметить [11], что

1) если $K_i \in \mathfrak{K}_p^i$, то $K_i \overset{i,t_i}{\sim} O$ $(i = 1, 2,\ t_i \in \Gamma_i)$;

2) если $A, B \in \mathfrak{B}_p$, $C \in \mathfrak{A}_p$ и $A \overset{1,t_1}{\sim} B$, где $t_1$ — некоторая точка контура $\Gamma_1$, то $AC \overset{1,t_1}{\sim} BC$ (аналогичное свойство имеет место и для частичной локальной эквивалентности по второй переменной).

Если $A \in \mathfrak{A}_p$, то для любых $t_1$ ($\in \Gamma_1$) и $t_2$ ($\in \Gamma_2$) найдутся [11] такие операторы $A_1^\pm(t_1)$ ($\in \mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$) и $A_2^\pm(t_2)$ ($\in \mathfrak{A}_p(\Gamma_1)$), что

$$A \overset{1,t_1}{\sim} P_+ \otimes A_1^+(t_1) + P_- \otimes A_1^-(t_1),$$
$$A \overset{2,t_2}{\sim} A_2^+(t_2) \otimes P_+ + A_2^-(t_2) \otimes P_-.$$

При этом семейство сингулярных операторов $A_i^\pm(t_i)$ $(i = 1, 2,\ t_i \in \Gamma_i)$ определяется бисингулярным оператором $A$ единственным образом и называется символом бисингулярного оператора $A$. С другой стороны, бисингулярный оператор определяется своим

символом единственным образом с точностью до компактного слагаемого из $\mathfrak{K}_p$. Также отметим, что оператор-функции $A_1^{\pm}$, $A_2^{\pm}$ непрерывны в равномерной операторной топологии, а четыре соответствия $A \mapsto A_1^{\pm}$, $A \mapsto A_2^{\pm}$ являются гомоморфизмами банаховых алгебр.

**Теорема 2** [11]. *Нётеровость бисингулярного оператора $A$ из алгебры $\mathfrak{A}_p$ равносильна обратимости всех операторов его символа $A_i^{\pm}(t_i)$ $(i = 1, 2,\ t_i \in \Gamma_i)$. При этом регуляризатор оператора $A$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}_p$ и символ регуляризатора состоит из операторов $(A_i^{\pm}(t_i))^{-1}$.*

В пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ введем четыре проектора $P_{\pm+} = P_{\pm} \otimes P_+$, $P_{\pm-} = P_{\pm} \otimes P_-$. Если функция $a$ класса $C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ не имеет нулевых значений, то через $\operatorname{ind}_1 a$ и $\operatorname{ind}_2 a$ будем обозначать частичные индексы функции $a$ по первой и по второй переменным соответственно.

**Теорема 3** [11–13]. *Пусть $a_{\pm+}, a_{\pm-} \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Тогда для нётеровости бисингулярного оператора $A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) *функции $a_{\pm+}$, $a_{\pm-}$ не имеют нулевых значений;*

2) $\operatorname{ind}_1 a_{+\pm} = \operatorname{ind}_1 a_{-\pm}$, $\operatorname{ind}_2 a_{\pm+} = \operatorname{ind}_2 a_{\pm-}$.

*При этом индекс оператора $A$ вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Ind} A = (\operatorname{ind}_1 a_{++} - \operatorname{ind}_1 a_{--})(\operatorname{ind}_2 a_{+-} - \operatorname{ind}_2 a_{-+}) = \operatorname{ind}_1 \frac{a_{++}}{a_{--}} \cdot \operatorname{ind}_2 \frac{a_{++}}{a_{--}}.$$

Рассмотрим теперь матричные бисингулярные операторы. Если $\mathfrak{R}$ — некоторое кольцо или алгебра, то через $\mathfrak{R}^{(2)}$ обозначим кольцо или, соответственно, алгебру всех квадратных матриц второго порядка с элементами из $\mathfrak{R}$. В дальнейшем условие $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(2)}$ будет по умолчанию означать, что $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{R}$ — некоторая алгебра линейных операторов в линейном пространстве $L$, то матрицы из алгебры $\mathfrak{R}^{(2)}$ естественным образом рассматриваются как линейные операторы в линейном пространстве $L \oplus L$. Операторы из алгебры $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$ действуют в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \oplus L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ и называются *матричными бисингулярными операторами.*

Если $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in (\mathfrak{A}_p)^{(2)}$, то символом оператора $M$ назовем *семейство операторов* $M_i^{\pm}(t_i) = \begin{pmatrix} A_i^{\pm}(t_i) & C_i^{\pm}(t_i) \\ B_i^{\pm}(t_i) & D_i^{\pm}(t_i) \end{pmatrix}$ $(\in (\mathfrak{A}_p(\Gamma_{3-i}))^{(2)})$, где $i = 1, 2,\ t_i \in \Gamma_i$. Очевидно, что матричный бисингулярный оператор из алгебры $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$ определяется своим символом единственным образом с точностью до компактного слагаемого из $(\mathfrak{K}_p)^{(2)}$.

