УДК 514.114

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ВНЕШНЕЙ ОКРУЖНОСТИ КОНВЕЯ

С. А. Малюгин

Аннотация. Если в треугольнике ABC стороны AB и AC продолжить за точку A на расстояние, равное длине противолежащей стороны BC, и то же самое проделать с вершинами B и C, то построенные 6 точек лежат на одной окружности (окружности Конвея), центр которой совпадает с центром вписанной окружности. В работе Гарсиа Капитана рассматривался «внешний» аналог окружности Конвея, центр которой совпадал с центром одной из вневписанных окружностей треугольника ABC. В настоящей работе для симплекса в n-мерном евклидовом пространстве рассматривается многомерный аналог внешней окружности Конвея.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: окружность Конвея, сфера Конвея, каркасный тетраэдр, внекаркасный тетраэдр, евклидово пространство, треугольник, тетраэдр, симплекс.

1. Введение

Если в треугольнике $[A_1, A_2, A_3]$ стороны $[A_1, A_2]$ и $[A_1, A_3]$ продолжить за точку A_1 на расстояние, равное длине противолежащей стороны $[A_2, A_3]$, и то же самое проделать с вершинами A_2 и A_3, то построенные таким способом 6 точек будут лежать на одной окружности, центр которой совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $[A_1, A_2, A_3]$, [1–3]. Такая окружность называется *окружностью Конвея*. В. А. Александровым рассмотрена конструкция сферы Конвея для тетраэдра в 3-мерном евклидовом пространстве [4, 5]. Такая сфера является двумерным аналогом окружности Конвея. Она существует тогда и только тогда, когда тетраэдр является *каркасным* (т. е. суммы длин любой пары противолежащих ребер одинаковы). Многомерный аналог окружности Конвея (для симплекса в n-мерном евклидовом пространстве) был рассмотрен в [6].

Определим внешний аналог окружности Конвея. В треугольнике $[A_1, A_2, A_3]$ на продолжении сторон $[A_1, A_2]$ и $[A_1, A_3]$ откладываем от точки A_1 две точки $A_{2,1}$ и $A_{3,1}$ на расстоянии, равном длине противолежащей стороны $[A_2, A_3]$, в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ соответственно. Аналогичным образом на продолжениях сторон $[A_1, A_2]$ и $[A_2, A_3]$ откладываем от точки A_2 две точки $A_{1,2}$ и $A_{3,2}$ на расстоянии, равном длине противолежащей стороны $[A_1, A_3]$, в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$ соответственно. И наконец, от вершины A_3 откладываем на расстоянии $|A_1A_2|$ еще две точки $A_{1,3}$ и $A_{2,3}$ в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_3A_2}$ соответственно. Шесть построенных точек $A_{i,j}$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0011.

$(i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$ будут лежать на одной окружности, которую можно назвать *внешней окружностью Конвея.* Центр такой окружности совпадает с центром вневписанной окружности, касающейся стороны $[A_2, A_3]$ и продолжений сторон $[A_1, A_2]$, $[A_1, A_3]$ (см. [7, следствие 5(a)]). В итоге для заданного треугольника $[A_1, A_2, A_3]$ можно построить четыре различные окружности Конвея: одну внутреннюю и три внешних. Многомерный аналог внешней окружности Конвея нигде ранее не рассматривался и в настоящей работе дается решение такой задачи. Работа является логическим завершением предыдущей публикации автора [6].

2. Внешняя сфера Конвея и полувневписанная сфера

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве E_n n-мерный симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $(n \geq 2)$. Нас будут интересовать условия существования $(n-1)$-мерной сферы, касающейся каждого ребра симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ или его продолжения. Сфера, касающаяся каждого ребра симплекса, называется *полувписанной сферой.* Возможны также варианты, когда для некоторой вершины A_i сфера касается каждого ребра $[A_j, A_k]$ $(j, k \neq i)$ и продолжения за вершину A_j каждого ребра $[A_i, A_j]$ $(j \neq i)$. Такую сферу будем называть *полувневписанной сферой* (относительно вершины A_i). Без существенного ограничения общности можно считать, что $i = n + 1$.

