

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРЫ $n$ СОГЛАСОВАННЫХ СКОБОК ЛИ

**В. Ю. Губарев, Ч. Чжан**

**Аннотация.** Изучается (мультипликативная) универсальная обертывающая алгебра в смысле В. Гинзбурга и М. Капранова  $U(\mathfrak{g})$  алгебры  $\mathfrak{g}$  набора  $n$  согласованных скобок Ли. При помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры  $U(\mathfrak{g})$ . Найдена асимптотика скорости роста алгебры  $U(\mathfrak{g})$  при  $n, \dim \mathfrak{g} \gg 1$ .

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

**Ключевые слова:** универсальная мультипликативная обертывающая алгебра, алгебра Ли согласованных скобок, скорость роста, базис Гребнера — Ширшова.

### Введение

Алгебра  $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, [\cdot, \cdot]_2 \rangle$  над полем  $\mathbb{k}$  принадлежит многообразию  $\text{Lie}_2$  пар согласованных скобок Ли, если  $\alpha[\cdot, \cdot]_1 + \beta[\cdot, \cdot]_2$  есть скобка Ли для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ . Аналогично определяется многообразие  $\text{Lie}_n$  алгебр  $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, \dots, [\cdot, \cdot]_n \rangle$   $n$  согласованных скобок Ли. Свободные алгебры в многообразии  $\text{Lie}_2$  исследовались в работах [1–3]. Кожулевость операд, соответствующей многообразию  $\text{Lie}_2$ , была показана в [4].

В 1994 г. В. Гинзбург и М. Капранов [5] определили так называемую (мультипликативную) универсальную обертывающую ассоциативную алгебру  $U(A)$  данной алгебры  $A$ . Ключевое свойство такой обертывающей заключается в том, что категория модулей над  $A$  и категория левых модулей над  $U(A)$  эквивалентны.

В 2022 г. А. Хорошкин активно исследовал [6] универсальную мультипликативную обертывающую алгебру в смысле Гинзбурга и Капранова, получив ее явное задание в терминах порождающих и соотношений. Там же А. Хорошкин установил, что универсальная мультипликативная обертывающая алгебра  $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$  алгебры  $\mathfrak{g}$ , принадлежащей многообразию  $\text{Lie}_2$  пар согласованных скобок Ли, удовлетворяет свойству Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Последнее означает, в частности, что базис  $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$  не зависит от обеих скобок Ли, заданных на  $\mathfrak{g}$ . В работе 2022 г. [7] В. Ю. Губарев при помощи техники базисов Гребнера — Ширшова нашел базис алгебры  $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$  и вычислил ее скорость роста как  $m + 1$ , где  $m = \dim \mathfrak{g}$ .

В работе при помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры  $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$  для произвольного  $n$ . Обозначим  $m = \dim \mathfrak{g}$ . При помощи частично коммутативных алгебр показано, что при  $n, m \gg 1$  скорость роста алгебры

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

$U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$  асимптотически равна  $\alpha nt$ , где  $\alpha = \frac{4}{q_0} \approx 0,69166$ ,  $q_0$  — наименьший корень функции  $J_0(2\sqrt{x}) = 0$ , а  $J_0(z)$  — функция Бесселя первого рода.

### Основные сведения о базисах Гребнера — Ширшова

Пусть  $X$  непусто, порядок  $\leq$ , заданный на множестве  $X^*$  всех слов в алфавите  $X$ , называется *мономиальным*, если из  $u \leq v$  следует  $wu \leq wv$  и  $uw \leq wv$  для любого  $w \in X^*$ .

Пусть  $(X, \leq)$  вполне упорядочено. Зададим на  $X^*$  порядок следующим образом:  $u = x_1 \dots x_n < v = y_1 \dots y_m$ , если и только если  $n < m$  или  $n = m$  и найдется  $i$  такое, что  $x_i < y_i$ , а  $x_j = y_j$  для всех  $j < i$ . Полученный порядок называется порядком deg-lex, и он мономиален.

Зафиксируем некоторое множество  $X$  и мономиальный порядок  $\leq$  на множестве  $X^*$  такой, что  $(X^*, \leq)$  является вполне упорядоченным множеством.

Через  $\text{As}(X)$  будем обозначать свободную ассоциативную алгебру, порожденную множеством  $X$ . Пусть  $f \in \text{As}(X)$  — ассоциативный некоммутативный многочлен от  $X$ ,  $f \neq 0$ . Обозначим через  $\bar{f} \in X^*$  старшее слово многочлена  $f$  — самое большое  $u \in X^*$ , входящее в  $f$  с ненулевым коэффициентом. Многочлен  $f$  называется *унитарным*, если старшее слово  $\bar{f}$  входит в него с коэффициентом, равным единице.