Для матричных бисингулярных операторов справедливо следующее утверждение, доказательство которого ничем принципиально не отличается от доказательства теоремы 2.

**Теорема 4.** *Нётеровость матричного бисингулярного оператора $M$ из алгебры $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$ равносильна обратимости всех операторов его символа $M_i^{\pm}(t_i)$ $(i = 1, 2,\ t_i \in \Gamma_i)$. При этом регуляризатор оператора $M$ принадлежит алгебре $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$ и символ регуляризатора состоит из операторов $(M_i^{\pm}(t_i))^{-1}$.*

Пусть $\mathfrak{A}_{p,W}$ — множество всех операторов в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ вида $A + WB$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$. Операторы из $\mathfrak{A}_{p,W}$ мы называем *бисингулярными операторами со сдвигом $\alpha$.*

**Лемма 2** [1, с. 35; 2, с. 39]. *Если $\varphi$ $(\Gamma_i \to \Gamma_j)$ — одномерный сдвиг $(i, j = 1, 2)$, то*

$$V_\varphi S_{\Gamma_j} V_\varphi^{-1} - \gamma S_{\Gamma_i} \in \mathfrak{K}_p(\Gamma_i),$$

*где $\gamma = +1$, когда $\varphi$ сохраняет ориентацию, и $\gamma = -1$, когда $\varphi$ меняет ориентацию.*

Из леммы 2 следует, что если $A \in \mathfrak{A}_p$, то и $WAW \in \mathfrak{A}_p$. Тогда множество $\mathfrak{A}_{p,W}$ является алгеброй, порожденной оператором $W$ и всеми бисингулярными операторами из алгебры $\mathfrak{A}_p$.

Вместе с оператором $A+WB$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$, мы будем рассматривать сопутствующий оператор $A - WB$ и соответствующий матричный оператор $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, принадлежащий алгебре $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$. Отметим один известный (например, [1, с. 398]) элементарный алгебраический факт, устанавливающий связь между этими операторами.

**Лемма 3.** *Пусть $\mathfrak{R}$ — некоторая алгебра с единицей $e$ и нулем $o$ над полем комплексных чисел, $a, b, w \in \mathfrak{R}$ и $w^2 = e$. Тогда имеет место следующее подобие в алгебре $\mathfrak{R}^{(2)}$:*

$$\begin{pmatrix} a & wbw \\ b & waw \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} a+wb & o \\ o & a-wb \end{pmatrix} G^{-1},$$

*где $G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e & e \\ w & -w \end{pmatrix}$ $\left(\text{и } G^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e & w \\ e & -w \end{pmatrix}\right)$.*

Нам также понадобится одно свойство, связанное с регуляризацией оператора $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$. Предварительно рассмотрим вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.** *Пусть $\mathfrak{R}$ — некоторое ассоциативное кольцо с единицей $e$. Пусть также $a, b, w \in \mathfrak{R}$ и $w^2 = e$. Тогда если матрица $\mu = \begin{pmatrix} a & wbw \\ b & waw \end{pmatrix}$ обратима в $\mathfrak{R}^{(2)}$, то обратная матрица имеет вид $\mu^{-1} = \begin{pmatrix} c & wdw \\ d & wcw \end{pmatrix}$, где $c$ и $d$ — некоторые элементы кольца $\mathfrak{R}$.*

$\lhd$ У нас $\mu^{-1} = \begin{pmatrix} c & g \\ d & h \end{pmatrix}$, где $c, d, g, h \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим матрицу $\rho = \begin{pmatrix} c & wdw \\ d & wcw \end{pmatrix}$. Так как $\mu\mu^{-1} = \begin{pmatrix} e & o \\ o & e \end{pmatrix}$, где $o$ — нуль кольца $\mathfrak{R}$, то $ac+wbwd = e$ и $bc+wawd = o$. Умножая эти равенства слева и справа на $w$, получаем еще два равенства $bwdw + wacw = e$ и $awdw + wbcw = o$. Но тогда $\mu\rho = \begin{pmatrix} e & o \\ o & e \end{pmatrix}$. Таким образом, $\mu^{-1} = \rho$. $\rhd$

**Теорема 5.** *У нётерова оператора вида $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$, есть регуляризатор аналогичного вида $\begin{pmatrix} C & WDW \\ D & WCW \end{pmatrix}$, где $C$ и $D$ — некоторые операторы из алгебры $\mathfrak{A}_p$.*

