Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 4, С. 95–104

УДК 517.955.8, 517.986.7
DOI 10.46698/y0708-2078-6879-i

УСРЕДНЕНИЕ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ#

В. Б. Левенштам[1,2]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: `vlevenshtam@yandex.ru`

Аннотация. На временном отрезке рассматривается многоточечная краевая задача для абстрактного параболического уравнения с быстро осциллирующей по времени нелинейной частью. Оператор $-A$, где A — старший стационарный линейный оператор уравнения, позитивен. Условия работы формулируются в терминах теории полугрупп и дробных степеней оператора $-A$. Многоточечные краевые условия на временном отрезке помимо линейной комбинации значений решения в конечном наборе точек содержат интегральные слагаемые. Для указанной, зависящей от большого параметра (высокой частоты осцилляций) задачи построена предельная (усредненная) многоточечная краевая задача и обоснован предельный переход в пространстве непрерывных вектор-функций на временном отрезке. Таким образом, для абстрактных параболических уравнений с многоточечными краевыми условиями обоснован метод усреднения Крылова — Боголюбова. Полученные результаты применимы к параболическим уравнениям в ограниченной пространственной области с многоточечными краевыми условиями на временном отрезке и некоторым другим задачам математической физики. Некоторые приложения к параболическим задачам содержатся в заключительной части данной работы.

Ключевые слова: абстрактные параболические уравнения, многоточечные краевые условия, метод усреднения.

AMS Subject Classification: 34B10, 35K50, 34C29.

Образец цитирования: *Левенштам В. Б.* Усреднение абстрактных параболических уравнений с многоточечными интегральными краевыми условиями // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 4.—С. 95–104. DOI: 10.46698/y0708-2078-6879-i.

1. Введение

Метод усреднения по времени [1–3], который связывают с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, является одним из известных асимптотических методов теории дифференциальных уравнений. В настоящее время он разработан с большой полнотой для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и других (см., например, [1–16]). При этом для краевых по времени задач (особенно, многоточечных, т. е. при числе точек, большем двух) он разработан еще не достаточно.

#Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20141.

К этому направлению относятся работы [12–16], в которых рассматриваются системы ОДУ. Усреднение многоточечных краевых задач для эволюционных УрЧП (в частности, для задач в форме абстрактных параболических уравнений), насколько известно автору, ранее не исследовалось.

Наша цель — показать, что метод усреднения применим и для некоторых абстрактных параболических уравнений с многоточечными краевыми условиями.

В работе рассматриваются абстрактные параболические уравнения с многоточечными краевыми условиями, включающими интегральные слагаемые, на отрезке $t \in [0;T]$, $T > 0$, вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, t, \omega t), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} B_k x(t_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} C_k(s) x(s)\, ds = a(\omega), \tag{2}$$

где m и n — натуральные числа, $n \geqslant 2$, а ω — большой параметр. Требования к линейным операторам A, B_k, C_k, нелинейному отображению f и вектору a сформулируем ниже.

Основная часть работы изложена в терминах теории полугрупп и дробных степеней операторов (см., например, [17, §§ 13–14]). Мы используем разработанную в работе [7] (см. также монографию [8, гл. 1]) методику, которая применялась там при обосновании метода усреднения для абстрактных параболических уравнений в случае задачи с начальным условием («одноточечная» задача). Результаты установленной в данной работе теоремы (см. раздел 2) могут применяться к параболическим задачам и другим по той же схеме, что и в [8, гл. 1]. Однако класс параболических задач у нас существенно уже, нежели в случае «одноточечной» задачи [8, гл. 1]. Поясним этот факт.