Свойство мономиальности порядка обеспечивает равенство  $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \in X^*$  для любых ненулевых  $f, g \in \text{As}(X)$ .

Пусть  $S \subset \text{As}(X)$  — некоторое множество унитарных многочленов. Слово  $u \in X^*$  называется *редуцированным относительно  $S$* , если  $u$  нельзя представить в виде  $u = u_1 \bar{f} u_2$  ни для каких  $u_1, u_2 \in X^*$ ,  $f \in S$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть  $f$  и  $g$  — унитарные многочлены в  $\text{As}(X)$ , причем  $\omega = \bar{f} = u_1 \bar{g} u_2$  для некоторых  $u_1, u_2 \in X^*$ . Тогда многочлен  $h = f - u_1 g u_2$  называется *композицией включения многочленов  $f$  и  $g$* .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пусть  $f$  и  $g$  — унитарные многочлены в  $\text{As}(X)$ ,  $\omega \in X^*$  — такое слово, что  $\omega = \bar{f}u = v\bar{g}$  для некоторых слов  $u, v \in X^*$ , причем длина  $\omega$  строго меньше суммы длин  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$ . Последнее условие означает, что подслова  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$  пересекаются, а именно, непустое начало слова  $\bar{g}$  совпадает с окончанием слова  $\bar{f}$ . *Композицией пересечения  $f$  и  $g$*  называется многочлен  $h = fu - vg$ .

Как видно из определений, с каждой композицией связано некоторое слово  $\omega \in X^*$ , которое равно большему старшему слову для композиций включения и «объединению» старших слов для композиций пересечения. Чтобы подчеркнуть связь слова  $\omega$  с той или иной композицией многочленов  $f$  и  $g$ , используется следующее обозначение:  $h = (f, g)_\omega$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Пусть  $S$  — множество унитарных многочленов в  $\text{As}(X)$  и  $\omega \in X^*$  — некоторое слово. Многочлен  $h$  называется *тривиальным относительно  $(S, \omega)$* , если

$$h = \sum \lambda_i u_i f_i v_i$$

для некоторых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ ,  $f_i \in S$ ,  $u_i, v_i \in X^*$ , причем  $u_i \bar{f}_i v_i < \omega$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Пусть  $S$  — множество унитарных многочленов в  $\text{As}(X)$ . Множество  $S$  называется *базисом Гребнера — Ширшова в  $\text{As}(X)$* , если любая композиция  $(f, g)_\omega$  для  $f, g \in S$  тривиальна относительно  $(S, \omega)$ .

Будем использовать стандартное обозначение  $\text{As}(X | S)$  копредставления для алгебры  $A \cong \text{As}(X)/(S)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — некоторое множество унитарных многочленов в  $\text{As}(X)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (C1)  $S$  является базисом Гребнера — Ширшова;
- (C2) если  $f \in (S)$ , то слово  $\bar{f}$  не является редуцированным относительно  $S$ ;
- (C3) образы редуцированных относительно  $S$  слов при естественном гомоморфизме  $\text{As}(X) \rightarrow \text{As}(X | S)$  образуют базис алгебры  $\text{As}(X | S)$  как векторного пространства.

### Базис $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Пусть  $X$  — базис алгебры  $\mathfrak{g}$   $n$  согласованных скобок Ли, через  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  обозначим попарно не пересекающиеся множества, каждое из которых биективно  $X$ . Согласно следствию 2.11 из статьи [6] мультипликативная универсальная обертывающая ассоциативная алгебра данной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$   $n$  согласованных скобок задается как  $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}(X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} | S)$ , где  $S$  состоит из соотношений

- 1)  $x^{(i)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(i)} + [x, y]_i = 0$ ,
- 2)  $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} + ([x, y]_i)^{(j)} + ([x, y]_j)^{(i)} = 0, i < j$ .

В [6] для случая  $n = 2$  было установлено свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта: существует такая фильтрация на  $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ , что  $\text{gr } U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}) \cong U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$ , где  $\mathfrak{g}_0$  есть векторное пространство  $\mathfrak{g}$  с тривиальными скобками  $[\cdot, \cdot]_1$  и  $[\cdot, \cdot]_2$ . Наша ближайшая цель — установить свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта для произвольного  $n$ . Свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта означает, что для алгебры  $\mathfrak{g}$  с  $n$  согласованными скобками Ли и ее универсальной обертывающей алгебры  $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$  можно найти такую подходящую фильтрацию, что ее градуированная алгебра изоморфна  $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$ , где  $\mathfrak{g}_0$  представляет собой векторное пространство  $\mathfrak{g}$  с  $n$  тривиальными скобками Ли.