$\lhd$ Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_p$ и оператор $M = \begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$ нётеров. По лемме 4 у оператора $M$ есть регуляризатор вида $R = \begin{pmatrix} C & WDW \\ D & WCW \end{pmatrix}$, где $C, D \in \mathfrak{B}_p$. Но $M \in (\mathfrak{A}_p)^{(2)}$, а тогда по теореме 4 оператор $R$ тоже принадлежит алгебре $(\mathfrak{A}_p)^{(2)}$. Следовательно, $C, D \in \mathfrak{A}_p$. $\rhd$

### 3. Одновременная нётеровость бисингулярного оператора со сдвигом и соответствующего матричного оператора

Здесь и далее если $A$ и $B$ — линейные ограниченные операторы в некотором банаховом пространстве, то запись $A \sim B$ будет означать, что $A - B$ — компактный оператор.

**Теорема 6.** *Пусть $A, B, C, D \in \mathfrak{A}_p$ и $A + WB = C + WD$. Тогда $A \sim C$, $B \sim D$.*

$\lhd$ Пусть сначала $\alpha$ — сдвиг (1). Нам достаточно доказать, что $A \sim C$. Для этого достаточно убедиться в совпадении символов операторов $A$ и $C$. Докажем, например, что $A_1^{\pm}(t_1) = C_1^{\pm}(t_1)$ $(t_1 \in \Gamma_1)$. Здесь важно отметить, что сдвиг $\alpha_1$ $(\Gamma_1 \to \Gamma_1)$ инволютивный. Тогда

1) $\alpha_1$ не является тождественным отображением;

2) если $\alpha_1$ сохраняет ориентацию на $\Gamma_1$, то у $\alpha_1$ нет неподвижных точек: $\alpha_1(t_1) \neq t_1$ в каждой точке $t_1$ контура $\Gamma_1$;

3) если $\alpha_1$ меняет ориентацию на $\Gamma_1$, то у $\alpha_1$ имеются ровно две неподвижные точки, в которых выполняется условие $\alpha_1(t_1) = t_1$, а во всех остальных точках контура $\Gamma_1$ выполняется условие $\alpha_1(t_1) \neq t_1$.

Зафиксируем произвольную точку $t_1^0$ на $\Gamma_1$, в которой $\alpha_1(t_1^0) \neq t_1^0$. Тогда найдется такая функция $h$ класса $C(\Gamma_1)$, что $h(t_1^0) = 1$ и $h(\alpha_1(t_1^0)) = 0$. Умножим равенство $A + WB = C + WD$ слева на оператор $(h \otimes 1)I$:

$$(h \otimes 1)\, A + W((h \circ \alpha_1) \otimes 1)\, B = (h \otimes 1)\, C + W((h \circ \alpha_1) \otimes 1)\, D.$$

Из свойств частичной локальной эквивалентности, изложенных в пункте 2, следует, что

$$(h \otimes 1)A + W((h \circ \alpha_1) \otimes 1)B \overset{1,t_1^0}{\sim} h(t_1^0)A + Wh(\alpha_1(t_1^0))B = A,$$
$$(h \otimes 1)C + W((h \circ \alpha_1) \otimes 1)D \overset{1,t_1^0}{\sim} h(t_1^0)C + Wh(\alpha_1(t_1^0))D = C.$$

Тогда $A \overset{1,t_1^0}{\sim} C$. Отсюда следует, что $A \overset{1,t_1^0}{\sim} P_+ \otimes C_1^+(t_1^0) + P_- \otimes C_1^-(t_1^0)$. Но тогда из единственности символа оператора $A$ следует, что $A_1^{\pm}(t_1^0) = C_1^{\pm}(t_1^0)$. Итак, в каждой точке $t_1$ контура $\Gamma_1$, где $\alpha_1(t_1) \neq t_1$, выполняется условие $A_1^{\pm}(t_1) = C_1^{\pm}(t_1)$. Поскольку оператор-функции $A_1^{\pm}$, $C_1^{\pm}$ непрерывны в равномерной операторной топологии, то условие $A_1^{\pm}(t_1) = C_1^{\pm}(t_1)$ обязано выполняться и в неподвижных точках сдвига $\alpha_1$, если таковые точки имеются.

Если $\alpha$ — сдвиг (2), то утверждение теоремы получается сразу из результатов [4, 5]. $\rhd$

Из теоремы 6 следует, что для всякого оператора из алгебры $\mathfrak{A}_{p,W}$ его сопутствующий и соответствующий матричный операторы определяются единственным образом с точностью до компактного слагаемого.

