УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП ПО СПЕКТРУ

А. М. Старолетов

Аннотация. Конечные группы называются *изоспектральными*, если они имеют одинаковые множества порядков элементов. В данной статье завершается описание конечных групп, изоспектральных простым группам $PSL_n(q)$ или $PSU_n(q)$, где $n \geq 11$. Также получено существенное ограничение на структуру конечных групп, изоспектральных ортогональным и симплектическим группам.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: порядок элемента, простая классическая группа, распознавание по спектру.

1. Введение

В данной работе рассматриваются только конечные группы. Множество порядков элементов группы G обозначается через $\omega(G)$ и называется ее *спектром*. Группы называются *изоспектральными*, если они имеют одинаковые спектры. Обозначим через $h(G)$ наибольшее число попарно неизоморфных групп, изоспектральных группе G. Если $h(G) = 1$, то G однозначно (с точностью до изоморфизма) задается своим спектром в классе всех конечных групп и поэтому G называется *распознаваемой* по спектру. Говорят, что G *почти распознаваема*, если $h(G)$ конечно, и *нераспознаваема*, если $h(G) = \infty$. Будем говорить, что *проблема распознаваемости (по спектру) решена* для G, если число $h(G)$ известно, и в случае $h(G) < \infty$ все группы, изоспектральные G, явно описаны.

В силу [1, лемма 1], если G имеет нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, то $h(G) = \infty$, поэтому проблема распознаваемости по спектру представляет интерес только для групп с тривиальным разрешимым радикалом. Большинство работ по данной проблеме посвящены простым неабелевым группам, однако есть различные примеры, когда проблема решена для групп с непростым цоколем. Подробный обзор результатов и список открытых вопросов можно найти в [2].

Мы обозначаем простые классические группы согласно [3]. В настоящее время проблема распознаваемости по спектру решена для всех простых неабелевых групп, кроме следующих классических групп, определенных над полем нечетного порядка q:

(а) $L_n(q)$, где $8 \leq n \leq 26$, n не является простым числом;
(б) $U_n(q)$, где $8 \leq n \leq 26$, n не является простым числом;
(в) $S_{2n}(q)$ и $O_{2n+1}(q)$, где $5 \leq n \leq 15$, $n \neq 8$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда є 23-41-10003, `https://rscf.ru/project/23-41-10003/`.

(г) $O_{2n}^{+}(q)$, где $5 \leq n \leq 18$;

(д) $O_{2n}^{-}(q)$, где $5 \leq n \leq 17$, $n \neq 8, 16$.

Более точные формулировки и необходимые ссылки для групп, отличных от $U_6(q)$, $L_6(q)$ и $U_n(q)$, где n — простое число, могут быть найдены в [2, теорема 2.1]. Группы $U_5(q)$, $U_6(q)$ и $L_6(q)$ были рассмотрены в [4]. Решение проблемы распознаваемости для групп $U_n(q)$, где n — простое число, было недавно завершено в [5]. Эти два результата появились после публикации обзора [2].

Удобным инструментом для изучения проблемы распознаваемости является *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*). Граф простых чисел группы G определяется следующим образом: его вершины являются простыми делителями порядка группы G и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Напомним, что подмножество вершин графа называется *кокликой*, если любые две вершины этого подмножества не смежны. Обозначим через $t(G)$ наибольший размер коклики в графе простых чисел группы G. Верхние границы размерностей групп в списке выше можно объяснить следующим образом. Основываясь на предыдущих результатах, А. В. Васильев и М. А. Гречкосеева доказали, что простая классическая группа L почти распознаваема, если $t(L) \geq 23$ [6, 7]. Позднее этот результат был распространен на классические группы L с $14 \leq t(L) < 23$ [8]. Переписывая условие $t(L) \leq 13$ в терминах размерности группы L, мы в точности получаем верхние границы на n из списка выше за исключение того, что в п. (в) отсутствуют группы $S_{32}(q)$ и $O_{33}(q)$. Для этих групп проблема распознаваемости была ранее решена в [9–11].

Мы понижаем верхнюю границу размерностей для линейных и унитарных групп L, рассматривая случаи, когда $6 \leq t(L) \leq 13$.

Теорема 1. *Предположим, что L — одна из простых групп $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \geq 11$. Тогда проблема распознаваемости по спектру для L решена. Более того, $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ для любой конечной группы G, изоспектральной L.*

Как следствие получаем, что проблема распознаваемости для линейных и унитарных групп размерности n в настоящее время не решена только для $n = 8, 9, 10$.

На самом деле теорема 1 является следствием ряда предыдущих результатов и следующей теоремы, доказательство которой является основной целью данной статьи.

Теорема 2. *Предположим, что L — одна из простых групп $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где q нечетно и $12 \leq n \leq 26$. Если G — конечная группа, изоспектральная L, и S — неабелев композиционный фактор группы G, то S не изоморфна классической группе над полем характеристики, взаимно простой с q.*

Ряд рассуждений из доказательства теоремы 2 не использует по существу то, что L является линейной или унитарной, и как следствие может быть проведен для классической группы L любого типа. Результат этих рассуждений выделен в отдельную теорему.

Теорема 3. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем нечетного порядка q такая, что $5 \leq t(L) \leq 13$. Предположим, что G — конечная группа, изоспектральная L, и G имеет неабелев композиционный фактор S такой, что S — классическая группа над полем характеристики, взаимно простой с q. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Если L — линейная или унитарная группа с $t(L) \geq 6$, то $t(S) = t(L)$.*

(б) *Если L — линейная или унитарная группа с $t(L) = 5$ или ортогональная или симплектическая группа с $t(L) \geq 7$, то $0 \leq t(S) - t(L) \leq 1$.*

(в) *Если L — симплектическая или ортогональная группа с $5 \leq t(L) \leq 6$, то $0 \leq t(S) - t(L) \leq 2$.*

Данная статья организована следующим образом. Разд. 2 посвящен определениям и вспомогательным арифметическим результатам, которые являются полезными при работе со спектром классических групп. В разд. 3 перечислены необходимые факты о спектрах и графах простых чисел классических групп. Теорема 3 доказывается в разд. 4, а разд. 5 и 6 посвящены доказательствам теорем 2 и 1 соответственно.

2. Предварительные данные: арифметические результаты

Наибольший общий делитель целых чисел a и b обозначается через (a, b). Зафиксируем целое число a с $|a| > 1$ и простое число r.

Через $\pi(a)$ обозначается множество всех простых делителей числа a. Через $a_{\{r\}}$ обозначается r-часть числа a, т. е. наибольшая степень числа r, делящая a. Если π — множество простых чисел, то определим $a_\pi = \prod_{r\in\pi} a_{\{r\}}$ и $a_{\pi'} = a/a_\pi$. В этом случае числа a_π и $a_{\pi'}$ называются *π-частью* и *π'-частью* числа a соответственно.

Если r нечетно и $(a, r) = 1$, то $e(r, a)$ обозначает мультипликативный порядок a по модулю r. Положим $e(2, a) = 1$, если 4 делит $a - 1$, и $e(2, a) = 2$, если 4 делит $a + 1$. Простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $a^i - 1$, если $e(r, a) = i$. Обозначим через $r_i(a)$ некоторый примитивный простой делитель числа $a^i - 1$, если хотя бы один такой делитель существует, через $R_i(a)$ — множество всех таких делителей. Существование примитивных простых делителей для почти всех пар (a, i) было доказано Бэнгом [12] и Жигмонди [13].

Лемма 2.1 (Бэнг— Жигмонди). *Пусть a — целое число и $|a| > 1$. Если i — натуральное число и $(a, i) \notin \{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}$, то множество $R_i(a)$ непусто.*

Для числа $i \neq 2$ произведение всех примитивных простых делителей числа $a^i - 1$, взятых с учетом кратности, обозначается через $k_i(a)$. Положим $k_2(a) = k_1(-a)$. Число $k_i(a)$ называется *наибольшим примитивным делителем* числа $a^i - 1$. Из определения следует, что $(k_i(a), k_j(a)) = 1$, если $i \neq j$. Легко проверить, что $k_1(a) = |a - 1|$, если $a \not\equiv 3 \pmod 4$, и $k_1(a) = |a - 1|/2$, если $a \equiv 3 \pmod 4$, а также $k_2(a) = |a+1|$, если $a \not\equiv 1 \pmod 4$, и $k_2(a) = |a+1|/2$, если $a \equiv 1 \pmod 4$. Из [14] следует, что при $i > 2$

$$k_i(a) = \frac{|\Phi_i(a)|}{(r, \Phi_{i_{\{r\}'}}(a))}, \tag{1}$$

где $\Phi_i(x)$ — i-й круговой многочлен, а r — наибольшее простое число, делящее i; более того, если $i_{\{r\}'}$ не делит $r-1$, то $(r, \Phi_{i_{\{r\}'}}(a)) = 1$. Для любого целого числа n, отличного от нуля, через $\varphi(n)$ обозначается значение функции Эйлера на n. Напомним, что $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$. Из определения наибольших примитивных делителей и равенства (1) вытекает следующее полезное утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть a и i — целые числа такие, что $|a|>1$ и $i\geq 1$. Если i нечетно, то $k_i(-a)=k_{2i}(a)$, и если i кратно 4, то $k_i(-a)=k_i(a)$.*

Лемма 2.3 [6, лемма 1.5]. *Пусть a и i — целые числа, $\varepsilon\in\{+,-\}$. Если $a\geq 2$, $i\geq 3$ и $(a,i)\notin\{(2,3),(2,6)\}$, то $k_i(\varepsilon a)>a^{\varphi(i)/2}$.*

Лемма 2.4. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если p — простое число, то* $\Phi_{pn}(x)=\begin{cases}\Phi_n(x^p), \text{ если } (n,p)=p;\\ \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x), \text{ если } (n,p)=1.\end{cases}$

(б) *Если $n<105$, то все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ принадлежат множеству $\{-1,0,1\}$.*

(в) *Если $3\leq n<105$, то $\Phi_n(a)>0$ для всех действительных чисел a с $|a|\geq 2$.*

(г) *Предположим, что унитарный многочлен $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ имеет степень $n\geq 1$ и все его коэффициенты принадлежат множеству $\{-1,0,1\}$. Если $a\geq k>1$, где k — действительное число, то*

$$\frac{k-2}{k-1}a^n<f(a)<\frac{k}{k-1}a^n.$$

Доказательство. П. (а) хорошо известен и упоминается, например, в [15]. П. (б) — это [16, теорема 13.5]. Чтобы доказать (в), заметим, что если $n\geq 3$, то $\varphi(n)$ четно. Из (б) следует, что если $3\leq n<105$ и $|a|\geq 2$, то

$$\Phi_n(a)\geq |a|^{\varphi(n)}-|a|^{\varphi(n)-1}-\ldots-|a|-1$$
$$=|a|^{\varphi(n)}-\frac{|a|^{\varphi(n)}-1}{|a|-1}=\frac{|a|^{\varphi(n)+1}-2|a|^{\varphi(n)}+1}{|a|-1}>0.$$

Докажем (г). По предположению получаем, что

$$f(a)\leq 1+a+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

поэтому для доказательства верхней оценки достаточно проверить, что $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $<\frac{k}{k-1}a^n$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $a^{n+1}+k-1>ka^n$, которое верно, поскольку $a\geq k$. Аналогично получаем, что

$$f(a)\geq a^n-a^{n-1}-\ldots-1=2a^n-a^n-a^{n-1}-\ldots-1=2a^n-\frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Мы знаем, что $-\frac{a^{n+1}-1}{a-1}>-\frac{k}{k-1}a^n$. Поэтому

$$f(a)>2a^n-\frac{k}{k-1}a^n=\frac{k-2}{k-1}a^n,$$

что и требовалось показать. $\square$

В качестве следствия из п. (в) этой леммы получаем, что в равенстве (1) для $k_i(a)$ модуль в числителе можно убрать, если $3\leq i<105$.

Лемма 2.5 [6, лемма 1.7]. *Пусть q и m — целые числа, большие 1, и $\varepsilon\in\{+,-\}$.*

(а) *Если нечетное простое число r делит $\varepsilon q-1$, то*

$$((\varepsilon q)^m-1)_{\{r\}}=m_{\{r\}}(\varepsilon q-1)_{\{r\}}.$$

(б) *Если нечетное простое число r делит $(\varepsilon q)^m-1$, то r делит $(\varepsilon q)^{m_{\{r\}'}}-1$.*

(в) *Если $\varepsilon q-1$ делится на 4, то $((\varepsilon q)^m-1)_{\{2\}}=m_{\{2\}}(\varepsilon q-1)_{\{2\}}$.*

Лемма 2.6. *Пусть q — степень нечетного простого числа. Если $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $r \geq 7$ — простое число, то $k_r(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{r-2}$.*

Доказательство. Используя равенство (1), находим, что

$$k_r(\varepsilon q) = \frac{q^r - \varepsilon 1}{(q-\varepsilon 1, r)(q-\varepsilon 1)} \geq \frac{q^r+1}{(q-\varepsilon 1, r)(q+1)}.$$

Если $(q-\varepsilon 1, r) = 1$, то

$$k_r(\varepsilon q) \geq \frac{q^r+1}{q+1} > \frac{5}{3}q^{r-2},$$

так как $q \geq 3$. Предположим, что $(q-\varepsilon 1, r) = r$. Тогда $q-\varepsilon 1$ делится на r, поэтому $q+1 \geq 2r$. Теперь $\frac{q^r+1}{(q+1)r} > \frac{5}{3}q^{r-2}$ тогда и только тогда, когда $3q^r + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$. Поскольку $q \geq 2r-1$ и $r \geq 7$, получаем, что

$$3q^r + 3 \geq (6r-3)q^{r-1} + 3 \geq (5r+4)q^{r-1} + 3.$$

Далее,

$$(5r+4)q^{r-1} + 3 = 5rq^{r-1} + 4q^{r-1} + 3 \geq 5rq^{r-1} + (8r-4)q^{r-2} + 3.$$

Наконец, находим, что

$$5rq^{r-1} + (8r-4)q^{r-2} + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$$

и, следовательно, $3q^r + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$, что и требовалось показать. □

Лемма 2.7. *Пусть q — степень нечетного простого числа и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Тогда $k_9(\varepsilon q) > q^{5.5}$ или $k_7(\varepsilon q) > q^{5.5}$.*

Доказательство. Предположим, что $q \geq 13$. Тогда $q^{0.5} > 3.5$. Используя равенство (1), находим, что

$$k_9(\varepsilon q) \geq (q^6 - q^3 + 1)/3 > (3.5q^{5.5} - q^3)/3 > q^{5.5} + (0.5q^{5.5} - q^3) > q^{5.5}.$$

Предположим, что $q < 13$. Тогда $(q-\varepsilon 1, 7) = 1$, поэтому

$$k_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\varepsilon q) \geq q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 > q^6 - q^5.$$

Легко видеть, что $q^6 - q^5 > q^{5.5}$, если $q \geq 3$, и, значит, $k_7(\varepsilon q) > q^{5.5}$ в этом случае. □

Лемма 2.8. *Пусть q и w — степени простых чисел, при этом $q \neq w$ и q нечетно. Если $k_7(\varepsilon q)$ делит $k_7(\tau w)$, где $\varepsilon, \tau \in \{+,-\}$ и $(q-\varepsilon 1, 7) = 1$, то $5q^6 < w^6$.*

Доказательство. Предположим, что $k_7(\varepsilon q) = k_7(\tau w)$. Если $(w-\tau 1, 7) = 1$, то $\Phi_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\tau w)$ в силу равенства (1). Легко видеть, что если $a > 0$, то

$$\Phi_7(\varepsilon(a+1)) - \Phi_7(\varepsilon a) > 0 \text{ и } \Phi_7(\tau(a+1)) - \Phi_7(\tau a) > 0.$$

Поскольку $w \neq q$, верно, что $w \geq q+1$ или $q \geq w+1$. В первом случае получаем, что

$$\Phi_7(\tau w) \geq \Phi_7(\tau(q+1)) > q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \geq \Phi_7(\varepsilon q),$$

а во втором случае

$$\Phi_7(\varepsilon q) \geq \Phi_7(\varepsilon(w+1)) > w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 \geq \Phi_7(\tau w);$$

противоречие с $\Phi_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\tau w)$. Поэтому можно считать, что $(w-\tau 1, 7) = 7$ и тем самым $w \geq 8$. Заметим, что $k_7(\varepsilon q) \leq \frac{3}{2}q^6$ по лемме 2.4(г), и $k_7(\tau w) \geq$

$\frac{1}{7}(w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1) > \frac{1}{8}w^6$, поскольку $w \geq 8$. Значит, $q^6 \geq \frac{1}{12}w^6$ и поэтому $q \geq 7$. Теперь

$$\frac{6}{7}q^6 < 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 \leq k_7(\varepsilon q) = k_7(\tau w),$$

в то время как $k_7(\tau w) < \frac{8}{49}w^6$ по лемме 2.4(г). Следовательно, $5q^6 < w^6$, что и требовалось доказать.

Предположим, что $k_7(\varepsilon q)$ — собственный делитель $k_7(\tau w)$. Поскольку любое число из $R_7(\tau w)$ не меньше 29, заключаем, что $29k_7(\varepsilon q) \leq k_7(\tau w)$. Следовательно, по лемме 2.4(г) получаем, что $29\frac{1}{2}q^6 < 2w^6$. Это влечет требуемое неравенство $5q^6 < w^6$. $\square$

Лемма 2.9. *Предположим, что u — степень простого числа v и q — степень нечетного простого числа p. Пусть j — целое число такое, что $\varphi(j) \geq 4$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(а) *Если $k_j(u)$ делит (q^2-1) и $(j,u) \neq (10,4)$, то $k_j(u) > u^3$.*

(б) *Если $k_j(u)$ делит $(q^2-1)\log_v u$ и $(k_j(u), \log_v u) > 1$, то $k_j(u) > u^3 \log_v u$.*

(в) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)$, где $p < 31$, $p \in R_j(u)$, и $(j,u) \neq (10,4)$, то $k_j(u) > \frac{p}{12}u^3$.*

(г) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)\log_v u$ и p делит $(k_j(u), \log_v u)$, то $k_j(u) > pu^3 \log_v u$.*

(д) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)\log_v u$, $p < 31$, и $(k_j(u), \log_v u) > 1$, то $k_j(u) > pu^3 \log_v u$.*

Более того, во всех пунктах верно неравенство $2u^3 < q^2$, даже если $(j,u) = (10,4)$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\varphi(j) \geq 6$. Покажем, что $k_j(u) > u^4$. Это верно, если $\varphi(j) \geq 8$, по лемме 2.3. Предположим, что $\varphi(j) = 6$. Тогда $j \in \{7, 14, 9, 18\}$. Если $j = 9$ или $j = 18$, то $k_j(u) \geq \frac{u^6 - u^3 + 1}{3}$ в силу равенства (1). Следовательно, в этом случае $k_j(u) > u^4$. Более того,

$$k_7(u) = \frac{u^7 - 1}{(u-1,7)(u-1)} \geq \frac{u^7-1}{(u-1)^2} > u^4$$

и $k_{14}(2) = 43 > 2^4$, в то время как для $u > 2$ верно, что

$$k_{14}(u) > \frac{u^7+1}{(u+1)^2} > u^4.$$

Поскольку $u > \log_v u$, получаем, что $k_j(u) > u^4 > u^3 \log_v u$. Предположим, что $p \in R_j(u)$ и $p < 31$. Заметим, что $u^4 > \frac{p}{12}u^3$, если $u \geq 3$ или $p \leq 23$. С другой стороны, если $u = 2$ и $23 < p < 31$, то $R_7(2) = \{127\}$, $R_{14}(2) = \{43\}$, $R_9(2) = \{19\}$, $R_{18}(2) = \{73\}$, так что этот случай невозможен. Осталось доказать пп. (г), (д) в этом случае. Предположим, что r — простое число такое, что r делит $k_j(u)$ и $\log_v(u)$. Поскольку $\varphi(j) \geq 6$, по малой теореме Ферма получаем, что $r \geq 17$. Обозначим $k = \log_v u$. Поскольку $k \geq 17$, верно, что $2^k > k^2$ и $2^k > 31k$. Это означает, что $u = v^k > k^2$ и $u > 31k$. Следовательно, $k_j(u) > u^4 > u^3 \cdot (\log_v u)^2$ и $k_j(u) > u^4 > 31u^3 \log_v u$. Эти неравенства завершают доказательство для всех чисел j с $\varphi(j) \geq 6$.

