

Универсальная обёртывающая алгебры n согласованных скобок Ли

В.Ю. Губарев, Ч. Чжэн

Аннотация

В работе изучается (мультипликативная) универсальная обёртывающая алгебра в смысле В. Гинзбурга и М. Капранова $U(\mathfrak{g})$ алгебры \mathfrak{g} набора n согласованных скобок Ли. При помощи базисов Грёбнера — Ширшова найден базис алгебры $U(\mathfrak{g})$. Найдена асимптотика скорости роста алгебры $U(\mathfrak{g})$ при $n, \dim \mathfrak{g} \gg 1$.

Ключевые слова: универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра, алгебра Ли согласованных скобок, скорость роста, базис Грёбнера — Ширшова.

Введение

Алгебра $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, [\cdot, \cdot]_2 \rangle$ над полем \mathbb{k} принадлежит многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, если $\alpha[\cdot, \cdot]_1 + \beta[\cdot, \cdot]_2$ есть скобка Ли для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Аналогично определяется многообразие Lie_n алгебр $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, \dots, [\cdot, \cdot]_n \rangle$ n согласованных скобок Ли. Свободные алгебры в многообразии Lie_2 исследовались в работах [2, 13, 14]. Кожулеводность операды, соответствующей многообразию Lie_2 , была показана в [4].

В 1994 году В. Гинзбург и М. Капранов [8] определили так называемую (мультипликативную) универсальную обёртывающую ассоциативную алгебру $U(A)$ данной алгебры A . Ключевое свойство такой обёртывающей заключается в том, что категории модулей над A и категории левых модулей над $U(A)$ эквивалентны.

В 2022 г. А. Хорошкин активно исследовал [12] универсальную мультипликативную обёртывающую алгебру в смысле Гинзбурга и Капранова, получив её явное задание в терминах порождающих и соотношений. Там же А. Хорошкин установил, что универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ алгебры \mathfrak{g} , принадлежащей многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, удовлетворяет свойству Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Последнее означает, в частности, что базис $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ не зависит от обеих скобок Ли, заданных на \mathfrak{g} . В работе 2022 г. [10] В.Ю. Губарев при помощи техники базисов Грёбнера — Ширшова нашёл базис алгебры $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ и вычислил её скорость роста как $m + 1$, где $m = \dim \mathfrak{g}$.

В работе при помощи базисов Грёбнера — Ширшова найден базис алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ для произвольного n . Обозначим $m = \dim \mathfrak{g}$. При помощи частично коммутативных алгебр показано, что при $n, m \gg 1$ скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ асимптотически равна $\alpha n m$, где $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, q_0 — наименьший корень функции $J_0(2\sqrt{x}) = 0$, а $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода.

1 Основные сведения о базисах Грёбнера — Ширшова

Пусть X не пусто, порядок \leq , заданный на множестве X^* всех слов в алфавите X , называется мономиальным, если из $u \leq v$ следует $wu \leq wv$ и $uw \leq vw$ для любого $w \in X^*$.

Пусть (X, \leq) вполне упорядочено. Зададим на X^* порядок следующим образом: $u = x_1 \dots x_n < v = y_1 \dots y_m$, если и только если $n < m$ или $n = m$ и найдётся i такое,

что $x_i < y_i$, а $x_j = y_j$ для всех $j < i$. Полученный порядок называется порядком deg-lex, и он мономиален.

Зафиксируем некоторое множество X и мономиальный порядок \leq на множестве X^* такой, что (X^*, \leq) является вполне упорядоченным множеством.

Через $\text{As}(X)$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру, порождённую множеством X . Пусть $f \in \text{As}(X)$ — ассоциативный некоммутативный многочлен от X , $f \neq 0$. Обозначим через $\bar{f} \in X^*$ старшее слово многочлена f — самое большое $u \in X^*$, входящее в f с ненулевым коэффициентом. Многочлен f называется унитарным, если старшее слово \bar{f} входит в него с коэффициентом, равным единице.

Свойство мономиальности порядка обеспечивает равенство $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \in X^*$ для любых ненулевых $f, g \in \text{As}(X)$.