**Теорема 7.** *Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_p$. Тогда операторы $A + WB$, $A - WB$ и* $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$ *нётеровы или нет одновременно.*

$\lhd$ Обратимся к символическим исчислениям бисингулярных операторов со сдвигом $\alpha$, построенным в работах [3–5]. В [3] построен символ оператора со сдвигом (1) (и даже более общего оператора), а в [4, 5] — со сдвигом (2). Символ бисингулярного оператора со сдвигом представляет из себя семейство некоторых матричных операторов, действующих в пространствах $L_p(\Gamma_1) \oplus L_p(\Gamma_1)$ и $L_p(\Gamma_2) \oplus L_p(\Gamma_2)$. В [3–5] доказано, что нётеровость бисингулярного оператора со сдвигом равносильна обратимости всех операторов его символа. Несложно заметить, что символы операторов $A \pm WB$ связаны отношением подобия, а именно: символ оператора $A - WB$ состоит из всевозможных операторов вида

$\begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}$, где $H$ принадлежит символу оператора $A + WB$. Тогда операторы $A \pm WB$ нётеровы или нет одновременно. Остается заметить с помощью леммы 3, что нётеровость оператора $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$ равносильна нётеровости обоих операторов $A \pm WB$. $\triangleright$

Замечание. Если $\alpha$ — сдвиг (1), то условие $V_{\alpha_1} \neq I$, $V_{\alpha_2} \neq I$, заложенное в определении сдвига (1), существенно для одновременной нётеровости бисингулярного оператора со сдвигом (1) и соответствующего матричного оператора. Действительно, рассмотрим оператор сдвига $W_1 = V_{\alpha_1} \otimes I$, где $\alpha_1$ — инволютивный одномерный сдвиг $\Gamma_1 \to \Gamma_1$, и бисингулярные операторы $A = I \otimes I$, $B = P_0 \otimes I$, где $P_0$ — одномерный проектор в $L_p(\Gamma_1)$, образ которого состоит из постоянных функций. Тогда оператор $A + W_1 B = (I + P_0) \otimes I$ обратим и потому нётеров. Но у оператора $A - W_1 B = (I - P_0) \otimes I$ бесконечномерное ядро, и потому этот оператор не может быть нётеров. Тогда по лемме 3 матричный оператор $\begin{pmatrix} A & W_1 B W_1 \\ B & W_1 A W_1 \end{pmatrix}$ не является оператором Нётера.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Алгебра $\mathfrak{A}_{p,W}$ содержит регуляризаторы всех своих нётеровых операторов. При этом у нётеровых взаимно сопутствующих операторов $A \pm WB$, где $A, B \in \mathfrak{A}_p$, найдутся взаимно сопутствующие регуляризаторы $C \pm WD$ соответственно, где $C$ и $D$ — некоторые операторы из алгебры $\mathfrak{A}_p$.*

$\triangleleft$ Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_p$ и оператор $A + WB$ нётеров. Тогда по теореме 7 операторы $A - WB$ и $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$ тоже нётеровы. По теореме 5 найдутся такие операторы $C$ и $D$ из алгебры $\mathfrak{A}_p$, что оператор $\begin{pmatrix} C & WDW \\ D & WCW \end{pmatrix}$ является регуляризатором оператора $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$. Но тогда из леммы 3 следует, что операторы $C \pm WD$ являются регуляризаторами операторов $A \pm WB$ соответственно. $\triangleright$

## 4. Индексы бисингулярных операторов со сдвигом

### 4.1. Случай покоординатного сдвига.

**Лемма 5.** *Пусть $\alpha$ — сдвиг (1), $K, T \in \mathfrak{K}_p^1$ и оператор $I + K + WT$ нётеров. Тогда*

$$\operatorname{Ind}(I + K + WT) = \operatorname{Ind}(I + K - WT).$$

$\triangleleft$ По теореме 7 вместе с оператором $H = I + K + WT$ будет нётеров и оператор $N = I + K - WT$. Подберем такой обратимый оператор $U$ из алгебры $\mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, что $UV_{\alpha_2} \sim -V_{\alpha_2}U$:

1) если $\alpha_2$ сохраняет ориентацию на $\Gamma_2$, то у $\alpha_2$ нет неподвижных точек и оператор $U$ можно определить как оператор умножения на функцию $\alpha_2(t_2) - t_2$ $(t_2 \in \Gamma_2)$;

2) если $\alpha_2$ меняет ориентацию на $\Gamma_2$, то по лемме 2 можно ввести $U = S$.

