УДК 514.114

Многомерный аналог внешней окружности Конвея

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СОРАН, тема FWNF-2026-0011

С. А. Малюгин

Малюгин Сергей Артемьевич (ORCID 0009-0004-0202-7669)
Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. ак. Коптюга, 4,
Новосибирск, Россия.
e-mail: mal@math.nsc.ru

Аннотация. Если в треугольнике ABC стороны AB и AC продолжить за точку A на расстояние, равное длине противолежащей стороны BC и то же самое проделать с вершинами B и C, то построенные 6 точек лежат на одной окружности (окружности Конвея), центр которой совпадает с центром вписанной окружности. В работе F. J. García Capitán рассмотривался "внешний" аналог окружности Конвея, центр которой совпадал с ценром одной из вневписанных окружностей треугольника ABC. В настоящей работе для симплекса в n-мерном евклидовом пространстве рассматривается многомерный аналог внешней окружности Конвея.

Ключевые слова: окружность Конвея, сфера Конвея, каркасный тетраэдр, внекаркасный тетраэдр, евклидово пространство, треугольник, тетраэдр, симплекс

If the sides AB and AC of a triangle ABC are prolonged beyond the point A by the length of the opposite side BC and the same is done with the vertices B and C, then the so-constructed 6 points lie on the sole circle (the Conway circle), whose center coincides with the center of the inscribed circle. In the work of F.J. Garcia Capitan considered an "external analog" of the Conway circle, the center of which coincided with the center of one of the excircles of triangles ABC. In this work, for a simplex in n-dimensional Euclideaan space, we consider a multidimensional analog of the external Conway circle.

Keywords : Conway circle, Conway sphere, frame tetrahedron, exframe tetrahedron, Euclidean space, triangle, tetrahedron, simplex

1. Введение

Если в треугольнике $[A_1A_2A_3]$ стороны $[A_1A_2]$ и $[A_1A_3]$ продолжить за точку A_1 на расстояние, равное длине противолежащей стороны $[A_2A_3]$ и то же самое проделать с вершинами A_2 и A_3, то построенные таким способом 6 точек будут лежать на одной окружности, центр которой совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $[A_1A_2A_3]$, [1, 2, 3]. Такая окружность называется *окружностью Конвея.* В. А. Александровым рассмотрена конструкция сферы Конвея для тетраэдра в 3х-мерном евклидовом пространстве, см. [4, 5]. Такая сфера является двумерным аналогом окружности Конвея. Она существует тогда и только тогда, когда тетраэдр является *каркасным* (т.е., суммы длин любой пары противолежащих рёбер одинаковы). Многомерный аналог окружности Конвея (для симплекса в n-мерном евклидовом пространстве) был рассмотрен в [6].

Определим внешний аналог окружности Конвея. В треугольнике $[A_1A_2A_3]$ на продолжении сторон $[A_1A_2]$ и $[A_1A_3]$ откладываем от точки A_1 две точки $A_{2,1}$ и $A_{3,1}$ на расстоянии, равном длине противолежащей стороны $[A_2A_3]$ в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ соответственно. Аналогичным образом, на продолжениях сторон $[A_1A_2]$ и $[A_2A_3]$ откладываем от точки A_2 две точки $A_{1,2}$ и $A_{3,2}$ на расстоянии, равном длине противолежащей стороны $[A_1A_3]$ в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$ соответственно. И наконец, от вершины A_3 откладываем на расстоянии $|A_1A_2|$ ещё две точки $A_{1,3}$ и $A_{2,3}$ в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_3A_2}$ соответственно. Шесть построенных точек $A_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$ будут лежать на одной окружности, которую можно назвать *внешней окружностью Конвея.* Центр такой окружности совпадает с центром вневписанной окружности, касающейся стороны $[A_2A_3]$ и продолжений сторон $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, см. [7, Corollary 5 (a)]. В итоге, для заданного треугольника $[A_1A_2A_3]$ можно построить 4 различные окружности Конвея – одну внутреннюю и три внешних. Многомерный аналог внешней окружности Конвея нигде ранее не рассматривался и в настоящей работе даётся решение такой задачи. Работа является логическим завершением предыдущей публикации автора [6].

2. Внешняя сфера Конвея и полувневписанная сфера

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве E_n n-мерный симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$. Нас будут далее интересовать условия существования $(n-1)$-мерной сферы, касающейся каждого ребра симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, или его продолжения. Сфера, касающаяся каждого ребра симплекса, называется *полувписанной сферой.* Возможны также варианты, когда для некоторой вершины A_i сфера касается каждого ребра $[A_j, A_k]$ $(j, k \neq i)$ и продолжения за вершину A_j каждого ребра $[A_i, A_j]$ $(j \neq i)$. Такую сферу будем называть *полувневписанной сферой* (относительно вершины A_i). Без существенного ограничения общности можно считать, что $i = n+1$.

Зафиксируем $n+1$ вещественых чисел $h_1, \ldots, h_{n+1}$. На прямой содержащей ребро $[A_{n+1}, A_l]$ отмечаем точку $A_{n+1,l}$, находящуюся на расстоянии $|h_l|$ от точки A_l (в направлении $\overrightarrow{A_{n+1}A_l}$, если $h_l > 0$, и в противоположном направлении $\overrightarrow{A_lA_{n+1}}$, если $h_l < 0$). Кроме этого, отметим на этой же прямой точку $A_{l,n+1}$ на расстоянии $|h_{n+1}|$ от A_{n+1} (в направлении $\overrightarrow{A_{n+1}A_l}$, если $h_{n+1} > 0$; в направлении $\overrightarrow{A_lA_{n+1}}$, если $h_{n+1} < 0$), $l = 1, \ldots, n$. И наконец, для любых $i, j < n+1$ $(i \neq j)$ отмечаем на прямой, содержащей ребро $[A_i.A_j]$, точку $A_{j,i}$, находящуюся на расстоянии $|h_i|$ от точки A_i (в направлении $\overrightarrow{A_iA_j}$, если $h_i > 0$;

в направлении $\overrightarrow{A_jA_i}$, если $h_i < 0$). Обозначим

$$a_{k,l} = h_k + h_l - |A_kA_l| \quad k,l = 1,\dots,n, \quad k < l,$$
$$a_{k,n+1} = |A_kA_{n+1}| + h_k - h_{n+1}, \quad k = 1,\dots,n. \qquad (1)$$

Очевидно, $|a_{k,l}|$ – это расстояние между точками $A_{k,l}$ и $A_{l,k}$.