Предположим, что $\varphi(j) = 4$. Тогда $j \in \{5, 8, 12, 10\}$. Сначала покажем, что $k_j(u) > u^3$, если $(j,u) \neq (10,4)$. Используя равенство (1), видим, что $k_{12}(u) = \Phi_{12}(u) = u^4 - u^2 + 1$ и

$$k_8(u) = \frac{\Phi_8(u)}{(u-1,2)} = \frac{u^4+1}{(u-1,2)}.$$

Следовательно, если $j = 12$, то $k_j(u) \geq 2u^3 - u^2 + 1 > u^3$, а если $j = 8$, то $k_j(u) \geq (u^4 + 1)/2 > u^3$. Предположим, что $j = 5, 10$. Заметим, что $k_j(u) > u^3$ при $u = 2, 3$ и $k_5(4) = 341 > 4^3$. Таким образом, можно считать, что $u \geq 5$. Используя равенство (1), получаем, что $k_j(u) \geq \frac{1}{d}(u^4 - u^3 + u^2 - u + 1)$, где либо $d = 1$, либо $d = 5$ и $u \geq 9$. Если $d = 1$, то $u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 \geq 2u^3 - u^3 + u^2 - u + 1 > u^3$. Если $d = 5$, то $k_j(u) \geq \frac{1}{5}(9u^3 - u^3 + u^2 - u + 1) > u^3$. Следовательно, требуемое неравенство $k_j(u) > u^3$ доказано во всех случаях.

Предположим, что $p \in R_j(u)$, и $k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)$, где $p < 31$ и $(j, u) \neq (10, 4)$. Покажем, что $k_j(u) > \frac{p}{12}u^3$. Мы знаем, что $k_j(u) > u^3$, поэтому можно считать, что $p > 12$. Поскольку $p < 31$ и $p \in R_j(u)$ с $j \in \{5, 8, 10, 12\}$, получаем, что $p - 1$ делится на j и, следовательно, $(p, j) \in \{(13, 12), (17, 8)\}$. Если $j = 12$, то $k_{12}(2) = 13 > \frac{13}{12}2^3$, а для $u > 2$ верно, что

$$k_{12}(u) = u^4 - u^2 + 1 > 3u^3 - u^2 > 2u^3 > \frac{13}{12}u^3.$$

Если $j = 8$, то $k_8(2) = 17 > \frac{17}{12}2^3$, а для $u > 2$ верно, что

$$k_8(u) \geq \frac{u^4 + 1}{2} > \frac{3}{2}u^3 > \frac{17}{12}u^3.$$

Предположим, что $(k_j(u), \log_v u) > 1$, и возьмем простое число r, которое делит оба числа $k_j(u)$ и $\log_v u$. По малой теореме Ферма получаем, что $r \geq 11$, и поэтому $u \geq 2^{11}$. Используя равенство (1), находим, что $k_j(u) \geq \frac{u^4 - u^3 + u^2 - u + 1}{5}$. По лемме 2.4(г) получаем, что

$$k_j(u) > \frac{u - 2}{5(u - 1)}u^4 > \frac{1}{6}u^4.$$

Обозначим $k = \log_v u$. Поскольку $k \geq 11$, верно, что $u \geq 2^k > 6k^2$ и $u \geq 2^k > 6 \cdot 31 \cdot k$. Это означает, что $k_j(u) > u^3(\log_v u)^2$ и $k_j(u) > 31u^3 \log_v u$.

Теперь покажем, что $2u^3 < q^2$ во всех случаях. Поскольку $\varphi(j) \geq 4$, получаем, что $(k_j(u), 6) = 1$. С другой стороны, ясно, что $q^2 - 1$ делится на 8, а $p(q^2 - 1)$ делится на 24. Если $(j, u) = (10, 4)$, то $k_j(u) = 41$ и $\log_v u = 2$. Таким образом, если $k_{10}(4)$ делит $p(q^2 - 1)$, то $q \geq 40$ и, очевидно, $2u^3 < q^2$. Если $(j, u) \neq (10, 4)$, то неравенство $2u^3 < q^2$ следует из доказанных неравенств для $k_j(u)$ и того, что 8 делит $q^2 - 1$, а 24 делит $p(q^2 - 1)$. $\square$

Лемма 2.10. *Предположим, что u — степень простого числа v и q — степень нечетного простого числа p. Предположим, что $j_1, \ldots, j_k$ — различные натуральные числа такие, что $\varphi(j_i) \geq 4$ для всех $1 \leq i \leq k$. Если $\prod_{i=1}^{k} k_{j_i}(u)$ делит $p(q^2 - 1)\log_v u$, где либо каждый множитель $k_{j_i}(u)$ взаимно прост с p, либо p делит $\log_v u$, либо $p < 31$, то $u^{3k} < q^2$.*

Доказательство. Сначала будем считать, что $(p, k_{j_i}(u)) = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$. Заметим, что если $1 \leq i \leq k$, то $(k_{j_i}(u), 6) = 1$. С другой стороны, видно, что $q^2 - 1$ делится на 8. Поскольку $k_{10}(4) = 41 > 4^3/2$ и $8 \cdot \prod_{i=1}^{k} k_{j_i}(u)$ делит $(q^2 - 1)\log_v u$, получаем, что $u^{3k} < q^2 - 1$ по лемме 2.9(а),(б).

Предположим, что существует число $j \in \{j_1, \ldots, j_k\}$ такое, что p делит $k_j(u)$ и $p < 31$. Можно считать, что $j = j_1$. Поскольку $k_{10}(4) = 41$ и $p < 31$, получаем, что $(j,u)\neq(10,4)$. По лемме 2.9(в) верно неравенство $k_j(u)>\frac{p}{12}u^3$. Заметим, что $p(q^2-1)$ делится на 24. Поэтому достаточно доказать, что

$$\prod_{i=2}^{k} k_{j_i}(u) > \frac{1}{2}u^{3k-3},$$

если каждое число $k_{j_i}(u)$ взаимно просто с $\log_v(u)$, или

$$\prod_{i=2}^{k} k_{j_i}(u) > \frac{1}{2}u^{3k-3}\log_v u,$$

если хотя бы одно $k_{j_i}(u)$ не взаимно просто с $\log_v(u)$. Это верно в силу леммы 2.9(а),(б) и неравенства $k_{10}(4)=41>4^3/2$.

Предположим, что существует число $j\in\{j_1,\ldots,j_k\}$ такое, что p делит $(\log_v u, k_j(u))$. Лемма 2.9(г) влечет, что $k_j(u)>pu^3\log_v u$, и произведение оставшихся чисел $k_{j_i}(u)$ не меньше $u^{3k-3}/2$. Теперь утверждение следует из того, что 8 делит q^2-1. $\square$

Лемма 2.11 [17, 18]. *Предположим, что x, y и k — ненулевые целые числа. Если $x^2+x+1=y^k$, то либо $k=1$, либо $k=3$ и $(x,y)\in\{(18,7),(-19,7)\}$. Если $x^2+x+1=3y^k$, то $k\leq 2$.*

Лемма 2.12. *Предположим, что q — степень нечетного простого числа и $\varepsilon\in\{+,-\}$. Если $k_6(\varepsilon q)=r^m$, где $r\in\{7,31\}$ и m — натуральное число, то*

$$(r,m,\varepsilon q)\in\{(7,1,5),(7,1,3),(7,3,19),(31,1,-5)\}.$$

Доказательство. Используя равенство (1), находим, что

$$k_6(\varepsilon q)=\frac{q^2-\varepsilon q+1}{(q+\varepsilon 1,3)}.$$

Пусть $k_6(\varepsilon q)=r^m$, где $r\in\{7,31\}$. Если $(q+\varepsilon 1,3)=3$, то $3r^m=q^2-\varepsilon q+1=(\varepsilon q-1)^2+(\varepsilon q-1)+1$. По лемме 2.11 находим, что $m=1$ или $m=2$. Поскольку $r=7$ или $r=31$, заключаем, что $(r,m,\varepsilon q-1)\in\{(7,1,4),(7,1,-5)\}$. По предположению q нечетно, поэтому возможен только случай $r=7$ и $\varepsilon q=5$.

Пусть теперь $(q+\varepsilon 1,3)=1$. Тогда

$$r^m=q^2-\varepsilon q+1=(\varepsilon q-1)^2+(\varepsilon q-1)+1.$$

По лемме 2.11 верно, что либо $m=3$ и $\varepsilon q-1\in\{18,-19\}$, либо $m=1$. Если $m=3$ и $\varepsilon q-1\in\{18,-19\}$, то $r=7$, $\varepsilon q=19$. Наконец, если $m=1$, то $(r,\varepsilon q-1)\in\{(7,2),(7-3),(31,5),(31,-6)\}$. Поскольку q нечетно, получаем, что $(r,\varepsilon q)\in\{(7,3),(31,-5)\}$. $\square$

Далее для линейных и унитарных групп над полем порядка q мы часто используем стандартное обозначение $L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon\in\{+,-\}$, т. е. $L_n^+(q)=L_n(q)$ и $L_n^-(q)=U_n(q)$. Следуя [6], через $\mathrm{prk}\,L$ будем обозначать размерность группы L, если L — линейная или унитарная группа, и лиев ранг группы L в случае симплектических или ортогональных групп.

Наименьшее общее кратное элементов спектра $\omega(G)$ равно периоду группы G и обозначается через $\exp(G)$. Для простого числа $r\in\pi(G)$ период силовской r-подгруппы группы G обозначается через $\exp_r(G)$, а наименьшее общее кратное элементов $\omega(G)$, взаимно простых с r, обозначается через $\exp_{r'}(G)$.

Лемма 2.13 [19, следствие 0.5]. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем характеристики p. Пусть $p^\gamma > \operatorname{prk} L - 1$, если L линейная или унитарная, и $p^\gamma > 2\operatorname{prk} L - 1$ в противном случае. Тогда $\exp_p(L) \le p^\gamma$.*

Лемма 2.14 [20, лемма 3.5]. *Пусть u — степень простого числа v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $S = L_n^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$ и $n \ge 3$, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(\tau u),$$

где $c = r \in \pi(u - \tau 1)$, если $n = r^s$, и $c = 1$ иначе.

(б) *Если $S = S_{2n}(u)$ или $S = O_{2n+1}(u)$ при $n \ge 2$, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(u^2),$$

где $c = (2, u-1)^2$, если $n = 2^s$, и $c = (2, u-1)$ иначе.

(в) *Если $S = O_{2n}^\epsilon(u)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$ и $n \ge 4$ четно, то*

$$\exp_{v'}(S) = \exp_{v'}(O_{2n-\epsilon 1}(q)).$$

(г) *Если $S = O_{2n}^\epsilon(u)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$ и $n \ge 4$ нечетно, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{\Phi_n(\epsilon u)}{(2, u-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u^2).$$

Предложение 2.15. *Предположим, что S — простая классическая группа над полем характеристики v и порядка u такая, что $5 \le t(S) \le 14$. Тогда*

$$\frac{1}{\alpha(S)} \cdot v \cdot u^{\gamma(S)} \le \exp(S) \le \beta(S) \cdot v \cdot u^{\gamma(S)},$$

где числа $\alpha(S), \beta(S)$ и $\gamma(S)$ указаны в табл. 1.

Доказательство. Будем использовать, что $\exp(S) = \exp_v(S) \cdot \exp_{v'}(S)$, и оценим каждый из этих множителей.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Тогда получаем, что $9 \le m \le 28$ (см. табл. 2). По лемме 2.13 число $\exp_v(S)$ не превосходит минимальной степени v, большей $m-1$, и, следовательно, $v \le \exp_v(S) \le (m-1)v$. По лемме 2.14

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(\tau u),$$

где $c = r \in \pi(u - \tau 1)$, если $m = r^s$, и $c = 1$ в противном случае. Тогда $1 \le c$ и $c \le 3, 11, 13, 2, 17, 19, 23, 5, 3$, если $m = 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27$ соответственно. Будем использовать следующие оценки для произведений круговых многочленов. Если $s \ge 1$, то

$$\prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(x) = x^{2^s} - 1$$

и тем самым

$$\frac{3}{4} u^{2^s} \le \prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(\tau u) < u^{2^s}.$$

Таблица 1. Оценки для $\exp(S)$, когда $5 \le t(S) \le 14$

S	$(\alpha(S), \beta(S), \gamma(S))$	S	$(\alpha(S), \beta(S), \gamma(S))$
$L_9^{\pm}$	$(32, 86, 28)$	$L_{19}^{\pm}$	$(1081, 1821, 120)$
$L_{10}^{\pm}$	$(6, 64, 32)$	$L_{20}^{\pm}$	$(76, 1922, 128)$
$L_{11}^{\pm}$	$(118, 143, 42)$	$L_{21}^{\pm}$	$(152, 4046, 140)$
$L_{12}^{\pm}$	$(15, 157, 46)$	$L_{22}^{\pm}$	$(76, 2832, 150)$
$L_{13}^{\pm}$	$(370, 342, 58)$	$L_{23}^{\pm}$	$(3490, 5934, 172)$
$L_{14}^{\pm}$	$(15, 247, 64)$	$L_{24}^{\pm}$	$(203, 6203, 180)$
$L_{15}^{\pm}$	$(29, 531, 72)$	$L_{25}^{\pm}$	$(2023, 12946, 200)$
$L_{16}^{\pm}$	$(57, 569, 80)$	$L_{26}^{\pm}$	$(203, 8990, 212)$
$L_{17}^{\pm}$	$(968, 1214, 96)$	$L_{27}^{\pm}$	$(1214, 18699, 230)$
$L_{18}^{\pm}$	$(29, 860, 102)$	$L_{28}^{\pm}$	$(540, 19419, 242)$
$S_{10}, O_{11}, O_{12}^{+}$	$(5, 20, 20)$	$S_{32}, O_{33}, O_{32}^{-}$	$(21, 90, 160)$
$S_{12}, O_{13}, O_{12}^{-}$	$(4, 16, 24)$	$S_{34}, O_{35}, O_{36}^{+}$	$(16, 135, 192)$
$S_{14}, O_{15}, O_{16}^{+}$	$(5, 29, 36)$	$S_{36}, O_{37}, O_{36}^{-}$	$(11, 108, 204)$
$S_{16}, O_{17}, O_{16}^{-}$	$(10, 29, 44)$	$O_{10}^{\pm}$	$(7, 24, 16)$
$S_{18}, O_{19}, O_{20}^{+}$	$(8, 49, 56)$	$O_{14}^{\pm}$	$(7, 37, 30)$
$S_{20}, O_{21}, O_{20}^{-}$	$(5, 39, 64)$	$O_{18}^{\pm}$	$(10, 65, 50)$
$S_{22}, O_{23}, O_{24}^{+}$	$(8, 63, 84)$	$O_{22}^{\pm}$	$(10, 85, 74)$
$S_{24}, O_{25}, O_{24}^{-}$	$(8, 63, 92)$	$O_{26}^{\pm}$	$(16, 135, 104)$
$S_{26}, O_{27}, O_{28}^{+}$	$(12, 98, 116)$	$O_{30}^{\pm}$	$(16, 167, 136)$
$S_{28}, O_{29}, O_{28}^{-}$	$(8, 78, 128)$	$O_{34}^{\pm}$	$(21, 190, 176)$
$S_{30}, O_{31}, O_{32}^{+}$	$(11, 90, 144)$	$O_{38}^{\pm}$	$(21, 228, 222)$

Если t — нечетное простое число, а s — натуральное число, то из леммы 2.4(а) следует, что

$$\Phi_{t^s}(x) = \Phi_{2t^s}(-x) = 1 + x^{t^{s-1}} + x^{2t^{s-1}} + \ldots + x^{(t-1)t^{s-1}} = \frac{x^{t^s} - 1}{x^{t^{s-1}} - 1}.$$

Если $u \ge 3$, то из леммы 2.4 следует, что

$$\frac{1}{2} u^{t^s - t^{s-1}} \le \Phi_{t^s}(\tau u),\ \Phi_{2t^s}(\tau u) \le 2u^{t^s - t^{s-1}}.$$

Эти неравенства верны для $u = 2$, поскольку

$$\Phi_{t^s}(\pm 2) \ge \frac{2^{t^s} + 1}{2^{t^{s-1}} + 1} > 2^{t^s - t^{s-1} - 1}.$$

Более того, из леммы 2.4(а) следует, что

$$\Phi_{t^s}(\tau u)\Phi_{2t^s}(\tau u) = \Phi_{t^s}(u^2) = 1 + u^{2t^{s-1}} + \ldots + u^{2(t-1)t^{s-1}}.$$

Поскольку $u^2 \ge 4$, лемма 2.4(г) влечет, что

$$u^{2t^{s-1}(t-1)} < \Phi_{t^s}(\tau u)\Phi_{2t^s}(\tau u) < \frac{4}{3} u^{2t^{s-1}(t-1)}.$$

Таблица 2. Коклики наибольшего размера в $GK(L)$ с $t(L) \geq 5$

L	Условия	$t(L)$	$E(L)$	$J(L) \setminus E(L)$
$U_n(q)$	$n \geq 9$ нечетно	$\frac{n+1}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 10$ четно	$\frac{n}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i < n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
$L_n(q)$	$n \geq 9$ нечетно и $(n,q) \neq (9,2), (11,2)$	$\frac{n+1}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i \leq n\}$	$\varnothing$
	$n = 11$ и $q = 2$	5	$\{7, 8, 9, 11\}$	$\{5, 10\}$
	$n \geq 10$ четно и $(n,q) \neq (10,2), (12,2)$	$\frac{n}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i < n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n = 12$ и $q = 2$	6	$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$\varnothing$
$S_{2n}(q)$ или $O_{2n+1}(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n+4}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 5$, $n \equiv 1 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (5,2)$	$\frac{3n+5}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 6$, $n \equiv 2 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (6,2)$	$\frac{3n+2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (7,2)$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n+1}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n-1}{2}, n-1, n+1\}$
	$n = 6$ и $q = 2$	5	$\{3, 5, 8, 10, 12\}$	
	$n = 7$ и $q = 2$	6	$\{5, 7, 10, 12, 14\}$	$\{3, 8\}$
$O_{2n}^+(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq 2n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 9$, $n \equiv 1 \pmod 4$	$\frac{3n+1}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq 2n, n+1\}$	$\{n-1, n+1\}$
	$n \geq 10$, $n \equiv 2 \pmod 4$	$\frac{3n-2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq 2n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n-1}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq 2n, n-1\}$	$\varnothing$
$O_{2n}^-(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n+4}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 9$, $n \equiv 1 \pmod 4$	$\frac{3n+1}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq n, \frac{n+1}{2}\}$	$\{\frac{n+1}{2}, n-1\}$
	$n = 6$, $q = 2$	5	$\{3, 8, 5, 10, 12\}$	$\varnothing$
	$n = 6$, $q > 2$	5	$\{8, 5, 10, 12\}$	$\{3, 6\}$
	$n \geq 10$, $n \equiv 2 \pmod 4$	$\frac{3n+2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n}{2}, n-2, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$ и $q \neq 2$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n-1}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq n, \frac{n-1}{2}\}$	$\varnothing$
	$n = 7$, $q = 2$	5	$\{5, 10, 12, 14\}$	$\{3, 8\}$

Для оставшихся многочленов используем следующие неравенства:

$$\frac{3}{4}u^4 < \Phi_{12}(\tau u) = u^4 - u^2 + 1 < u^4,$$

$$\frac{u^8}{2} < \Phi_{15}(\tau u) = u^8 - (\tau u)^7 + (\tau u)^5 - u^4 + (\tau u)^3 - (\tau u) + 1 < 2u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^8 < \Phi_{20}(\tau u) = u^8 - u^6 + u^4 - u^2 + 1 < u^8, \frac{3}{4}u^8 < \Phi_{24}(\tau u) = u^8 - u^4 + 1 < u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^{12} < \Phi_{28}(\tau u) = u^{12} - u^{10} + u^8 - u^6 + u^4 - u^2 + 1 < u^{12}.$$

Например, если $m = 12$, то

$$\exp_{v'}(S) = \prod_{i=1}^{12} \Phi_i(\tau u).$$

Находим, что

$$\frac{3}{4}u^8 < \Phi_1(\tau u)\Phi_2(\tau u)\Phi_4(\tau u)\Phi_8(\tau u) < u^8, \quad u^4 < \Phi_3(\tau u)\Phi_6(\tau u) < \frac{4}{3}u^4,$$

$$u^8 < \Phi_5(\tau u)\Phi_{10}(\tau u) < \frac{4}{3}u^8, \quad \frac{1}{2}u^6 < \Phi_7(\tau u), \Phi_9(\tau u) < 2u^6,$$

$$\frac{1}{2}u^{10} < \Phi_{11}(\tau u) < 2u^{10}, \quad \frac{3}{4}u^4 < \Phi_{12}(\tau u) < u^4.$$

Поскольку $v \le \exp_v(S) \le 11v$, получаем, что

$$\exp(S) > v \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 u^{46} = \frac{9}{128}vu^{46} > \frac{1}{15}vu^{46}$$

и

$$\exp(S) < 11v \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 2^3 u^{46} < 157vu^{46}.$$

Предположим, что $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u), O^+_{2m+2}(u)\}$, где m нечетно и $5 \le m \le 17$. По лемме 2.13 получаем, что $v \le \exp_v(S) \le (2m+1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_v(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u^2),$$

где $c \le 4$, если $n = 2^s$, и $c \le 2$ в противном случае. Оценим $\Phi_i(u^2)$ следующим образом. Во-первых, воспользуемся тем, что

$$\prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(u^2) = u^{2^s} - 1,$$

поэтому это произведение меньше u^{2^s} и не меньше $\frac{15}{16}u^{2^s}$ для всех $s \ge 2$. Поскольку $u^2 \ge 4$, из леммы 2.4 следует, что

$$\frac{2}{3}u^{2\varphi(i)} < \Phi_i(u^2) < \frac{4}{3}u^{2\varphi(i)}.$$

Используем эти неравенства, если $i = t^s$, где t — нечетное простое число и $2i > m$. Если $i = t^s$ и $2i \le m$, то

$$\Phi_i(u^2)\Phi_{2i}(u^2) = \Phi_i(u^4) = 1 + u^4 + \ldots + u^{4\varphi(i)} > u^{4\varphi(i)}$$

и, поскольку $u^4 \geq 16$, получаем, что $\Phi_i(u^2)\Phi_{2i}(u^2) < \frac{16}{15}u^{4\varphi(i)}$. Оставшиеся две оценки для этого случая:

$$\frac{15}{16}u^8 < \Phi_{12}(u^2) = u^8 - u^4 + 1 < u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^{16} < \Phi_{15}(u^2) = u^{16} - u^{14} + u^{10} - u^8 + u^6 - u^2 + 1 < u^{16}.$$

Предположим, что $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u), O^-_{2m}(u)\}$, где m четно и $6 \leq m \leq 18$. По лемме 2.13 получаем, что $v \leq \exp_v(S) \leq (2m-1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_v(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u^2),$$

где $c \leq 4$, если $n = 2^s$, и $c \leq 2$ в противном случае. Для многочленов $\Phi_i(u^2)$ используем неравенства из предыдущего случая.