Применяя лемму 1, получаем, что $(I \otimes U)H(I \otimes U^{-1}) \sim N$. Следовательно, $\operatorname{Ind} H = \operatorname{Ind} N$. $\triangleright$

**Теорема 9.** *Пусть $\alpha$ — сдвиг (1), $A, B \in \mathfrak{A}_p$ и оператор $A + WB$ нётеров. Тогда*

$$\operatorname{Ind}(A + WB) = \operatorname{Ind}(A - WB) = \frac{1}{2} \operatorname{Ind} \begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ По теореме 7 операторы $A-WB$ и $\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$ нётеровы. По теореме 8 у операторов $A\pm WB$ имеются регуляризаторы $C\pm WD$ соответственно, где $C$ и $D$ — некоторые операторы из алгебры $\mathfrak{A}_p$. Как и в доказательстве леммы 5 подберем обратимый оператор $U$ в алгебре $\mathfrak{A}_p(\Gamma_1)$ такой, что $UV_{\alpha_1} \sim -V_{\alpha_1}U$. Тогда по лемме 1

$$\begin{cases}(U\otimes I)(A-WB)(U^{-1}\otimes I) = A+K+WB+WT,\\ (U\otimes I)(A+WB)(U^{-1}\otimes I) = A+K-WB-WT,\end{cases}$$

где $K,T\in\mathfrak{K}_p^1$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases}(U\otimes I)(A-WB)(U^{-1}\otimes I) \sim (A+WB)(I+(C+WD)(K+WT)),\\ (U\otimes I)(A+WB)(U^{-1}\otimes I) \sim (A-WB)(I+(C-WD)(K-WT)).\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}(U\otimes I)(A-WB)(U^{-1}\otimes I) \sim (A+WB)(I+K_1+WT_1),\\ (U\otimes I)(A+WB)(U^{-1}\otimes I) \sim (A-WB)(I+K_1-WT_1),\end{cases}$$

где $K_1,T_1\in\mathfrak{K}_p^1$. Операторы $I+K_1\pm WT_1$ нётеровы, и, по лемме 5, их индексы равны одному и тому же числу $n$. Тогда

$$\begin{cases}\operatorname{Ind}(A-WB) = \operatorname{Ind}(A+WB)+n,\\ \operatorname{Ind}(A+WB) = \operatorname{Ind}(A-WB)+n.\end{cases}$$

Складывая эти равенства, получаем, что $n=0$ и $\operatorname{Ind}(A+WB)=\operatorname{Ind}(A-WB)$. Остается заметить, что по лемме 3 $\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix} = \operatorname{Ind}(A+WB)+\operatorname{Ind}(A-WB)$. $\rhd$

Приведем пример вычисления индекса бисингулярного оператора со сдвигом (1).

Пример 1. Пусть $\Gamma_0$ — единичная окружность на комплексной плоскости с центром в начале координат и $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_0$. Рассмотрим сдвиг (1) на $\Gamma_0\times\Gamma_0$ вида $\alpha(t_1;t_2)=(-t_1;-t_2)$ $(t_1,t_2\in\Gamma_0)$ и бисингулярные операторы $A=\sum\limits_{x,y=\pm}a_{xy}P_{xy}$, $B=\sum\limits_{x,y=\pm}b_{xy}P_{xy}$ в пространстве $L_p(\Gamma_0\times\Gamma_0)$, где $a_{xy},b_{xy}\in C(\Gamma_0\times\Gamma_0)$, при дополнительном условии $a_{xy}\circ\alpha=a_{xy}$, $b_{xy}\circ\alpha=b_{xy}$ $(x,y=\pm)$. Заметим, что $WAW=A$ и $WBW=B$. Тогда по теореме 7 нётеровость оператора $A+WB$ равносильна нётеровости оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, который подобен оператору $\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$ по лемме 3. Таким образом, нётеровость оператора $A+WB$ равносильна нётеровости двух бисингулярных операторов $A+B=\sum_{x,y=\pm}(a_{xy}+b_{xy})P_{xy}$ и $A-B=\sum_{x,y=\pm}(a_{xy}-b_{xy})P_{xy}$. Тогда по теореме 3 для нётеровости оператора $A+WB$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1) функции $a_{xy}+b_{xy}$, $a_{xy}-b_{xy}$ не имеют нулевых значений $(x,y=\pm)$;

2) $\operatorname{ind}_1(a_{+\pm}+b_{+\pm})=\operatorname{ind}_1(a_{-\pm}+b_{-\pm})$, $\operatorname{ind}_2(a_{\pm+}+b_{\pm+})=\operatorname{ind}_2(a_{\pm-}+b_{\pm-})$;

3) $\operatorname{ind}_1(a_{+\pm}-b_{+\pm})=\operatorname{ind}_1(a_{-\pm}-b_{-\pm})$, $\operatorname{ind}_2(a_{\pm+}-b_{\pm+})=\operatorname{ind}_2(a_{\pm-}-b_{\pm-})$.