В работах [12–16], посвященных обоснованию метода усреднения для систем ОДУ с многоточечными краевыми условиями важнейшее специфическое требование к возмущенной задаче состоит в неравенстве нулю определителя матрицы, отвечающей соответствующему линейному оператору (линеаризованной правой части усредненного уравнения) и краевым условиям. Переход от конечномерного случая [12–16] к бесконечномерному, когда упоминавшийся линейный оператор ограничен, не вызывает принципиальной сложности: условие на определитель естественно заменить условием обратимости соответствующего оператора. В том же случае, когда указанный линейный оператор неограничен и его область определения не совпадает со всем фазовым (банаховым) пространством, задача существенно усложняется, что приводит к некоторым дополнительным жестким требованиям. К ним относятся требования, сформулированные в условиях 7 и 9 данной работы. Первое требование условия 7 является естественным обобщением конечномерного условия о неравенстве нулю определителя, а остальные требования условий 7, 9 связаны с неограниченностью A и естественным использованием при работе с нелинейными абстрактными параболическими уравнениями дробных степеней позитивного оператора $-A$. В силу сказанного важно указать содержательный класс параболических задач, для которых все условия теоремы раздела 2 выполнены, а значит справедлив результат об усреднении. Первое, что приходит в связи с этим в голову, — рассмотреть многоточечные краевые задачи, близкие, в определенном смысле, к давно изученным в работе [7] «одноточечным». Близость здесь заключается в обратимости оператора B_1 — первого коэффициента в многоточечных краевых условиях — и малости, в определенном смысле, остальных коэффициентов, т. е. операторов B_k, $k = \overline{2, m}$, и C_k, $k = \overline{1, n-1}$. В заключительной части работы мы рассматриваем простейшие такие задачи, ограничившись параболическими уравнениями второго порядка и, более того, случаем $A = \Delta$ с пространственными однородными условиями Дирихле.

2. Основной результат и его доказательство

1°. В этом пункте сформулируем основной результат работы.

1. Пусть A — линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве B и порождающий аналитическую полугруппу e^{tA}, $-A$ — позитивный оператор. Через B^γ, $\gamma \geqslant 0$, обозначим банахово пространство, векторы которого принадлежат области определения оператора $(-A)^\gamma$, с нормой $\|x\|_{B^\gamma} = \|(-A)^\gamma x\|_B$.

2. Пусть $0 < \delta$, $\alpha < 1$, m и n — натуральные числа, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T$, $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = T$, f — непрерывное отображение множества $B^\alpha \times [0;T] \times [0;\infty)$ в пространство B^δ.

3. Пусть отображение $f(x,t,\tau)$ дифференцируемо в смысле Фреше по первой переменной и соответствующий дифференциал $(Df)(x,t,\tau)$ осуществляет непрерывное отображение множества $B^\alpha \times [0;T] \times [0;\infty)$ в пространство $\mathrm{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ (так обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B^α в B^δ, с обычной операторной нормой).

4. Существует отображение $F : B^\alpha \times [0;T] \to B^\delta$, которое непрерывно вместе с производной (Фреше) $DF : B^\alpha \times [0;T] \to \mathrm{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ по первой переменной и при всех $(x,t) \in B^\alpha \times [0;T]$ справедливы предельные равенства

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N f(x,t,\tau)\, d\tau = F(x,t), \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (Df)(x,t,\tau)\, d\tau = (DF)(x,t)$$

в B^δ и $\mathrm{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ соответственно.

5. Для каждого ограниченного в B^α множества K отображения $f(x,t,\tau)$ и $(Df)(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in K \times [0;T] \times [0;\infty)$, равномерно ограничены и равностепенно относительно τ непрерывны по (x,t), а фигурирующие в п. 4 пределы равномерны относительно $(x,t) \in K \times [0;T]$.

6. Векторы $a(\omega)$, $\omega \in (0;\infty)$, принадлежат пространству B^1 и существует вектор a_0 такой, что в этом пространстве $\lim_{\omega\to\infty} a(\omega) = a_0$.

Наряду с возмущенной задачей (1), (2) рассмотрим усредненную задачу:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y,t), \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} B_k y(t_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} C_k(s) y(s)\, ds = a_0. \tag{4}$$

7. Предположим, что действующий в пространстве B оператор

$$P = \sum_{k=1}^{m} B_k e^{t_k A} + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} C_k(s) e^{sA}\, ds$$

обратим, причем операторы $P^{-1}B_k$, $P^{-1}C_k(s)$ и P^{-1} принадлежат пространству $\mathrm{Hom}(B^1, B^\alpha)$ и нормы операторов зависящего от s семейства равномерно ограничены по $s \in [s_1;T]$.

Далее символом $C([0;T],B^\alpha)$ будем обозначать банахово пространство непрерывных вектор-функций $u:[0;T]\to B^\alpha$ с нормой

$$\|x\|_{C([0;T],B^\alpha)}=\max_{t\in[0;T]}\|x(t)\|_{B^\alpha}.$$

8. Пусть задача (3)–(4) имеет решение $\overset{\circ}{y}(t)\in C([0;T],B^\alpha)$.