Предположим, что $S \simeq O^\epsilon_{2m}(u)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$, m нечетно и $5 \leq m \leq 19$. По лемме 2.13 получаем, что $v \leq \exp_v(S) \leq (2m-1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_{v'}(S) = \frac{\Phi_n(\epsilon u)}{(2, u-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u^2).$$

Очевидно, что $(2, u-1) \leq 2$. Для многочленов $\Phi_i(u^2)$ используем неравенства из предыдущего случая. Наконец, оцениваем $\Phi_n(\epsilon u)$ так же, как в случае линейных и унитарных групп. $\square$

3. Предварительные сведения: графы простых чисел и спектры групп лиева типа

Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Граф простых чисел группы G обозначается через $GK(G)$. Коклику в $GK(G)$, содержащую r, будем называть $\{r\}$-*кокликой*. Если $r \in \pi(G)$, то $t(r, G)$ обозначает наибольший размер $\{r\}$-коклики в $GK(G)$. Через $\rho(r, G)$ обозначается множество вершин в некоторой $\{r\}$-коклике в $GK(G)$ размера $t(r, G)$.

Простое число $r \in \pi(G)$ называется *большим* (относительно G), если r лежит в некоторой коклике наибольшего размера в $GK(G)$, и *малым* (относительно G) в противном случае.

Лемма 3.1. *Предположим, что L — неабелева простая группа с $t(L) \geq 5$ и $t(2, L) \geq 2$. Если G — группа с $\omega(G) = \omega(L)$, то справедливы следующие утверждения.*

(а) *Существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G.*

(б) *Для любой коклики ρ из $GK(G)$ с $|\rho| \geq 3$ не более одного простого числа из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(в) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное с 2 в $GK(G)$, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

(г) *Группа K нильпотентна.*

Доказательство. Первые три утверждения следуют из основной теоремы из [21]. Четвертое утверждение — это [22, теорема 1]. $\square$

Предположим, что L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Положим

$$\delta(L) = \begin{cases} \pi(q-\varepsilon 1), \text{ если } L = L_n^\varepsilon(q), \\ \pi((2, q-1)), \text{ если } L \text{ — симплектическая или ортогональная группа.} \end{cases}$$

Из основных результатов работы [23] (см. также [6, лемма 2.2]) следует, что для двух различных простых чисел $r, s \in \pi(L) \setminus \delta(L)$, где $r \neq p$, ответ на вопрос, являются ли они смежными в $GK(L)$, зависит только от $e(r,q)$, если $s = p$, и $e(r,q)$, $e(s,q)$, если $s \neq p$.

Для формулировки критерия смежности в [23] используется несколько функций целочисленного аргумента. В частности, для симплектических и ортогональных групп используется функция $\eta(k)$, где

$$\eta(k) = \begin{cases} k, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ k/2, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Для линейных и унитарных групп будем использовать переформулировку критерия смежности из [24, леммы 2.1–2.3], который сформулирован в несколько иных терминах. Следуя [6], определим функцию φ для унификации дальнейших рассуждений:

$$\varphi(r, L) = \begin{cases} e(r, \varepsilon q), & \text{если } L = L_n^\varepsilon(q), \\ \eta(e(r,q)), & \text{если } L \text{ симплектическая или ортогональная.} \end{cases}$$

Из определения и свойств функции $e(r,q)$ следует, что

$$e(r,q) = \begin{cases} 2\varphi(r,L), & \text{если либо } e(r,q) \text{ четно и } L \text{ симплектическая} \\ & \text{или ортогональная,} \\ & \text{либо } e(r,q) \equiv 2 \pmod 4 \text{ и } L \text{ унитарная;} \\ \varphi(r,L)/2, & \text{если } e(r,q) \equiv 1 \pmod 2 \text{ и } L \text{ унитарная;} \\ \varphi(r,L) & \text{иначе.} \end{cases}$$

В следующей лемме перечислены критерии смежности в графах простых чисел классических групп из [23–25] для всех типов классических групп.

Лемма 3.2. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, где $\operatorname{prk} L = n \geq 4$. Возьмем нечетные простые числа r, s такие, что $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r,q)$ и $l = e(s,q)$. Предположим, что $2 \leq \varphi(r,L) \leq \varphi(s,L)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $L = L_n^\varepsilon(q)$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(r,L) + \varphi(s,L) > n$, и $\frac{\varphi(s,L)}{\varphi(r,L)}$ не является целым числом.*

(б) *Если $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(r,L) + \varphi(s,L) > n$, и $\frac{l}{k}$ не является нечетным целым числом.*

(в) *Если $L = O_{2n}^\varepsilon(q)$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $2\varphi(r,L) + 2\varphi(s,L) > 2n - (1 - \varepsilon(-1)^{k+l})$, $\frac{l}{k}$ не является нечетным целым числом, и если $\varepsilon = +$, то цепочка равенств $n = l = 2\varphi(s,L) = 2\varphi(r,S) = 2k$ неверна.*

В некоторых случаях удобнее использовать следствие критерия смежности.

Лемма 3.3 [6, лемма 2.4]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть* $\operatorname{prk} L = n \geq 4$.

(а) *Если $r \in \pi(L) \setminus \{p\}$, то $\varphi(r, L) \leq n$.*

(б) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L)\setminus\{p\}$, причем $\varphi(r, L) \leq n/2$ и $\varphi(s, L) \leq n/2$, то r и s смежны в $GK(L)$.*

(в) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L) \setminus \{p\}$, причем $n/2 < \varphi(r, L) \leq n$ и $n/2 < \varphi(s, L) \leq n$, то r и s смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $e(r, q) = e(s, q)$.*

(г) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L) \setminus \{p\}$ и $e(r, q) = e(s, q)$, то r и s смежны в $GK(L)$.*

Следующая лемма является аналогом [6, лемма 2.7], сформулированным при новых ограничениях на L.

Лемма 3.4. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть $t(L) \geq 5$.*

(а) *Если $\varphi(r, L) \geq n/2$, то r является большим относительно L.*

(б) *Если r большое относительно L, то $\varphi(r, L) \geq n/2 - 1$.*

(в) *Если r большое относительно L, то*

$$\varphi(r, L) \geq \begin{cases} t(L), & \text{если } L \text{ линейная или унитарная;} \\ (2t(L) - 4)/3, & \text{если } L \text{ симплектическая или ортогональная.} \end{cases}$$

(г) *Если ρ — коклика в $GK(L)$ и $n/2 < \varphi(r, L)$ для каждого $r \in \rho$, то $GK(L)$ имеет коклику σ размера $t(L)$ с $\rho \subseteq \sigma$.*

Доказательство. Все пункты могут быть проверены с помощью [25, табл. 2, 3]. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Тогда $t(p, L) \leq 4$. Более того, предположим, что $\operatorname{prk} L \geq 8$, если L — линейная или унитарная группа, и $\operatorname{prk} L \geq 5$ в противном случае. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если r не смежно с p в $GK(L)$, то r является большим относительно L.*

(б) *Если L — линейная или унитарная группа, то $t(p, L) = 3$.*

(в) *Если $t(p, L) = 2$, то $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где n — четное целое число.*

Доказательство. Обозначим $n = \operatorname{prk} L$. Значения $t(p, L)$ можно найти в [23, табл. 4]. Предположим, что $r \in \pi(L)$ не смежно с p в $GK(L)$. По [23, предложение 3.1] находим, что $\varphi(r, L) > n - 2$, если $L = L_n^{\varepsilon}(q)$ или $L = O_{2n}^{\pm}(q)$, и $\varphi(r, L) > n - 1$, если $L = O_{2n+1}(q)$ или $L = S_{2n}(q)$. По лемме 3.4 получаем, что r является большим по отношению к L. $\square$

Лемма 3.6 [6, лемма 2.3]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Если r — нечетное простое число из $\pi(L)\setminus\{p\}$, то $\varphi(r, L)$ делит $r-1$, а если L — симплектическая или ортогональная группа, то $2\varphi(r, L)$ делит $r - 1$.*

Лемма 3.7 [26, лемма 1.3]. *Предположим, что S — простая классическая группа лиева ранга m над полем порядка u. Тогда порядки элементов группы S не превосходят $\frac{u}{u-1}u^m$.*

Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Для $\sigma \subseteq \pi(L) \setminus \{p\}$ положим $E(\sigma, L) = \{e(r, -q) \mid r \in \sigma\}$, если L — унитарная группа, и $E(\sigma, L) = \{e(r, q) \mid r \in \sigma\}$ в противном случае. По лемме 3.5

верно, что $t(p, L) \leq 4$, поэтому если $t(L) \geq 5$, то любая коклика ρ наибольшего размера в $GK(L)$ не содержит p и, следовательно, множество $E(\rho, L)$ корректно определено. Определим $J(L)$ как объединение множеств $E(\rho, L)$, а $E(L)$ — как пересечение этих множеств, где ρ пробегает все коклики наибольшего размера из $GK(L)$. Следующая лемма является аналогом [6, леммы 2.5] при новых ограничениях на L.

Лемма 3.8. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть $t(L) \geq 5$. Пусть ρ — коклика наибольшего размера в $GK(L)$. Если $J(L) = E(L)$, то $E(\rho, L) = E(L)$. Если $J(L) \neq E(L)$, то $E(\rho, L) = E(L) \cup \{j\}$ для некоторого $j \in J(L) \setminus E(L)$. В частности, $|E(L)| \leq t(L) \leq |E(L)| + 1$. Множества $E(L)$, $J(L) \setminus E(L)$ и числа $t(L)$ перечислены в табл. 2.*

Доказательство. См. [25, табл. 2, 3]. Отметим, что [25, табл. 3] содержит опечатку для $L = O^-_{12}(q)$, поскольку $r_4(q)$ и $r_{12}(q)$ смежны в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). $\square$

Лемма 3.9. *Предположим, что $L = L^\varepsilon_n(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $t(L) \geq 5$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $r \in R_i(\varepsilon q)$, где $2 \leq i < n/2$, то $t(r, L) \leq i$.*

(б) *Если $r \in R_i(\varepsilon q)$, где $n/3 < i < n/2$, то $t(r, L) = i$.*

Доказательство. Поскольку $t(L) \geq 5$, согласно табл. 2 $n \geq 9$. Предположим, что $r \in R_i(\varepsilon q)$, где $2 \leq i < n/2$, и s не смежно с r в $GK(L)$. Согласно табл. 2 либо $i = 5$ и $L = L_{11}(2)$, либо r мало относительно L. В первом случае $t(r, L) = 5 = i$, поэтому утверждение верно. Следовательно, можно считать, что r мало. По лемме 3.5(а) получаем, что $s \neq p$. Тогда из леммы 3.3(б) следует, что $j = \varphi(s, L) > n/2 > i$. Из леммы 3.2(а) следует, что s не смежно с r тогда и только тогда, когда $j \in J = \{n, n-1, \ldots, n-i+1\}$ и j не делится на i. Очевидно, что в J существует хотя бы одно целое число, делящееся на i. Значит, существует не более $i - 1$ вариантов для j и поэтому $t(r, L) \leq i$.

Предположим теперь, что $i > n/3$. Заметим, что если $j \in J$, то $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L согласно табл. 2, поэтому соответствующие простые числа для J вместе с r образуют коклику в $GK(L)$. Очевидно, что $2i$ — единственное целое число, делящееся на i среди элементов J. Следовательно, если $R_j(\varepsilon q) \neq \varnothing$ для всех $j \in J$, то $t(r, L) = i$. Согласно табл. 2 остается рассмотреть случаи $L = L_{11}(2)$ и $L_{12}(2)$. В этих случаях $R_6(2) = \varnothing$ и $i = 4, 5$. Однако 6 не принадлежит множеству $\{n - i + 1, \ldots, n\}$, так что снова $t(r, L) = i$, как и заявлено. $\square$

Лемма 3.10 [6, лемма 2.13]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Пусть k и l — целые числа, $k \geq 0$, $l > 0$, и $\delta = \delta(L)$. Для $j = 1, \ldots, l$ предположим, что попарно различные простые числа r_j лежат в $\pi(L) \setminus (\delta \cup \{p\})$. Положим $\varepsilon = -$, если L — унитарная группа, и $\varepsilon = +$ в противном случае. Обозначим $i_j = e(r_j, \varepsilon q)$. Произведение $p^k r_1 r_2 \cdots r_l$ лежит в $\omega(L)$ тогда и только тогда, когда δ'-часть числа $p^k a$ лежит в $\omega(L)$, где*

$$a = \begin{cases} [q^{i_1} - (\varepsilon 1)^{i_1}, q^{i_2} - (\varepsilon 1)^{i_2}, \ldots, q^{i_l} - (\varepsilon 1)^{i_l}], & \text{если } L = L^\varepsilon_n(q), \\ [q^{\eta(i_1)} + (-1)^{i_1}, q^{\eta(i_2)} + (-1)^{i_2}, \ldots, q^{\eta(i_l)} + (-1)^{i_l}] & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, если $i_1, i_2, \ldots, i_l$ больше 2 и попарно различны, то $p^k r_1 r_2 \cdots r_l \in \omega(L)$ тогда и только тогда, когда $p^k k_{i_1}(\varepsilon q) k_{i_2}(\varepsilon q) \cdots k_{i_l}(\varepsilon q) \in \omega(L)$.

Лемма 3.11 [6, лемма 3.8]. *Для простой классической группы L над полем порядка q и характеристики p с $\mathrm{prk}(L) = n \geq 4$ положим*

$$j = \begin{cases} n, & \text{если } L \simeq L_n(q); \\ 2n-2, & \text{если либо } L \simeq O_{2n}^{+}(q), \text{ либо } L \simeq U_n(q) \text{ и } n \text{ четно}, \\ 2n, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $(k_j(q), |P|) = 1$ для любой собственной параболической подгруппы P группы L. Если $i \neq j$ и примитивный простой делитель $r_i(q)$ принадлежит $\pi(L)$, то существует собственная параболическая подгруппа P группы L такая, что $k_i(q)$ принадлежит $\omega(P)$. В частности, если два различных простых числа $r, s \in \pi(L)$ не делят порядок никакой собственной параболической подгруппы группы L, то r и s смежны в $GK(L)$.

Лемма 3.12 [6, лемма 3.5]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, $r \in \pi(L)$, $r^s \in \omega(P)$, где P — собственная параболическая подгруппа группы L, и $(r, 6p(q+1)) = 1$. Если L действует точно на векторном пространстве V над полем характеристики t, отличной от p, то $tr^s \in \omega(V \rtimes L)$.*

Лемма 3.13. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем порядка q и нечетной характеристики p. Если $t(L) \geq 5$ и $t(r, L) = 2$, то r делит $p(q^2-1)$.*

Доказательство. Предположим, что $r \in \pi(L) \backslash \{p\}$ и r не делит q^2-1. Положим $i = \varphi(r, L)$, если L — линейная или унитарная группа, и $i = e(r, q)$, если L — симплектическая или ортогональная группа. Для доказательства утверждения покажем, что $t(r, L) > 2$. Если r является большим относительно L, то $t(r, L) = t(L) \geq 5$. Поэтому можно считать, что r мало относительно L.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$, то $i \geq 3$. Согласно табл. 2 видим, что $n \geq 9$ и $i \leq n/2$. Рассмотрим простые числа s_j для $0 \leq j \leq 2$ такие, что $\varphi(s_j, L) = n - j$. Тогда $\varphi(s_j, L) \geq n-2 > \frac{n}{2} \geq i$. Поскольку $i \geq 3$, не более одного числа из $n, n-1, n-2$ делится на i. Из леммы 3.2(а) следует, что r не смежно по крайней мере с двумя простыми числами из $\{s_0, s_1, s_2\}$ и, более того, множество $\{s_0, s_1, s_2\}$ является кокликой в $GK(L)$. Следовательно, получаем, что $t(r, L) \geq 3$.

Предположим, что $L \simeq \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$, то $i \geq 2$. Согласно табл. 2 видим, что $n \geq 5$. По лемме 3.4(а) получаем, что $i < n/2$. Сначала рассмотрим случай $r \in R_4(q)$. Если n нечетно, то $\{r, r_n(q), r_{2n}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(б). Аналогично если n четно, то $\{r, r_{n-1}(q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Теперь рассмотрим случай $r \notin R_4(q)$. Тогда $\eta(i) \geq 3$. Заметим, что не более одного числа среди $2n$, $2n-2$, $2n-4$ делится на i, поэтому r и два простых числа из множества $\{r_{2n}(q), r_{2n-2}(q), r_{2n-4}(q)\}$ образуют коклику размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(б).

Предположим, что $L \simeq O_{2n}^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$ и r мало относительно L, то согласно [25, табл. 3] имеем $i \geq 2$ и $n \geq 6$. Сначала рассмотрим случай $r \in R_4(q)$. Если n нечетно, то $\frac{n-1}{4}$ и $\frac{2n-2}{4}$ не могут быть одновременно нечетными целыми числами, поэтому $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{n-1}(q)\}$ или $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). Если n четно, то $\{r, r_{n-1}(\varepsilon q), r_{2n-2}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). Теперь рассмотрим случай $r \notin R_4(q)$. Тогда $\eta(i) \geq 3$. Поскольку r мало относительно

L, получаем, что $n \geq 7$ и $i < n/2$. Если n нечетно, то $\frac{n-2}{i}$ и $\frac{2(n-2)}{i}$ не могут быть одновременно нечетными целыми числами, поэтому $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{n-2}(\varepsilon q)\}$ или $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{2n-4}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Если n четно, то из леммы 3.2(в) следует, что $M = \{r_{2n-4}(q), r_{n-1}(q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ и r не смежно по крайней мере с двумя элементами из M, поэтому $t(r, L) \geq 3$, как и утверждалось. □

4. Доказательство теоремы 3

В этом разделе докажем результаты о строении групп, изоспектральных простым классическим группам. В конце раздела доказана теорема 3.

Предположим, что L — простая классическая группа над полем нечетного порядка q, а G — группа, изоспектральная L. Предположим, что L и G удовлетворяют условию теоремы 3, в частности, $5 \leq t(L) \leq 13$. Обозначим $n = \operatorname{prk} L$. Согласно табл. 2 находим, что $n \geq 9$, если L — линейная или унитарная группа, и $n \geq 5$ в остальных случаях.

Как упоминалось во введении, можно считать, что $n \neq 16$, если $S = S_{2n}(q)$ или $S = O_{2n+1}(q)$.

Используя [23, табл. 6], видим, что $t(2, L) \geq 2$. В силу леммы 3.1 существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. По предположению S — простая классическая группа над полем порядка u, взаимно простого с q.

Положим $m = \operatorname{prk}(S)$. Поскольку $t(L) \geq 5$, согласно табл. 2 существует коклика размера 5 в $GK(L)$, не содержащая простого числа 3. Из леммы 3.1 следует, что по крайней мере четыре простых числа из этой коклики принадлежат $\pi(S)$. Это вместе с [25, табл. 2, 3] влечет, что $m \geq 4$. Фиксируем эти обозначения и ограничения далее в этом разделе.