Лемма 1. *Если выполняется условие*

1) *все числа $a_{k,l}$ равны между собой,*

то имеют место следующие утверждения:

2) *существует $(n-1)$-мерная сфера (полувневписанная сфера), касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ $(k,l = 1,\dots,n; k < l)$, и касающаяся всех продолжений за точки A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1,\dots,n)$;*

3) *Существует $(n-1)$-мерная сфера, проходящая через все точки $A_{k,l}$ $(k,l = 1,\dots,n+1; k \neq l)$.*

При этом сферы из 2) и 3) имеют один и тот же центр.

Доказательство. Доказываем индукцией по размерности n. База индукции $n = 2$.

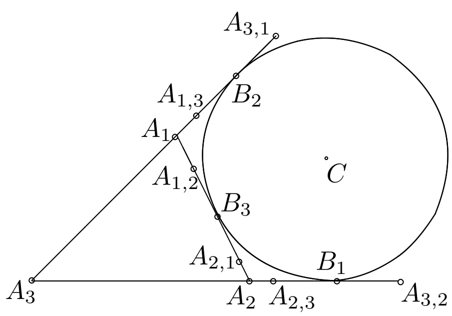

рис. 1

Рассмотрим треугольник $[A_1, A_2, A_3]$. Проведем вневписанную окружность с центром в точке C, касающуюся ребра $[A_1A_2]$ в точке B_3 и продолжений ребер $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$ в точках B_2, B_1, соответственно. На рис. 1 отмечены точки $A_{i,j}$ $(i,j = 1,2,3)$ в предположении, что $h_1, h_2, h_3 > 0$, $h_1 + h_2 > |A_1A_2|$ (в этом случае будет также $|A_iA_3| < h_3 < |A_iA_3| + h_i$, $i = 1,2$). Так как $|A_1B_2| = |A_1B_3|$ и $|A_{2,1}A_1| = |A_{3,1}A_1| = |h_1|$, то $|A_{2,1}B_3| = |A_{3,1}B_2|$. Из равенства длин отрезков $[A_{3,1}, A_{1,3}]$ и $[A_{2,1}, A_{1,2}]$ следует равенство $|A_{1,3}B_2| = |A_{1,2}B_3|$. Аналогичным образом, $|A_{1,2}B_3| = |A_{3,2}B_1|$ и $|A_{1,3}B_2| = |A_{2,3}B_1|$. Поэтому $|A_{2,3}B_1| = |A_{3,2}B_1|$ и точка касания B_1 лежит на середине отрезка $[A_{2,3}, A_{3,2}]$. Аналогично, B_2 лежит на середине $[A_{1,3}, A_{3,1}]$ и B_3 на середине $[A_{1,2}, A_{2,1}]$. Так как $[B_3, C]$ ортогонально $[A_{1,2}, A_{2,1}]$, то $|A_{2,1}C| = |A_{1,2}C|$. Аналогично, $|A_{1,3}C| = |A_{3,1}C|$ и $|A_{2,3}C| = |A_{3,2}C|$. Из равенства длин отрезков $[A_{i,j}, B_k]$ $(i \neq j \neq k)$ и равенств $|B_1C| = |B_2C| = |B_3C|$ следует равенство длин всех шести отрезков $[A_{k,l}, C]$ $(k,l = 1,2,3; k \neq l)$. Случай $h_1 + h_2 \leqslant |A_1A_2|$, а также другие не рассмотренные случаи доказываются аналогичным образом. База индукции установлена.

Допустим, что утверждение установлено для размерности $\leqslant n-1$ и рассмотрим в пространстве E_n n-мерный симплекс $[A_1,\dots,A_{n+1}]$, для которого выбраны вещественные числа $h_1,\dots,h_{n+1}$ и построены точки $A_{k,l}$ $(k,l = 1,\dots,n+1; k \neq l)$, для которых выполняется посылка 1). В симплексе $[A_1,\dots,A_{n+1}]$

рассмотрим две $(n-1)$-мерные грани $[A_1, A_3, \ldots, A_{n+1}]$ и $[A_2, \ldots, A_{n+1}]$. По предположению индукции, существует $(n-2)$-мерная сфера с центром в точке C, содежащая все отмеченные точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, 3, \ldots, n+1; k \neq l)$ и существует $(n-2)$-мерная сфера S, с тем же центром C, касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, 3, \ldots, n; k < l)$ и продолжений за точку A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1, 3, \ldots, n)$. Аналогично, существует $(n-2)$-мерная сфера с центром в точке C', содержащая все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 2, \ldots, n; k \neq l)$ и существует $(n-2)$-мерная сфера S', с тем же центром C', касающаяся всех ребер $A_{k,l}$ $(k, l = 2, \ldots, n; k < l)$ и продолжений за точку A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 2, \ldots, n)$. Через точку C проведем прямую L, ортогональную $(n-1)$-мерной плоскости Π, проходящей через грань $[A_1, A_3, \ldots, A_{n+1}]$. Аналогично проведем через точку C' прямую L', ортогональную $(n-1)$-мерной плоскости Π', проходящей через грань $[A_2, \ldots, A_{n+1}]$. Любая точка D прямой L находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ $(k, l = 1, 3, \ldots, n+1; k \neq l)$ и на одинаковом расстоянии от всех точек касания сферы S с ребрами грани $[A_1, A_3, \ldots, A_n]$ и продолжении ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1, 3, \ldots, n)$. Докажем, что прямые L и L' пересекаются. Для этого рассмотрим общую $(n-2)$-мерную грань $[A_3, \ldots, A_{n+1}]$ граней $[A_1, A_3, \ldots, A_{n+1}]$ и $[A_2, \ldots, A_{n+1}]$. Она лежит в $(n-2)$-мерной плоскости Π'', являющейся пересечением $(n-1)$-мерных плоскостей Π и Π'. Сечением сферы S плоскостью Π'' будет $(n-3)$-мерная сфера S'', касающаяся всех ребер $(n-3)$-мерной грани $[A_3, \ldots, A_n]$ и продолжений ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 3, \ldots, n)$. В случае $n = 3$ эта 0-мерная сфера вырождается в точку. Пусть C'' – центр этой сферы. Аналогичное сечение сферы S' плоскостью Π'' будет та же самая сфера S'' с тем же центром C'', так как сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_3, \ldots, A_n]$ и продолжений ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 3, \ldots, n)$, единственна. В случае $n = 3$ точка C'' является общей точкой касания двух окружностей S и S' с продолжением ребра $[A_3, A_4]$ и эта точка лежит на середине отрезка $[A_{34}, A_{43}]$ как для треугольника $[A_1, A_3, A_4]$ так и для треугольника $[A_2, A_3, A_4]$. Очевидно, отрезок $[C, C'']$ ортогонален Π'' и $[C', C'']$ тоже ортогонален Π''. Через C'' проведем двумерную плоскость Π_2, ортогональную $(n-2)$-мерной плоскости Π''. Эта плоскость содержит точки C, и C'. Рассмотрим любую точку $X \in L$. Так как $[C, X]$ перпендикулярно гиперплоскости Π и $[C, C'']$ перпендикулярно $(n-2)$-мерной плоскости Π'', то $[X, C'']$ перпендикулярно Π'' (по теореме о трех перпендикулярах в n-мерном пространстве E_n). Следовательно, вся прямая L лежит в плоскости Π_2. Аналогичным образом, вся прямая L' тоже лежит в Π_2. Так как для невырожденного симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ гиперплоскости Π и Π' не параллельны, то ортогональные к ним прямые L и L' тоже не параллельны. Поэтому внутри двумерной плоскости Π_2 прямые L и L' пересекаются в некоторой точке D.