При этом из теорем 9 и 3 следует, что

$$\operatorname{Ind}(A+WB)=\frac{1}{2}\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Ind}(A+B)+\operatorname{Ind}(A-B)\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ind}_1\frac{a_{++}+b_{++}}{a_{--}+b_{--}}\cdot\operatorname{ind}_2\frac{a_{++}+b_{++}}{a_{--}+b_{--}}\right.$$

$$\left.+\operatorname{ind}_1\frac{a_{++}-b_{++}}{a_{--}-b_{--}}\cdot\operatorname{ind}_2\frac{a_{++}-b_{++}}{a_{--}-b_{--}}\right).$$

**4.2. Случай перекрестного сдвига.**

**Лемма 6.** *Пусть $\alpha$ — сдвиг (2), $A \in \mathfrak{A}_p$, $K \in \mathfrak{K}_p^1$, $T \in \mathfrak{K}_p^2$ и оператор $A + W(K+T)$ нётеров. Тогда операторы $A \pm W(K+T)$ гомотопны в классе нётеровых операторов.*

$\lhd$ Рассмотрим гомотопию

$$H_\xi = A + W\big(e^{i\pi\xi}K + e^{-i\pi\xi}T\big), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

от оператора $H_0 = A + W(K+T)$ до оператора $H_1 = A - W(K+T)$. Построим символ [4, 5] оператора $H_\xi$, учитывая, что $WKW \in \mathfrak{K}_p^2$ и $WTW \in \mathfrak{K}_p^1$:

$$(H_\xi)^\pm(t_1) = \begin{pmatrix} A_1^\pm(t_1) & (W(e^{i\pi\xi}K + e^{-i\pi\xi}T)W)_1^\pm(t_1) \\ (e^{i\pi\xi}K + e^{-i\pi\xi}T)_1^\pm(t_1) & (WAW)_1^\pm(t_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^\pm(t_1) & e^{i\pi\xi}\cdot(WKW)_1^\pm(t_1) \\ e^{-i\pi\xi}\cdot T_1^\pm(t_1) & (WAW)_1^\pm(t_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & O \\ O & e^{-i\pi\xi}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^\pm(t_1) & (WKW)_1^\pm(t_1) \\ T_1^\pm(t_1) & (WAW)_1^\pm(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & e^{i\pi\xi}I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & O \\ O & e^{-i\pi\xi}I \end{pmatrix} (H_0)^\pm(t_1) \begin{pmatrix} I & O \\ O & e^{i\pi\xi}I \end{pmatrix}, \quad t_1 \in \Gamma_1.$$

Поскольку оператор $H_0$ нётеров, то [4, 5] все операторы его символа $(H_0)^\pm(t_1)$ обратимы в $L_p(\Gamma_2) \oplus L_p(\Gamma_2)$ ($t_1 \in \Gamma_1$). Но вместе с ними обратимы в $L_p(\Gamma_2)\oplus L_p(\Gamma_2)$ и все операторы $(H_\xi)^\pm(t_1)$ ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $t_1 \in \Gamma_1$). Тогда [4, 5] все операторы $H_\xi$ нётеровы ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$). $\rhd$

Из теоремы 7 и лемм 3 и 6 следует такое утверждение.

**Теорема 10.** *Пусть $\alpha$ — сдвиг (2), $A \in \mathfrak{A}_p$, $K \in \mathfrak{K}_p^1$, $T \in \mathfrak{K}_p^2$ и оператор $A + W(K+T)$ нётеров. Тогда*

$$\operatorname{Ind}(A + W(K+T)) = \operatorname{Ind}(A - W(K+T)) = \frac{1}{2}\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A & W(K+T)W \\ K+T & WAW \end{pmatrix}.$$

Однако в общем случае не существует пропорции между индексами бисингулярных операторов со сдвигом (2) и индексами соответствующих матричных операторов. Это показывает следующий пример, в котором связь индексов, установленная в условиях теоремы 10, становится невозможной.

Пример 2. Пусть $\Gamma_0$ — единичная окружность на комплексной плоскости с центром в начале координат и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_0$. Введем функцию $e(t) = t$ ($t \in \Gamma_0$) и функции $e_{01} = 1 \otimes e$, $e_{10} = e \otimes 1$, $e_{11} = e \otimes e$ на $\Gamma_0 \times \Gamma_0$. Рассмотрим сдвиг (2) вида

$$\alpha(t_1; t_2) = (t_2; t_1), \quad t_1, t_2 \in \Gamma_0,$$

и бисингулярные операторы

$$A = \left(e_{11} - \frac{1}{2}\right)P_{++} + \left(e_{01} - \frac{1}{2}\right)P_{+-} + \left(e_{10} - \frac{1}{2}\right)P_{-+} + P_{--},$$

$$B = P_{++} + P_{+-} + P_{-+}.$$

Заметим, что $WAW = A$ и $WBW = B$. Тогда бисингулярному оператору со сдвигом $A + WB$ соответствует матричный оператор $M = \begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Нам