Мы не будем давать в силу его громоздкости строгого определения операции [5]. Тем не менее попытаемся пояснить суть этого понятия.

Набор линейных пространств  $\{\mathcal{C}(n)\}_{n \geq 1}$  над полем  $\mathbb{k}$  и множество линейных отображений (правило композиции)  $\text{Comp}^\pi: \mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(m_n) \rightarrow \mathcal{C}(m)$ , где  $\pi = (m_1, \dots, m_n)$  есть  $n$ -разбиение числа  $m$ , называется *операдой*, если для правила композиции выполнены естественные аналоги ассоциативности и наличия нейтрального элемента. Мы также полагаем, что есть согласованное с правилом композиции действие групп  $S_n$  на пространства  $\mathcal{C}(n)$ .

Операда  $\mathcal{P}$  называется *бинарной*, если она порождена пространством операций  $E = \mathcal{P}(2)$ , и *квадратичной*, если все соотношения между операциями из  $\mathcal{P}(2)$  задаются действием  $S_2$  на  $\mathcal{P}(2)$  и определяющими соотношениями  $R$  пространства  $\mathcal{P}(3)$ . Именно, пространство полилинейных термов степени 3 будем отождествлять с

$$E(3) = \mathbb{k}S_3 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (E \otimes E), \quad \mathcal{P}(3) = E(3)/R,$$

действие (12) на  $E \otimes E$  определяется как  $\text{id} \otimes (12)$ . Полученную операду будем обозначать через  $\mathcal{P}(E, R)$ .

Для бинарной квадратичной операды  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$  кожиль-двойственная операда  $\mathcal{P}^!$  определяется как  $\mathcal{P}(E^\vee, R^\perp)$ , где  $E^\vee$  — дуальное пространство

к пространству  $E$ , снабженное знакопеременным действием группы  $S_2$ , а  $R^\perp$  — подпространство в  $E^\vee(3) \cong E(3)^\vee$ , ортогональное к  $R$ .

Алгебра  $A$  называется *градуированной*, если  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ , где  $A_i$  является подпространством в  $A$  для любого натурального  $i$  и при этом  $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$ . Напомним, что по каждой коммутативной (ассоциативной) градуированной алгебре  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  можно задать симметрическую операду  $\mathcal{O}_A$ , пространство  $\mathcal{O}_A(n)$   $n$ -арных операций еоторого изоморфно  $A_{n-1}$ , действие  $S_n$  берется тривиальным, а правила композиции определяются при помощи умножения в алгебре  $A$  так:

$$\circ_i: \mathcal{O}_A(m) \otimes \mathcal{O}_A(n) = A_{m-1} \otimes A_{n-1} \rightarrow A_{m+n-2} = \mathcal{O}_A(m+n-1).$$

**Предложение.** *Имеется изоморфизм операд  $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]} \simeq \text{Lie}_n^!$ .*

**Доказательство.** Для того чтобы доказать утверждение, необходимо и достаточно (см. следствие 2.2.9 из [5]) установить, что  $D \otimes B \in \text{Lie}$  для произвольных алгебр  $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}$  и  $B \in \text{Lie}_n$ . Поскольку алгебра  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  является свободной в классе  $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}$ -алгебр, достаточно проверить условие  $A \otimes B \in \text{Lie}$  для произвольной алгебры  $B \in \text{Lie}_n$ . Обозначим  $\mathcal{O}_{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}(2) = L(x_1, \dots, x_n)$  и  $\text{Lie}_n(2) = L(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Ясно, что операция  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \mu_i$  в  $(A \otimes B)(2)$  антикоммутирует, поскольку  $(x_i \otimes \mu_i)^{(12)} = x_i^{(12)} \otimes \mu_i^{(12)} = x_i \otimes (-\mu_i)$ . Нам нужно проверить выполнение тождества Якоби для  $\xi$ :

$$1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\xi \otimes \xi) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в левой части выражения, получаем при  $x_i^2$  выражение

$$1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i),$$

которое равно нулю из-за выполнения тождества Якоби для операции  $\mu_i$  в  $B \in \text{Lie}_n$ . При  $x_i x_j$ ,  $i \neq j$ , получаем выражение

$$\begin{aligned} & - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) + 1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) \\ & - (13) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) - (23) \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) + 1 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j), \end{aligned}$$

равное нулю из-за выполнения тождества Якоби для операций  $\mu_i, \mu_j, \mu_i + \mu_j$  в  $B \in \text{Lie}_n$ .  $\square$

Перед тем как установить важное свойство мультипликативной универсальной обертывающей от алгебры набора согласованных скобок Ли, приведем необходимые сведения. Градуированная ассоциативная алгебра  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$  называется *кожулевой* [8], если 1)  $A_0$  полупроста и 2)  $A_0$ , рассматриваемая как левый  $A$ -модуль, допускает градуированную проективную резольвенту

$$\dots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \twoheadrightarrow A_0,$$

при этом каждый из градуированных модулей  $P^i$  порождается своей  $i$ -й компонентой, т. е.  $P^i = AP^i$ .