Рассмотрим теперь $(n-1)$-мерную грань $[A_1, \ldots, A_n]$ и проведем через нее $(n-1)$-мерную плоскость Π'''. В [6] было доказано существование $(n-2)$-мерной сфера с центром в точке C''', содержащей все отмеченные точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n)$, которые лежат на продолжении ребер этой грани, и существование $(n-2)$-мерной сферы S''' с тем же центром C''', которая касается всех ребер этой же грани (в [6] предположение, что все $h_i > 0$, является несущественным). Сечением сферы S''' $(n-1)$-мерной плоскостью Π будет $(n-3)$-мерная сфера S''''. Если $n > 3$, то она получается также сечением сферы S $(n-1)$-мерной плоскостью Π'''. Пусть C'''' – центр сферы S''''. Если $n = 3$, то

C'''' является общей точкой касания окружностей S и S''' (эта точка лежит на середине отрезка $[A_{1,3}A_{3,1}]$ для треугольника $[A_1, A_3, A_4]$ и для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$, что было доказано в [6, лемма 1]. Проведем через C''' прямую L''', ортогональную гиперплоскости Π'''. Из предыдущего следует, что прямые L и L''', а также L' и L''' тоже должны пересекаться в некототорых точках D' и D'' соответственно. Докажем, что $D = D' = D''$. Если это неверно, то существует двумерная плоскость Π'_2, проходящая через эти три прямые L, L', L'''. Рассмотрим $(n-2)$-мерную плоскость Π'_{n-2}, ортогональную плоскости Π'_2. Так как L перпендикулярно Π, то Π'_{n-2}, после переноса на некоторый вектор, вкладывается в Π. По той же самой причине Π'_{n-2}, после переноса на подходящий вектор, вкладывается в Π' и в Π'''. Поэтому Π'_{n-2}, после переноса на некоторый вектор, должно вкладываться в пересечение $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi'''$, размерность которого равна $n-3$. Полученное противоречие доказывает, что $D = D' = D'''$. Это утверждение остается верным, если мы рассмотрим любые другие три различных грани симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$.

Итак, доказано, что существует точка D, которая находится на одинаковом расстоянии от ребер $(n-1)$-мерной грани $[A_1, \ldots, A_n]$ и от продолжений ребер граней, содержащих вершину A_{n+1}. Так как любая пара $(n-1)$-мерных граней имеет общие ребра, то D находится на одинаковом расстоянии от продолжений всех ребер симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Следовательно, существует сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$ и всех продолжений ребер $[A_i, A_{n+1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Аналогичным образом доказывается, что D находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$.

Лемма 2. *Допустим, что для симплекса* $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ *выполняется условие*

3) *для некоторого набора вещественных чисел* $h_1, \ldots, h_{n+1}$ *существует* $(n-1)$*-мерная сфера* S*, содержащая все определенные выше точки* $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$.

Тогда центр C *сферы* S *является одновременно центром другой сферы, полувневписанной относительно вершины* A_{n+1}.

Доказательство. Пусть верно условие 3). Через двумерную грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ $(i_1 < i_2 < n+1)$ проведем двумерную плоскость Π. Сечением сферы S (содержащей все точки $A_{k,l}$) плоскостью Π будет окружность S_1, см. рис. 2.

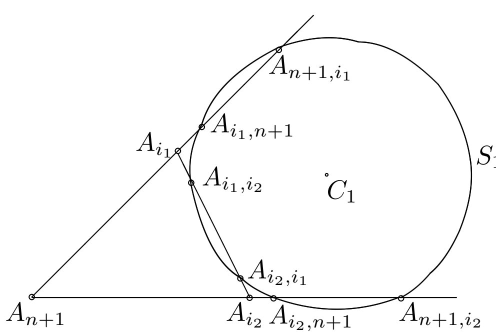

рис. 2

Так как $|A_{i_2,i_1}A_{i_1}| = |A_{n+1,i_1}A_{i_1}| = |h_{i_1}|$, то хорды $[A_{i_2,i_1}, A_{i_1,i_2}]$ и $[A_{n+1,i_1}, A_{i_1,n+1}]$ имеют с окружностью S_1 (в точках A_{i_2,i_1} и A_{n+1,i_1}, соответственно) один и тот же угол α. Поэтому эти две хорды имеют одинаковую длину, т.е. $|A_{i_2,i_1}A_{i_1,i_2}| =$