Зафиксируем $n+1$ вещественных чисел $h_1, \ldots, h_{n+1}$. На прямой, содержащей ребро $[A_{n+1}, A_l]$, отмечаем точку $A_{n+1,l}$, находящуюся на расстоянии $|h_l|$ от точки A_l (в направлении $\overrightarrow{A_{n+1}A_l}$, если $h_l > 0$, и в противоположном направлении $\overrightarrow{A_l A_{n+1}}$, если $h_l < 0$). Кроме того, отметим на этой же прямой точку $A_{l,n+1}$ на расстоянии $|h_{n+1}|$ от A_{n+1} (в направлении $\overrightarrow{A_{n+1}A_l}$, если $h_{n+1} > 0$; в направлении $\overrightarrow{A_l A_{n+1}}$, если $h_{n+1} < 0$), $l = 1, \ldots, n$. И наконец, для любых $i, j < n+1$ $(i \neq j)$ отмечаем на прямой, содержащей ребро $[A_i, A_j]$, точку $A_{j,i}$, находящуюся на расстоянии $|h_i|$ от точки A_i (в направлении $\overrightarrow{A_i A_j}$, если $h_i > 0$; в направлении $\overrightarrow{A_j A_i}$, если $h_i < 0$). Обозначим

$$
\begin{aligned}
a_{k,l} &= h_k + h_l - |A_k A_l| \quad k, l = 1, \ldots, n,\ k < l, \\
a_{k,n+1} &= |A_k A_{n+1}| + h_k - h_{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Очевидно, $|a_{k,l}|$ – это расстояние между точками $A_{k,l}$ и $A_{l,k}$.

Лемма 1. *Если выполняется условие*

1) *все числа $a_{k,l}$ равны между собой,*

то имеют место следующие утверждения:

2) *существует $(n-1)$-мерная сфера (полувневписанная сфера), касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, \ldots, n; k < l)$ и касающаяся всех продолжений за точки A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1, \ldots, n)$;*

3) *существует $(n-1)$-мерная сфера, проходящая через все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$.*

При этом сферы из пп. 2 и 3 имеют один и тот же центр.

Доказательство проведем индукцией по размерности n. База индукции $n = 2$.

Рассмотрим треугольник $[A_1, A_2, A_3]$. Проведем вневписанную окружность с центром в точке C, касающуюся ребра $[A_1, A_2]$ в точке B_3 и продолжений ребер $[A_1, A_3]$, $[A_2, A_3]$ в точках B_2, B_1 соответственно. На рис. 1 отмечены точки $A_{i,j}$

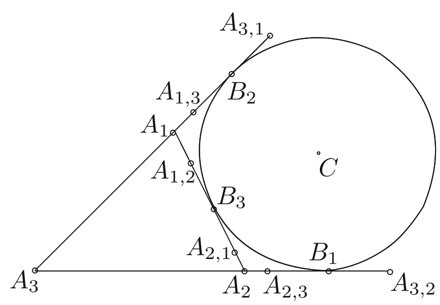

Рис. 1.