Важную роль в работе играет банахово пространство $C^\gamma_\mu(B^\alpha)$, $\gamma,\mu\in(0;1)$, введенное в [7]. Нас интересует случай $\gamma=\mu$, а потому используется пространство отображений $x:[0;T]\to B^\alpha$ с нормой

$$\|x\|_{C^\mu_\mu([0;T],B^\alpha)}=\sup_{\varepsilon\in(0;T]}\varepsilon^\mu\left\{\max_{t\in[\varepsilon;T]}\|x(t)\|_{B^\alpha}+\sup_{t_1,t_2\in[\varepsilon;T]}\frac{\|x(t_2)-x(t_1)\|_{B^\alpha}}{|t_2-t_1|^\mu}\right\}<\infty.$$

Символом C обозначим, следуя [7], пространство

$$C=C^\mu_\mu([0;T],B^\alpha)\cap C([0;T],B^\alpha).$$

9. Предположим еще, что оператор

$$I+\int_0^t e^{(t-\tau)A}(DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau),\tau\big)\,d\tau+e^{tA}P^{-1}\left\{\sum_{i=1}^m B_i\int_0^{t_i}e^{(t_i-\tau)A}(DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau),\tau\big)\,d\tau\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n\int_{s_i}^{s_{i+1}}C_i(s)\left[\int_0^s e^{(s-\tau)A}(DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau),\tau\big)\,d\tau\right]ds\right\}$$

обратим в C.

Теорема. *Существует такое число $\omega_0>0$, что при каждом $\omega>\omega_0$ задача (1)–(2) имеет в некоторой C-окрестности вектор-функции $\overset{\circ}{y}$ единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство:*

$$\lim_{\omega\to\infty}\big\|x_\omega-\overset{\circ}{y}\big\|_{C([0;T],B^\alpha)}=0.$$

2°. Данный пункт посвящен доказательству теоремы.

Решение уравнения (1) с начальным условием $x(0)=x_0\in B^\alpha$, если такое решение существует, удовлетворяет, как известно (см. [17, лемма 23.1]), уравнению

$$x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-\tau)A}f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau. \tag{5}$$

Подставив (5) в (2), получим равенство

$$\left[\sum_{i=1}^m B_ie^{t_iA}+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}C_i(s)e^{sA}\,ds\right]x_0=a(\omega)-\sum_{i=1}^m B_i\int_0^{t_i}e^{(t_i-\tau)A}f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}C_i(s)\int_0^s e^{(s-\tau)A}f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau ds.$$

Выражая отсюда x_0 и подставляя результат в (5), найдем

$$x(t) = e^{tA}P^{-1}\Bigg\{a(\omega) - \sum_{i=1}^{m} B_i \int\limits_0^{t_i} e^{(t_i-\tau)A} f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{s_i}^{s_{i+1}}\left[C_i(s)\int\limits_0^{s} e^{(s-\tau)A} f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau\right]ds\Bigg\} \tag{6}$$
$$+\int\limits_0^{t} e^{(t-\tau)A} f[x(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau \equiv K_\omega(x)(t).$$

Аналогичным образом, представим в интегральной форме и решение усредненной задачи:

$$y(t) \equiv e^{tA}P^{-1}\Bigg\{a_0 - \sum_{i=1}^{m} B_i \int\limits_0^{t_i} e^{(t_i-\tau)A} F[y(\tau),\tau]\,d\tau$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} C_i(s)\left[\int\limits_0^{s} e^{(s-\tau)A} F[y(\tau),\tau]\,d\tau\right]ds\Bigg\} \tag{7}$$
$$+\int\limits_0^{t} e^{(t-\tau)A} F[y(\tau),\tau]\,d\tau \equiv \big[K_\infty(y)\big](t).$$

Введем в рассмотрение оператор $N(x,\omega)$, действующий из $C\times[1;\infty]$ в C по правилу:

$$\big[N(x,\omega)\big](t) = \begin{cases} x - \big[K_\omega(x)\big](t), & \omega<\infty,\\ x - \big[K_\infty(x)\big](t), & \omega=\infty. \end{cases} \tag{8}$$