$|A_{n+1,i_1}A_{i_1,n+1}|$. Аналогично, из равенства $|A_{n+1,i_2}A_{i_2}| = |A_{i_1,i_2}A_{i_2}| = |h_{i_2}|$ следует, что и третья хорда $[A_{n+1,i_2}, A_{i_2,n+1}]$ имеет с окружностью S_1 в точке A_{n+1,i_2} такой же угол α, поэтому $|A_{i_2,n+1}A_{n+1,i_2}| = |A_{i_1,i_2}A_{i_2,i_1}| = |A_{i_1,n+1}A_{n+1,i_1}|$. Для любой грани $[A_{i_1}, A_{j_2}, A_{n+1}]$, имеющей общее ребро $[A_{i_1}, A_{n+1}]$ с гранью $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ будем иметь продолжение предыдущих равенств $|A_{i_1,n+1}A_{n+1,i_1}| = |A_{j_2,n+1}A_{n+1,j_2}| = |A_{i_1,j_2}A_{j_2,i_1}|$ и т.д. Поэтому в симплексе $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ все числа $|A_{k,l}A_{l,k}|$ $(k, l = 1, \ldots, n{+}1; k < l)$ равны одному числу d. Пусть R — радиус сферы S. Рассмотрим сферу S'_1 с центром в C и радиусом $r = \sqrt{R^2 - (d/2)^2}$. Эта сфера касается середины каждого отрезка $[A_{k,l}A_{l,k}]$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k < l)$. Следовательно, центр C сферы S является одновременно и центром другой сферы S'_1, либо полувписанной в симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, либо полувневписанной относительно некоторой вершины симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Для выяснения точного расположения сферы S'_1 рассмотрим любую двумерную грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ $(i_1 < i_2 < n+1)$ и проведем через неё двумерную плоскость Π. Пересечением сферы S'_1 и плоскости Π будет некоторая окружность S_1, касающаяся трёх отрезков $[A_{i_1}, A_{i_2}]$, $[A_{i_1}, A_{n+1}]$, $[A_{i_2}, A_{n+1}]$, либо их продолжений. Точки $A_{i_1,n+1}$ и A_{i_1,i_2} находятся на одинаковом расстоянии $|h_{i_1}|$ от вершины A_{i_1} и лежат на окружности S_1. Кроме этого, $A_{i_1,n+1}$ лежит на продолжении отрезка $[A_{i_1}, A_{n+1}]$ за точку A_{i_1}, а A_{i_1,i_2} лежит на отрезке $[A_{i_1}, A_{i_2}]$, либо на его продолжении за точку A_{i_2} (либо наоборот, A_{i_1,i_2} лежит на продолжении отрезка $[A_{i_1}, A_{i_2}]$ за точку A_{i_1}, а $A_{i_1,n+1}$ лежит на отрезке $[A_{i_1}, A_{n+1}]$, либо на его продолжении за точку A_{n+1}). Это означает, что центр C_1 окружности S_1 лежит на биссектрисе внешнего угла треугольника $[A_{i_1}A_{i_2}A_{n+1}]$ при вершине A_{i_1}. Аналогичным образом доказывается, что C_1 лежит на биссектрисе внешнего угла этого треугольника при вершине A_{i_2}. Поэтому S_1 является вневписанной окружностью треугольника $[A_{i_1}A_{i_2}A_{n+1}]$, касающейся стороны $[A_{i_1}A_{i_2}]$ и продолжений сторон $[A_{i_1}A_{n+1}]$, $[A_{i_2}A_{n+1}]$. Такая ситуация возможна в единственном случае, когда S'_1 является полувневписанной сферой симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ относительно вершины A_{n+1}.

Лемма 3. *Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задан симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Допустим, что существует $(n-1)$-мерная сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$ и всех продолжений за точку A_i ребер $[A_i, A_{n+1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда существует набор чисел $h_1, \ldots, h_{n+1}$ такой, что все числа $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n; k < l)$, $a_{k,n+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, определяемые формулами* (1), *равны между собой.*

Доказательство. Обозначим точки касания сферы и ребра $[A_k, A_l]$ (или его продолжения) через $B_{k,l}$. Из условия касания следует, что для каждого фиксированного k, все длины $|A_kB_{k,l}|$ $(l = 1, \ldots, n+1; ; l \neq k)$ равны между собой и равны a_k. Из определния чисел a_k следуют равенства

$$|A_kA_l| = a_k + a_l, \quad |A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - a_k \ (k, l = 1, \ldots, n; k \neq l). \qquad (2)$$

Для фиксированного параметра λ полагаем

$$h_k = \lambda + \sum_{j \neq k}^{n}(a_{n+1} - a_j) \ (k = 1, \ldots, n), \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1}\sum_{i<j}^{n}(a_i + a_j). \quad (3)$$

Тогда все числа

$$a_{k,l} = h_k + h_l - |A_kA_l| =$$

$$= 2\lambda + 2a_{n+1} - a_k - a_l + \sum_{j\neq k}^{n}(a_{n+1} - a_j) + \sum_{j\neq l}^{n}(a_{n+1} - a_j) =$$

$$= 2\lambda + 2na_{n+1} - 2(a_1 + \dots + a_n) \ (k, l = 1, \dots, n; k < l)$$

$$a_{k,n+1} = h_k + |A_k A_{n+1}| - h_{n+1} = 2\lambda + 2na_{n+1} - 2(a_1 + \dots + a_n)$$

равны между собой. Мы построили однопараметрическое семейство сфер, проходящих через все точки $A_{k,l}$ (полувневписанная сфера тоже входит в это семейство).