Пусть $S \subset \text{As}(X)$ — некоторое множество унитарных многочленов. Слово $u \in X^*$ называется редуцированным относительно S , если u нельзя представить в виде $u = u_1 f u_2$ ни для каких $u_1, u_2 \in X^*$, $f \in S$.

Определение 1. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, причем $\omega = \bar{f} = u_1 \bar{g} u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in X^*$. Тогда многочлен $h = f - u_1 g u_2$ называется композицией включения многочленов f и g .

Определение 2. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, $\omega \in X^*$ — такое слово, что $\omega = \bar{f}u = v\bar{g}$ для некоторых слов $u, v \in X^*$, причем длина ω строго меньше суммы длин \bar{f} и \bar{g} . Последнее условие означает, что подслова \bar{f} и \bar{g} пересекаются, а именно, непустое начало слова \bar{g} совпадает с окончанием слова \bar{f} . Композицией пересечения f и g называется многочлен $h = fu - vg$.

Как видно из определений, с каждой композицией связано некоторое слово $\omega \in X^*$, которое равно большему старшему слову для композиций включения и «объединению» старших слов для композиций пересечения. Чтобы подчеркнуть связь слова ω с той или иной композицией многочленов f и g , используется следующее обозначение: $h = (f, g)_\omega$.

Определение 3. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$ и $\omega \in X^*$ — некоторое слово. Многочлен h называется тривиальным относительно (S, ω) , если

$$h = \sum \lambda_i u_i f_i v_i$$

для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$, $f_i \in S$, $u_i, v_i \in X^*$, причем $u_i \bar{f}_i v_i < \omega$.

Определение 4. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Множество S называется базисом Грёбнера — Ширшова в $\text{As}(X)$, если любая композиция $(f, g)_\omega$ для $f, g \in S$ тривиальна относительно (S, ω) .

Мы будем использовать стандартное обозначение $\text{As}(X \mid S)$ копредставления для алгебры $A \cong \text{As}(X)/(S)$.

Теорема 1. Пусть S — некоторое множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (C1) S является базисом Грёбнера — Ширшова;
- (C2) если $f \in (S)$, то слово \bar{f} не является редуцированным относительно S ;
- (C3) образы редуцированных относительно S слов при естественном гомоморфизме $\text{As}(X) \rightarrow \text{As}(X \mid S)$ образуют базис алгебры $\text{As}(X \mid S)$ как векторного пространства.

2 Базис $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Пусть X — базис алгебры \mathfrak{g} n согласованных скобок Ли, через $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ обозначим попарно непересекающиеся множества, каждое из которых биективно X . Согласно следствию 2.11 из статьи [12] мультипликативная универсальная обёртываю-

шая ассоциативная алгебра данной алгебры Ли \mathfrak{g} n согласованных скобок задаётся как $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(i)} + [x, y]_i = 0$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} + ([x, y]_i)^{(j)} + ([x, y]_j)^{(i)} = 0, i < j$.

В [12] для случая $n = 2$ было установлено свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта: существует такая фильтрация на $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$, что $\text{gr } U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}) \cong U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$, где \mathfrak{g}_0 есть векторное пространство \mathfrak{g} с тривиальными скобками $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$. Наша ближайшая цель — установить свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта для произвольного n . Свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта означает, что для алгебры \mathfrak{g} с n согласованными скобками Ли и ее универсальной обёртывающей алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ можно найти такую подходящую фильтрацию, что её градуированная алгебра изоморфна $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$, где \mathfrak{g}_0 представляет собой векторное пространство \mathfrak{g} с n тривиальными скобками Ли.

Мы не будем давать в силу его громоздкости строгого определения операды [8]. Тем не менее, мы попытаемся пояснить суть этого понятия.

Набор линейных пространств $\{\mathcal{C}(n)\}_{n \geq 1}$ над полем \mathbb{k} и множество линейных отображений (правило композиции) $\text{Comp}^\pi: \mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(m_n) \rightarrow \mathcal{C}(m)$, где $\pi = (m_1, \dots, m_n)$ есть n -разбиение числа m , называется операдой, если для правила композиции выполнены естественные аналоги ассоциативности и наличия нейтрального элемента. Мы также полагаем, что есть согласованное с правилом композиции действие групп S_n на пространства $\mathcal{C}(n)$.