При доказательстве теоремы и, в частности, при обосновании корректности введенного таким образом оператора $N(x,\omega)$ важную роль играют следующие две оценки теории полугрупп (см. [17, теорема 14.11; 8, лемма 3.1]):

$$\big\|(-A)^{\tau}e^{tA}\big\|_B \leqslant \frac{c(\tau)}{t^{\tau}}, \quad \text{где} \quad \tau>0,\ t\in(0;T], \tag{9}$$

$c(\tau)$ — константанта, зависящая от τ;

$$\frac{\big\|e^{t_2A}-e^{t_1A}\big\|_{\mathrm{Hom}(B^\eta,B^\gamma)}}{(t_2-t_1)^{\nu}} \leqslant \frac{c(\eta,\gamma,\nu)}{t_1^{\nu+\gamma-\eta}}, \tag{10}$$

где $0<t_1<t_2\leqslant T$, $0<\nu\leqslant1$, $\gamma\geqslant0$, $\nu+\gamma>\eta\geqslant0$.

Докажем корректность определения оператора $N(x,\omega)$ (см. (8)). Для этого нужно показать, что этот оператор действует из $C\times[1;\infty]$ в C. Ограничимся рассмотрением случая $\omega=\infty$, так как при $\omega<\infty$ рассуждения те же самые.

Итак, пусть $y\in C$. Поскольку $C\subset C([0;T],B^{\alpha})$, то в силу условий п. 1° $F[y(t),t]\in C([0;T],B^{\delta})$. Отсюда, согласно оценке (9), следует, что

$$\int\limits_0^{t_i} e^{(t_i-\tau)A}F[y(\tau),\tau]\,d\tau \in B^1, \quad \int\limits_0^{s} e^{(s-\tau)A}F[y(\tau),\tau]\,d\tau \in B^1.$$

Обозначив вектор, стоящий в фигурных скобках в (7), через d, получаем в силу условий 7 п. 1° и неравенства (10) оценку

$$\left\|e^{tA}P^{-1}d\right\|_{C^\mu_\mu(B^\alpha)} = \sup_{\varepsilon\in(0;T]} \varepsilon^\mu \left\{ \max_{t\in[\varepsilon;T]} \left\|e^{tA}P^{-1}d\right\|_{B^\alpha} + \sup_{\varepsilon\leqslant t_1<t_2\leqslant T} \frac{\|(e^{t_2A}-e^{t_1A})P^{-1}d\|}{(t_2-t_1)^\mu} B^\alpha \right\} < \infty.$$

Отметим еще, что из оценок (9), (10) следует принадлежность

$$\int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}F[y(\tau),\tau]\,d\tau \in C^0_\mu([0;T],B^\alpha).$$

Корректность определения (8) оператора N доказана.

Теорема вытекает из классической теоремы о неявных функциях в банаховом пространстве и следующей леммы.

Лемма. *Отображение N непрерывно и непрерывно дифференцируемо по x в точке $(\overset{\circ}{y},\infty)$.*

Доказательство этой леммы нетрудно провести, следуя схеме, которая применялась в [7] при доказательстве содержащейся там теоремы 1. Присутствующие здесь условия 7 и 9, аналогов которых в работе [7] нет, естественным образом вписываются в эту схему. Поэтому приводить доказательство леммы в данной статье считаем излишним.

3. Приложение теоремы раздела 2 к параболической задаче

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^N, N — натуральное число, с C^2 — гладкой границей $\partial\Omega$, $T>0$. В цилиндре $(x,t)\in\bar\Omega\times[0;T]$, где x в этом разделе обозначает независимую пространственную переменную, рассмотрим зависящую от большого параметра ω задачу:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \varphi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N},t,\omega t\right),\\ u\big|_{\partial\Omega}=0,\quad u(x,t_1)+\sum_{k=2}^m B_k(x)u(x,t_k)+\sum_{k=1}^{n-1}C_k(x)\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}u(x,s)\,ds = a_\omega(x).\end{gathered}\tag{11}$$

Здесь числа t_k и s_k — те же, что и в п. 1° раздела 2, а $\varphi(x,u_0,u_1,\ldots,u_N,t,\tau)$ — определенная на множестве $\bar\Omega\times R^{N+1}\times[0;T]\times[0;\infty)$ непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Функция φ непрерывна и непрерывно дифференцируема по компонентам $u_0,u_1,\ldots,u_N$ и вместе с этим производными удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $(x,u_0,u_1,\ldots,u_N,t)$ равномерно относительно τ, когда вектор $(u_0,u_1,\ldots,u_N)$ принадлежит ограниченному подмножеству пространства R^{N+1}.