нужно убедиться, что операторы $A+WB$ и $M$ нётеровы, но $\mathrm{Ind}(A+WB)\neq\frac{1}{2}\mathrm{Ind}M$. По лемме 3 оператор $M$ подобен операторам $\begin{pmatrix} A+WB & O \\ O & A-WB \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$. Операторы

$$A+B=\left(e_{11}+\frac{1}{2}\right)P_{++}+\left(e_{01}+\frac{1}{2}\right)P_{+-}+\left(e_{10}+\frac{1}{2}\right)P_{-+}+P_{--},$$

$$A-B=\left(e_{11}-\frac{3}{2}\right)P_{++}+\left(e_{01}-\frac{3}{2}\right)P_{+-}+\left(e_{10}-\frac{3}{2}\right)P_{-+}+P_{--}$$

являются операторами Нётера по теореме 3. Но тогда операторы $M$ и $A\pm WB$ тоже нётеровы. Кроме того, по теореме 3 $\mathrm{Ind}\,(A+B)=1$ и $\mathrm{Ind}\,(A-B)=0$. Тогда $\mathrm{Ind}\,M=1$. Поэтому в данном случае $\mathrm{Ind}\,(A+WB)$ не может быть равен $\frac{1}{2}\,\mathrm{Ind}\,M$.

Замечание. Можно убедиться, что в условиях примера 2 $\ker(A+B)$ и $\ker(A-WB)$ совпадают с одномерным линейным пространством, порожденным функцией $1\otimes\frac{1}{e+\frac{1}{2}}-\frac{1}{e+\frac{1}{2}}\otimes 1$, а $\ker(A-B)$, $\ker(A+WB)$, $\mathrm{coker}(A\pm B)$ и $\mathrm{coker}(A\pm WB)$ тривиальны. Отсюда, в частности, следует, что $\mathrm{Ind}(A+WB)=0$ и $\mathrm{Ind}(A-WB)=1$.

## Литература


1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Наука, 1977.—448 с.
2. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения.—Ростов н/Д: Изд-во Ростовского ун-та, 1988.—192 с.
3. *Сазонов Л. И.* Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве $L_p$ // Мат. заметки.—1973.—Т. 13, № 3.—С. 385–393.
4. *Пилиди В. С., Стефаниди Е. Н.* Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом // Изв. вузов. Математика.—1981.—№ 9.—С. 80–81.
5. *Пилиди В. С., Стефаниди Е. Н.* Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом.—Ростов н/Д, 1981.—26 с.—Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3036.
6. *Ефимов С. В.* Нётеровость и индекс характеристического бисингулярного интегрального оператора со сдвигами // Сиб. мат. журн.—2019.—Т. 60, № 4.—С. 751–759. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.404.
7. *Ефимов С. В.* Бисингулярные операторы с нераспадающимся инволютивным сдвигом // Изв. вузов. Математика.—1992.—№ 2.—С. 29–36.
8. *Ефимов С. В.* Вычисление индекса некоторых бисингулярных операторов с нераспадающимся инволютивным сдвигом // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Ест. науки. Прил.—2004.—№ 9.—С. 7–14.
9. *Ефимов С. В.* Об индексе бисингулярного оператора со сдвигом // Вестн. Донского гос. тех. ун-та.—2004.—Т. 4, № 3 (21).—С. 290–295.
10. *Ефимов С. В.* Вычисление индекса некоторых бисингулярных операторов со сдвигом методом гомотопии // Вестн. Донского гос. тех. ун-та.—2010.—Т. 10, № 1 (44).—С. 22–27.
11. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве $L_p$ // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца.—1972.—Т. 7, № 3.—С. 167–175.
12. *Пилиди В. С.* Вычисление индекса бисингулярного оператора // Функцион. анализ и его прил.—1973.—Т. 7, № 4.—С. 93–94.
13. *Пилиди В. С.* К вопросу об индексе бисингулярных интегральных операторов // Мат. анализ и его прил.—Ростов н/Д., 1975.—Т. 7.—С. 123–136.


*Статья поступила 1 апреля 2024 г.*

Ефимов Сергей Викторович
Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики,
*доцент кафедры информационной безопасности*
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Серафимовича, 62/59
E-mail: `EfimovSergei1960@mail.ru`

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2024, Volume 26, Issue 4, P. 66–77*

# ON THE INDEX OF A BISINGULAR OPERATOR WITH AN INVOLUTIVE SHIFT

Efimov, S. V.[1]

[1] North Caucasus Branch Moscow Technical University
of Communication and Information Technology,
62/59 Serafimovich St., Rostov-on-Don 344002, Russia