**Следствие 1.** Пусть  $n \geq 1$ . Для пары  $(U_{\text{Lie}_n}, \text{Lie}_n)$  выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Известно, что алгебра многочленов  $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  кожулева (здесь  $A_0 \cong \mathbb{k}$ ). Согласно теореме 5.3 из [9] кожулевість алгебры  $A$  влечет кожулевість операды  $\mathcal{O}_A$ . По теореме 4.1 из [6] (см. также обсуждение в примере 4.6 из [6]) выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта.  $\square$

Алгебру  $\mathfrak{g}$   $n$  согласованных скобок Ли будем обозначать через  $\mathfrak{g}_0$ , если все  $n$  скобок на ней тривиальны. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай алгебры  $\mathfrak{g}_0$ . Полагаем, что множество  $X$  вполне упорядочено. Тогда  $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$ , где  $S$  состоит из соотношений

- 1)  $x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}$ ,  $x > y$ ,
- 2)  $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} = 0$ ,  $x > y$ ,  $i < j$ .

Продолжаем порядок с множества  $X$  на множество  $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$  так:  $x^{(i)} > y^{(j)}$ , если  $i < j$  или  $i = j$  и  $x > y$ . На слова из  $\text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \rangle$  данный порядок распространяем по правилу deg-lex.

**Теорема 2.** Соотношения  $S$  образуют базис Гребнера — Ширшова алгебры  $U_{\text{Lie}_n}(X)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим возможные композиции соотношений. Ясно, что композиция вида  $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ , где  $x > y > z$ , тривиальна.

- 1)  $x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)}$ , где  $x > y > z$ ,  $i < j$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)} &\stackrel{(2)}{\rightarrow} x^{(i)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(i)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\stackrel{(2)}{\rightarrow} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(i)} \\
 &\quad - (y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)}) + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\stackrel{(1)}{\rightarrow} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(x^{(j)}y^{(i)} + x^{(i)}y^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\stackrel{(2)}{\rightarrow} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\stackrel{(1)}{\rightarrow} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\stackrel{(2)}{\rightarrow} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)}x^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)}) + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\stackrel{(1)}{\rightarrow} y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)} \stackrel{(2)}{\rightarrow} y^{(i)}x^{(i)}z^{(j)}.
 \end{aligned}$$

- 2)  $x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}$ , где  $x > y > z$ ,  $i < j$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)} &\stackrel{(2)}{\rightarrow} y^{(j)}x^{(i)}z^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\stackrel{(2)}{\rightarrow} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - (x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)}) + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\stackrel{(1)}{\rightarrow} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
\rightarrow & y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
\stackrel{(1)}{\rightarrow} & y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(j)} \\
\rightarrow & y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}) \\
\stackrel{(1)(2)}{\rightarrow} & z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + (z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) \\
\rightarrow & z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} \\
\rightarrow & z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
& + z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
\stackrel{(1)}{\rightarrow} & z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
& + x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
\rightarrow & z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} \\
& - z^{(j)}y^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
\stackrel{(2)}{\rightarrow} & z^{(j)}x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(j)} \stackrel{(2)}{\rightarrow} x^{(i)}z^{(j)}y^{(j)} \stackrel{(1)}{\rightarrow} x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}.
\end{aligned}$$

3)  $x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$ , где  $x > y > z$ ,  $i < j < k$ . С одной стороны,