Операда \mathcal{P} называется бинарной, если она порождена пространством операций $E = \mathcal{P}(2)$, и квадратичной, если все соотношения между операциями из $\mathcal{P}(2)$ задаются действием S_2 на $\mathcal{P}(2)$ и определяющими соотношениями R пространства $\mathcal{P}(3)$. Именно, пространство полилинейных термов степени 3 будем отождествлять с

$$E(3) = \mathbb{k}S_3 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (E \otimes E), \quad \mathcal{P}(3) = E(3)/R,$$

действие (12) на $E \otimes E$ определяется как $\text{id} \otimes (12)$. Полученную операду будем обозначать как $\mathcal{P}(E, R)$.

Для бинарной квадратичной операды $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ кожульт-двойственная операда \mathcal{P}^\dagger определяется как $\mathcal{P}(E^\vee, R^\perp)$, где E^\vee — дуальное пространство к пространству E , снабжённое знакопеременным действием группы S_2 , а R^\perp — подпространство в $E^\vee(3) \cong E(3)^\vee$, ортогональное к R .

Алгебра A называется градуированной, если $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$, где A_i является подпространством в A для любого натурального i , и при этом $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$. Напомним, что по каждой коммутативной (ассоциативной) градуированной алгебре $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ можно задать симметрическую операду \mathcal{O}_A , чьё пространство $\mathcal{O}_A(n)$ n -арных операций изоморфно A_{n-1} , действие S_n берётся тривиальным, а правила композиции определяются при помощи умножения в алгебре A так:

$$\circ_i: \mathcal{O}_A(m) \otimes \mathcal{O}_A(n) = A_{m-1} \otimes A_{n-1} \rightarrow A_{m+n-2} = \mathcal{O}_A(m+n-1).$$

Предложение. Имеется изоморфизм операд $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]} \simeq \text{Lie}_n^\dagger$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы доказать утверждение, необходимо и достаточно (см. следствие 2.2.9 из [8]) установить, что $D \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольных алгебр $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}$ и $B \in \text{Lie}_n$. Поскольку алгебра $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ является свободной в классе $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}$ -алгебр, достаточно проверить условие $A \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольной алгебры $B \in \text{Lie}_n$. Обозначим $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}(2) = L(x_1, \dots, x_n)$ и $\text{Lie}_n(2) = L(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Ясно, что операция $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \mu_i$ в $(A \otimes B)(2)$ антикоммутирует, поскольку $(x_i \otimes \mu_i)^{(12)} = x_i^{(12)} \otimes \mu_i^{(12)} = x_i \otimes (-\mu_i)$. Нам нужно проверить выполнение тождества Якоби для ξ :

$$1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в левой части выражения, получаем при x_i^2 выражение

$$1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i), \quad (1)$$

которое равно нулю из-за выполнения тождества Якоби для операции μ_i в $B \in \text{Lie}_n$. При $x_i x_j$, $i \neq j$, получаем выражение

$$\begin{aligned} & - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) + 1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) \\ & - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) + 1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j), \quad (2) \end{aligned}$$

равное нулю из-за выполнения тождества Якоби для операций $\mu_i, \mu_j, \mu_i + \mu_j$ в $B \in \text{Lie}_n$. \square

Перед тем, как установить важное свойство мультипликативной универсальной обёртывающей от алгебры набора согласованных скобок Ли, приведём необходимые сведения. Градуированная ассоциативная алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ называется кожулевой [1], если 1) A_0 полупроста и 2) A_0 , рассматриваемая как левый A -модуль, допускает градуированную проективную резольвенту

$$\dots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \twoheadrightarrow A_0,$$

при этом каждый из градуированных модулей P^i порождается своей i -й компонентой, то есть $P^i = AP^i$.

Следствие 1. Пусть $n \geq 1$. Для пары $(U_{\text{Lie}_n}, \text{Lie}_n)$ выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что алгебра многочленов $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ кожулева (здесь $A_0 \cong \mathbb{k}$). Согласно работе [5, Теорема 5.3] кожулевість алгебры A влечёт кожулевість операды \mathcal{O}_A . По теореме 4.1 [12] (см. также обсуждение в примере 4.6 из [12]) выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта. \square

Алгебру \mathfrak{g} n согласованных скобок Ли будем обозначать через \mathfrak{g}_0 , если все n скобок на ней тривиальны. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай алгебры \mathfrak{g}_0 . Полагаем, что множество X вполне упорядочено. Тогда $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}$, $x > y$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} = 0$, $x > y$, $i < j$.