Для данного n-мерного симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ $(n \geqslant 3)$ и вещественного параметра λ рассмотрим $(n+1)$ вещественных чисел

$$h_k = \lambda + \sum_{j\neq k}^{n}|A_j A_{n+1}|; \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1}\sum_{i<j}^{n}|A_i A_j|. \tag{4}$$

По набору $h_1, \dots, h_{n+1}$ на ребрах $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$ и на продолжении ребер $[A_k A_{n+1}]$ за точку A_k строим точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1)$, как это описано в начале этого параграфа. Определим также числа $a_{k,l}$ $(k < l \leqslant n+1)$ по формулам (1). Теперь основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны между собой:*

(α) *Все числа $a_{k,l}$, определяемые формулами* (1), *равны между собой;*

(β) *Существует $(n-1)$-мерная сфера (полувневписанная сфера), касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$, и касающаяся всех продолжений за точку A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1, \dots, n)$;*

(γ) *Существует набор из $n+1$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{n+1}$, для которого выполняются равенства* (2);

(δ) *Существует $(n-1)$-мерная сфера, проходящая через все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1; k \neq l)$;*

(ε) *Существует набор из $n+1$ вещественных чисел $\{h_k : k = 1, \dots, n+1\}$ для которого все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1; k \neq l)$, определенные в начале параграфа по этому набору, лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере;*

при этом центры сфер в утверждениях (β) и (δ), (ε) совпадают.

Доказательство. Импликация $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ следует из леммы 1 (свойство 2)). Импликация $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ доказана в лемме 3. Импликация $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ обоснована тем, что из равенств (2) и (3) следуют равенства (4) и в лемме 3 доказано, что тогда все числа $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1; k < l)$, определяемые формулами (1), равны между собой. Следовательно, выполнено свойство 3) из леммы 1 и доказана также импликация $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$. Импликация $(\delta) \Rightarrow (\varepsilon)$ очевидна (мы не предполагаем в утверждении (ε), что числа $h_1, \dots, h_{n+1}$ обязательно определяются по формулам (4)). Импликация $(\varepsilon) \Rightarrow (\beta)$ доказана в лемме 2. Установлена эквивалентность между собой всех утверждений $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\varepsilon)$. В частности доказано, что если существует набор из $n+1$ вещественных чисел $\{h_1, \dots, h_{n+1}\}$ для которого все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1; k \neq l)$ лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере, то h_k определяются, при некотором λ, формулами (4).

Для симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ $(n \geqslant 3)$, удовлетворяющего одному из условий $(\alpha), \ldots, (\varepsilon)$, мы построили семейство сфер S_λ, зависящее от вещественного параметра λ. Особый интерес представляет случай, когда набор чисел $\{h_k : k = 1, \ldots, n+1\}$ определяется формулами (4) при $\lambda = 0$. Сферу S_0, проходящую через все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1)$, определяемые по этому набору $\{h_k : k = 1, \ldots, n+1\}$, будем далее называть *внешней сферой Конвея* (*внешней относительно вершины* A_{n+1}).

При $n = 2$ и $\lambda = 0$ формулы (4) для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$ принимают следующий вид: $h_1 = |A_2A_3|$, $h_2 = |A_1A_3|$, $h_3 = |A_1A_2|$. Точки $A_{k,l}$ и $A_{l,k}$, на продолжении сторон $[A_k, A_l]$, определяются теперь не так, как при построении стандартной ("внутренней") окружности Конвея. А именно, две точки $A_{3,1}$,$A_{3,2}$ откладываются на продолжениях сторон $[A_1, A_3]$ и $[A_2, A_3]$ так же, как и в случае "внутренней" окружности Конвея. Остальные 4 точки $A_{1,2}$,$A_{2,1}$,$A_{1,3}$,$A_{3,1}$ откладываются, на соответствующих продолжениях сторон $[A_1, A_2]$, $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, в направлениях, противоположных тем, в которых они откладывались бы при построении внутренней окружности Конвея. Шесть точек $\{A_{k,l} : k, l = 1, 2, 3; k \neq l\}$ будут лежать на окружности, которую можно назвать *внешней окружностью Конвея* (*относительно вершины* A_3). Центр этой окружности совпадает с центром вневписанной окружности, касающейся стороны $[A_1, A_2]$ и продолжений сторон $[A_1, A_3]$, $[A_2, A_3]$. Такая внешняя окружность рассматривалась ранее в [7]. При $n = 2$ в теореме 1 утверждения $(\beta), (\gamma)$ становятся тавтологиями, поэтому случай $n = 2$ переформулируется (с заменой слов "сферы" на "окружности") следующим образом:

Следствие 1. *При $n = 2$ для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$ свойства (α),(δ),(ε) в теореме* 1 *эквивалентны.*

Особый интерес имеет также пространственный случай $n = 3$. Для тетраэдров, имеющих полувписанную сферу (каркасных тетраэдров), задача о (внутренней) сфере Конвея была поставлена и решена В. А. Александровым, [4, 5]. Внешняя сфера Конвея, согласно нашим определениям, строится следующим образом. Для тетраэдра $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, на прямых, проходящих через рёбра $[A_1, A_4]$, $[A_2, A_4]$, $[A_3, A_4]$, откладываются три точки $A_{1,4}$,$A_{2,4}$,$A_{3,4}$ на расстоянии $h_4 = (|A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_1A_3|)/2$ от точки A_4, в направлении векторов $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$. На прямой, проходящей через ребро $[A_1A_4]$, откладываем точку $A_{4,1}$ на расстоянии $h_1 = |A_2A_4| + |A_3A_4|$ от точки A_1, в направлении вектора $\overrightarrow{A_4A_1}$. Кроме этого, откладываем ещё две точки $A_{2,1}$, $A_{3,1}$, на том же расстоянии h_1 от точки A_1 в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Аналогичным образом, откладываем точки $A_{k,2}$ $(k = 1, 3, 4)$ и $A_{k,3}$ $(k = 1, 2, 4)$ на расстояниях $h_2 = |A_1A_4| + |A_3A_4|$ и $h_3 = |A_1A_4| + |A_2A_4|$ от точек A_2 и A_3, соответственно. Из теоремы 1 получаем

Следствие 2. 12 *точек $A_{k,l}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4; k \neq l)$ будут лежать на сфере (внешней сфере Конвея) тогда и только тогда, когда тетраэдр $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ имеет полувневписанную сферу (относительно вершины A_4). Центры внешней сферы Конвея и полувневписанной сферы совпадают.*

Из критерия (γ) теоремы 1 и равенств (2) получаем

Следствие 3. *Тетраэдр $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ имеет полувневписанную сферу (относительно вершины A_4) тогда и только тогда, когда разности длин следующих* *противолежащих ребер равны*

$$|A_1A_4| - |A_2A_3| = |A_2A_4| - |A_1A_3| = |A_3A_4| - |A_1A_2|. \qquad (5)$$

Введем новый термин и будем называть тетраэдр $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, для которого выполняются равенства (4) *внекаркасным тетраэдром* (*относительно вершины* A_4).