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)} \stackrel{(3)}{\rightarrow} y^{(j)}x^{(i)}z^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(5)}{y^{(j)}z^{(k)}x^{(i)} - x^{(k)}z^{(i)} + z^{(i)}x^{(k)}} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(6)}{z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)}} \\
& + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(6)}{z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)}} \\
& - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(5)}{z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)}} \\
& - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(6)}{z^{(l)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)}} \\
& + x^{(j)}y^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} \\
& + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(6)}{z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)}} \\
& - y^{(k)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
\rightarrow & \stackrel{(6)}{z^k y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)}} \\
& - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
\rightarrow & -y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} \\
& - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow -y^{(k)} z^{(j)} x^{(i)} - y^{(j)} x^{(k)} z^{(i)} + y^{(k)} x^{(j)} z^{(i)} + y^{(j)} x^{(k)} z^{(i)} \\
 & \quad - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + y^{(i)} z^{(k)} x^{(j)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} \\
 & \rightarrow -y^{(j)} x^{(k)} z^{(i)} + y^{(j)} x^{(k)} z^{(i)} + z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)} \\
 & \quad + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} \rightarrow -y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)}.
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 & x^{(i)} y^{(j)} z^{(k)} \xrightarrow{(6)} x^{(i)} z^{(k)} y^{(j)} - x^{(i)} y^{(k)} z^{(j)} + x^{(i)} z^{(j)} y^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(5)} (6) x^{(i)} z^{(k)} y^{(j)} - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} y^{(i)} z^{(j)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} \\
 & \quad - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} x^{(j)} y^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(6)} x^{(i)} z^{(k)} y^{(j)} - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} y^{(i)} z^{(j)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} \\
 & \quad - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} - z^{(i)} x^{(k)} y^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(6)} z^{(k)} x^{(i)} y^{(j)} - x^{(k)} z^{(i)} y^{(j)} + z^{(i)} x^{(k)} y^{(j)} - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} y^{(i)} z^{(j)} \\
 & - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} - z^{(i)} x^{(k)} y^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(5)} z^{(k)} y^{(j)} x^{(i)} - z^{(k)} x^{(j)} y^{(i)} + z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - x^{(k)} z^{(i)} y^{(j)} + z^{(i)} x^{(k)} y^{(j)} \\
 & \quad - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} y^{(i)} z^{(j)} \\
 & - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} - z^{(i)} x^{(k)} y^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(3)} z^{(k)} y^{(j)} x^{(i)} - z^{(k)} x^{(j)} y^{(i)} + z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - x^{(k)} z^{(i)} y^{(j)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + x^{(k)} z^{(j)} y^{(i)} \\
 & \quad - x^{(k)} y^{(j)} z^{(i)} + x^{(k)} z^{(i)} y^{(j)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} \\
 & \quad - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \rightarrow z^{(k)} y^{(j)} x^{(i)} - z^{(k)} x^{(j)} y^{(i)} + z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} z^{(j)} y^{(i)} - x^{(k)} y^{(j)} z^{(i)} \\
 & \quad - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} x^{(i)} y^{(k)} - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(5)} z^{(k)} y^{(j)} x^{(i)} - z^{(k)} x^{(j)} y + z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} x^{(i)} z^{(j)} + x^{(k)} z^{(j)} y^{(i)} - x^{(k)} y^{(j)} z^{(i)} \\
 & \quad - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} + z^{(j)} y^{(k)} x^{(i)} - z^{(j)} x^{(k)} y^{(i)} + z^{(j)} y^{(i)} x^{(k)} \\
 & \quad - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} + z^{(i)} y^{(j)} x^{(k)} \\
 & \xrightarrow{(3)} z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} z^{(j)} x^{(i)} + y^{(k)} x^{(j)} z^{(i)} - y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)} + x^{(k)} z^{(j)} y^{(i)} \\
 & \quad - x^{(k)} y^{(j)} z^{(i)} - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} \\
 & \rightarrow z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} z^{(j)} x^{(i)} + y^{(k)} x^{(j)} z^{(i)} - y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)} \\
 & \quad - y^{(i)} x^{(k)} z^{(j)} - x^{(j)} z^{(i)} y^{(k)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} \\
 & \quad \rightarrow z^{(k)} y^{(i)} x^{(j)} - y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)} + z^{(i)} y^{(k)} x^{(j)} \rightarrow -y^{(k)} z^{(i)} x^{(j)}.
 \end{aligned}$$

Тем самым мы проверили тривиальность всех композиций и  $S$  является базисом Гребнера — Ширшова.  $\square$

**Следствие 2.** В качестве базиса алгебры  $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$  берем редуцированные относительно  $S$  слова, т. е. слова, не содержащие в качестве подслов  $x^{(i)}y^{(i)}$  и  $x^{(i)}y^{(j)}$  для  $x, y \in X$ ,  $x > y$ ,  $i < j$ .

### Скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Экспоненциальная скорость роста  $\rho(A)$  ассоциативной алгебры  $A$  относительно порождающего множества  $X$  вычисляется как

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

где  $a_n = \dim V_n$ ,  $V_n$  — линейная оболочка слов длины  $n$  в алфавите  $X$ .