Продолжаем порядок с множества X на множество $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ так: $x^{(i)} > y^{(j)}$, если $i < j$ или $i = j$ и $x > y$. На слова из $\text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \rangle$ данный порядок распространяем по правилу deg-lex.

Теорема 2. Соотношения S образуют базис Грёбнера — Ширшова алгебры $U_{\text{Lie}_n}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим возможные композиции соотношений. Ясно, что композиция вида $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$, где $x > y > z$, тривиальна.

- 1) $x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned} & x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(i)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\ & \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(i)} - (y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)}) + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\ & \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(x^{(j)}y^{(i)} + x^{(i)}y^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\ & \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\ & \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\ & \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)}x^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)}) + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\ & \xrightarrow{(1)} y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)} \xrightarrow{(2)} y^{(i)}x^{(i)}z^{(j)}. \end{aligned}$$

2) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)} \xrightarrow{(2)} y^{(j)}x^{(i)}z^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
& \xrightarrow{(2)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - (x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)}) + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
& \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
& \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
& \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
& \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(j)} \\
& \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}) \\
& \xrightarrow{(1)(2)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + (z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) \\
& \rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} \\
& \rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
& \xrightarrow{(1)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
& \rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(j)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(j)} \xrightarrow{(1)} x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}.
\end{aligned}$$

3) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$, где $x > y > z$, $i < j < k$. С одной стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)} \xrightarrow{(3)} y^{(j)}x^{(i)}z^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \rightarrow^{(5)} y^{(j)}z^{(k)}x^{(i)} - x^{(k)}z^{(i)} + z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \rightarrow^{(6)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \rightarrow^{(6)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \quad - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(k)} \\
& \rightarrow^{(5)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \quad - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \rightarrow^{(6)} z^{(l)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)} \\
& + x^{(j)}y^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \rightarrow^{(6)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} \\
& \quad - y^{(k)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \rightarrow^{(6)} z^k y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \quad - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^k \\
& \rightarrow -y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} \\
& \quad - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \rightarrow -y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} \\
& \rightarrow -y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \rightarrow -y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)} \xrightarrow{(6)} x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)} - x^{(i)}y^{(k)}z^{(j)} + x^{(i)}z^{(j)}y^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(5)} (6) x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}y^{(i)}z^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} \\
& \quad \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(6)} x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}y^{(i)}z^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} \\
& \quad \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} - z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(6)} z^{(k)}x^{(i)}y^{(j)} - x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}y^{(i)}z^{(j)} \\
& \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} - z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(5)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} - z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(3)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} \\
& \quad - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} \\
& \quad \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(5)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} \\
& \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \quad \rightarrow^{(3)} z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} \\
& \quad \quad - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \\
& \rightarrow z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \\
& \quad \rightarrow z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \rightarrow -y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)}.
\end{aligned}$$

Тем самым мы проверили тривиальность всех композиций, и S является базисом Грёбнера — Ширшова. \square

Следствие 2. В качестве базиса алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$ берём редуцированные относительно S слова, то есть такие слова, что не содержат в качестве подслов $x^{(i)}y^{(i)}$ и $x^{(i)}y^{(j)}$ для $x, y \in X$, $x > y$, $i < j$.

3 Скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Экспоненциальная скорость роста $\rho(A)$ ассоциативной алгебры A относительно порождающего множества X вычисляется как

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

где $a_n = \dim V_n$, V_n — линейная оболочка слов длины n в алфавите X .

Вопрос. Пусть $\mathfrak{g} \in \text{Lie}_n$, $\dim \mathfrak{g} = m$. Чему равна скорость роста $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}))$ относительно порождающего множества $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ при $|X| = m$?

Покажем, как можно переформулировать вопрос в терминах более просто задаваемой ассоциативной алгебры.

Рассмотрим алгебру $V_{n,m} = \text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid T \rangle$, где T состоит из соотношений

$$1) \ x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}, \ x > y,$$

2) $x^{(i)}y^{(j)} = y^{(j)}x^{(i)}$, $x > y$, $i < j$.