E-mail: EfimovSergei1960@mail.ru

**Abstract.**In the theory of singular operators with an involutive shift, the issues of Noether (Fredholm) property and the index of an operator of the form $A + VB$ are fully studied, where $A$ and $B$ are singular operators, and $V$ is an operator of an involutive shift in the space of $p$-summable functions on a simple closed contour of the Lyapunov type. Together with the operator $A + VB$, the corresponding matrix singular operator without shift $M = \begin{pmatrix} A & VBV \\ B & VAV \end{pmatrix}$ is considered. It is well known that the operators $A + VB$ and $M$ are Noetherian operators or not simultaneously, and their indices are related as $1 : 2$. Similar questions about simultaneous Noetherian property and proportionality of indices arise for bisingular operators with an involutive shift $A + WB$ and their corresponding matrix operators $M = \begin{pmatrix} A & WBW \\ B & WAW \end{pmatrix}$, where $A$ and $B$ are bisingular operators, and $W$ is an operator of an involutive shift in the space of $p$-summable functions on the direct product of simple closed contours of the Lyapunov type. In this paper, we study bisingular operators with an involutive shift that decomposes into one-dimensional components. Two types of such shifts are considered — coordinate-wise and cross. In these cases, the corresponding matrix operators are matrix bisingular operators without shift. The simultaneous Noetherian property of the bisingular operator with a shift and the corresponding matrix bisingular operator without shift is obtained. The proportionality of the indices of bisingular operators with a coordinate-wise shift and the corresponding matrix operators is established. Namely: it is proved that the indices of these operators are related as 1:2. In a special case, the same result about the indices is obtained for the cross shift.

**Keywords:** Noether operator, operator index, bisingular operator, involutive shift.

**AMS Subject Classification:** 47A53, 47G10, 45E05.

**For citation:** *Efimov, S. V.* On the Index of a Bisingular Operator with an Involutive Shift, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 4, pp. 66–77 (in Russian). DOI: 10.46698/a3118-8799-1112-n.

## References

1. *Litvinchuk, G. S. Kraevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* [Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift], Moscow, Nauka, 1977, 448 p. (in Russian).
2. *Karapetyants, N. K. and Samko, S. G. Uravneniya s involyutivnymi operatorami i ikh prilozheniya* [Equations with Involutive Operators and Their Applications], Rostov-on-Don, Publishing house of the Rostov University, 1988, 192 p. (in Russian).
3. *Sazonov, L. I.* A Bisingular Equation with Translation in the Space $L_p$, *Mathematical Notes*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 235–239. DOI: 10.1007/BF01155662.
4. *Pilidi, V. S. and Stefanidi, E. N.* On an Algebra of Bisingular Operators with Shift, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Bulletin of Higher Education Institutes. Mathematics], 1981, no. 9, pp. 80–81 (in Russian).
5. *Pilidi, V. S. and Stefanidi, E. N. Ob odnoy algebre bisingulyarnykh operatorov so sdvigom* [On an Algebra of Bisingular Operators with Shift], Rostov-on-Don, 1981, 26 p. Submitted to VINITI, no. 3036 (in Russian).
6. *Efimov, S. V.* Noethericity and Index of a Characteristic Bisingular Integral Operator with Shifts, *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 4, pp. 585–591. DOI: 10.1134/S0037446619040049.
7. *Efimov, S. V.* Bisingular Operators with Irreducible Involutive Shift, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 1992, no. 2, pp. 29–36.

8. *Efimov, S. V.* Calculation of the Index of Some Bisingular Operators with Irreducible Involutive Shift, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. Prilozheniya* [Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences. Suppl.], 2004, no. 9, pp. 7–14 (in Russian).
9. *Efimov, S. V.* On the Index of Some Bisingular Integral Operators with Shift, *Vestnik Don State Technical University*, 2004, vol. 4, no. 3, pp. 290–295 (in Russian).
10. *Efimov, S. V.* Calculation of the Index of Some Bisingular Operators with Shift by the Homotopy Method, *Vestnik Don State Technical University*, 2010, vol. 10, no. 1, pp. 22–27 (in Russian).
11. *Pilidi, V. S.* On a Bisingular Equation in the Space $L_p$, *Matematicheskie issledovaniya. Kishinev. Shtiintsa* [Mathematical Researches. Kishinev. Shtiintsa], 1972, vol. 7, issue 3, pp. 167–175 (in Russian).
12. *Pilidi, V. S.* Index Computation for a Bisingular Operator, *Functional Analysis and Its Applications*, 1973, vol. 7, no. 4, pp. 337–338. DOI: 10.1007/BF01075747.
13. *Pilidi, V. S.* On the Question of the Index of Bisingular Integral Operators, *Matematicheskij analiz i ego prilozheniya. Rostov-na-Donu* [Mathematical Analysis and Its Applications], Rostov-on-Don, 1975, vol. 7, pp. 123–136 (in Russian).

*Received April 1, 2024*

Sergey V. Efimov
North Caucasus Branch Moscow Technical University
of Communication and Information Technology,
62/59 Serafimovich St., Rostov-on-Don 344002, Russia,
*Associate Professor of the Department of Information Security*
E-mail: `EfimovSergei1960@mail.ru`