**Вопрос.** Пусть  $\mathfrak{g} \in \text{Lie}_n$ ,  $\dim \mathfrak{g} = m$ . Чему равна скорость роста  $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}))$  относительно порождающего множества  $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$  при  $|X| = m$ ?

Покажем, как можно переформулировать вопрос в терминах более просто задаваемой ассоциативной алгебры.

Рассмотрим алгебру  $V_{n,m} = \text{Ass}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid T \rangle$ , где  $T$  состоит из соотношений

- 1)  $x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}$ ,  $x > y$ ,
- 2)  $x^{(i)}y^{(j)} = y^{(j)}x^{(i)}$ ,  $x > y$ ,  $i < j$ .

Это так называемая частично коммутативная алгебра, т. е. ассоциативная алгебра, получающаяся факторизацией свободной ассоциативной алгебры по множеству соотношений коммутирования, выполненных для определенных пар порождающих элементов. В работе 1969 г. [10] Картье и Фоата ввели понятие частично коммутативного моноида. Пусть задан простой граф  $G(V, E)$ , тогда *частично коммутативный моноид*  $M(G)$  определяется через копредставление следующим образом:  $M\langle V \mid v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E \rangle$ , т. е. как фактор свободного моноида  $M\langle V \rangle$  по отношению эквивалентности, порожденной множеством  $\{v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E\}$ . Позднее изучались частично коммутативные ассоциативные алгебры [11], частично коммутативные алгебры Ли [12] и другие подобные структуры. Частично коммутативную ассоциативную алгебру, построенную по графу  $G$ , будем обозначать через  $\text{As}(G)$ .

Легко проверить, что соотношения  $T$  образуют базис Гребнера — Ширшова и поэтому множество редуцированных относительно соотношений  $S$  и  $T$  слов совпадает. Отсюда  $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})) = \rho(V_{n,m})$ .

Введем простой конечный граф  $G$  так: вершины  $G$  соответствуют порождающим  $x^{(i)}$ , а ребро между двумя вершинами проводится, если и только если перестановочность соответствующих этим вершинам порождающих входит в  $T$ . Известно [13], что  $\rho(\text{As}(G)) = \beta(G)$ , где  $\beta(G)$  — наибольший по модулю вещественный корень многочлена

$$PC(G, x) = x^{t_0} - c_1(G)x^{t_0-1} + c_2(G)x^{t_0-2} + \dots + (-1)^{t_0-1}c_{t_0-1}x + (-1)^{t_0}c_{t_0}(G),$$

где  $c_i$  обозначает количество клик размера  $i$  в графе  $G$  ( $c_0 := 1$ ), а  $t_0$  — размер максимальной клики в  $G$ .

Поскольку мы работаем с очень конкретным графом  $G$ , мы сможем явно посчитать все коэффициенты  $c_i(G)$ .

Всего в графе  $G$  вершин  $mn = C_m^1 C_n^1$ , ребер, возникающих из первых соотношений —  $C_m^2 n = C_m^2 C_n^1$ , а из вторых —  $C_m^2 C_n^2$ , здесь  $C_m^2$  отвечает за выбор подходящих  $x, y$  из алфавита  $X$ , а  $C_n^2$  отвечает за выбор пары индексов  $(i, j)$ .

Для произвольного  $1 \leq k \leq m$  сперва выбираем  $k$  букв  $x_1, \dots, x_k \in X$ , далее выбираем  $C_n^s$  способами  $s$ -элементное подмножество  $Z \subset \{0, \dots, n-1\}$ . Теперь

для каждого  $Z$  мы  $C_{k-1}^{s-1}$  способами расставляем перегородки, что соответствует тому, как мы распределяем элементы  $Z$  по индексам  $i_1, \dots, i_k$ . Тем самым

$$c_k = C_m^k (C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k).$$

Комбинаторно легко увидеть, что

$$C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} PC(G, x) &= x^m - C_m^1 C_n^1 x^{m-1} + C_m^2 C_{n+1}^2 x^{m-2} + \dots + (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k} \\ &\quad + \dots + (-1)^m C_{n+m-1}^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k}. \end{aligned}$$

При помощи Wolframalpha мы приближенно вычислили  $\beta(G)$  для малых значений  $n, m$ :

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4.73	6.45	8.16	9.87	11.58	13.29	15.00	16.71	18.42	20.12
4	6.45	8.87	11.29	13.70	16.11	18.52	20.93	23.33	25.74	28.15
5	8.16	11.29	14.40	17.51	20.62	23.72	26.83	29.93	33.03	36.14
6	9.87	13.70	17.51	21.32	25.12	28.92	32.72	36.52	40.31	44.11
7	11.58	16.11	20.62	25.12	29.62	34.11	38.60	43.10	47.59	52.08
8	13.29	18.52	23.72	28.92	34.12	39.30	44.49	49.67	54.85	60.04
9	15.00	20.93	26.83	32.72	38.60	44.49	50.36	56.24	62.12	68.00
10	16.71	23.33	29.93	36.52	43.10	49.67	56.24	62.81	69.38	75.95
11	18.42	25.74	33.03	40.31	47.59	54.85	62.12	69.38	76.65	83.91