3. Характеризация симплексов с полувневписанной сферой

В теореме 1 дается критерий существования внешней сферы Конвея, но естественно возникает вопрос о достаточном разнообразии тех симплексов, для которых можно построить такую сферу. Иными словами, как много симплексов имеют полувневписанную сферу. В [6] получена характеризация n-мерных симплексов, имеющих полувписанную сферу. В этом параграфе будет дана аналогичная полная характеризация n-мерных симплексов, имеющих полувневписанную сферу.

Лемма 4. *Рассмотрим произвольный набор положительных чисел $a_1, \dots, a_{n+1}$. Если в n-мерном евклидовом пространстве E_n существует симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ с ребрами, длины которых удовлетворяют равенствам* (2)*, то существует набор чисел $h_1, \dots, h_{n+1}$ такой, что все числа $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n{+}1; k < l)$, задаваемые формулами* (1) *будут одинаковыми. Кроме этого, существует сфера, касающаяся всех ребер $[A_kA_l]$ в точках $B_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$ и всех продолжений за точку A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ в точках $B_{k,n+1}$ (полувневписанная сфера), при этом будут выполняться равенства $|A_kB_{k,l}| = a_k$, $|A_kB_{k,n+1}| = a_{n+1}$ $(k, l = 1, \dots, n; k \neq l)$.*

Доказательство. Достаточно положить для произвольного вещественного параметра λ

$$h_k = \lambda + \sum_{j \neq k}^{n} (a_{n+1} - a_j) \ (k = 1, \dots, n), \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i<j}^{n} (a_i + a_j).$$

Существование полувневписанной сферы сразу следуют из леммы 1. Если обозначить через $B_{k,l}$, $B_{k,n+1}$ точки касание этой сферы с ребрами $[A_kA_l]$ и с продолжениями ребер $[A_kA_{n+1}]$, соответственно, то система линейных уравнений

$$x_k + x_l = |A_kA_l|, \quad (k, l = 1, \dots, n; k < l)$$

может иметь не более одного решения, поэтому мы имеем равенства $a_k = |A_kB_{k,l}|$ $(k, l = 1, \dots, n; k \neq l)$. Так как $|A_kB_{k,l}| = |A_kB_{k,n+1}|$, то также верны равенства $|A_kA_{n+1}| = |A_kB_{k,n+1}| - a_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Следовательно, $|A_kB_{k,n+1}| = a_{n+1}$ $(k = 1, \dots, n)$.

Лемма 4 дает ответ на вопрос о характеризации. Очевидно, правильный n-мерный симплекс (с равными ребрами) имеет полувневписанную сферу (даже $(n+1)$ штук для каждой $(n-1)$-мерной грани). Параметры $a_1, \dots, a_{n+1}$ в формуле (2) для этого симплекса можно менять произвольно в достаточно малых окрестностях и новый симплекс, который строится по длинам ребер $|A_kA_l|$, заданным по формуле (2), тоже может быть реализован в E_n. Поэтому существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из всех наборов $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in U$, для которых в E_n существует n-мерный симплекс

$[A_1, \dots, A_{n+1}]$, длины ребер которого удовлетворяют равенствам (2). Следовательно, ответ на вопрос о разнообразии таких симплексов можно сформулировать в следующем виде [6, следствие 4]:

Следствие 4. *Если считать симплекс заданным длинами своих ребер, то множество всех n-мерных симплексов, имеющих полувневписанную сферу (и касающуюся всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$), образует $(n+1)$-мерное подмногообразие в $[n(n+1)]/2$-мерном многообразии всех n-мерных симплексов.*

Теперь рассмотрим вопрос о том, насколько много полувневписанных сфер может иметь один симплекс. Правильный симплекс имеет наибольшее количество таких сфер, именно $(n+1)$ штуку (каждая такая сфера касается всех ребер одной из $(n-1)$-мерных граней). В общем случае ответ зависит от размерности. Очевидный случай $n = 2$ мы не рассматриваем.

Случай $n = 3$.

Предложение 1. [8, (§ 41)]. *Тетраэдр имеет более одной полувневписанной сферы тогда и только тогда, когда равны длины любой его пары противолежащих ребер (равногранный тетраэдр). В этом случае тетраэдр имеет все четыре полувневписанные сферы. Как следствие, в равногранном тетраэдре можно построить четыре различные внешние сферы Конвея.*

Случай $n > 3$.

Предложение 2. *Если $n \geqslant 4$ и n-мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ имеет более, чем две полувневписанные сферы, то он является правильным симплексом. Если n-мерный симплекс имеет ровно две полувневписанные сферы S_1, S_2, где S_1 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$, а S_2 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_{n-1}, A_{n+1}]$, тогда для некоторых $b, c > 0$ $(b \neq c)$ будем иметь равенства*

$$|A_n A_{n+1}| = |A_k A_l| = 2b \ (k, l = 1, \dots, n-1; k < l)$$

$$|A_k A_n| = |A_k A_{n+1}| = 2c \ (k = 1, \dots, n-1).$$

Как следствие, в таком симплексе существуют ровно две различные внешние сферы Конвея.

Доказательство. Существуют два набора параметров $(a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых

$$a_k + a_l = b_k + b_l \ (k, l = 1, \dots, n-1; k < l), \ a_{n+1} - a_k = b_{n+1} + b_k \ (k = 1, \dots, n-1);$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n - b_{n+1}, \ a_k + a_n = b_n - b_k \ (k = 1, \dots, n-1).$$

Обе сферы S_1, S_2 в пересечении с гранью $[A_1, \dots, A_{n-1}]$ дают $(n-3)$-мерную сферу, полувписанную в эту грань. Из леммы 4 следует, что $a_k = b_k = b$. Последнее равенство следует из того, что для трехмерной грани $[A_i, A_j, A_n, A_{n+1}]$ $(i < j < n)$ имеют место равенства $a_i = b_j$, $a_j = b_i$, т. е. $a_i = b_i = b_j = a_j$, см. доказательство предложения 1. Поэтому $|A_k A_l| = a_k + a_l = 2b$ $(k, l = 1, \dots, n-1; k < l)$. Кроме этого, $b_n = a_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n$ и $|A_n A_{n+1}| = a_{n+1} - a_n = 2b$, $|A_k A_n| = a_k + a_n = b_n - b_k = a_{n+1} - a_k = 2c$. Вторая часть предложения 2 доказана.