Лемма 4.1. *Если S — классическая группа над полем характеристики v и $r \in \pi(K) \setminus \{v\}$, то $t(r, L) = 2$ и r делит $p(q^2 - 1)$.*

Доказательство. Зафиксируем простое число $r \in \pi(K) \setminus \{v\}$. Из [6, лемма 2.10] следует, что $t(r, L) \geq 2$. Сначала покажем, что $t(r, L) = 2$.

Предположим, что $t(r, L) \geq 3$. Тогда существуют $s_1, s_2 \in \pi(L) \setminus \{r\}$ такие, что $\{r, s_1, s_2\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Если r большое относительно L или $r = p$, то можно считать, что s_1 и s_2 являются большими относительно L, поэтому они нечетны. Если r мало относительно L, из леммы 3.5(а) следует, что $s_1, s_2 \neq p$. Согласно табл. 2 получаем, что $\varphi(r, L) < \frac{n}{2}$. По лемме 3.3(б) справедливы неравенства $\varphi(s_1, L) > n/2$ и $\varphi(s_2, L) > n/2$. Значит, s_1 и s_2 нечетны во всех случаях. Из леммы 3.1 следует, что $s_1, s_2 \in \pi(S)$. По лемме 3.1 верно, что $t(S) \geq 4$. Значит, $S \neq L_2(v)$ согласно [25, табл. 2]. Тогда силовские $\{v\}$-подгруппы группы S нециклические и, следовательно, если $v = s_1$ или $v = s_2$, то $rs_1 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ или $rs_2 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ (см., например, [22, лемма 2.13]). Поэтому можно считать, что $s_1, s_2 \neq v$. Из леммы 3.11 следует, что s_1 или s_2 делит порядок собственной параболической подгруппы группы S. По [22, лемма 2.16] получаем, что $rs_1 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ или $rs_2 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$; противоречие.

Следовательно, верно, что $t(r, L) = 2$. По лемме 3.13 получаем, что r делит $p(q^2 - 1)$, что и требовалось показать. □

Лемма 4.2. *Предположим, что простое число $r \neq p$ делит $|\overline{G}/S|$.*

(а) *Если существует целое число $i \geq 3$ такое, что $k_i(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K| \cdot v$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и для каждого $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) > m/2$*

и $rr_i \notin \omega(L)$, то r делит $k_i(\varepsilon q) - 1$.

(б) *Если существуют различные i и j такие, что $i, j \geq 3$ и $\{r, r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, является кокликой размера 3 в $GK(L)$, то r делит $(k_i(\varepsilon q) - 1)(k_j(\varepsilon q) - 1)$.*

Доказательство. Предположим, что существует $i \geq 3$ такое, что $k_i(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K| \cdot v$ и для каждого $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) > m/2$ и $rr_i \notin \omega(L)$. По лемме 3.3(в) заключаем, что $e(r_i, u)$ одинаково для всех $r_i \in R_i(\varepsilon q)$. Положим $t = e(r_i, u)$ и заметим, что S имеет циклическую холлову подгруппу порядка $k_t(u)$ по [6, лемма 2.12]. Пусть $s \in \pi(k_i(\varepsilon q))$ и $P \in Syl_s(S)$. По аргументу Фраттини число r делит $|N_{\overline{G}}(P)|$. Выберем $x \in N_{\overline{G}}(P)$ так, чтобы $|x| = r$. Тогда $P\langle x \rangle$ — группа Фробениуса с ядром P и дополнением $\langle x \rangle$ и, следовательно, $|P| \equiv 1 \pmod r$. Мы знаем, что $(s, |\overline{G}/S| \cdot |K|) = 1$, поэтому силовские s-подгруппы групп G и S изоморфны. Поскольку s — произвольный элемент множества $\pi(k_i(\varepsilon q))$, получаем, что $k_i(\varepsilon q) - 1$ делится на r.

Предположим, что существуют различные i и j такие, что $i, j \geq 3$ и $\{r, r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Тогда $3 \notin \{r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$. Поскольку r делит $|\overline{G}/S|$, из леммы 3.1 следует, что $(k_i(\varepsilon q)k_j(\varepsilon q), |\overline{G}/S| \cdot |K|) = 1$ и тем самым $R_j(\varepsilon q) \cup R_i(\varepsilon q) \subseteq \pi(S)$. Покажем, что существует $\ell \in \{i, j\}$ такое, что если $r_\ell \in R_\ell(\varepsilon q)$, то $r_\ell \neq v$ и $\varphi(r_\ell, S) > m/2$. Сначала предположим, что $v \in R_i(\varepsilon q) \cup R_j(\varepsilon q)$. Без ограничения общности пусть $r_i = v$. Тогда, поскольку r_i и r_j не смежны в $GK(S)$, используя [23, табл. 4], находим, что $\varphi(r_j, S) > m/2$, поэтому можно взять $\ell = j$. Если $v \notin R_i(\varepsilon q) \cup R_j(\varepsilon q)$ и хотя бы для одного $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) \leq m/2$, то по лемме 3.3(б) для каждого $r_j \in R_j(\varepsilon q)$ верно неравенство $\varphi(r_j, S) > m/2$. Следовательно, число j удовлетворяет условию п. (а) и поэтому r делит $k_j(\varepsilon q) - 1$. □

Предложение 4.3. *Предположим, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Если $r_i = r_i(\varepsilon q) \in \pi(\overline{G}/S)$ и $4 \leq i \leq n$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) *$i = 4$ и либо $r_i = 61$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r_i = 5$ и $9 \leq n \leq 12$, либо $n \geq 13$;*

(б) *$i = 5$ и либо $n \geq 23$, либо $r_i = 11$ и $n \in \{13, 21, 22\}$;*

(в) *$i = 6$, $r_i = 31$, $n = 9$, $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$, и $\varphi(s, S) \leq m/2$ для некоторого $s \in R_8(\varepsilon q)$;*

(г) *$i = 6$, $r_i = 7$, $11 \leq n \leq 13$, $(q + \varepsilon 1, 5) = 5$, $(q - \varepsilon 1, 11) = 11$, и $\varphi(s, S) \leq m/2$ для некоторого $s \in R_8(\varepsilon q)$;*

(д) *$i = 6$ и $n \geq 14$.*

Доказательство. Поскольку $5 \leq t(L) \leq 13$, согласно табл. 2 получаем $9 \leq n \leq 26$.

Пусть j — целое число и $3 \leq j \leq n$. Обозначим через $r(j)$ наибольший простой делитель числа j, а через $d(j)$ — число $(r(j), \Phi_{j_{\{r(j)\}'}}(\varepsilon q))$. Рассмотрим многочлен $f_j(x) = \frac{1}{d(j)} \cdot \Phi_j(x) - 1$. В силу равенства (1) и леммы 2.4(в) получаем, что $f_j(\varepsilon q) = k_j(\varepsilon q) - 1$. Предположим, что $\Phi_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты как элементы $\mathbb{Q}[x]$. Тогда согласно расширенному алгоритму Евклида существуют единственные многочлены $u_j(x), v_j(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что $u_j(x)\Phi_i(x) + v_j(x)f_j(x) = 1$, $\deg u_j < \deg f_j$ и $\deg v_j < \deg \Phi_i$. Следовательно, существует положительное целое число $c(j)$ такое, что $c(j)u_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $c(j)v_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$, поэтому $c(j)u_j(x)\Phi_i(x) + c(j)v_j(x)f_j(x) = c(j)$.

Предположим, что существуют различные целые числа j_1 и j_2 такие, что $3 \leq j_1, j_2 \leq n$ и $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. По лемме 4.2

получаем, что r_i делит $(k_{j_1}(\varepsilon q)-1)(k_{j_2}(\varepsilon q)-1)$. Это означает, что если $f_{j_1}(x)$ и $f_{j_2}(x)$ взаимно просты с $\Phi_i(x)$ в $\mathbb{Q}[x]$, то r_i делит $c(j_1)c(j_2)$.

Теперь докажем утверждение при $i \geq 7$. Для каждой пары (i,n) в табл. 3 перечислены либо две пары целых чисел $(j_1,c(j_1))$ и $(j_2,c(j_2))$, либо три пары целых чисел $(j_1,c(j_1))$, $(j_2,c(j_2))$ и $(j_3,c(j_3))$. В первом случае пары выбираются так, что $\{r_i,r_{j_1}(\varepsilon q),r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ является кокликой в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2))\cap R_i(\varepsilon q)=\varnothing$. Во втором случае пары выбираются так, что либо $\{r_i,r_{j_1}(\varepsilon q),r_{j_2}(\varepsilon q),r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ является кокликой в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2))\cap\pi(c(j_1)c(j_3))\cap\pi(c(j_2)c(j_3))\cap R_i(\varepsilon q)=\varnothing$, либо $\{r_i,r_{j_1}(\varepsilon q),r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ и $\{r_i,r_{j_1}(\varepsilon q),r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2))\cap\pi(c(j_1)c(j_3))\cap R_i(\varepsilon q)=\varnothing$. Предыдущее рассуждение показывает, что r_i принадлежит соответствующим пересечениям, поэтому эти пары чисел противоречат существованию r_i.

Все проверки выполняются понятным образом: если имеются пары $(j_1,c(j_1))$, $(j_2,c(j_2))$ для фиксированных i и n, то чтобы убедиться, что $\{r_i,r_{j_1}(\varepsilon q),r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$, достаточно проверить, что числа i, j_1 и j_2 не делят друг друга и что $i+j_1>n, i+j_2>n, j_1+j_2>n$ по лемме 3.2. Аналогичная проверка проводится в случае трех индексов j_1, j_2 и j_3. Теперь, как упомянуто выше, расширенный алгоритм Евклида дает единственные многочлены $u_{j_1}(x)$, $u_{j_2}(x)$, $v_{j_1}(x)$, $v_{j_2}(x)$ и нам остается только проверить, что перечисленные числа $c(j_1)$ и $c(j_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$c(j_1)u_{j_1}(x), c(j_1)v_{j_1}(x), c(j_2)u_{j_2}(x), c(j_2)v_{j_2}(x)\in\mathbb{Z}[x].$$

Заметим, что если $j_{1\{r(j_1)\}'}$ делит $r(j_1)-1$ (и аналогично для j_2 и j_3), то нужно рассмотреть два случая: $d(j_1)=1$ и, следовательно, $f_{j_1}(x)=\Phi_{j_1}(x)-1$, или $d(j_1)=r(j_1)$ и тем самым

$$f_{j_1}(x)=\frac{1}{r(j_1)}\Phi_{j_1}(x)-1.$$

Числа $c(j_1)$ выбраны так, чтобы $c(j_1)u_{j_1}$, $c(j_1)v_{j_1}$ в обоих случаях были многочленами с целыми коэффициентами.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $i=7$ и $9\leq n\leq 12$. Используем целые числа $j_1=8$, $j_2=6$ и $j_3=9$. Поскольку $6+7>12$ и $6,7,8,9$ не делят друг друга, множества $\{r_7,r_8(\varepsilon q),r_6(\varepsilon q)\}$ и $\{r_7,r_8(\varepsilon q),r_9(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$. Следовательно, r_7 делит $(k_8(\varepsilon q)-1)(k_6(\varepsilon q)-1)$ и $(k_8(\varepsilon q)-1)(k_9(\varepsilon q)-1)$. Поскольку q нечетно, находим, что $d(8)=2$ и $k_8(\varepsilon q)-1=\frac{1}{2}\Phi_8(\varepsilon q)-1$. Легко видеть, что если $u(x):=\frac{1}{7}(2x^3+2x^2-5x+2)$ и $v(x):=\frac{1}{7}(-4x^5-8x^4+2x^3-2x^2-6x-10)$, то

$$u(x)\Phi_7(x)+v(x)\left(\frac{1}{2}\Phi_8(x)-1\right)=1.$$

Поэтому можно взять $c(8)=7$. Это означает, что если r_7 делит $k_8(\varepsilon q)-1$, то r_7 делит 7. Поскольку $r_7\equiv 1 \pmod 7$, получаем, что $\pi(k_8(\varepsilon q)-1)\cap R_7(\varepsilon q)=\varnothing$. Теперь $k_6(\varepsilon q)-1$ равно либо $\Phi_6(\varepsilon q)-1$, либо $\frac{1}{3}\Phi_6(\varepsilon q)-1$. В первом случае получаем, что $u(x)\Phi_7(x)+v(x)(\Phi_6(x)-1)=1$ для $u(x):=\frac{1}{7}(-6x+7)$ и $v(x):=\frac{1}{7}(6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$, а во втором случае видим, что $u(x)\Phi_7(x)+v(x)(\frac{1}{3}\Phi_6(x)-1)=1$ для $u(x):=\frac{1}{127}(-42x+85)$ и $v(x):=\frac{1}{127}(126x^5-3x^4+120x^3-15x^2+96x-63)$. Следовательно, если r_7 делит $k_6(\varepsilon q)-1$, то r_7 делит $7\cdot 127$ и тем самым $r_7=127$. Аналогично $k_9(\varepsilon q)-1$ равно либо $\Phi_9(\varepsilon q)-1$, либо $\frac{1}{3}\Phi_9(\varepsilon q)-1$. В первом случае получаем, что

$$u(x)\Phi_7(x)+v(x)(\Phi_9(x)-1)=1$$

Таблица 3. Индексы для линейных и унитарных групп

r_4 : $(j,c(j))$	$n=9,10$ $(7,2\cdot 5^2)$,$(9,2\cdot 5)$	$n=11,12$ $(9,2\cdot 5)$,$(11,2\cdot 61)$	
r_5 : $(j,c(j))$	$n=9,10,11$ $(8,5)$, $(7,5\cdot 311)$, $(9,5\cdot 11)$	$n=12$ $(8,5)$, $(12,5)$	$n=13$ $(9,5\cdot 11)$, $(12,5)$
$(j,c(j))$	$n=14,15,16$ $(12,5)$, $(14,5\cdot 3011)$, $(13,5\cdot 11^2\cdot 41)$	$n=17,18$ $(16,5)$, $(14,5\cdot 3011)$, $(17,5\cdot 11\cdot 31\cdot 41)$	$n=19,20$ $(16,5)$, $(18,5\cdot 31)$, $(19,5\cdot 11\cdot 2251)$
$(j,c(j))$	$n=21,22$ $(21,5\cdot 11^2)$, $(18,5\cdot 31)$, $(19,5\cdot 11\cdot 2251)$		
r_6 : $(j,c(j))$	$n=9$ $(8,3)$, $(5,3\cdot 31)$	$n=10$ $(8,3)$, $(5,3\cdot 31)$, $(10,3\cdot 7)$	$11\leq n\leq 13$ $(8,3)$, $(10,3\cdot 7)$, $(11,3\cdot 7\cdot 19)$
r_7 : $(j,c(j))$	$9\leq n\leq 12$ $(8,7)$, $(6,7\cdot 127)$, $(9,7\cdot 43)$	$n=13,14$ $(8,7)$, $(12,7)$	$15\leq n\leq 18$ $(12,7)$, $(15,2\cdot 7)$
$(j,c(j))$	$19\leq n\leq 21$ $(15,2\cdot 7)$, $(16,7)$	$22\leq n\leq 24$ $(18,7\cdot 127)$, $(20,7\cdot 43\cdot 197)$, $(19,7\cdot 1723\cdot 3529)$	$n=25,26$ $(24,7)$, $(20,7\cdot 43\cdot 197)$, $(23,7\cdot 16968421)$
r_8 : $(j,c(j))$	$9\leq n\leq 10$ $(5,2\cdot 97)$, $(6,2\cdot 17)$, $(7,2\cdot 1201)$	$11\leq n\leq 16$ $(9,2\cdot 17)$, $(10,2\cdot 97)$, $(11,2\cdot 3\cdot 569)$	$17\leq n\leq 19$ $(12,2)$, $(15,2)$
$(j,c(j))$	$20\leq n\leq 22$ $(15,2)$, $(18,2\cdot 17)$, $(19,2\cdot 41\cdot 1289)$	$23\leq n\leq 26$ $(21,2\cdot 5^2)$, $(22,2\cdot 3\cdot 569)$, $(23,2\cdot 139921)$	
r_9 : $(j,c(j))$	$9\leq n\leq 12$ $(8,3)$, $(6,3\cdot 73)$, $(7,3\cdot 109\cdot 127)$	$13\leq n\leq 19$ $(12,3)$, $(11,3\cdot 333667)$, $(13,3\cdot 440677)$	$20\leq n\leq 23$ $(15,3)$, $(16,3)$
$(j,c(j))$	$24\leq n\leq 26$ $(20,3\cdot 4051)$, $(21,3\cdot 9811)$, $(24,3)$		
r_{10} : $(j,c(j))$	$10\leq n\leq 14$ $(8,5)$, $(9,5\cdot 31)$, $(7,5\cdot 3011)$	$15\leq n\leq 21$ $(12,5)$, $(15,5)$	$22\leq n\leq 24$ $(15,5)$, $(16,5)$
$(j,c(j))$	$n=25,26$ $(18,5\cdot 11)$, $(24,5)$, $(23,5\cdot 71\cdot 3301)$		

Окончание таблицы 3

$r_{10}:$	$10 \le n \le 14$	$15 \le n \le 21$	$22 \le n \le 24$
$(j, c(j))$	$(8,5)$, $(9, 5\cdot 31)$, $(7, 5\cdot 3011)$	$(12,5)$, $(15,5)$	$(15,5)$, $(16,5)$
	$n = 25, 26$		
$(j, c(j))$	$(18, 5\cdot 11)$ $(24,5)$, $(23, 5\cdot 71\cdot 3301)$		
$r_{11}:$	$11 \le n \le 16$	$17 \le n \le 22$	$23 \le n \le 24$
$(j, c(j))$	$(8,11)$, $(9, 11\cdot 683)$, $(10, 11\cdot 23\cdot 199\cdot 463)$	$(12,11)$, $(16,11)$	$(16,11)$, $(18, 11\cdot 23\cdot 89)$, $(14, 11\cdot 353\cdot 361219)$
	$n = 25, 26$		
$(j, c(j))$	$(16,11)$, $(24,11)$		
$r_{12}:$	$12 \le n \le 16$	$17 \le n \le 26$	
$(j, c(j))$	$(8,3)$, $(9, 2\cdot 5)$	$(15,3)$, $(16,3)$	
r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{17}	$13 \le n \le 19$	$20 \le n \le 24$	$n = 25, 26$
$(j, c(j))$	$(8,*)$, $(12,*)$	$(12,*)$, $(16,*)$	$(16,*)$, $(24,*)$
$r_{16}:$	$16 \le n \le 21$	$22 \le n \le 26$	
$(j, c(j))$	$(12,2), (15, 2\cdot 17)$, $(10, 2\cdot 7\cdot 353)$	$(15, 2\cdot 17), (20, 2\cdot 97)$, $(18, 2\cdot 257)$	
r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, : r_{22}, r_{23}, r_{25}, r_{26}	$18 \le n \le 26$		
$(j, c(j))$	$(12,*)$, $(16,*)$		
r_{24}	$24 \le n \le 26$		
$(j, c(j))$	$(15,5)$, $(16,3)$		

для $u(x) := -x^4 - x + 1$ и $v(x) := x^4 + x^3 + x^2 + x$, а во втором случае

$$u(x)\Phi_7(x) + v(x)\left(\frac{1}{3}\Phi_9(x) - 1\right) = 1$$

для

$$u(x) := \frac{1}{7\cdot 43}(-38x^5 - 31x^4 + 46x^3 - 48x^2 - 55x + 169)$$

и

$$v(x) := \frac{1}{7\cdot 43}(114x^5 + 207x^4 + 69x^3 + 99x^2 + 171x - 198).$$

Следовательно, если r_7 делит $k_9(\varepsilon q) - 1$, то r_7 делит $7\cdot 43$ и поэтому $r_7 = 43$. Приходим к противоречию, поскольку r_7 не может быть равно одновременно 127 и 43. Информация, которую можно использовать для воспроизведения этого рассуждения, представлена в табл. 3: добавляем пары $(8, 7)$, $(6, 7\cdot 127)$ и $(9, 7\cdot 43)$ в ячейку, соответствующую $i = 7$ и $9 \le n \le 12$. Другие случаи проверяются аналогично. Явные значения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ для всех случаев записаны в отдельных файлах для каждого i [27]. Как упоминалось выше, эти многочлены можно найти с помощью расширенного алгоритма Евклида. Заметим, что мы используем те же j_1 и j_2, если $i \in \{13, 14, 15, 17\}$, а также если $i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26\}$. Поэтому пишем $*$ вместо $c(j_1)$ и $c(j_2)$ в соответствующих ячейках таблицы. Это означает, что $c(j_1)$ и $c(j_2)$ зависят от i, но всегда имеем $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$.