$(i,j=1,2,3)$ в предположении, что $h_1,h_2,h_3>0$, $h_1+h_2>|A_1A_2|$ (в этом случае будет также $|A_iA_3|<h_3<|A_iA_3|+h_i$, $i=1,2$). Так как $|A_1B_2|=|A_1B_3|$ и $|A_{2,1}A_1|=|A_{3,1}A_1|=|h_1|$, то $|A_{2,1}B_3|=|A_{3,1}B_2|$. Из равенства длин отрезков $[A_{3,1},A_{1,3}]$ и $[A_{2,1},A_{1,2}]$ следует равенство $|A_{1,3}B_2|=|A_{1,2}B_3|$. Аналогичным образом $|A_{1,2}B_3|=|A_{3,2}B_1|$ и $|A_{1,3}B_2|=|A_{2,3}B_1|$. Поэтому $|A_{2,3}B_1|=|A_{3,2}B_1|$ и точка касания B_1 лежит на середине отрезка $[A_{2,3},A_{3,2}]$. Аналогично B_2 лежит на середине $[A_{1,3},A_{3,1}]$ и B_3 на середине $[A_{1,2},A_{2,1}]$. Так как $[B_3,C]$ ортогонально $[A_{1,2},A_{2,1}]$, то $|A_{2,1}C|=|A_{1,2}C|$. Аналогично $|A_{1,3}C|=|A_{3,1}C|$ и $|A_{2,3}C|=|A_{3,2}C|$. Из равенства длин отрезков $[A_{i,j},B_k]$ $(i\neq j\neq k)$ и равенств $|B_1C|=|B_2C|=|B_3C|$ следует равенство длин всех шести отрезков $[A_{k,l},C]$ $(k,l=1,2,3;\,k\neq l)$. Случай $h_1+h_2\le|A_1A_2|$, а также другие не рассмотренные случаи доказываются аналогичным образом. База индукции установлена.

Допустим, что утверждение установлено для размерности $\le n-1$, и рассмотрим в пространстве E_n n-мерный симплекс $[A_1,\ldots,A_{n+1}]$, для которого выбраны вещественные числа $h_1,\ldots,h_{n+1}$ и построены точки $A_{k,l}$ $(k,l=1,\ldots,n+1;\ k\neq l)$, для которых выполняется посылка 1. В симплексе $[A_1,\ldots,A_{n+1}]$ рассмотрим две $(n-1)$-мерные грани $[A_1,A_3,\ldots,A_{n+1}]$ и $[A_2,\ldots,A_{n+1}]$. По предположению индукции существует $(n-2)$-мерная сфера с центром в точке C, содержащая все отмеченные точки $A_{k,l}$ $(k,l=1,3,\ldots,n+1;\ k\neq l)$ и существует $(n-2)$-мерная сфера S с тем же центром C, касающаяся всех ребер $[A_k,A_l]$ $(k,l=1,3,\ldots,n;k<l)$ и продолжений за точку A_k ребер $[A_k,A_{n+1}]$ $(k=1,3,\ldots,n)$. Аналогично существует $(n-2)$-мерная сфера с центром в точке C', содержащая все точки $A_{k,l}$ $(k,l=2,\ldots,n;k\neq l)$, и существует $(n-2)$-мерная сфера S' с тем же центром C', касающаяся всех ребер $A_{k,l}$ $(k,l=2,\ldots,n;\ k<l)$ и продолжений за точку A_k ребер $[A_k,A_{n+1}]$ $(k=2,\ldots,n)$. Через точку C проведем прямую L, ортогональную $(n-1)$-мерной плоскости Π, проходящей через грань $[A_1,A_3,\ldots,A_{n+1}]$. Аналогично проведем через точку C' прямую L', ортогональную $(n-1)$-мерной плоскости Π', проходящей через грань $[A_2,\ldots,A_{n+1}]$. Любая точка D прямой L находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ $(k,l=1,3,\ldots,n+1;k\neq l)$ и на одинаковом расстоянии от всех точек касания сферы S с ребрами грани $[A_1,A_3,\ldots,A_n]$ и продолжений ребер $[A_k,A_{n+1}]$ $(k=1,3,\ldots,n)$. Докажем, что прямые L и L' пересекаются. Для этого рассмотрим общую $(n-2)$-мерную грань $[A_3,\ldots,A_{n+1}]$ граней $[A_1,A_3,\ldots,A_{n+1}]$ и $[A_2,\ldots,A_{n+1}]$. Она лежит в $(n-2)$-мерной плоскости Π'', являющейся пересечением $(n-1)$-мерных плоскостей Π и Π'. Сечением сферы S плоскостью Π'' будет $(n-3)$-мерная сфера S'', касающаяся всех ребер $(n-3)$-мерной грани $[A_3,\ldots,A_n]$ и продолжений ребер $[A_k,A_{n+1}]$ $(k=3,\ldots,n)$. В случае $n=3$ эта