Это так называемая частично коммутативная алгебра, то есть ассоциативная алгебра, получающаяся факторизацией свободной ассоциативной алгебры по множеству соотношений коммутирования, выполненных для определённых пар порождающих элементов. В работе 1969 г. [3] П. Картье и Д. Фоата ввели понятие частично коммутативного моноида. Пусть задан простой граф $G(V, E)$, тогда частично коммутативный моноид $M(G)$ определяется через копредставление следующим образом: $M\langle V \mid v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E \rangle$, т.е. как фактор свободного моноида $M\langle V \rangle$ по отношению эквивалентности, порождённой множеством $\{v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E\}$. Позднее изучались частично коммутативные ассоциативные алгебры [11], частично коммутативные алгебры Ли [6] и другие подобные структуры. Частично коммутативную ассоциативную алгебру, построенную по графу G , будем обозначать как $\text{As}(G)$.

Легко проверить, что соотношения T образуют базис Грёбнера — Ширшова, и поэтому множество редуцированных относительно соотношений S и T слов совпадает. Отсюда $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})) = \rho(V_{n,m})$.

Введём простой конечный граф G так: вершины G соответствуют порождающим $x^{(i)}$, а ребро между двумя вершинами проводится, если и только если перестановочность соответствующих этим вершинам порождающих входит в T . Известно [7], что $\rho(\text{As}(G)) = \beta(G)$, где $\beta(G)$ — наибольший по модулю вещественный корень многочлена

$$PC(G, x) = x^{t_0} - c_1(G)x^{t_0-1} + c_2(G)x^{t_0-2} + \dots + (-1)^{t_0-1}c_{t_0-1}x + (-1)^{t_0}c_{t_0}(G), \quad (3)$$

где c_i обозначает количество клик размера i в графе G ($c_0 := 1$), а t_0 — размер максимальной клики в G .

Поскольку мы работаем с очень конкретным графом G , мы сможем явно посчитать все коэффициенты $c_i(G)$.

Всего в графе G вершин $mn = C_m^1 C_n^1$, а рёбер, возникающих из первых соотношений — $C_m^2 n = C_m^2 C_n^1$, а из вторых — $C_m^2 C_n^2$, здесь C_m^2 отвечает за выбор подходящих x, y из алфавита X , а C_n^2 отвечает за выбор пары индексов (i, j) .

Для произвольного $1 \leq k \leq m$ мы сперва выбираем k букв $x_1, \dots, x_k \in X$, далее выбираем C_n^s способами s -элементное подмножество $Z \subset \{0, \dots, n-1\}$. Теперь для каждого Z мы C_{k-1}^{s-1} способами расставляем перегородки, что соответствует тому, как мы распределяем элементы Z по индексам i_1, \dots, i_k . Тем самым получаем

$$c_k = C_m^k (C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k).$$

Комбинаторно легко увидеть, что

$$C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Поэтому

$$PC(G, x) = x^m - C_m^1 C_n^1 x^{m-1} + C_m^2 C_{n+1}^2 x^{t_0-2} + \dots + (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k} + \dots + (-1)^m C_{n+m-1}^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k}. \quad (4)$$

При помощи Wolframalpha мы приближенно вычислили $\beta(G)$ для малых значений n, m :

Для поиска асимптотики $\beta(G)$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $m \geq n$, тогда $PC(G(m, n), x) = (x - 1)^{m-n+1} PC(G(n - 1, m + 1), x)$.

Таблица 1: Значение $\beta(G)$ в зависимости от n, m

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4.73	6.45	8.16	9.87	11.58	13.29	15.00	16.71	18.42	20.12
4	6.45	8.87	11.29	13.70	16.11	18.52	20.93	23.33	25.74	28.15
5	8.16	11.29	14.40	17.51	20.62	23.72	26.83	29.93	33.03	36.14
6	9.87	13.70	17.51	21.32	25.12	28.92	32.72	36.52	40.31	44.11
7	11.58	16.11	20.62	25.12	29.62	34.11	38.60	43.10	47.59	52.08
8	13.29	18.52	23.72	28.92	34.12	39.30	44.49	49.67	54.85	60.04
9	15.00	20.93	26.83	32.72	38.60	44.49	50.36	56.24	62.12	68.00
10	16.71	23.33	29.93	36.52	43.10	49.67	56.24	62.81	69.38	75.95
11	18.42	25.74	33.03	40.31	47.59	54.85	62.12	69.38	76.65	83.91