Случаи $i = 4, 5$ рассматриваются аналогично с той лишь разницей, что некоторые пересечения множеств непусты, поэтому простые числа из этих пересечений дают возможные исключения. Рассмотрим в качестве примера случай $i = 4$ и $n = 9, 10$. Мы используем коклику $\{r_4, r_7(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q)\}$ из $GK(L)$. Заметим, что $k_7(\varepsilon q) - 1$ равно либо $\Phi_7(\varepsilon q) - 1$, если $d(7) = 1$, либо $\frac{1}{7}\Phi_7(\varepsilon q) - 1$, если $d(7) = 7$. Легко проверить, что если $u(x) = \frac{1}{2}(x^5 + 2x^4 + x^3 + x + 2)$ и $v(x) = \frac{1}{2}(-x - 1)$ или $u(x) = \frac{1}{50}(x^5 + 8x^4 + 7x^3 + x + 8)$ и $v(x) := \frac{1}{50}(-7x - 49)$ соответственно, то

$$u(x)\Phi_4(x) + v(x)\left(\frac{1}{7}\Phi_7(x) - 1\right) = 1.$$

Следовательно, можно взять $c(7) = 50$. Аналогично получаем, что $c(9) = 10$. Это означает, что $r_4 \in \{\pi(50) \cup \pi(10)\} \cap R_4(\varepsilon q) \subseteq \{5\}$. Таким образом, можно гарантировать лишь невозможность случаев $r_4 \neq 5$.

Наконец, рассмотрим случай $i = 6$. По предположению $9 \leq n \leq 13$. Пусть сначала $n = 9$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$ и $j_2 = 5$. Если $(q - \varepsilon 1, 5) = 1$, то $d(5) = 1$ и видим, что $c(8) = c(5) = 3$, и, следовательно, $r \in \{3\} \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$. Таким образом, $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$. Тогда $c(5) = 3 \cdot 31$, и тем самым $r \in \{3, 31\} \cap R_6(\varepsilon q) \subseteq \{31\}$. Значит, r может быть равно только 31. Согласно табл. 2 $\{r_5(\varepsilon q), r_6(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q), r_8(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Из леммы 3.1 следует, что $r_5(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q), r_8(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q) \in \pi(S)$. Предположим, что $v \in R_8(\varepsilon q)$. Если $k_6(\varepsilon q) = 31^m$, где m — положительное целое число, то из леммы 2.12 следует, что $m = 1$ и $\varepsilon q = 5$; противоречие с $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$. Значит, существует $s \in R_6(\varepsilon q)$ такое, что $s \neq 31$. Мы уже знаем, что $(s, |\overline{G}/S|) = 1$. Лемма 4.1 влечет, что $(s, |K|) = 1$. Это означает, что $s \in \pi(S)$ и поэтому $t(v, S) \geq 5$. С другой стороны, $t(v, S) \leq 4$ согласно лемме 3.5; противоречие. Следовательно, $v \notin R_8(\varepsilon q)$. Значит, существует $r_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$, поскольку в противном случае из леммы 4.2(a) следует, что r делит $k_8(\varepsilon q) - 1 = \frac{1}{2}(q^4 - 1)$, поэтому $i \neq 6$.

Предположим, что $n = 10$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$, $j_2 = 5$ и $j_3 = 10$. Легко видеть, что $\{r, r_8(\varepsilon q), r_5(\varepsilon q)\}$ и $\{r, r_8(\varepsilon q), r_{10}(\varepsilon q)\}$ — коклики в $GK(L)$. Поскольку $c(8) = 3$, $c(5) = 3 \cdot 31$ и $c(10) = 3 \cdot 7$, получаем, что $r \in \pi(3 \cdot 31) \cap \pi(3 \cdot 7) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$; противоречие.

Предположим, что $11 \leq n \leq 13$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$, $j_2 = 10$ и $j_3 = 11$. Легко видеть, что $\{r, r_8(\varepsilon q), r_{10}(\varepsilon q), r_{11}(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Заметим, что $c(8) = 3$. Если $(q + \varepsilon 1, 5) = 1$, то $d(10) = 1$ и $c(10) = 1$, поэтому $r \in \pi(3) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$; противоречие. Следовательно, $(q + \varepsilon 1, 5) = 5$ и $c(10) = 3 \cdot 7$. Аналогично если $(q - \varepsilon 1, 11) = 1$, то $d(11) = 1$ и $c(11) = 3$, поэтому $r \in \pi(3) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$. Следовательно, $(q - \varepsilon 1, 11) = 11$ и $c(11) = 3 \cdot 7 \cdot 19$. Тогда $r \in \pi(3 \cdot 7) \cap \pi(3 \cdot 7 \cdot 19) \cap R_6(\varepsilon q) \subseteq \{7\}$. Это означает, что $r = 7$, как и было заявлено. Заметим, что $v \notin R_8(q)$, поскольку в противном случае лемма 3.1 влечет, что $t(v, S) \geq t(L) - 1 = 5$, а это неравенство противоречит лемме 3.5. Как и выше, видим, что из леммы 4.2(a) следует существование $r_8(\varepsilon q)$ такого, что $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 4.4. *Предположим, что L — симплектическая или ортогональная группа. Если $r_i = r_i(q) \in \pi(\overline{G}/S)$ и $3 \le \eta(i) \le n$, то выполняется одно из следующих утверждений.*

(а) $\eta(i) = 3$ *и* $n \ge 8$*;*

(б) $i = 8$ *и* $n \ge 11$.

Доказательство. В случае симплектических и ортогональных групп рассуждаем аналогично доказательству предложения 4.3, в частности, используем те же обозначения для чисел $c(j)$ и $d(j)$, определяемых целым числом j. Для каждой пары (i, n) в табл. 4 приведены либо две пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$ и $(j_2, c(j_2))$ такие, что $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$, либо три пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$, $(j_2, c(j_2))$ и $(j_3, c(j_3))$ такие, что $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ и $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap \pi(c(j_1)c(j_3)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$. Если $n > 5$, то используются j_1, j_2, j_3 такие, что $\eta(j_1), \eta(j_2), \eta(j_3) < n$, это гарантирует, что $r_i \in \pi(L)$ для всех ортогональных и симплектических групп L с $\operatorname{prk} L = n$. Если $n = 5$, то иногда выбираем $j_2 = 5$ и $j_3 = 10$. Это возможно, поскольку $\operatorname{prk} L = 5$ и $t(L) \ge 5$ влечет, что $L \in \{O_{11}(q), S_{10}(q)\}$ согласно табл. 2, поэтому $r_5(q), r_{10}(q) \in \pi(L)$. Для проверки несмежности двух простых чисел в $GK(L)$ можно воспользоваться леммой 3.2. Если $i = 3$ или $i = 6$, то рассматриваются только случаи $5 \le n \le 7$, если $i = 8$, то рассматриваются только случаи $5 \le n \le 10$. Для других значений i ограничений на n нет.

Имеется следующее отличие от случая линейных и унитарных групп. Предположим, что i делится на 4, j — степень нечетного простого числа s, и

$$u(x)\Phi_i(x) + v(x)(\Phi_j(x) - 1) = 1$$

для многочленов $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Из определения круговых многочленов следует, что $\Phi_i(\varepsilon q) = \Phi_i(-\varepsilon q)$ и $\Phi_j(\varepsilon q) = \Phi_{2j}(-\varepsilon q)$. С другой стороны,

$$k_j(\varepsilon q) = \frac{\Phi_j(\varepsilon q)}{(\varepsilon q - 1, s)}$$

и

$$k_{2j}(\varepsilon q) = \frac{\Phi_{2j}(\varepsilon q)}{(\varepsilon q + 1, s)} = \frac{\Phi_j(-\varepsilon q)}{(\varepsilon q + 1, s)}.$$

Очевидно, $(\varepsilon q - 1, s) = 1$ или $(\varepsilon q + 1, s) = 1$. В зависимости от этого мы выбираем j или $2j$ соответственно и записываем $(j^*, c(j))$ в табл. 4. Это позволяет считать, что $d(j) = 1$. Аналогично рассматриваем i и $2i$ одновременно, если i нечетно. Действительно, если есть равенство

$$u(x)\Phi_i(x) + v(x)\left(\frac{1}{d(j)}\Phi_j(x) - 1\right) = c(j),$$

то оно выполняется как для q, так и для $-q$, т. е. для $r_i(q)$ и $r_i(-q) \in R_{2i}(q)$. Это означает, что если мы записываем пару $(j, c(j))$, то используем $r_j(q)$ для $r_i(q)$ и $r_j(-q)$ для $r_{2i}(q)$.

Наконец, если $i \in \{20, 32, 11, 22, 13, 26, 15, 30, 17, 34\}$, то используем одинаковые числа j_1 и j_2, поэтому значения $c(j_1)$ и $c(j_2)$ не указываются. Это означает, что в каждом случае $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(q) = \varnothing$, что гарантирует противоречие с существованием r. Явные многочлены $u(x)$ и $v(x)$ для всех случаев записаны в отдельные файлы для каждого i [27]. $\square$

Таблица 4. Индексы для симплектических и ортогональных групп

r_3, r_6 : $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(8, 3)$, $(5, 3 \cdot 7)$, $(10, 3 \cdot 31)$	$n = 7$ $(12, 3)$, $(5, 3 \cdot 7)$, $(10, 3 \cdot 31)$	
r_8 : $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(3^*, 2)$, $(5^*, 2)$	$n = 7, 8$ $(12, 2)$, $(5^*, 2)$	$n = 9$ $(12, 2)$, $(7^*, 2)$
$(j, c(j))$	$n = 10$ $(7^*, 2)$, $(9^*, 2)$		
r_5, r_{10} : $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(8, 5)$, $(3, 5 \cdot 11)$, $(6, 5 \cdot 31)$	$n = 7, 8$ $(8, 5)$, $(12, 5)$	$n = 9, 10$ $(12, 5)$, $(16, 5)$
$(j, c(j))$	$n = 11, 12$ $(16, 5)$, $(9, 5 \cdot 11)$, $(18, 5 \cdot 31)$	$n = 13$ $(24, 5)$, $(9, 5 \cdot 11)$, $(18, 5 \cdot 31)$	$n = 14$ $(24, 5)$, $(20, 5 \cdot 421)$, $(13, 5 \cdot 11^2 \cdot 41)$
$(j, c(j))$	$n = 15, 16$ $(24, 5)$, $(28, 5)$	$n = 17, 18$ $(32, 5)$, $(28, 5)$	
r_{12} $(j, c(j))$	$n = 6, 7, 8$ $(5^*, 3)$, $(8, 3)$	$n = 9, 10, 11, 12$ $(7^*, 2)$, $(16, 3)$	$n = 13, 14, 15, 16$ $(11^*, 1)$, $(24, 3)$
$(j, c(j))$	$n = 17, 18$ $(32, 3)$, $(30, 3)$		
r_7, r_{14} : $(j, c(j))$	$n = 7, 8, 9$ $(8, 7)$, $(12, 7)$	$n = 10, 11, 12$ $(12, 7)$, $(16, 7)$	$n = 13, 14$ $(24, 7)$, $(16, 7)$
$(j, c(j))$	$15 \leq n \leq 18$ $(28, 7)$, $(24, 7)$		
r_{16} $(j, c(j))$	$8 \leq n \leq 12$ $(12, 2)$, $(7^*, 2)$	$n = 13 \leq n \leq 18$ $(24, 2)$, $(11^*, 2)$	
r_9, r_{18} $(j, c(j))$	$9 \leq n \leq 13$ $(12, 3)$, $(16, 3)$	$n = 14 \leq n \leq 16$ $(24, 3)$, $(16, 3)$	$n = 17, 18$ $(32, 3)$, $(24, 3)$
r_{24}, r_{28}, r_{36} $(j, c(j))$	$12 \leq n \leq 18$ $(16, 3 \cdot 7)$, $(11^*, 1)$		
r_{20}, r_{32}, r_{11}, r_{22}, r_{13}, r_{26}, r_{15}, r_{30}, r_{17}, r_{34} $(j, c(j))$	$10 \leq n \leq 13$ $(12, *)$, $(16, *)$	$n = 14 \leq n \leq 17$ $(16, *)$, $(24, *)$	$n = 18$ $(24, *)$, $(28, *)$

Лемма 4.5. *Предположим, что $r \in R_i(q)$, $\varphi(r, L) \geq 4$, если L — линейная или унитарная группа, и $\varphi(r, L) \geq 3$ в противном случае.*

(а) *Если r большое относительно L и делит $|\overline{G}/S|$, то $L = L_n^\varepsilon(q)$, $r \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$.*

(б) *Если r большое относительно L, то существует $s \in R_i(q)$ такое, что $s \notin \pi(\overline{G}/S)$.*

(в) *Если $r \in \pi(S)$, то $t(r, S) \geq t(r, L)$, в частности, $t(S) \geq t(L)$.*

Доказательство. Предположим, что r является большим относительно L и делит $|\overline{G}/S|$. Если $L = L_n^\varepsilon(q)$, то согласно табл. 2 получаем, что $n \geq 9$ и $\varphi(r, L) \geq n/2$. По предложению 4.3 находим, что $\varphi(r, L) = 6$ и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$. Если L — симплектическая или ортогональная группа, то согласно табл. 2 получаем, что $\eta(i) \geq 3$. По предложению 4.4 либо $\eta(i) = 3$ и $n \geq 8$, либо $i = 8$ и $n \geq 11$. Используя табл. 2, находим, что в этих случаях r мало относительно L; противоречие.

Теперь докажем (б). Предположим, что r является большим относительно L. В силу (а) нужно рассмотреть только случаи, когда $L = L_n^\varepsilon(q)$, $\varphi(r, L) = 6$, и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$. Покажем, что существует $s \in R_6(\varepsilon q)$ такое, что $s \neq r$, и, следовательно, $s \notin \pi(\overline{G}/S)$ по предложению 4.3. Предположим противное, что $k_6(\varepsilon q) = r^m$, где $m \geq 1$. Из леммы 2.12 следует, что $(r, m, \varepsilon q) \in \{(7, 1, 5), (7, 1, 3), (7, 3, 19), (31, 1, -5)\}$. С другой стороны, по предложению 4.3(в),(г) верно, что $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 5$, если $r = 31$ и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{11}$, если $r = 7$; противоречие.

Предположим, что $r \in \pi(S)$. Покажем, что $t(r, S) \geq t(r, L)$. Рассмотрим $\{r\}$-коклику ρ в $GK(L)$ размера $t(r, L)$. Мы утверждаем, что каждый элемент из $\rho \setminus \{r\}$ является большим относительно L. Если r большое относительно L, это очевидно. Если $r = p$, то это верно по лемме 3.5(а). Пусть $r \neq p$ мало относительно L. Тогда $\varphi(r, L) < n/2$ по лемме 3.4(а). Заметим, что $p \notin \rho$ по лемме 3.5. Это означает, что если $s \in \rho \setminus \{r\}$, то $\varphi(s, L) > n/2$ по лемме 3.3(б) и, следовательно, s большое относительно L по лемме 3.4(а). Значит, каждый элемент $\rho \setminus \{r\}$ является большим относительно L. Согласно табл. 2 если s является большим относительно L, то $\varphi(s, L) \geq 4$, если L — линейная или унитарная группа, и $\varphi(s, L) \geq 3$ в противном случае. По п. (б) можно предполагать, что каждый элемент $\rho \setminus \{r\}$ не делит $|\overline{G}/S|$. Если $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) = \varnothing$, то $\rho \subseteq \pi(S)$ и поэтому $t(r, S) \geq t(r, L)$, что и требовалось показать.

Остается рассмотреть случай, когда $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 4.1 следует, что $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) = \{v\}$. Поскольку $v \in \pi(S)$, получаем, что $\rho \subseteq \pi(S)$, и, следовательно, $t(r, S) \geq t(r, L)$, как и утверждалось.

Поскольку $t(L) \geq 5$, лемма 3.1 влечет существование $r \in \pi(S)$, которое является большим относительно L. Используя п. (в), получаем, что $t(S) \geq t(r, S) \geq t(r, L) = t(L)$. $\square$

По лемме 4.5 получаем, что $t(S) \geq t(L)$. В дальнейшем будем использовать этот факт, не упоминая лемму.

Лемма 4.6. *Пусть r — простое число, большое относительно S. Если S — линейная или унитарная группа, то $\varphi(r, S) \geq t(L) \geq n/2$ и $r \geq n/2 + 1$. Если S — симплектическая или ортогональная группа, то $\varphi(r, S) \geq (2t(L) - 4)/3 \geq (n - 4)/3$ и $r > n/2$.*

Доказательство. Если S линейная или унитарная, то из леммы 3.4(в) следует, что $\varphi(r, S) \geq t(S) \geq t(L) \geq n/2$. По лемме 3.6 получаем, что $r \geq$

$\varphi(r,S)+1 \geq n/2+1$. Если S симплектическая или ортогональная, то согласно табл. 2 получаем, что $\varphi(r,S) \geq 3$ и тем самым $r \geq 7$ по лемме 3.6. Из леммы 3.4(в) следует, что $\varphi(r,S) \geq (2t(S)-4)/3 \geq (2t(L)-4)/3 \geq (n-4)/3$. Осталось показать, что $r > n/2$. Если $n \leq 13$, то $r \geq 7 > n/2$. Если $n \geq 14$, то лемма 3.6 влечет, что $r \geq 2\varphi(r,S)+1 \geq (2n-5)/3 > n/2$. $\square$

Определение 4.7. Будем говорить, что натуральное число j является J-*индексом* (относительно G), если оно удовлетворяет следующим условиям.

(а) Каждое число $r \in R_j(u)$ является большим относительно S и делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$.

(б) Если $t(S) > t(L)$ и каждая коклика ρ наибольшего размера в $GK(L)$ содержит простое число s такое, что $s \in \pi(S)$ и $\varphi(s,S) \leq m/2$, то $\varphi(r,S) > m/2$ для всех $r \in R_j(u)$.

Следующие три леммы являются аналогами [6, леммы 6.1, 6.2, 6.4] соответственно.

Лемма 4.8. *Существует множество M натуральных чисел размера $t(S)-t(L)$ такое, что каждый элемент из M является J-индексом.*

Доказательство. Можно считать, что $t(S) > t(L)$. Обозначим $t = t(S)$ и $\ell = t(L)$. Рассмотрим коклику $\rho = \{r_{i_1}(u), \ldots, r_{i_t}(u)\}$ размера t в $GK(S)$. Предположим, что существует $\ell+1$ индекс $i \in I = \{i_1, \ldots, i_t\}$ такой, что некоторые числа $r_i \in R_i(u)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Тогда соответствующие $\ell+1$ простых чисел r_i образуют коклику размера $\ell+1$ в $GK(L)$; противоречие. Следовательно, существует подмножество M множества I, содержащее не менее $t-\ell$ элементов и такое, что если $i \in M$, то каждое число $r_i(u) \in R_i(u)$ делит $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Покажем, что множество M можно выбрать так, чтобы каждый его элемент удовлетворял второму условию определения 4.7.

Предположим, что каждая коклика наибольшего размера в $GK(L)$ содержит простое число s с $\varphi(s,S) \leq m/2$. Из леммы 3.3(б) следует, что множество I включает в себя подмножество I' размера не менее $t-1$ такое, что для любого простого числа $r \in R_i(u)$ с $i \in I'$ выполняется неравенство $\varphi(r,S) > m/2$. Если $I' = I$, то можно взять M, как и выше. Поэтому можно считать, что $|I'| = t-1$. Предположим, что существуют ℓ чисел $i \in I'$ с $\widetilde{R}_i(u) = R_i(u) \setminus (\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)) \neq \varnothing$. Тогда множество ρ, состоящее из ℓ простых чисел из различных $\widetilde{R}_i(u)$, образует коклику в $GK(L)$, которая не содержит простого числа s с $\varphi(s,S) \leq m/2$; противоречие. Таким образом, существует подмножество M множества I' такое, что $|M| = t-1-(\ell-1) = t-\ell \geq 1$, и для любого $j \in M$ каждое простое число r из $R_j(u)$ является большим относительно S, делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$ и удовлетворяет условию $\varphi(r,S) > m/2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.9. *Предположим, что j — это J-индекс. Тогда для любого $r \in R_j(u)$ существует большое относительно L простое число s такое, что $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$ и $s \notin \pi(\overline{G}/S)$.*

Доказательство. Обозначим $\ell = t(L)$ и $t = t(S)$. Зафиксируем $r \in R_j(u)$. Пусть $\rho = \{s_1, \ldots, s_\ell\}$ — коклика размера ℓ в $GK(L)$. По леммам 4.1 и 4.5(б) можно считать, что каждое простое число из ρ не делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. Заметим, что $v \notin \rho$, так как $t(L) \geq 5$. Пусть $\tau = -$, если S — унитарная группа, иначе положим $\tau = +$. Обозначим $I = \{e(s,\tau u) \mid s \in \rho\}$. Тогда $j' = e(r,\tau u) \notin I$, поскольку каждый элемент из $R_j(u)$ делит произведение $|\overline{G}/S| \cdot |K|$.