2. Функция φ является 2π-периодической по переменной τ; символом Φ обозначим ее среднее по τ на периоде.

3. Функции $B_k(x)$ и $C_k(x)$, а также вектор-функция $a_\omega(x)$, вещественны, дважды непрерывно дифференцируемы по x и финитны.

4. Существует такая функция $a_0(x)$, что

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\|a_\omega(x)-a_0(x)\right\|_{C^2(\bar\Omega)}=0.$$

5. Пусть $\delta > 0$ такое число, что при $k = 2,\ldots, m$ и $l = 1, 2,\ldots, n-1$

$$\|B_k\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant \delta, \quad \|C_l\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant \delta.$$

Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \Phi\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_N}, t\right), \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times [0;T], \\ v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x,t_1) + \sum_{k=2}^{m} B_k(x) v(x,t_k) + \sum_{k=1}^{n-1} C_k(x) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} v(x,s)\,ds = a_0.\end{gathered} \tag{12}$$

6. Пусть задача (12) имеет решение $\overset{\circ}{v}(x,t)$.

Справедливо следующее утверждение — следствие теоремы раздела 2.

Следствие. *Существуют такие положительные числа* δ_0 *и* ω_0*, что при* $0 < \delta < \delta_0$ *и* $\omega > \omega_0$ *задача* (11) *имеет единственное в некоторой* C*-окрестности функции* $\overset{\circ}{v}$ *решение* u_ω*, и при этом*

$$\lim_{\omega\to\infty} \left\| u_\omega(x,t) - \overset{\circ}{v}(x,t) \right\|_{C([0;T], C^1(\bar{\Omega}))} = 0.$$

$\lhd$ Нужно доказать, что из условий данного раздела вытекают условия п. 1° раздела 2, интерпретируемые для задачи (11). Это доказательство осуществляется, в основном, по схеме, которая применялась в [8, § 4] при выводе теоремы 2.2 (для параболических начально-краевых задач) из теоремы 2.1 (для абстрактных параболических уравнений). В связи с этим мы ограничимся выводом из условий данного раздела лишь условий 7 и 9 п. 1° раздела 2, которые в [7; 8, гл. 1] не возникают.

Прежде всего заметим, что в силу [7; 8, гл. 1] в качестве фигурирующего в разделе 2 банахова пространства B нужно взять $L_p(\Omega)$, $p > N$. В качестве числа α возьмем 1. Тогда $B^\alpha = B^1$ — замкнутое подпространство пространства $W_p^2(\Omega)$ функций, состоящее из функций этого пространства, исчезающих на границе области.

Определенный в разделе 2 оператор P в условиях настоящего раздела запишем в виде:

$$P = I + \sum_{k=2}^{m} B_k e^{t_k\Delta} + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} C_k e^{s\Delta}\,ds.$$

Покажем, что при достаточно малых δ существует обратный оператор

$$P^{-1} = I + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[\sum_{k=2}^{m} B_k e^{t_k\Delta} + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} C_k e^{s\Delta}\,ds \right]^r \equiv I + S, \tag{13}$$

принадлежащий пространству $\mathrm{Hom}(B^1, B^1)$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ и рассмотрим функции $B_k e^{t_k\Delta}\varphi$ и $C_k \int_{s_k}^{s_{k+1}} e^{s\Delta}\varphi\,ds$. Эти функции и их всевозможные производные по x вплоть до второго порядка ограничены числом $\delta_1\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}$, где $\delta_1 \to 0$ при $\delta \to 0$. Легко видеть, что существует не зависящая от r константа K_0 такая, что r-е слагаемое ряда S по норме пространства B^1 ограничено числом $K_0(n+m-1)^r\delta_1^r\|\varphi\|_B$, а потому $S \in \mathrm{Hom}(B, B^1)$ и $P^{-1} \in \mathrm{Hom}(B^1, B^1)$ при достаточно малом δ. Отсюда следует, что $P^{-1}B_k$, $P^{-1}C_k \in \mathrm{Hom}(B^1, B^1)$.