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство многочленов сводится после раскрытия скобок и подсчёта коэффициентов при x^{m-k} к проверке комбинаторного равенства

$$\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} = C_{n+k-1}^k C_m^k. \quad (5)$$

Первый множитель выбираем из первой скобки $(x-1)^{m-n+1}$ с коэффициентом $(-1)^s C_{m-n+1}^{m-n+1-s} = (-1)^s C_{m-n+1}^s$. Из второй скобки $x^{n-1-(k-s)}$ приходит с коэффициентом $(-1)^{k-s} C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s}$. Перемножая $(-1)^s$ и $(-1)^{k-s}$, получаем $(-1)^k$.

Левую часть (5) можно представить как

$$\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} = C_{m+k}^k C_{n-1}^k {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1), \quad (6)$$

где ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$ обозначает обобщённый гипергеометрический ряд

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i (c)_i}{(d)_i (e)_i} \cdot \frac{z^i}{i!},$$

здесь

$$(x)_i = \frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ x(x+1) \dots (x+i-1), & i > 0, \end{cases}$$

обозначает символ Похгаммера.

Известная теорема Заальшутца (1890) гласит, что

$${}_3F_2(a, b, -n; c, a+b-c-n-1; 1) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}. \quad (7)$$

Тем самым в формуле (6) переписываем

$$\begin{aligned} {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1) &= \frac{(-k-n+1)_k (-m)_k}{(-m-k)_k (-n+1)_k} \\ &= \frac{(-k-n+1) \dots (-n) \cdot (-m) \dots (-m+k-1)}{(-m-k) \dots (-m-1) \cdot (-n+1) \dots (-n+k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+n-1) \dots (n) \cdot (m) \dots (m-k+1)}{(m+k) \dots (m+1) \cdot (n+1) \dots (n-k)} \\
&= \frac{(C_{n+k-1}^k \cdot k!) \cdot (C_m^k \cdot k!)}{(C_{m+k}^k \cdot k!) \cdot (C_{n-1}^k \cdot k!)} = \frac{C_{n+k-1}^k C_m^k}{C_{m+k}^k C_{n-1}^k},
\end{aligned}$$

что и даёт после домножения на $C_{m+k}^k C_{n-1}^k$ правую часть (5). \square

Перед тем, как вывести асимптотику $\beta(G)$, напомним определение функции Бесселя первого рода: $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2/4)^k}{k!k!}$.

Ниже мы будем использовать следующие математические знаки: \gg — “много больше”, \ll — “много меньше”, \sim — “асимптотически эквивалентны”.

Теорема 3. Пусть $m, n \gg 1$, тогда $\beta(G) = \alpha(mn + o(mn))$, где $\alpha = \frac{4}{q_0} \approx 0,69166$, q_0 — наименьший корень функции $J_0(2\sqrt{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m, n \gg 1$. Тогда выполнено $|E(G)| \sim m^2 n^2 / 4 = |V(G)|^2 / 4$, поэтому согласно следствиям 8.4 и 9.3 из [9] верны оценки

$$0,5nm \leq \beta \leq 0,751nm.$$

Отсюда мы можем искать β в виде $\beta \sim \alpha nm$ для параметра $\alpha \in [0,5; 0,751]$, вообще говоря, зависящего от n, m .

Наша цель — показать, что α удовлетворяет следующему соотношению:

$$0 = \alpha^m - \frac{\alpha^{m-1}}{1!1!} + \frac{\alpha^{m-2}}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha^{m-k}}{k!k!} + \dots \quad (8)$$

Его наибольший корень асимптотически равен $\alpha = \frac{4}{q_0} \approx 0,69166$, где q_0 — наименьший корень функции $J_0(2\sqrt{x})$. Все другие корни (8) не превосходят 0,14, то есть не лежат на отрезке $[0,5; 0,751]$.