Выберем коклику σ размера t в $GK(S)$, содержащую r, и положим $Y = \{e(w,\tau u) \mid w \in \sigma\}$.

Если $t = \ell$, то ρ также является кокликой наибольшего размера в $GK(S)$. Лемма 3.8 влечет, что $I \cap Y = Y \setminus \{j'\}$. Следовательно, ρ содержит подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что множество $M = \{r\} \cup \rho'$ является кокликой в $GK(S)$. Если r мало относительно L, то M не может быть кокликой в $GK(L)$, поскольку $|M| = \ell$. Следовательно, существует $s \in \rho$ с $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Теперь покажем, что r не может быть большим относительно L. Предположим от противного, что r таково. Тогда из леммы 4.5 следует, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $r \in R_6(\varepsilon q)$ и либо $11 \leq n \leq 12$ и $r = 7$, либо $n = 9$ и $r = 31$. Поскольку $\rho \cup \{r\}$ не является кокликой в $GK(S)$, заключаем, что r смежно с некоторым $s \in \rho$ в $GK(S)$. Согласно табл. 2 верно, что $s \in R_6(\varepsilon q) \cup R_{12}(\varepsilon q)$. Так как $j' \notin I$, получаем, что $e(s, u) \neq j$. Поскольку r и s смежны в $GK(S)$, из леммы 3.3(в) следует, что $\varphi(r, S) \leq m/2$ или $\varphi(s, S) \leq m/2$. По предложению 4.3(в),(г) существует число $r_8(\varepsilon q) \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$. По лемме 3.3(б) получаем, что $rr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$ или $sr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Таким образом, можно считать, что $t > \ell$.

Предположим, что $\varphi(r, S) > m/2$. По лемме 3.3(б) множество ρ содержит подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что $\varphi(s, S) > m/2$ для любого $s \in \rho'$. Поскольку $j' \notin I$, из леммы 3.3(в) следует, что $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(S)$. Если r мало относительно L, то $\{r\} \cup \rho'$ не является кокликой в $GK(L)$, поэтому утверждение леммы в этом случае выполняется. Следовательно, можно считать, что r большое относительно L, и $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(L)$. По лемме 4.5(а) получаем, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $n \leq 12$ и $r \in R_6(\varepsilon q)$. Мы знаем, что $|\{r\} \cup \rho'| = \ell$. Согласно табл. 2 получаем, что $r_8(\varepsilon q) \in \rho'$, поэтому $t(r_8(\varepsilon q), S) > m/2$. Это противоречит предложению 4.3(в),(г).

Пусть теперь $\varphi(r, S) \leq m/2$. Предположим, что r является большим относительно L. Тогда $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $n \leq 12$, $r \in R_6(\varepsilon q)$ и $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$ для хотя бы одного $r_8(\varepsilon q)$. Из леммы 3.3(в) следует, что $rr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Значит, r мало относительно L. По определению J-индекса множество ρ можно выбрать таким образом, что либо $\varphi(s, S) > m/2$ для любого $s \in \rho$, либо некоторое $s \in \rho$ не принадлежит $\pi(S)$. Рассмотрим первый случай. Используя табл. 2, видим, что существует коклика σ' наибольшего размера в $GK(S)$ с $\rho \subseteq \sigma'$. Положим $X = \{e(w, \tau u) \mid w \in \sigma'\}$. Применяя лемму 3.8, получаем, что $Y \cap X \supseteq Y \setminus \{j'\}$. Следовательно, ρ включает подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что $\{r\} \cup \rho'$ является кокликой в $GK(S)$ и не является кокликой в $GK(L)$. Значит, найдется число $s \in \rho'$ такое, что $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Если $s \notin \pi(\overline{G}/S)$, то оно является требуемым числом. Пусть теперь $s \in \pi(\overline{G}/S)$. Тогда $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $s \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $n = 9$, либо $11 \leq n \leq 12$. Более того, существует число $r_8 \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8, S) \leq m/2$. Следовательно, r смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и $r_6(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Используя критерий смежности в $GK(L)$, находим, что если $n = 9$, то $r \in \{p, r_1(\varepsilon q), r_2(\varepsilon q)\}$ и поэтому r смежно с $r_5(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Таким образом, хотя бы одно из чисел $r_5(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ принадлежит ρ' и является требуемым. Аналогично если $n = 11, 12$, то $r \in \{p, r_1, r_2, r_3, r_4\}$, поэтому r смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и $r_8(\varepsilon q)$, хотя бы одно из которых принадлежит ρ'.

Наконец, предположим, что существует коклика ρ в $GK(L)$ размера ℓ такая, что для некоторого $s \in \rho$ верно, что $s \notin \pi(S)$. Из лемм 4.1 и 4.5 получаем, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $s \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $n = 9$, либо $11 \leq n \leq 12$. Более того, существует $r_8 \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8, S) \leq m/2$ по предложению 4.3(в),(г). Поскольку $\varphi(r_8, S) \leq m/2$ и $\varphi(r, S) \leq m/2$, по лемме 3.3(б) получаем $rr_8 \in$

$\omega(S)$. Это означает, что либо $r = p$, либо $\varphi(r, L) \in \{1, 2, 4\}$, если $n = 9$, и $\varphi(r, L) \in \{1, 2, 3, 4\}$, если $n = 11, 12$. По лемме 3.1 находим, что $r \notin R_4(\varepsilon q)$, если $n = 9$, поскольку $\{r_4(\varepsilon q), r_6(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L_9^{\varepsilon}(q))$. Из леммы 4.5 следует, что можно выбрать $r_6 \in R_6(\varepsilon q)$ и $r_7 \in R_7(\varepsilon q)$ таким образом, что $(r_6 r_7, |K| \cdot |\overline{G}/S|) = 1$. Поскольку $\varphi(r_8, S) \le m/2$, из леммы 3.3(б) следует, что $\varphi(r_6, S) > m/2$ и $\varphi(r_7, S) > m/2$. По лемме 3.4(а) получаем, что r_6 и r_7 являются большими относительно S. Используя [23, табл. 4] и лемму 3.2, получаем, что r смежно как с r_6, так и с r_7 в $GK(L)$. Если $rr_7, rr_6 \in \omega(S)$, то из леммы 3.8 следует, что $e(r_6, \tau u), e(r_7, \tau u) \in J(S) \setminus E(S)$ и, следовательно, r_6 и r_7 смежны в $GK(S)$; противоречие. Значит, $rr_7 \in \omega(L) \setminus \omega(S)$ или $rr_6 \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.10. *Предположим, что $r \in R_j(u)$, где j — это J-индекс. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) *$k_j(u)$ делит $(q^2 - 1)\log_v u$,*

(б) *$k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)\log_v u$, и p делит $k_j(u)$ и $\log_v u$,*

(в) *$k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)$, при этом $p < 31$.*

Доказательство. Положим $(k_j(u))_{\{r\}} = r^{\gamma}$. Поскольку r является большим относительно S, находим, что $r \ge 5$ и $r \ne v$. Применяя лемму 2.5, получаем, что $r^{\gamma} = \exp_r(S)$.

Предположим, что r делит $|K|$. Поскольку $r \ne v$, из леммы 4.1 следует, что r делит $p(q^2 - 1)$ и $t(r, L) = 2$. Равенство $t(r, L) = 2$ влечет, что r мало относительно L. По [6, лемма 2.10(б)] существует $s \in \pi(L) \setminus \{r, p\}$ такое, что s и r не смежны в $GK(L)$. Используя леммы 3.4(а) и 3.3(б), получаем, что s большое относительно L. По лемме 4.5(б),(в) можно считать, что $s \in \pi(S)$ и $t(s, S) \ge 5$. Следовательно, $s \ne v$ по лемме 3.5. Теперь [22 лемма 2.16] влечет, что s не делит порядки собственных параболических подгрупп группы S. По лемме 3.11 существует собственная параболическая подгруппа P группы S такая, что $r^{\gamma} \in \omega(P)$. Если R — силовская r-подгруппа группы K (напомним, что K нильпотентна), то S действует на $R/\Phi(R)$ сопряжением. Это действие должно быть точным, поскольку r и s несмежны. Более того, поскольку r большое относительно S, имеем $(r, 6u(u^2 - 1)) = 1$. Применяя лемму 3.12, получаем $r^{\gamma+1} \in \omega(G) = \omega(L)$.

По лемме 4.6 получаем неравенство $r > n/2$. Предположим, что $r = p$. Поскольку $t(p, L) = 2$, из леммы 3.5 следует, что $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где n — четное число. По предположению $t(L) \le 13$ и $n \ne 16$, поэтому $n \le 14$ согласно табл. 2. Мы знаем, что $p^2 \in \omega(L)$, поэтому $p < 29$ по лемме 2.13. Поскольку $n^2/4 > 2n - 1$ при $n \ge 8$ и $5^2 > 2 \cdot 8 - 1$, то $p^2 > 2n - 1$. Из леммы 2.13 следует, что $\exp_p(L)$ не превосходит p^2. Тогда $p^2 \ge p^{\gamma+1}$, откуда $k_j(u)_{\{p\}} \le p$. Следовательно, $k_j(u)_{\{r\}}$ делит p в этом случае. Предположим, что r делит $(q^2 - 1)$, и положим $(q^2 - 1)_{\{r\}} = r^{\delta}$. Используя неравенство $r > n/2$ и лемму 2.5, получаем, что $\exp_r(L)$ не превосходит $r^{\delta+1}$. Следовательно, $r^{\delta+1} \ge r^{\gamma+1}$. Таким образом, для любого $j \in J$ и любого $r \in R_j(u) \cap \pi(K)$ число $(k_j(u))_{\{r\}}$ делит $p(q^2 - 1)$, а если $p \in R_j(u)$, то $p < 31$.

Предположим теперь, что r не делит $|K|$. Тогда $|\overline{G}/S|_{\{r\}} = r^{\kappa} > 1$. Следовательно, $\overline{G}$ содержит подгруппу, изоморфную расширению S посредством автоморфизма τ порядка r^{κ}, где $\kappa \ge 1$. Поскольку r нечетно и взаимно просто с $|\operatorname{Inndiag}(S)/S|$, можно считать, что τ — полевой автоморфизм. Если $u = v^{\beta}$ и $\beta = r^{\mu} \cdot l$, где $(r, l) = 1$, то $\mu \ge \kappa \ge 1$. Если r не делит $v^{lj} - 1$, то r не делит

$v^{r^\mu\cdot lj}-1=u^j-1$, что неверно. Следовательно,

$$r^\gamma=(k_j(u))_{\{r\}}=(u^j-1)_{\{r\}}=(v^{r^\mu\cdot lj}-1)_{\{r\}}=r^\mu(v^{lj}-1)_{\{r\}}>r^\kappa$$

по лемме 2.5. Кроме того, r^γ — это наибольшая степень числа r, лежащая в $\omega(S)$. В силу [6, лемма 3.10] получаем, что r^γ равно $\exp_r(\overline{G})$, значит, и $\exp_r(G)$. Если $r\neq p$ и $k=e(r,q)\geq 3$, то неравенство $r>n/2$ влечет, что $(q^k-1)_{\{r\}}$ равно $\exp_r(L)$. По лемме 4.9 существует большое относительно L простое число s такое, что $rs\in\omega(L)\setminus\omega(S)$ и $s\notin\pi(\overline{G}/S)$. Лемма 4.1 влечет, что $s\notin\pi(K)$. Из леммы 3.10 следует, что $r^\gamma s\in\omega(L)$. Поскольку $(rs,|K|)=1$, группа $\overline{G}$ содержит элемент x порядка $r^\gamma s$. Тогда элемент $y=x^{r^\kappa}$ имеет порядок $r^{\gamma-\kappa}s$ и принадлежит S, что невозможно, поскольку $\gamma>\kappa$. Таким образом, r делит $p(q^2-1)$.

Если r делит q^2-1, то снова неравенство $r>n/2$ и лемма 2.5 влекут, что $r^\gamma\leq r(q^2-1)_{\{r\}}$. Предположим, что $r=p$, в частности, p делит $\log_v u$. Заметим, что число $\exp_p(L)$ не превосходит p^2, поскольку $p>n/2$ и $r\geq 5$. Поскольку произведение различных простых чисел из $R_j(u)$, делящих $|\overline{G}/S|$, делит число $\log_v u$, получаем, что $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)\log_v u$. $\square$

Лемма 4.11. *Пусть $d=t(S)-t(L)$ и $d>0$. Предположим, что $t(S)\geq 7$, и S содержит элемент порядка, большего q^α, где $\alpha>2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) $u^{3d}<q^2$,

(б) $d<\frac{4t(L)}{3(\alpha-2)}$.

Доказательство. По лемме 4.8 существует множество M натуральных чисел такое, что $|M|=d$ и каждый элемент M является J-индексом. Поскольку $t(S)\geq 7$, находим, что $\varphi(j)\geq 4$ для каждого $j\in J$ согласно табл. 2. В силу лемм 4.10 и 2.10 получаем, что $u^{3d}<q^2$.

Из леммы 3.7 следует неравенство $q^\alpha<\frac{u}{u-1}u^m\leq u^{m+1}$. Это означает, что $u^{(3\alpha d)/2}<u^{m+1}$. Предположим, что $\alpha\geq 2+\frac{4t(L)}{3d}$. Тогда $u^{3d+2t(L)}<u^{m+1}$. Следовательно, $m\geq 3d+2t(L)=d+2t(S)$ и поэтому $t(S)\leq(m-1)/2$. Согласно табл. 2 получаем, что $t(S)\geq\frac{m}{2}$, если S — линейная или унитарная группа, и $t(S)\geq\frac{3m-2}{4}>\frac{m-1}{2}$, если S — симплектическая или ортогональная группа; противоречие. Таким образом, $\alpha<2+\frac{4t(L)}{3d}$ и тем самым $d<\frac{4t(L)}{3(\alpha-2)}$. $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $d=t(S)-t(L)$. Напомним, что $d\geq 0$. Можно считать, что $d\geq 1$, иначе доказывать нечего.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа и $t(L)\geq 6$. Пусть j — наибольшее простое число, меньшее или равное n. Легко видеть, что $j>n/2$ и, следовательно, $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L согласно табл. 2. По предложению 4.3 и лемме 4.1 получаем, что $k_j(\varepsilon q)\in\omega(S)$. По лемме 2.6 $k_j(\varepsilon q)>q^{j-2}$. Следовательно, по лемме 4.11 получаем, что $d<\frac{4t(L)}{3(j-4)}$, если $t(S)\geq 7$. Если $23\leq n\leq 26$, то $t(L)\leq 13$ и $j\geq 23$, поэтому $d<\frac{18}{19}<1$. Если $19\leq n\leq 22$, то $t(L)\leq 11$ и $j\geq 19$, поэтому $d<\frac{14.7}{15}<1$. Аналогично если $17\leq n\leq 18$, то $t(L)\leq 9$ и $j=17$, стало быть, $d<\frac{12}{13}<1$. Пусть теперь $13\leq n\leq 16$. Тогда $t(L)\leq 8$ и $j=13$, поэтому $d<\frac{11}{9}<2$. Если $11\leq n\leq 12$, то $t(L)=6$, $t(S)\geq 7$ и $j=11$, следовательно, $d<\frac{8}{7}<2$. Осталось рассмотреть случай $d=1$, если $6\leq t(L)\leq 8$. В этом случае из лемм 4.10 и 2.9 следует, что $2u^3<q^2$.

Как и выше, возьмем наибольшее простое число j, меньшее или равное n. Используя равенство (1), находим, что $k_j(\varepsilon q) \geq \frac{q-1}{qj}q^{j-1}$. Из леммы 3.7 следует, что $q^{j-1} < j\frac{q}{q-1}\frac{u}{u-1}u^{\operatorname{prk} S}$. Поскольку $q \geq 3$ и $u \geq 2$, получаем неравенство $q^{j-1} < 3ju^{\operatorname{prk} S}$. Если $t(L) = 8$, то $j = 13$ и $\operatorname{prk} S \leq 18$, поэтому $q^{12} < 39u^{18}$; противоречие с $2u^3 < q^2$. Если $t(L) = 7$, то $j = 13$ и $\operatorname{prk} S \leq 16$, поэтому $q^{12} < 39u^{16}$; противоречие с $2u^3 < q^2$. Наконец, если $t(L) = 6$, то $j = 11$ и $\operatorname{prk} S \leq 14$, значит, $q^{10} < 33u^{14}$; противоречие с $2u^3 < q^2$.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа и $t(L) = 5$. Тогда $9 \leq n \leq 10$. Согласно табл. 2 видим, что $r_9(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ большие относительно S. Из предложения 4.3 и леммы 4.1 следует, что $k_9(\varepsilon q), k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$. По лемме 2.7 находим, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{5.5}$. Предположим, что $d \geq 2$, поэтому $t(S) \geq 7$. Тогда из леммы 4.11 следует, что $d < \frac{6.7}{3.5} < 2$; противоречие. Значит, в этом случае $d \leq 1$. Это завершает рассмотрение случая линейных и унитарных групп.

Предположим, что L — симплектическая или ортогональная группа. Пусть сначала $11 \leq t(L) \leq 13$. Согласно табл. 2 видим, что $k_{13}(q) \in \omega(L)$. По лемме 2.6 $k_{13}(q) > q^{11}$. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^{11}. Используя лемму 4.11, получаем, что $d < \frac{17.4}{9} < 2$. Если $9 \leq t(L) \leq 10$, то $k_{11}(q) \in \omega(L)$ или $k_{11}(-q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. По лемме 2.6 оба этих числа больше q^9. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^9. По лемме 4.11 верно неравенство $d < \frac{13.4}{7} < 2$. Если $7 \leq t(L) \leq 8$, то $k_{16}(q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. Заметим, что $k_{16}(q) = \frac{1}{2}(q^8+1) > q^{7.35}$, поскольку $3^{0.65} > 2$. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{7.35}$. Используя лемму 4.11, получаем, что $d < \frac{10.7}{5.35} = 2$. Предположим, что $t(L) = 6$. Тогда $k_7(q) \in \omega(L)$ или $k_{14}(q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. Используя лемму 2.6, получаем, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^5. Из леммы 4.11 следует, что $d < \frac{8}{3} < 3$. Предположим, что $t(L) = 5$. Тогда $k_8(q) \in \omega(L)$. Заметим, что $k_8(q) = (q^4+1)/2 > q^{3.35}$. Это означает, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{3.35}$. Из леммы 4.11 вытекает, что $d < \frac{6.7}{1.35} < 5$. Предположим, что $d = 4$. Тогда по лемме 4.11 $u^{12} < q^2$. Поскольку $k_8(q) \in \omega(S)$, лемма 3.7 влечет, что $(u^{24}+1)/2 < (q^4+1)/2 = k_8(q) \leq 2u^{\operatorname{prk} S}$. Согласно табл. 2 получаем, что $\operatorname{prk} S \leq 18$. Следовательно, верно неравенство $u^{24}+1 < 4u^{18}$; противоречие. Предположим, что $d = 3$. Тогда $u^9 < q^2$ по лемме 4.11. Поскольку $k_8(q) \in \omega(S)$, лемма 3.7 влечет, что $(u^{18}+1)/2 < (q^4+1)/2 = k_8(q) \leq 2u^{\operatorname{prk} S}$. Согласно табл. 2 имеем $\operatorname{prk} S \leq 16$. Следовательно, приходим к неравенству $u^{18}+1 < 4u^{16}$; противоречие с $u \geq 2$. Значит, в этом случае имеем $d \leq 2$. Это завершает рассмотрение случая ортогональных и симплектических групп. $\square$

5. Доказательство теоремы 2

В этом разделе докажем теорему 2. Предположим, что L изоморфна $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где q нечетно и $12 \leq n \leq 26$. Это означает, что $6 \leq t(L) \leq 13$. Если G — группа, изоспектральная L, то, как и в предыдущем разделе, получаем, что существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. Предположим, что S — простая классическая группа над полем порядка u, взаимно простого с q. В силу теоремы 3 будет $0 \leq t(S) - t(L) \leq 1$. Чтобы использовать множество $J(S)$, положим $\nu = -$, если S — унитарная группа, иначе определим $\nu = +$. Фиксируем эти обозначения и ограничения на протяжении этого раздела. Отметим, что ограничения в этом разделе строже, чем в предыдущем, поэтому мы можем использовать все результаты § 4. По [5, теорема 1] можно считать, что n не является простым числом.