Для поиска асимптотики  $\beta(G)$  нам понадобится следующая

**Лемма.** Если  $m \geq n$ , то

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x).$$

**Доказательство.** Равенство многочленов сводится после раскрытия скобок и подсчета коэффициентов при  $x^{m-k}$  к проверке комбинаторного равенства

$$\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} = C_{n+k-1}^k C_m^k. \quad (1)$$

Первый множитель выбираем из первой скобки  $(x-1)^{m-n+1}$  с коэффициентом  $(-1)^s C_{m-n+1}^{m-n+1-s} = (-1)^s C_{m-n+1}^s$ . Из второй скобки  $x^{n-1-(k-s)}$  приходит с коэффициентом  $(-1)^{k-s} C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s}$ . Перемножая  $(-1)^s$  и  $(-1)^{k-s}$ , получаем  $(-1)^k$ .

Левую часть (1) можно представить как

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} \\ &= C_{m+k}^k C_{n-1}^k {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1), \quad (2) \end{aligned}$$

где  ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$  обозначает обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i (c)_i}{(d)_i (e)_i} \cdot \frac{z^i}{i!},$$

здесь

$$(x)_i = \frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ x(x+1)\dots(x+i-1), & i > 0, \end{cases}$$

обозначает символ Похгаммера.

Известная теорема Заальшутца (1890) гласит, что

$${}_3F_2(a, b, -n; c, a+b-c-n-1; 1) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.$$

Тем самым в формуле (2) переписываем

$$\begin{aligned} {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1) &= \frac{(-k-n+1)_k (-m)_k}{(-m-k)_k (-n+1)_k} \\ &= \frac{(-k-n+1)\dots(-n) \cdot (-m)\dots(-m+k-1)}{(-m-k)\dots(-m-1) \cdot (-n+1)\dots(-n+k)} \\ &= \frac{(k+n-1)\dots(n) \cdot (m)\dots(m-k+1)}{(m+k)\dots(m+1) \cdot (n+1)\dots(n-k)} \\ &= \frac{(C_{n+k-1}^k \cdot k!) \cdot (C_m^k \cdot k!)}{(C_{m+k}^k \cdot k!) \cdot (C_{n-1}^k \cdot k!)} = \frac{C_{n+k-1}^k C_m^k}{C_{m+k}^k C_{n-1}^k}, \end{aligned}$$

что и дает после домножения на  $C_{m+k}^k C_{n-1}^k$  правую часть (1).  $\square$

Перед тем как вывести асимптотику  $\beta(G)$ , напомним определение функции Бесселя первого рода:  $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2/4)^k}{k!k!}$ .

Ниже будем использовать следующие математические знаки:  $\gg$  — «много больше»,  $\ll$  — «много меньше»,  $\sim$  — «асимптотически эквивалентны».

**Теорема 3.** Пусть  $m, n \gg 1$ , тогда  $\beta(G) = \alpha(mn + o(mn))$ , где  $\alpha = \frac{4}{q_0} \approx 0,69166$ ,  $q_0$  — наименьший корень функции  $J_0(2\sqrt{x})$ .

**Доказательство.** Пусть  $m, n \gg 1$ . Тогда выполнено  $|E(G)| \sim m^2 n^2 / 4 = |V(G)|^2 / 4$ , поэтому согласно следствиям 8.4 и 9.3 из [14] верны оценки

$$0,5nm \leq \beta \leq 0,751nm.$$

Отсюда можно искать  $\beta$  в виде  $\beta \sim \alpha nm$  для параметра  $\alpha \in [0,5; 0,751]$ , вообще говоря, зависящего от  $n, m$ .

Наша цель — показать, что  $\alpha$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$0 = \alpha^m - \frac{\alpha^{m-1}}{1!1!} + \frac{\alpha^{m-2}}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha^{m-k}}{k!k!} + \dots \quad (3)$$

Его наибольший корень асимптотически равен  $\alpha = \frac{4}{q_0} \approx 0,69166$ , где  $q_0$  — наименьший корень функции  $J_0(2\sqrt{x})$ . Все другие корни (3) не превосходят 0,14, т. е. не лежат на отрезке  $[0,5; 0,751]$ .