Осталось установить, что в предположениях данного раздела выполняется условие 9 п. 1° раздела 2, т. е. что при достаточно малых δ оператор

$$D_1 + e^{t\Delta} P^{-1} \left\{ \sum_{i=2}^{m} B_i \int\limits_0^{t_i} e^{(t_i-\tau)\Delta} (DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} C_i(s) \left[\int\limits_0^{s} e^{(s-\tau)\Delta} (DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \right] ds \right\} \equiv D_1 + D_2,$$

где

$$D_1 = I + \int\limits_0^{t} e^{(t-\tau)\Delta} (DF)\big(\overset{\circ}{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau$$

обратим в C. Последний факт является следствием того, что D_1 обратим в C (это установлено в [8]), а оператор D_2, также действующий в C, мал (это следует из приведенных выше рассуждений). Следствие доказано. $\triangleright$

Аналогичные следствию результаты имеют место и для полулинейных параболических задач произвольного порядка $2k$ с аналогичными малыми операторами в краевых условиях.

Литература

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.—М.: Изд-во АН УССР, 1945.—137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1974.—408 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка, 1971.—440 с.
4. *Юдович В. И.* Вибродинамика систем со связями // Докл. АН.—1997.—Т. 354, № 5.—С. 622–624.
5. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье — Стокса в главной части // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 1.—С. 94–127.
6. *Хацкевич В. Л.* О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье — Стокса с быстро осциллирующей массовой силой // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, № 5.—С. 764–777. DOI: 10.4213/mzm10624.
7. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.—1970.—Т. 81 (123), № 1.—С. 53–61.
8. *Симоненко И. Б.* Метод осреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 1983.—137 с.
9. *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 3.—С. 52–68.
10. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—416 с.
11. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416–1424.
12. *Константинов М. М., Байнов Д. Д.* О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам // Mathematical Bulletin of the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania.—1974.—Т. 18 (66), № 3/4.—С. 307–310.
13. *Левенштам В. Б., Шубин П. Е.* Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 1.—С. 94–104. DOI: 10.4213/mzm11126.
14. *Бигириндавйи Д., Левенштам В. Б.* Принцип усреднения для системы быстро осциллирующих ОДУ с краевыми условиями // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика.—2020.—№ 1.—С. 31–37.

15. *Bigirindavyi D., Levenshtam V. B.* Justification of the Averaging Method for a System with Multipoint Boundary Value Condition // Springer Proc. Math. Stat.—2020.—Vol. 357.—P. 137–142. DOI: 10.1007/978-3-030-77493-6_8.
16. *Бигириндавйи Д., Левенштам В. Б.* Усреднение высокочастотной нормальной системы ОДУ с многоточечными краевыми условиями // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, № 2.—С. 62–74. DOI: 10.46698/i7381-0821-3887-y.
17. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—499 с.

Статья поступила 3 мая 2024 г.

Левенштам Валерий Борисович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2438-5307

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 4, P. 95–104

AVERAGING OF ABSTRACT PARABOLIC EQUATIONS WITH MULTIPOINT INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

Levenstam, V. B.[1,2]

[1] Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkin St., 119991 Moscow, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
53 Vatutin St., 362025 Vladikavkaz, Russia

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

Abstract. A multipoint boundary value problem for an abstract parabolic equation with a rapidly time-oscillating nonlinear part is considered in the time interval. The operator $-A$, where A is the senior stationary linear operator of the equation, is positive. The hypotheses are formulated in terms of the theory of semigroups and fractional powers of the operator $-A$. Multipoint boundary conditions on a time interval contain integral terms. For the specified problem, which depends on a large parameter (high oscillation frequency), a limiting (averaged) multipoint boundary value problem is constructed and a limiting transition in the space of continuous vector functions over a time interval is justified. Thus, the Krylov–Bogolyubov averaging method is justified for abstract parabolic equations with multipoint boundary conditions. The results obtained are applicable to parabolic equations in a limited spatial domain with multipoint boundary conditions over a time interval and some other problems of mathematical physics.