Лемма 5.1. *Предположим, что $t(L) = t(S)$.*

(а) *Если $(n, i) \neq (12, 6)$ и $r_i(\varepsilon q)$ лежит в $\pi(S)$ и большое относительно L, то $r_i(\varepsilon q)$ большое относительно S, и либо $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_j(u)$ для некоторого целого числа j, либо $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_{j_1}(\nu u)k_{j_2}(\nu u)$, где $j_1, j_2 \in J(S) \setminus E(S)$.*

(б) *Если не существует J-индексов относительно G и L, то $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$.*

Доказательство. Предположим, что $(n, i) \neq (12, 6)$ и $r_i(\varepsilon q)$ большое относительно L. По леммам 4.5 и 4.1 получаем, что каждый элемент $r_i(\varepsilon q)$ взаимно прост с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$ и $t(r_i(\varepsilon q), S) \geq t(r_i(\varepsilon q), L) = t(S)$. Следовательно, $r_i(\varepsilon q)$ является большим относительно S. Поскольку любые два элемента из $R_i(\varepsilon q)$ смежны в $GK(S)$ и большие относительно S, то либо существует целое число j такое, что $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_j(u)$, либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq \bigcup\limits_{j \in J(S) \setminus E(S)} R_j(\nu u)$. В первом случае получаем, что $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_j(u)$. Во втором случае предположим, что существуют три различных целых числа $j_1, j_2, j_3 \in J(S) \setminus E(S)$ такие, что некоторые $r_{j_1}(\nu u)$, $r_{j_2}(\nu u)$, $r_{j_3}(\nu u)$ принадлежат $R_i(\varepsilon q)$. Тогда $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u)$ делит $k_i(\varepsilon q)$ и, следовательно, $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \in \omega(S)$. Используя табл. 2, видим, что либо $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u)\}$, где $m \equiv 3 \pmod 4$ и $\{j_1, j_2, j_3\} = \{\frac{m-1}{2}, m-1, m+1\}$, либо $S = O^-_{2m}(u)$, где $m \equiv 2 \pmod 4$ и $\{j_1, j_2, j_3\} = \{\frac{m}{2}, m-2, m\}$. В обоих случаях находим, что $r_{j_1}(u)r_{j_2}(u)r_{j_3}(u) \notin \omega(S)$ по [28, следствия 2, 3] и [28, следствия 4, 8, 9] соответственно; противоречие. Это означает, что либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_j(\nu u)$, где $j \in J(S) \setminus E(S)$, либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_{j_1}(\nu u) \cup R_{j_2}(\nu u)$, где $j_1, j_2 \in J(S) \setminus E(S)$. Значит, приходим к выводу, что $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_j(\nu u)$ или $k_{j_1}(\nu u)k_{j_2}(\nu u)$ соответственно.

Предположим, что не существует J-индексов и $|J(S) \setminus E(S)| \geq 3$. Из определения 4.7 получаем, что для каждого $j \in J(S)$ существует число $r_j(\nu u) \in R_j(\nu u)$, взаимно простое с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Поскольку $t(L) = t(S)$, получаем, что каждое $r_j(\nu u)$ является большим относительно L. Выберем различные числа $j_1, j_2, j_3 \in J(S) \setminus E(S)$. Как и выше, видим, что $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \notin \omega(S)$. С другой стороны, простые числа $r_{j_1}(\nu u)$, $r_{j_2}(\nu u)$ и $r_{j_3}(\nu u)$ попарно смежны в $GK(S)$ и тем самым попарно смежны в $GK(L)$. Согласно табл. 2 либо существует целое число i такое, что $r_{j_1}(\nu u), r_{j_2}(\nu u), r_{j_2}(\nu u) \in R_i(\varepsilon q)$, либо n четно и $r_{j_1}(\nu u), r_{j_2}(\nu u), r_{j_2}(\nu u) \in R_{n/2}(\varepsilon q) \cup R_n(\varepsilon q)$. Тогда $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u)$ делит $k_i(\varepsilon q)$ или $k_{n/2}(\varepsilon q)k_n(\varepsilon q)$. Заметим, что $k_{n/2}(\varepsilon q)k_n(\varepsilon q) \in \omega(L)$ по лемме 3.10. Следовательно, $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \in \omega(S)$; противоречие. $\square$

Лемма 5.2. *Предположим, что $t(L) = t(S)$ и $S = L^\tau_m(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Тогда $m \geq n$.*

Доказательство. Предположим от противного, что $m < n$. Тогда $n = 2s$ и $m = 2s - 1$ для целого числа $s \geq 6$. Заметим, что $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ смежны в $GK(L)$. Поскольку $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ большие относительно L, в силу лемм 4.5 и 4.1 можно предполагать, что $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|\overline{G}| \cdot |K|$ и большие относительно S. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$, поэтому существует целое число $j > 2$ такое, что $r_s(\varepsilon q)$, $r_{2s}(\varepsilon q) \in R_j(u)$. Положим $r = r_{s-1}(\varepsilon q)$, если $s \neq 7$, и $r = r_5(\varepsilon q)$, если $s = 7$. По лемме 3.9 получаем, что $t(r, L) \geq 5$. По предложению 4.3 можно считать, что r взаимно просто с $|\overline{G}/S|$. Если $r \in \pi(K)$, то из леммы 4.1 следует, что $r = v$. Тогда $t(v, S) \geq 5$ по лемме 3.1; противоречие с леммой 3.5. Значит, можно считать, что r взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$, в частности, $r \in \pi(S)$. По лемме 4.5(г) получаем, что $t(r, S) \geq t(r, L) \geq s - 1 > 2$, поэтому $r \notin \delta(S)$. Тогда r смежно с $r_s(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие. $\square$

Лемма 5.3. *Предположим, что $t(S) = t(L)$ и $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Обозначим $s = [\frac{n-1}{2}]$. Если $t(L) \geq 10$ и $0 \leq i \leq 2$ или $t(L) = 9$ и $0 \leq i \leq 1$, то $R_{s-i}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-i}(\tau u)$.*

Доказательство. Согласно табл. 2 находим, что $t(L) = [\frac{n+1}{2}]$ и, следовательно, $s = t(L) - 1$. Если $t(L) = 9$, то $17 \leq n \leq 18$, поэтому $s \geq 8$ и $s - 1 > 6$, в частности, $s - 1 > \frac{n}{3}$. Аналогично если $t(L) \geq 10$, то $s - 2 > \frac{n}{3} > 6$. С другой стороны, $s < n/2$. Следовательно, $t(r_{s-i}(\varepsilon q), L) = s - i$ во всех случаях по лемме 3.9.

Пусть j — целое число такое, что $n \geq j \geq s-2$, если $t(L) > 9$, и $n \geq j \geq s-1$, если $t(L) = 9$. Мы утверждаем, что каждое число $r_j(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. По предложению 4.3 получаем, что $r_j(\varepsilon q)$ не делит $|\overline{G}/S|$. Предположим, что $r_j(\varepsilon q) \in \pi(K)$. Из леммы 4.1 следует, что $r_j(\varepsilon q) = v$. Используя лемму 4.5, получаем, что $t(v, S) \geq t(v, L) \geq 6$; противоречие с леммой 3.5. Следовательно, $r_j(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$, в частности, $r_j(\varepsilon q) \in \pi(S)$. По лемме 4.5(в) $t(r_j(\varepsilon q), S) \geq t(r_j(\varepsilon q), L)$. Значит, если $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L, то $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно S. Более того, если $t(L) \geq 10$ и $0 \leq i \leq 2$ или $t(L) = 9$ и $0 \leq i \leq 1$, то $t(r_{s-i}(\varepsilon q), S) \geq t(r_{s-i}(\varepsilon q), L) = s - i$.

Предположим, что $i = 0$. Если $t(r_s(\varepsilon q), S) \neq s$, то $t(r_s(\varepsilon q), S) \geq s + 1 = t(S)$ и, следовательно, $r_s(\varepsilon q)$ большое относительно S. Поскольку $2s + 1 \leq n$, лемма 3.2 влечет, что $r_s(\varepsilon q)$ смежно с $r_{s+1}(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Согласно табл. 2 видим, что $r_{s+1}(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и не смежны в $GK(L)$. Следовательно, числа $e(r_s(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{s+1}(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{2s}(\varepsilon q), \tau u)$ попарно различны и принадлежат $J(S) \setminus E(S)$; противоречие, поскольку $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$ по табл. 2. Значит, $t(r_s(\varepsilon q), S) = s$ и поэтому $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ по лемме 3.9. Поскольку это верно для любого $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\varepsilon q)$, получаем, что $R_s(\varepsilon q) \subseteq R_s(\tau u)$.

Предположим, что $i = 1$. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \neq s - 1$, то $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \geq s$. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) = s$, то $r_{s-1}(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ по лемме 3.9. Однако $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$. Поскольку $r_{2s}(\varepsilon q)$ смежно с $r_s(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{s-1}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, приходим к противоречию. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \geq s + 1$, то $r_{s-1}(\varepsilon q)$ большое относительно S. Рассматривая простые числа $r_{s+2}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ и рассуждая, как в предыдущем случае, получаем противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$. Следовательно, для любого $r_{s-1}(\varepsilon q) \in R_{s-1}(\varepsilon q)$ верно, что $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) = s - 1$. Тогда $R_{s-1}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-1}(\tau u)$ по лемме 3.9.

Предположим, что $i = 2$. Тогда $t(L) \geq 10$, поэтому $n \geq 19$ и $s \geq 9$. Если $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \neq s - 2$, то $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \geq s - 1$. Если $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s$ или $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s - 1$, то из леммы 3.9 следует, что $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ или $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_{s-1}(\tau u)$ соответственно. Мы уже знаем, что $R_s(\varepsilon q) \subseteq R_s(\tau u)$, при этом $r_s(\varepsilon q)$ смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, кроме того, $R_{s-1}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-1}(\tau u)$ и $r_{s-1}(\varepsilon q)$ смежно с $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Поскольку $r_{s-2}(\varepsilon q)$ не смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем противоречие. Предположим, что $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \geq s + 1$. Тогда $r_{s-2}(\varepsilon q)$ является большим относительно S. Рассматривая простые числа $r_{s+3}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-4}(\varepsilon q)$, которые являются большими относительно L и смежными с $r_{s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(L)$, получаем противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$, как и выше. Следовательно, для любого $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_{s-2}(\varepsilon q)$ верно, что $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s - 2$.

Тогда $R_{s-2}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-2}(\tau u)$ по лемме 3.9. $\square$

Лемма 5.4. *Если $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$, то*

$$u^{m-1} < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (m, u-\tau 1) q^{n-1},$$

в частности, $u^{m-1} < 3mq^{n-1}$.

Доказательство. По [29, следствие 3] находим, что $\frac{u^m - \tau 1}{(u-\tau 1, m)(u-\tau 1)} \in \omega(S)$. Заметим, что

$$\frac{u^m - \tau 1}{(u-\tau 1, m)(u-\tau 1)} \geq \frac{u^m + 1}{(u-\tau 1, m)(u+1)}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{u^m + 1}{u+1} > \frac{u-1}{u} u^{m-1}.$$

По лемме 3.7 каждый элемент $\omega(L)$ не превосходит $\frac{q}{q-1} q^{n-1}$. Следовательно,

$$\frac{u-1}{(u-\tau 1, m)u} u^{m-1} < \frac{u^m + 1}{(u-\tau 1, m)(u+1)} \leq \frac{q}{q-1} q^{n-1}$$

и поэтому

$$u^{m-1} < \frac{q}{q-1} \frac{u}{u-1} (u-\tau 1, m) q^{n-1}.$$

Поскольку $q \geq 3$ и $u \geq 2$, получаем, что $\frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{2}$ и $\frac{u}{u-1} \leq 2$, следовательно,

$$\frac{q}{q-1} \frac{u}{u-1} m q^{n-1} \leq 3mq^{n-1}. \quad \square$$

Теперь докажем теорему 2, рассматривая несколько случаев в следующих леммах.

Лемма 5.5. *Теорема 2 верна, если $17 \leq n \leq 26$.*

Доказательство. Согласно табл. 2 находим, что $9 \leq t(L) \leq 13$. Из теоремы 3 следует, что $t(S) = t(L)$. Обозначим $m = \operatorname{prk} S$. Разобьем доказательство на несколько случаев в зависимости от значения $t(L)$.

Случай $t(L) = 13$. Тогда $n = 25$ или $n = 26$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = t(L) = 13$, получаем, что $S \in \{O_{33}(u), S_{32}(u), O_{34}^{\pm}(u), O_{36}^{+}(u), O_{32}^{-}(u)\}$ согласно табл. 2.

Предположим, что $S \in \{O_{33}(u), S_{32}(u), O_{32}^{-}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. Теперь покажем, что $q^{17} < u^{12}$. Поскольку $r_{23}(\varepsilon q)$ и $r_{19}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и не смежны в $GK(L)$, из леммы 5.1 следует, что существуют различные натуральные числа i_1 и i_2 такие, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_{i_1}(u)$ и $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_{i_2}(u)$. Поскольку $m = 16$, получаем, что $\eta(i_1), \eta(i_2) \leq 16$. Ясно, что хотя бы одно из чисел i_1 или i_2 не равно 32. Обозначим это число через i. Тогда $\varphi(i) \leq 12$. Из лемм 2.4(г) и 2.6 следует, что

$$\frac{u}{u-1} u^{12} > \Phi_i(u) \geq k_i(u) > \frac{5}{3} q^{17},$$

в частности, $u \geq 3$. Следовательно, $\frac{3}{2} u^{12} > \frac{5}{3} q^{17}$, и поэтому $q^{17} < u^{12}$.

Применяя предложение 2.15 для S и L, находим, что $\frac{2}{21} u^{160} \leq \exp(S) \leq \exp(L) \leq 8990 q^{213}$. Поскольку $q^{17} < u^{12}$, получаем, что $q^{226} < u^{160} < 21 \cdot 8990 q^{213} < 3^{13} q^{213}$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \in \{O^{\pm}_{34}(u), O^{+}_{36}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S)\setminus E(S)$ равно $\{9,16\}$, $\{16,18\}$ или $\{9,18\}$. Поскольку $r_{23}(\varepsilon q)$ является большим относительно L, из леммы 5.1 следует, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$, где i — целое число, $k_9(u)k_{18}(u)$ или $k_9(\tau u)k_{16}(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Заметим, что $\eta(i) \le 18$ и поэтому $\varphi(i) \le 16$. По лемме 2.6 получаем, что $k_{23}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{21}$. Из леммы 2.4(г) следует, что

$$k_i(u) \le \Phi_i(u) < \frac{u}{u-1}u^{\varphi(i)}, \quad k_9(u)k_{18}(u) \le \Phi_9(u)\Phi_{18}(u) < 4u^{12}$$

и

$$k_9(\tau u)k_{16}(u) \le \Phi_9(\tau u)\Phi_{16}(u) < 4u^{14}.$$

Следовательно,

$$\frac{5}{3}q^{21} < k_{23}(\varepsilon q) < \frac{3}{2}u^{16} < \frac{5}{3}u^{16}$$

и поэтому $q^{21} < u^{16}$. Применяя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{21}u^{176} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 8990q^{213}$. Поскольку $q^{21} < u^{16}$, получаем, что $q^{231} < u^{176} < 21 \cdot 8990q^{213}$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \simeq L^{\tau}_m(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 13$, находим, что $25 \le m \le 26$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_{12}(\varepsilon q) \subseteq R_{12}(\tau u)$. Значит, $k_{12}(\varepsilon q)$ делит $k_{12}(\tau u)$. Из равенства (1) следует, что $k_{12}(\varepsilon q) = q^4 - q^2 + 1$ и $k_{12}(\tau u) = u^4 - u^2 + 1$. Поскольку $q \ne u$, то $k_{12}(\varepsilon q) \ne k_{12}(\tau u)$. Каждый простой делитель числа $k_{12}(\tau u)$ не меньше 13, поэтому $13k_{12}(\varepsilon q) \le k_{12}(\tau u)$. Отсюда следует, что

$$\frac{13}{2}q^4 < 13k_{12}(\varepsilon q) \le k_{12}(\tau u) < u^4.$$

По лемме 5.4 получаем, что $78q^{n-1} > u^{m-1} \ge u^{n-1}$; противоречие с неравенством $u^4 > 6q^4$.

Случай $t(L) = 12$. Тогда $n = 23$ или $n = 24$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 12$, то $S \in \{O_{31}(u), S_{30}(u), O^{\pm}_{30}(u), O^{+}_{32}(u)\}$.

Предположим, что $S \in \{O_{31}(u), S_{30}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $|J(S)\setminus E(S)| = 3$; противоречие с леммой 5.1.

Предположим, что $S \in \{O^{+}_{30}(u), O^{-}_{30}(u), O^{+}_{32}(u)\}$. Согласно табл. 2 верно, что $J(S) = E(S)$. Из леммы 5.1 следует, что существует целое число i такое, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 15$, то $\varphi(i) \le 12$. Используя лемму 2.4, получаем, что $k_i(u) \le \Phi_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{12}$. Лемма 2.6 влечет, что $k_{23}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{21}$. Следовательно, $u \ge 3$ и $\frac{5}{3}q^{21} < \frac{5}{3}u^{12}$. По предложению 2.15 находим, что $\frac{2}{16}u^{136} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 6203q^{181}$. Следовательно, получаем, что $q^{238} < u^{136} \le 8 \cdot 6203q^{181}$. Значит, $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L^{\tau}_m(u)$, $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 12$, находим, что $23 \le m \le 24$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_9(\varepsilon q) \subseteq R_9(\tau u)$. Тогда $3q^6 < u^6$ по [8, лемма 2.5(в)]. Значит, $u \ge 4$. Используя лемму 5.4, получаем, что $u^{n-1} \le u^{m-1} < \frac{3\cdot 4}{2\cdot 3} \cdot 24q^{n-1}$, поэтому $u^{n-1} < 48q^{n-1}$. С другой стороны, неравенство $u^6 > 3q^6$ влечет, что $u^{n-1} > 3^{22/6}q^{n-1} > 56q^{n-1}$; противоречие.

Случай $t(L) = 11$. Тогда $n = 21$ или $n = 22$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 11$, находим, что $S \in \{O_{27}(u), S_{26}(u), O_{29}(u), S_{28}(u), O^{-}_{28}(u)\}$ согласно табл. 2. Если $S = O^{-}_{28}(u)$, то $|J(S)\setminus E(S)| = 3$, значит, случай невозможен по лемме 5.1(б). В других случаях

$J(S) = E(S)$ или $J(S) \setminus E(S) = \{7, 14\}$. Из леммы 5.1(а) следует, что $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_7(u)k_{14}(u)$ или $k_i(u)$, где i — целое число такое, что $\eta(i) \le 14$. Тогда $\varphi(i) \le 12$. Лемма 2.4(г) влечет, что $k_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{12}$ и

$$k_7(u)k_{14}(u) \le \Phi_7(u)\Phi_{14}(u) = \Phi_7(u^2) < \frac{4}{3}u^{12}.$$

Используя лемму 2.6, получаем, что $\frac{5}{3}q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) < \frac{u}{u-1}u^{12}$ и, следовательно, $q^{17} < u^{12}$. Применяя предложение 2.15 для S и L, получаем, что

$$\frac{2}{12}u^{116} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 2832q^{151}.$$

Значит, $q^{164} < 6 \cdot 2832q^{151}$ и поэтому $q^{13} < 17000$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Поскольку $t(S) = 11$, находим, что $21 \le m \le 22$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Тогда $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$. Используя равенство (1), получаем, что $k_8(\varepsilon q) = (q^4+1)/2$ и $k_8(\tau u) = (u^4+1)/(u-1, 2)$. Предположим, что $k_8(\varepsilon q) = k_8(\tau u)$. Поскольку $q \ne u$, имеем равенство $q^4 - 1 = 2u^4$. Очевидно, что $q^4 - 1$ делится на 8 и $r_4(q)$, поэтому $q^4 - 1 \ne 2u^4$. Значит, $k_8(\varepsilon q)$ — собственный делитель $k_8(\tau u)$ и тем самым $17 \cdot (q^4+1)/2 \le (u^4+1)$. Поскольку $u^4 + 1 < \frac{16}{15}u^4$, получаем, что $\frac{17}{2}q^4 < \frac{16}{15}u^4$, поэтому $7q^4 < u^4$. С другой стороны, из леммы 5.4 следует, что $u^{n-1} \le 66q^{n-1}$; противоречие с неравенством $7q^4 < u^4$.

Случай $t(L) = 10$. Тогда $n = 19$ или $n = 20$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 10$, находим, что $S \in \{O_{25}(u), S_{24}(u), O_{26}^\pm(u), O_{24}^-(u), O_{28}^+(u)\}$ согласно табл. 2.