Для доказательства первой части допустим, что существует еще одна полувневписанная сфера S_3, касающаяся всех ребер грани $[A_2, \dots, A_{n+1}]$. Следовательно, еще для оного набора параметров $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ имеем равенства

$$a_1 + a_k = c_1 - c_k, \ (k = 2, \dots, n), \ a_k + a_l = c_k + c_l, \ (k, l = 2, \dots, n+1; k < l).$$

Также, как и раньше, получаем $a_k = c_k = b$ $(k = 2, \ldots, n)$. Поэтому $a_n = c_n = b$, $a_{n+1} = a_n + 2b = 3b$. И наконец $|A_kA_{n+1}| = |A_kA_n| = a_k + a_n = 2b$, т. е. длины всех ребер симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ равны $2b$.

Предложение 3. *Если n-мерный симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ $(n \geqslant 3)$ имеет полувписанную сферу и по крайней мере две полувневписанные сферы, то он является правильным симплексом. Если n-мерный симплекс имеет полувписанную сферу и одну полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$, то для некоторых $b, c > 0$ $(b \neq c)$ будем иметь*

$$|A_kA_l| = 2b \ (k, l = 1, \ldots, n; k < l); \quad |A_kA_{n+1}| = 2c \ (k = 1, \ldots, n).$$

Как следствие, в таком симплексе существует внутренняя сфера Конвея и существует ровно одна внешняя сфера Конвея.

Доказательство. Случай $n = 3$ рассмотрен в [8]. Если $n > 3$ и симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ имеет две пулувневписанные сферы S_1, S_2, где S_1 касается всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$, а S_2 касается всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}]$, по предложению 2, уже имеем равенства $|A_nA_{n+1}| = |A_kA_l| = 2b$ $(k, l = 1, \ldots, n-1; k < l)$, $|A_kA_n| = |A_kA_{n+1}| = 2c$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Если симплекс имеет также полувписанную сферу, то из [4, 5] следует, что 3х-мерная грань $[A_k, A_l, A_n, A_{n+1}]$ $(k < l < n)$ является каркасным тетраэдром, поэтому $4b = |A_kA_l| + |A_nA_{n+1}| = |A_kA_n| + |A_lA_{n+1}| = 4c$. Значит $b = c$ и $|A_kA_n| = |A_kA_{n+1}| = 2b$, что означает равенство всех ребер симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$.

Допустим теперь, что n-мерный симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ $(n \geqslant 3)$ имеет полувписанную сферу и одну полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$. Из теоремы 1 (критерий (γ)) следует существование набора $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, для которого $|A_kA_l| = a_k + a_l$, $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - a_k$, $(k, l = 1, \ldots, n; k \neq l)$. Из существования полувписанной сферы следует существование еще одного набора $(b_1, \ldots, b_{n+1})$, для которого $|A_kA_l| = b_k + b_l$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k < l)$. Так как полувписанная и полувневписанная сферы касаются всех ребер одной и той же грани $[A_1, \ldots, A_n]$, то $a_k = b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Но тогда $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - a_k = a_k + b_{n+1}$, поэтому $a_k = (a_{n+1} - b_{n+1})/2 = b$ не зависит от k. Поэтому $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - b = 2c$ тоже не зависит от k.

4. Еще один критерий существования полувневписанной сферы

Рассмотрим полный граф K_{n+1} с $n+1$ вершинами $1, 2, \ldots, n+1$. Рассмотрим также абелеву группу $(G, +)$, в которой для любого элемента $a \in G$ уравнение $2x := x + x = a$ имеет единственное решение, которое будем обозначать через $x/2$. Задача о делении весов с вычитанием формулируется следующим образом. Каждому ребру графа K_{n+1}, соединяющему вершины i и j сопоставим вес $w_{i,j} \in G$. Нужно найти условия, при которых существует последовательность $a_1, \ldots, a_{n+1} \in G$, для которой $w_{i,j} = a_i + a_j$ $(i, j = 1, \ldots, n; i < j)$, $w_{i,n+1} = a_{n+1} - a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 5. *При $n \geqslant 3$ задача о делении весов разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда для любой четверки $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n+1$ выполняются равенства*

$$w_{i_1,i_2} + w_{i_3,i_4} = w_{i_1,i_3} + w_{i_2,i_4} = w_{i_1,i_4} + w_{i_2,i_3}; \tag{6}$$

и для любой тройки $i_1 < i_2 < i_3 < n+1$ выполняются равенства

$$w_{i_1,n+1} - w_{i_2,i_3} = w_{i_2,n+1} - w_{i_1,i_3} = w_{i_3,n+1} - w_{i_1,i_2}. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость условия $(6), (7)$ очевидна. Докажем достаточность. Для четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n+1$ обозначим $b = w_{i_1,i_2} + w_{i_3,i_4}$ и полагаем

$$x_1 = b - (w_{i_2,i_3} + w_{i_2,i_4} + w_{i_3,i_4})/2; \quad x_2 = b - (w_{i_1,i_3} + w_{i_1,i_4} + w_{i_3,i_4})/2;$$

$$x_3 = b - (w_{i_1,i_2} + w_{i_2,i_4} + w_{i_1,i_4})/2; \quad x_4 = b - (w_{i_1,i_2} + w_{i_2,i_3} + w_{i_1,i_3})/2.$$

Непосредственно проверяется, что $w_{i_k,i_l} = x_k + x_l$ $(k,l = 1,2,3,4; k < l)$. Пусть теперь $i_1 < i_2 < i_3 < n+1$ и $c = w_{i_1,n+1} - w_{i_2,i_3}$. Полагаем

$$y_1 = [(w_{i_2,n+1} + w_{i_3,n+1} - w_{i_2,i_3})/2] - c; \quad y_2 = [(w_{i_1,n+1} + w_{i_3,n+1} - w_{i_1,i_3})/2] - c;$$

$$y_3 = [(w_{i_1,n+1} + w_{i_2,n+1} - y_{i_1,i_2})/2] - c; \quad y_4 = c + [(w_{i_1,i_2} + w_{i_1,i_3} + w_{i_2,i_3})/2].$$

Непосредственно проверяется, что $w_{i_k,i_l} = y_k + y_l$ $(k,l = 1,2,3; k < l)$, $w_{i_k,n+1} = y_4 - y_k$ $(k = 1,2,3)$.