СЛУЧАЙ 1:  $n - 1 \geq m$ . Тогда коэффициент в  $PC(G, x)$  при  $x^{m-k}$  без учета знака можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} C_m^k C_{n+k-1}^k &= \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2) \dots n}{k!} \\ &= \frac{1}{k!k!} [nm] [(m-1)(n+1)] \dots [(m-k+1)(n+k-1)] \leq \frac{(nm)^k}{k!k!}. \end{aligned}$$

Далее, для  $2/5 < \gamma < 4/5$  выполнено

$$PC(G, \gamma mn) / (mn)^m \sim \gamma^m - \gamma^{m-1} + \frac{\gamma^{m-2}}{2!2!} - \dots,$$

где для  $k \ll O(\sqrt{m})$  соответствующее слагаемое без учета знака асимптотически равно  $\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!}$ . При  $k = O(\sqrt{m})$  слагаемое (также без учета знака) не превосходит  $\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!}$ , что по формуле Стирлинга  $q! \sim \sqrt{2\pi q}(q/e)^q$  можно оценить сверху так:

$$\frac{\gamma^{m-k}}{k!k!} < \frac{\gamma^m}{p\gamma^{\sqrt{m}/r}(\sqrt{m}/t)^{\sqrt{m}/s}} < \frac{\gamma^m}{p(\gamma'\sqrt{m}/t)^{\sqrt{m}/s}}$$

для некоторых  $p, t, s, r, \gamma'$ , зависящих от  $k$ , но не от  $n, m$ . Если мы суммируем даже  $m$  слагаемых такого типа, то все равно получим выражение из  $o(\gamma^m)$ . Тем самым приходим к уравнению (3). Для  $y = 1/\alpha$  получаем уравнение

$$0 = 1 - \frac{y}{1!1!} + \frac{y^2}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{y^k}{k!k!} + \dots = J_0(2\sqrt{y}),$$

откуда и находим указанное выше значение  $\alpha$ .

СЛУЧАЙ 2:  $m \geq n$ . По лемме выполнено

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x),$$

и мы приходим к случаю 1. Следовательно,

$$\beta(G(m, n)) = \beta(G(n-1, m+1)) \sim \alpha(n-1)(m+1) \sim \alpha nm.$$

Тем самым теорема доказана.  $\square$

**Благодарности.** Авторы благодарят П. С. Колесникова и рецензента за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bershtein M., Dotsenko V., Khoroshkin A. Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad // J. Am. Math. Soc. 2007. V. 24. P. 1–30.
2. D'León R. G. On the free Lie algebra with multiple brackets // Adv. Appl. Math. 2016. V. 79. P. 37–97.
3. Liu F. Combinatorial bases for multilinear parts of free algebras with two compatible brackets // J. Algebra. 2010. V. 323, N 1. P. 37–97.
4. Dotsenko V., Khoroshkin A. Gröbner bases for operads // Duke Math. J. 2010. V. 153. P. 363–396.
5. Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76. P. 203–272. ■
6. Khoroshkin A. PBW property for associative universal enveloping algebras over an operad // Int. Math. Res. Not. 2022. V. 2022, N 4. P. 3106–3143.
7. Gubarev V. Universal enveloping algebra of a pair of compatible Lie brackets // Intern. J. Algebra Comput. 2022. V. 32, N 7. P. 1335–1344.

8. Beilinson A., Ginzburg V., Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory // J. Am. Math. Soc. 1996. V. 9. P. 473–527.
9. Dotsenko V., Khoroshkin A. Quillen homology for operads via Gröbner bases // Documenta Math. 2013. V. 18. P. 707–747.
10. Cartier P., Foata D. Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. Berlin: Springer-Verl., 1969. ((Lecture Notes in Mathematics; V. 85).
11. Kim K., Makar-Limanov L., Neggers J., Roush F. Graph algebras // J. Algebra. 1980. V. 64, N 1. P. 46–55.
12. Duchamp G., Krob D. The free partially commutative Lie algebra: Bases and ranks // Adv. Math. 1992. V. 95. P. 92–126.
13. Fisher D.C., Solow A.E. Dependence polynomial // Discrete Math. 1990. V. 82. P. 251–258.
14. Gubarev V. PC-polynomial of graph. 2018. 118 p. arxiv:1808.03932.

*Поступила в редакцию 7 июля 2025 г.*

*После доработки 13 декабря 2025 г.*

*Принята к публикации 20 декабря 2025 г.*

Чжан Чжэн

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

2268663734@qq.com

Губарев Всеволод Юрьевич (ORCID 0000-0002-7839-5714)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

wsewolod89@gmail.com