Допустим, что $S \in \{O_{25}(u), S_{24}(u), O_{24}^-(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) = E(S)$. Из леммы 5.1 следует существование целого числа i такого, что $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 12$, имеем $\varphi(i) \le 10$ и поэтому $k_i(u) \le 2u^{10}$ по лемме 2.4. Используя лемму 2.6, получаем, что $q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) \le k_i(u) \le 2u^{10}$. В силу предложения 2.15 находим, что

$$\frac{2}{8}u^{92} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 1922q^{129}.$$

Следовательно, $q^{156} < 2^{92/10} \cdot 4 \cdot 1922q^{129}$ и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \in \{O_{26}^+(u), O_{26}^-(u), O_{28}^+(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) \setminus E(S)$ равно $R_{12}(u) \cup R_{14}(u)$, $R_{12}(u) \cup R_7(u)$ или $R_7(u) \cup R_{14}(u)$. Лемма 5.1 влечет, что $k_{19}(\varepsilon q) \le k_i(u)$, где i — целое число, или $k_{19}(\varepsilon q)$ делит одно из чисел $k_{12}(u)k_{14}(u)$, $k_{12}(u)k_7(u)$ или $k_7(u)k_{14}(u)$. Заметим, что $\varphi(i) \le 12$, $\varphi(12) = 4$, $\varphi(7) = \varphi(14) = 6$. Используя лемму 2.4 и равенство $\Phi_7(u)\Phi_{14}(u) = \Phi_7(u^2)$, получаем, что $q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) \le 2u^{12}$ во всех случаях. Из предложения 2.15 следует, что

$$\frac{2}{16}u^{104} < \exp(S) \le \exp(L) < 1922q^{129}.$$

Значит,

$$q^{147} < 2^{(104/12)} \cdot 8 \cdot 1922q^{129}$$

и поэтому $q^{18} < 7 \cdot 10^6$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Поскольку $t(S) = 10$, получаем, что $19 \le m \le 20$. По лемме 5.2 верно, что $m \ge n$. Применяя лемму 5.3, находим, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Аналогично предыдущему случаю имеем

$7q^4 < u^4$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что $u^{n-1} \le u^{m-1} < 60q^{n-1}$, что невозможно, поскольку $u^{n-1} > 7^3q^{n-1}$.

Случай $t(L) = 9$. Тогда $n = 17$ или $n = 18$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 9$, получаем, что $S \in \{O_{23}(u), S_{22}(u), O^{\pm}_{22}(u), O^{+}_{24}(u)\}$.

Если $S \in \{O_{23}(u), S_{22}(u)\}$, то $|J(S) \setminus E(S)| = 3$, стало быть, этот случай невозможен по лемме 5.1(б). Предположим, что $S \in \{O^{+}_{24}(u), O^{+}_{22}(u), O^{-}_{22}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. По лемме 5.1(а) существует целое число i такое, что $k_{17}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 12$, заключаем, что $\varphi(i) \le 10$. Из лемм 2.6 и 2.4 следует, что

$$\frac{5}{3}q^{15} < k_{17}(\varepsilon q) \le k_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{10},$$

поэтому $u \ge 3$ и $q^{15} < u^{10}$. Используя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{10}u^{74} \le \exp(S) \le \exp(L) < 860q^{103}$. Следовательно, $q^{111} < u^{74} \le 5 \cdot 860q^{103}$ и поэтому $q^8 < 4300$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L^{\tau}_m(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Поскольку $t(S) = 9$, находим, что $17 \le m \le 18$. По лемме 5.2 имеем неравенство $m \ge n$. Применяя лемму 5.3, получаем, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Следовательно, $7q^4 < u^4$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что $u^{n-1} \le u^{m-1} < 54q^{n-1}$, что невозможно, поскольку $u^{n-1} > 7^3q^{n-1}$. $\square$

Лемма 5.6. *Теорема* 2 *верна, если* $15 \le n \le 16$.

Доказательство. В этом случае получаем, что $t(L) = 8$. По теореме 3 верно, что $t(S) = 8$.

Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Согласно табл. 2 $S \in \{O_{19}(u), S_{18}(u), O_{21}(u), S_{20}(u), O^{-}_{20}(u)\}$.

Предположим, что $S \in \{O_{19}(u), S_{18}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) = E(S)$. Если $n = 16$, то $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ большие относительно L и смежны в $GK(L)$. По лемме 3.9 получаем, что $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ большие относительно S и смежны в $GK(S)$. Поскольку $J(S) = E(S)$, получаем равенство $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) = \varphi(r_{16}(\varepsilon q), S)$. С другой стороны, $r_7(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ по лемме 4.1 и предложению 4.3. Следовательно, $r_7(\varepsilon q)$ смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{16}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие с леммой 3.10. Следовательно, можно считать, что $n = 15$. Из леммы 5.1 следует, что существует целое число i такое, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 9$, имеем $\varphi(i) \le 8$, поэтому $k_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^8$ по лемме 2.4. Поскольку $k_i(u) \ge k_{13}(\varepsilon q) > q^{11}$, находим, что $u \ge 5$. По лемме 2.6 получаем, что $\frac{5}{3}q^{11} < k_{13}(\varepsilon q) \le k_i(u) \le \frac{5}{4}u^8$ и, следовательно, $q^{11} < \frac{3}{4}u^8$. Используя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{8}u^{56} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 531q^{73}$. Следовательно,

$$q^{77} < \left(\frac{3}{4}\right)^7 u^{56} < \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot 4 \cdot 531q^{73}$$

и поэтому $q < 5$. Значит, $q = 3$. Используя неравенство $u^{56} \le 4 \cdot 531q^{73}$, находим, что $u < 5$; противоречие с $u \ge 5$.

Если $S = O^{-}_{20}(u)$, то $J(S) \setminus E(S) = \{5, 10, 8\}$; противоречие с леммой 5.1.

Предположим, что $S \in \{O_{21}(u), S_{20}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) \setminus E(S) = \{5, 10\}$. Из леммы 5.1 следует, что $R_{13}(\varepsilon q) \subseteq R_5(u) \cup R_{10}(u)$ или существует целое число i такое, что $R_{13}(\varepsilon q) \subseteq R_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 10$, заключаем, что

$\varphi(i) \le 8$ и поэтому $k_i(u) \le 2u^8$ по лемме 2.4(г). С другой стороны,

$$k_5(u)k_{10}(u) \le \Phi_5(u^2) = u^8 + u^6 + u^4 + u^2 + 1 < \frac{3}{2}u^8.$$

По лемме 2.6 получаем, что $k_{13}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{11}$ и тем самым $u > 2$. Из леммы 2.4(г) следует, что $\frac{5}{3}q^{11} < k_{13}(\varepsilon q) \le \frac{5}{3}u^8$ и, следовательно, $q^{11} < u^8$. По предложению 2.15

$$\frac{2}{5}u^{64} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 569q^{81}.$$

Стало быть, $q^{88} < u^{64} < 3 \cdot 569q^{81}$ и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $15 \le m \le 16$ и $\tau \in \{+,-\}$. По лемме 5.2 $m \ge n$. Из леммы 4.1 и предложения 4.3 следует, что простые числа $r_7(\varepsilon q)$, $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Следовательно, по леммам 3.9 и 4.5 $t(r_7(\varepsilon q), S) \ge 7$. Если $t(r_7(\varepsilon q), S) = 8$, то $r_7(\varepsilon q)$ большое относительно S и смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ и $r_8(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Следовательно, числа $e(r_7(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{14}(\varepsilon q), \tau u)$ и $e(r_8(\varepsilon q), \tau u)$ различны; противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \le 2$. Значит, $t(r_7(\varepsilon q), S) = 7$ для любого $r_7(\varepsilon q) \in R_7(\varepsilon q)$ и поэтому $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_7(\tau u)$ по лемме 3.9.

Предположим, что $n = 16$. Поскольку $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ смежны в $GK(S)$ и большие относительно S, а число $r_7(\varepsilon q)$ смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{16}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем, что $m = 16$, $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$ и $R_{16}(\varepsilon q) \subseteq R_{16}(\tau u)$. Следовательно, $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$ и поэтому $7q^4 < u^4$. По лемме 5.4 $u^{15} < 48q^{15}$; противоречие с $7q^4 < u^4$.

Предположим, что $n = m = 15$. Поскольку $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ смежны с $r_7(\varepsilon q)$, заключаем, что либо $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$, либо $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\tau u)$. В первом случае находим, что $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$, и получаем противоречие, как и в предыдущем случае. Поэтому можно считать, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\tau u)$. Тогда $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$ и, следовательно, $k_{14}(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$. По лемме 2.6 $q^5 < k_7(-\varepsilon q) = k_{14}(\varepsilon q) \le k_8(\tau u) = u^4 + 1 < \frac{16}{15}u^4$. По предложению 2.15 получаем, что

$$\frac{v}{29}u^{72} < \exp(S) \le \exp(L) < 531q^{73}.$$

Следовательно,

$$q^{90} < \left(\frac{16}{15}\right)^{18} u^{72} < 4 \cdot 15 \cdot 531q^{73}$$

и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $n = 15$ и $m = 16$. По предложению 2.15 $\frac{v}{57}u^{80} < \exp(S) \le \exp(L) < 531q^{73}$. Если $(q - \varepsilon 1, 7) = 1$, то из леммы 2.8 следует, что $5q^6 < u^6$ и поэтому $5^{13}q^{80} < u^{80}$, что противоречит неравенству $\exp(S) \le \exp(L)$. Значит, можно считать, что $(q - \varepsilon 1, 7) = 7$, в частности, $q \ge 13$. По лемме 5.1 получаем, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_{16}(\tau u)k_8(\tau u)$ или $k_i(\tau u)$, где i — целое число такое, что $i \le 16$. Используя равенство (1), получаем, что $k_{13}(\varepsilon q) > \frac{12}{13d}q^{12}$, где $d = (q - \varepsilon 1, 13)$. С другой стороны,

$$k_{16}(\tau u)k_8(\tau u) \le (u^8 + 1)(u^4 + 1) < \frac{u}{u-1}u^{12}$$

и

$$k_i(\tau u) \le \frac{u}{u-1}u^{12}$$

по лемме 2.4(г). Следовательно, $u \ge 7$ и поэтому

$$q^{12} < \frac{13}{12} \cdot \frac{7}{6}du^{12} < \frac{3}{2}du^{12}.$$

Тогда

$$q^{80} < \left(\frac{3}{2}d\right)^7 u^{80} < \left(\frac{3}{2}d\right)^7 \cdot 29 \cdot 531 q^{73}.$$

Значит, $q^7 < 300000d^7$. Если $d = 1$, то $q < 7$; противоречие с $q \geq 13$. Если $d = 13$, то $q - \varepsilon 1$ делится на 7 и 13, поэтому $q \geq 183$. Тогда $q^7 > (13^2)^7 > d^7 13^7 > 300000d^7$; противоречие. $\square$

Лемма 5.7. *Теорема* 2 *верна, если* $13 \leq n \leq 14$.

Доказательство. Поскольку n не является простым числом, получаем, что $n = 14$.

По теореме 3 верно, что $t(S) = 7$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Согласно табл. 2 $S \in \{O_{17}(u), S_{16}(u), O_{18}^{\pm}(u), O_{20}^{+}(u), O_{16}^{-}(u)\}$. Из леммы 4.1 и предложения 4.3 следует, что $r_5(\varepsilon q)$, $r_7(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Тогда $r_7(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и смежными в $GK(S)$. Поскольку $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем, что $J(S) \neq E(S)$. Следовательно, $S \notin \{O_{17}(u), S_{16}(u), O_{16}^{-}(u)\}$ согласно табл. 2. Таким образом, можно считать, что $S = O_{18}^{\pm}(u)$ или $S = O_{20}^{+}(u)$. В этом случае имеем $|J(S) \setminus E(S)| = 2$. Значит, $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_{j_1}(u)$ и $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_{j_2}(u)$, где $J(S) \setminus E(S) = \{j_1, j_2\}$. Следовательно, $R_{13}(\varepsilon q) \cap (R_{j_1}(u) \cup R_{j_2}(u)) = \varnothing$. Из леммы 5.1 следует, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$ для некоторого целого числа i такого, что $\eta(i) \leq 10$. Тогда $\varphi(i) \leq 8$. Обозначим число $(q - \varepsilon 1, 13)$ через d. Используя равенство (1), находим, что $k_{13}(\varepsilon q) \geq \frac{2}{3d} q^{12}$. Из леммы 2.4(г) следует, что

$$\frac{u}{u-1} u^8 > k_i(u) \geq \frac{2}{3d} q^{12}.$$

Поскольку $q \geq 3$, получаем, что $u \geq 4$. Следовательно,

$$q^{12} < \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} d u^8 = 2du^8.$$

По предложению 2.15 находим, что $\frac{v}{10} u^{50} < \exp(S) \leq \exp(L) \leq 247q^{65}$. Это означает, что $q^{75} < (2d)^{6.25} u^{50} < (2d)^{6.25} \cdot 1235 q^{65}$. Тогда $q^{10} < 93995 d^{6.25}$. Если $d = 1$, то $q < 4$ и, следовательно, $q = 3$. В этом случае $R_7(3) = \{1093\}$ и $R_{14}(3) = \{547\}$. Согласно табл. 2 $j_1 \in \{5, 10\}$ или $j_2 \in \{5, 10\}$, следовательно, $1093 - 1$ или $547 - 1$ должно делиться на 10; противоречие. Если $d = 13$, то $q < 15$, но это невозможно, поскольку $q - \varepsilon 1$ делится на 13.

Предположим, что $S = L_m^{\tau}(u)$, где $13 \leq m \leq 14$. Из леммы 5.2 следует, что $m = 14$. Согласно табл. 2 видим, что $J(L) \setminus E(L) = J(S) \setminus E(S) = \{7, 14\}$. Применяя лемму 4.1 и предложение 4.3, получаем, что $r_5(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Следовательно, $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Это означает, что $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_7(\epsilon u)$ и $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\epsilon u)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$. По лемме 2.8 получаем, что $5q^6 < u^6$ и, следовательно, $32q^{13} < u^{13}$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что

$$u^{13} < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) q^{13}.$$

Если $u \geq 4$, то

$$\frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) < \frac{3}{2}\frac{4}{3} 14 = 28,$$

а если $u \leq 3$, то $(u - \tau 1, 14) \leq 2$ и

$$\frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) \leq \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6;$$

противоречие с $32q^{13} < u^{13}$. $\square$

Лемма 5.8. *Теорема 2 верна, если* $n = 12$.

Доказательство. В этом случае $t(L) = 6$ и $t(S) = 6$ по теореме 3. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Тогда $S \in \{O_{15}(u), S_{14}(u), O_{14}^{\pm}(u), O_{16}^{+}(u)\}$, где $u \neq 2$, если $S = O_{14}^{-}(u)$. Согласно табл. 2 видим, что $|J(S) \setminus E(S)| = 3$, если $S \in \{O_{15}(u), S_{14}(u)\}$. Следовательно, эти случаи невозможны по лемме 5.1(б). Предположим, что $S \in \{O_{14}^{\pm}(u), O_{16}^{+}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. В силу леммы 2.12 и предложения 4.3 существует $r_6(\varepsilon q) \neq 7$, взаимно простое с $|\overline{G}/S|$. Из леммы 4.1 следует, что $r_6(\varepsilon q) \notin \pi(K)$. Значит, числа $r_{12}(\varepsilon q)$ и $r_6(\varepsilon q)$ являются большими относительно S и смежными в $GK(S)$. Аналогично получаем, что $r_5(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. Это означает, что $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_6(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{12}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие с $J(S) = E(S)$.

Предположим, что $S \simeq L_m(\tau u)$, где $\tau \in \{+, -\}$ и $11 \leq m \leq 12$. Из леммы 5.2 следует, что $m = 12$. Заметим, что $J(L) \setminus E(L) = J(S) \setminus E(S) = \{6, 12\}$. Рассматривая простые числа $r_5(\varepsilon q)$, $r_6(\varepsilon q)$ и $r_{12}(\varepsilon q)$, находим, что для некоторого $r_6(\varepsilon q)$ верно, что $r_6(\varepsilon q) \in R_6(\tau u)$ и поэтому $R_{12}(\varepsilon q) \subseteq R_{12}(\tau u)$. Следовательно, $k_{12}(\varepsilon q)$ делит $k_{12}(\tau u)$. Это означает, что $6q^4 < u^4$ и поэтому $138q^{11} < u^{11}$. С другой стороны, $u^{11} < 36q^{11}$ по лемме 5.4; противоречие. $\square$

§ 6. Доказательство теоремы 1

Предположим, что группа L изоморфна $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \geq 11$, а q — степень простого числа p. Если q четно, то проблема распознаваемости для L решена в случае линейных групп в [30] и в случае унитарных групп в [31]. В частности, для любой группы G, изоспектральной L, верно, что $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Поэтому можно считать, что q нечетно.

Предположим, что G — группа, изоспектральная L. Если $n \geq 27$, то из [8, теорема 1.2] следует, что $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Аналогичное заключение верно, если n — простое число в силу основной теоремы статьи [32] и [5, следствие 1]. Основные результаты из [33] показывают, какие именно группы G подходят для L, поэтому проблема распознаваемости решена в этих случаях. Следовательно, можно считать, что n не является простым числом и $12 \leq n \leq 26$.

Используя [25, табл. 2] и [23, табл. 6], видим, что $t(L) \geq 6$ и $t(2, L) \geq 2$. Из леммы 3.1 следует, что существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. По [4, следствие 1] группа S не изоморфна исключительной группе лиева типа. По [34, теоремы 1 и 2] и [24, теоремы 1 и 2] получаем, что S не изоморфна знакопеременной группе, спорадической группе или группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Следовательно, можно считать, что S — простая классическая группа. По теореме 2 получаем, что S определена над полем характеристики p. Теперь из [24, теорема 3] следует, что $S \simeq L$ и тем самым $K = 1$ по [11, следствие 1]. Таким образом, $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ и группа L почти распознаваема. Чтобы определить, какие группы G подходят, можно воспользоваться основными результатами работы [33], поэтому проблема распознаваемости для L решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
2. *Grechkoseeva M. A, Mazurov V. D., Shi W., Vasil′ev A. V., Yang N.* Finite groups isospectral to simple groups, // Commun. Math. Stat. 2023. V. 11, N 2. P. 169–194.

3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Гречкосеева М. А., Паньшин В.В.* О распознаваемости по спектру линейных и унитарных групп небольшой размерности // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 876–900.
5. *Паньшин В. В.* О распознавании простых групп с несвязным графом простых чисел по спектру. 2025. arXiv:2509.03483. (Принята к печати в Мат. заметках).
6. *Vasil′ev A. V.* On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.
7. *Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V.* On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.
8. *Staroletov A.* On almost recognizability by spectrum of simple classical groups // Intern. J. Group Theory. 2017. V. 6, N 4. P. 7–33.
9. *Васильев А. В., Гречкосеева М.А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.
10. *Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n=2^k$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 58–73.
11. *Grechkoseeva M. A.* On element orders in covers of finite simple groups of Lie type // J. Algebra Appl. 2015. V. 14, N 4. 1550056.
12. *Bang A.S.* Taltheoretiske Undersfigelser // Tidsskrift Math. 1886. V. 4. P. 70–80, 130–137.
13. *Zsigmondy K.* Zur theorie der potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.
14. *Roitman M.* On Zsigmondy primes // Proc. Am. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.
15. *Erdös P.* On the coefficients of the cyclotomic polynomial // Bull. Am. Math. Soc. 1946. V. 52. P. 179–184.
16. *Прасолов В. В.* Многочлены, 3-е изд, исправленное. М.: МЦНМО, 2003.
17. *Nagell T.* Des équations indéterminées $x^2+x+1=y^n$ et $x^2+x+1=3y^n$ // Nordsk. Mat. Forenings Skr. 1920. V. 2. 14 pp.
18. *Ljunggren W.* Noen Setninger om ubestemte likninger av formen $(x^n-1)/(x-1)=y^q$ // Norsk. Mat. Tidsskr. 1943. V. 25. P. 17–20.
19. *Testerman D.* A_1-type overgroups of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // J. Algebra. 1995. V. 177, N 1. P. 34–76.
20. *Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V, Zvezdina M. A.* Recognition of symplectic and orthogonal groups of small dimensions by spectrum // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 12. 1950230.
21. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
22. *Yang N., Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V.* On the nilpotency of the solvable radical of a finite group isospectral to a simple group // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 3. P. 447–470.
23. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
24. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Старолетов А. М.* О конечных группах, изоспектральных простым линейным и унитарным группам // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 39–53.
25. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
26. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.
27. `https://github.com/AlexeyStaroletov/RecognitionBySpectrum`
28. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.
29. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
30. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 558–570.
31. *Grechkoseeva M. A., Shi W. J.* On finite groups isospectral to finite simple unitary groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. V. 10. P. 31–37.
32. *Гречкосеева М. А., Лыткин Д. В.* Почти распознаваемость по спектру конечных простых линейных групп простой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 805–818.

33. *Grechkoseeva M. A.* On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 6. P. 1191–1222.

34. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1225–1247.

Поступила в редакцию 7 ноября 2025 г.
После доработки 3 декабря 2025 г.
Принята к публикации 5 декабря 2025 г.

Старолетов Алексей Михайлович (ORCID 0000-0002-3914-6758)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
staroletov@math.nsc.ru