Далее будем действовать по индукции. В качестве базы индукции рассмотрим четверку индексов $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = n+1$ и положим $a_i = y_i$ $(i = 1,2,3)$, $a_{n+1} = y_4$, где $y_1, y_2, y_3, y_4 \in G$ – полученное выше решение. Допустим, что для некоторого $4 \leqslant p < n$ уже найдены элементы $a_1, \ldots, a_p, a_{n+1} \in G$, для которых $w_{i,j} = a_i + a_j$ $(i,j = 1,\ldots,p; i < j)$, $w_{i,n+1} = a_{n+1} - a_i$ $(i = 1,\ldots,p)$. Положим $a_{p+1} = w_{1,p+1} - a_1$. Необходимо проверить, что для любого $1 < i \leqslant p$ выполняется $w_{i,p+1} = a_i + a_{p+1}$. Для этого рассмотрим четверку индексов $1, i, j, p+1$, где $1 < j \leqslant p; j \neq i$. По предыдущему условию, для этой четверки тоже существует решение x_1, x_2, x_3, x_4, т. е. $w_{1,i} = x_1 + x_2$, $w_{1,j} = x_1 + x_3$, $w_{i,j} = x_2 + x_3$, $w_{1.p+1} = x_1 + x_4$. Вычитая из первого равенства третье и сложив со вторым, получим $2x_1 = w_{1,i} - w_{i,j} + w_{1,j} = 2a_1$, что означает $x_1 = a_1$. Аналогично получаем $x_2 = a_i$, $x_3 = a_j$ и $x_4 = w_{1,p+1} - x_1 = a_{p+1}$. Поэтому $w_{i,p+1} = x_2 + x_4 = a_i + a_{p+1}$. Последнее равенство $w_{p+1,n+1} = a_{n+1} - a_{p+1}$ следует из $a_{n+1} - a_{p+1} = a_{n+1} - w_{1,p+1} + a_1 = a_{n+1} - a_2 - w_{1,p+1} + a_1 + a_2 = w_{2,n+1} - w_{1,p+1} + w_{1,2} = w_{p+1,n+1}$, в силу равенств (7).

Предложение 4. *Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задан симплекс $[A_i, \ldots, A_{n+1}]$ с вершинами $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Если для любой четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n+1$ выполняются равенства*

$$|A_{i_1}A_{i_2}| + |A_{i_3}A_{i_4}| = |A_{i_1}A_{i_3}| + |A_{i_2}A_{i_4}| = |A_{i_2}A_{i_3}| + |A_{i_1}A_{i_4}|, \qquad (6')$$

и для любой тройки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < n+1$ выполняются равенства

$$|A_{i_1}A_{n+1}| - |A_{i_2}A_{i_3}| = |A_{i_2}A_{n+1}| - |A_{i_1}A_{i_3}| = |A_{i_3}A_{n+1}| - |A_{i_1}A_{i_2}|, \qquad (7')$$

то симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ имеет полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$.

Доказательство. Рассмотрим полный граф с вершинами $A_1, \ldots, A_{n+1}$, ребрами которого являются все ребра симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Применим лемму 5, положив $G = \mathbb{R}$ и выбрав веса $w_{i,j} = |A_iA_j|$ $(i,j = 1,\ldots,n+1; i < j)$. В этом случае условия $(6'), (7')$ совпадают с условиями $(6), (7)$, т. е. найдено едиственное решение $a_1, \ldots, a_{n+1}$ задачи о делении весов. Условие положительности $a_i > 0$ $(i = 1,\ldots,n+1)$сразу следует из того, что для любых трех различных индексов $i, j, k < n+1$ имеем $a_i = \frac{1}{2}(|A_iA_j| + |A_iA_k| - |A_jA_k|) > 0$, в силу неравенства треугольника. Кроме этого, $a_{n+1} = |A_1A_{n+1}| + a_1 > 0$. Существование требуемой полувневписанной сферы теперь следует из леммы 5.

Исходя из изложенного выше можно сформулировать следующую альтернативу (см. [6, следствие 5]):

Следствие 5. *В евклидовом пространстве* E_n $(n \geqslant 3)$ n*-мерный симплекс* $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ *имеет полувневписанную сферу относительно вершины* A_{n+1} *тогда и только тогда, когда любая его трёхмерная грань* $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}]$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n)$ *является каркасным тетраэдром, а любая его трёхмерная грань* $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{n+1}]$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n)$ *является (относительно вершины* A_{n+1}*) внекаркасным тетраэдром.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] De Villiers M. *Conway's Circle Theorem as a Special Case of a More General Side Divider Theorem.* // Learning and Teaching Mathematics. 2023. No. 34. P. 37–42.

[2] Акопян А.В. *Геометрия в картинках. 2-е изд.* А. В. Акопян, 2017. ISBN 978-5-600-02023-8 — 235 с.

[3] Braude E. *Conway's Circle Theorem: A Short Proof Enabling Generalization to Polygons.*// 2021. arXiv:2111.01835 [math.GM]

[4] Александров В. А. Задача M2747 из Задачника «Квант» // Квант. 2023. № 5. С. 28.

[5] Александров В. А. Решение задачи M2747 из Задачника «Квант» // Квант. 2023. № 8. С. 17–18.

[6] Малюгин С. А. *Многомерный аналог окружности Конвея* // Сиб. мат. журнал. 2024. Т. 65, № 4. С. 693–701.

[7] García Capitán F. J. *A generalization of the Conway circle*// Forum Geom. 2013. V.13, 191–195.

[8] Понарин Я. П., *Элементарная геометрия: Т. 3 – Треугольники и тетраэдры.* – М.– МЦНМО, 2009. – 192 с.

Sergei Artem'evich Malyugin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mal@math.nsc.ru