Keywords: abstract parabolic equations, multipoint boundary conditions, averaging method.

AMS Subject Classification: 34B10, 35K50, 34C29.

For citation: *Levenstam, V. B.* Averaging of Abstract Parabolic Equations with Multipoint Integral Boundary Conditions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 4, pp. 95–104 (in Russian). DOI: 10.46698/y0708-2078-6879-i.

References

1. *Bogolyubov, N. N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike* [On Some Statistical Methods in Mathematical Physics], Moscow, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1945, 137 p. (in Russian).
2. *Bogolyubov, N. N. and Mitropolsky, Yu. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations], Moscow, Nauka, 1974, 408 p. (in Russian).

3. *Mitropolsky, Yu. A. Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike* [Averaging Method in Nonlinear Mechanics], Kiev, Naukova Dumka, 1971, 440 p. (in Russian).
4. *Yudovich, V. I.* Vibration Dynamics of Systems with Constraint, *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 42, no. 6, pp. 322–325.
5. *Levenshtam, V. B.* Justification of the Averaging Method for a System of Equations with the Navier–Stokes Operator in the Principal Part, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2015, vol. 26, no. 1, pp. 69–90. DOI: 10.1090/S1061-0022-2014-01331-3.
6. *Khatskevich, V. L.* On the Homogenization Principle in a Time-Periodic Problem for the Navier–Stokes Equations with Rapidly Oscillating Mass Force, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 757–768. DOI: 10.1134/S0001434616050138.
7. *Simonenko, I. B.* A Justification of the Averaging Method for Abstract Parabolic Equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 51–59. DOI: 10.1070/SM1970v010n01ABEH002152.
8. *Simonenko, I. B. Metod osredneniya v teorii nelineynykh uravneniy parabolicheskogo tipa s prilozheniem k zadacham gidrodinamicheskoy ustoychivosti* [Averaging Method in the Theory of Nonlinear Parabolic Equations with Application to Problems of Hydrodynamic Stability], Rostov-on-Don, Publishing House of the Southern Federal University, 1983, 137 p. (in Russian).
9. *Levenshtam, V. B.* Asymptotic Expansions of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations with Large High-Frequency Terms, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 1, pp. 54–70. DOI: 10.1134/s0012266108010059.
10. *Levenshtam, V. B. Differentsial'nye uravneniya s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi* [Differential Equations with Large High-Frequency Terms], Rostov-on-Don, Publishing House of the Southern Federal University, 2010, 416 p. (in Russian).
11. *Levenshtam, V. B.* Asymptotic Expansion of the Solution of a Problem of Vibrational Convection, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1357–1365.
12. *Konstantinov, M. M. and Bainov, D. D.* On the Application of the Averaging Method to Some Multipoint Boundary Value Problems, *Mathematical Bulletin of the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania*, 1974, vol. 18 (66), no. 3/4, pp. 307–310.
13. *Levenshtam, V. B. and Shubin, P. E.* Justification of the Averaging Method for Differential Equations with Large Rapidly Oscillating Summands and Boundary Conditions, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 1, pp. 80–92. DOI: 10.1134/S0001434616070075.
14. *Bigirindavyi, D. and Levenshtam, V. B.* The Averaging Principle for a System of Rapidly Oscillating ODES with Boundary Conditions, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 31–37 (in Russian).
15. *Bigirindavyi, D. and Levenshtam, V. B.* Justification of the Averaging Method for a System with Multipoint Boundary Value Condition, *Springer Proceedings in Mathematics and Statisticsthis*, 2020, vol. 357, pp. 137–142. DOI: 10.1007/978-3-030-77493-6_8.
16. *Bigirindavyi, D. and Levenshtam, V. B.* Averaging for a High-Frequency Normal System of Ordinary Differential Equations with Multipoint Boundary Value Problems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 62–74 (in Russian). DOI: 10.46698/i7381-0821-3887-y.
17. *Krasnoselsky, M. A., Zabreiko, P. P., Pustylnic, E. I. and Sobolevsky, P. E. Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in the Spaces of Summable Functions], Moscow, Nauka, 1966, 499 p. (in Russian).

Received May 3, 2024

Valery B. Levenstam
Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkin St., Moscow 119991, Russia,
Leading Researcher;

Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2438-5307