СЛУЧАЙ 1: $n-1 \geq m$. Тогда коэффициент в $PC(G, x)$ при x^{m-k} без учёта знака можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_m^k C_{n+k-1}^k &= \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2) \dots n}{k!} \\
&= \frac{1}{k!k!} [nm][(m-1)(n+1)] \dots [(m-k+1)(n+k-1)] \leq \frac{(nm)^k}{k!k!}.
\end{aligned}$$

Далее, для $2/5 < \gamma < 4/5$ выполнено

$$PC(G, \gamma mn) / (mn)^m \sim \gamma^m - \gamma^{m-1} + \frac{\gamma^{m-2}}{2!2!} - \dots,$$

где для $k \ll O(\sqrt{m})$ соответствующее слагаемое без учёта знака асимптотически равно $\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!}$. При $k = O(\sqrt{m})$ слагаемое (также без учёта знака) не превосходит $\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!}$, что по формуле Стирлинга $q! \sim \sqrt{2\pi q} (q/e)^q$ можно оценить сверху так:

$$\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!} < \frac{\gamma^m}{p\gamma^{\sqrt{m}/r} (\sqrt{m}/t)^{\sqrt{m}/s}} < \frac{\gamma^m}{p(\gamma' \sqrt{m}/t)^{\sqrt{m}/s}}$$

для некоторых p, t, s, r, γ' , зависящих от k , но не от n, m . Если мы суммируем даже m слагаемых такого типа, то всё равно получим выражение из $o(\gamma^m)$. Тем самым мы приходим к уравнению (8). Для $y = 1/\alpha$ получаем уравнение

$$0 = 1 - \frac{y}{1!1!} + \frac{y^2}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{y^k}{k!k!} + \dots = J_0(2\sqrt{y}),$$

откуда и находим указанное выше значение α .

СЛУЧАЙ 2: $m \geq n$. По лемме выполнено $PC(G(m, n), x) = (x - 1)^{m-n+1}PC(G(n - 1, m + 1), x)$, и мы приходим к случаю 1. Следовательно,

$$\beta(G(m, n)) = \beta(G(n - 1, m + 1)) \sim \alpha(n - 1)(m + 1) \sim \alpha nm.$$

Тем самым теорема доказана. □

Благодарности

Авторы благодарят П.С. Колесникова и рецензента за ценные замечания.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

Список литературы

- [1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality patterns in Representation Theory, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 473–527.
- [2] M. Bershtein, V. Dotsenko, A. Khoroshkin, Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad, *Int. Math. Res. Notices* **24** (2007), 1–30.
- [3] P. Cartier and D. Foata. Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 85. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
- [4] V. Dotsenko, A. Khoroshkin, Gröbner bases for operads, *Duke Math. J.* **153** (2010), 363–396.
- [5] V. Dotsenko, A. Khoroshkin, Quillen Homology for Operads via Gröbner bases, *Documenta Math.* **18** (2013), 707–747.
- [6] G. Duchamp, D. Krob. The free partially commutative Lie algebra: Bases and ranks. *Adv. Math. (1)* **95** (1992), 92–126.
- [7] D.C. Fisher and A.E. Solow. Dependence polynomial. *Discrete Math.* **82** (1990), 251–258.
- [8] V. Ginzburg, M. Kapranov, Koszul duality for operads, *Duke Math. J.* **76** (1994), 203–272.
- [9] V. Gubarev, PC -polynomial of graph, arXiv:1808.03932.
- [10] V. Gubarev, Universal enveloping algebra of a pair of compatible Lie brackets, *Int. J. Algebra Comput. (7)* **32** (2022), 1335–1344.
- [11] K. Kim, L. Makar-Limanov, J. Neggers, F. Roush. Graph algebras. *J. Algebra (1)* **64** (1980), 46–55.
- [12] A. Khoroshkin, PBW Property for Associative Universal Enveloping Algebras Over an Operad, *Int. Math. Res. Not. (4)* **2022** (2022), 3106–3143.
- [13] R.G. D’León, On the free Lie algebra with multiple brackets, *Adv. Appl. Math.* **79** (2016), 37–97.

- [14] F. Liu, Combinatorial bases for multilinear parts of free algebras with two compatible brackets, J. Algebra (1) **323** (2010), 132–166.

Чжан Чжэн
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
Новосибирск, Россия, 630090
E-mail: 2268663734@qq.com

Губарев Всеволод Юрьевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск, Россия, 630090
Новосибирский государственный университет
E-mail: wsewolod89@gmail.com