0-мерная сфера вырождается в точку. Пусть C'' – центр этой сферы. Аналогичным сечением сферы S' плоскостью Π'' будет та же самая сфера S'' с тем же центром C'', так как сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_3, \ldots, A_n]$ и продолжений ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 3, \ldots, n)$, единственна. В случае $n = 3$ точка C'' является общей точкой касания двух окружностей S и S' с продолжением ребра $[A_3, A_4]$ и эта точка лежит на середине отрезка $[A_{34}, A_{43}]$ как для треугольника $[A_1, A_3, A_4]$, так и для треугольника $[A_2, A_3, A_4]$. Очевидно, отрезок $[C, C'']$ ортогонален Π'' и $[C', C'']$ тоже ортогонален Π''. Через C'' проведем двумерную плоскость Π_2, ортогональную $(n-2)$-мерной плоскости Π''. Эта плоскость содержит точки C, и C'. Рассмотрим любую точку $X \in L$. Так как $[C, X]$ перпендикулярно гиперплоскости Π и $[C, C'']$ перпендикулярно $(n-2)$-мерной плоскости Π'', то $[X, C'']$ перпендикулярно Π'' (по теореме о трех перпендикулярах в n-мерном пространстве E_n). Следовательно, вся прямая L лежит в плоскости Π_2. Аналогичным образом вся прямая L' тоже лежит в Π_2. Так как для невырожденного симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ гиперплоскости Π и Π' не параллельны, то ортогональные к ним прямые L и L' тоже не параллельны. Поэтому внутри двумерной плоскости Π_2 прямые L и L' пересекаются в некоторой точке D.

Рассмотрим теперь $(n-1)$-мерную грань $[A_1, \ldots, A_n]$ и проведем через нее $(n-1)$-мерную плоскость Π'''. В [6] было доказано существование $(n-2)$-мерной сферы с центром в точке C''', содержащей все отмеченные точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n)$, которые лежат на продолжении ребер этой грани, и существование $(n-2)$-мерной сферы S''' с тем же центром C''', которая касается всех ребер этой же грани (в [6] предположение, что все $h_i > 0$, является несущественным). Сечением сферы S''' $(n-1)$-мерной плоскостью Π будет $(n-3)$-мерная сфера S''''. Если $n > 3$, то она получается также сечением сферы S $(n-1)$-мерной плоскостью Π'''. Пусть C'''' – центр сферы S''''. Если $n = 3$, то C'''' является общей точкой касания окружностей S и S''' (эта точка лежит на середине отрезка $[A_{1,3}, A_{3,1}]$ для треугольника $[A_1, A_3, A_4]$ и для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$, что было доказано в [6, лемма 1]). Проведем через C''' прямую L''', ортогональную гиперплоскости Π'''. Из предыдущего следует, что прямые L и L''', а также L' и L''' тоже должны пересекаться в некоторых точках D' и D'' соответственно.

Докажем, что $D = D' = D''$. Если это неверно, то существует двумерная плоскость Π_2', проходящая через эти три прямые L, L', L'''. Рассмотрим $(n-2)$-мерную плоскость Π_{n-2}', ортогональную плоскости Π_2'. Так как L перпендикулярно Π, то Π_{n-2}' после переноса на некоторый вектор вкладывается в Π. По той же самой причине Π_{n-2}' после переноса на подходящий вектор вкладывается в Π' и в Π'''. Поэтому Π_{n-2}' после переноса на некоторый вектор должно вкладываться в пересечение $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi'''$, размерность которого равна $n-3$. Полученное противоречие доказывает, что $D = D' = D'''$. Это утверждение остается верным, если рассмотреть любые другие три различных грани симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$.

Итак, доказано, что существует точка D, которая находится на одинаковом расстоянии от ребер $(n-1)$-мерной грани $[A_1, \ldots, A_n]$ и от продолжений ребер граней, содержащих вершину A_{n+1}. Так как любая пара $(n-1)$-мерных граней имеет общие ребра, то D находится на одинаковом расстоянии от продолжений всех ребер симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Следовательно, существует сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$ и всех продолжений ребер $[A_i, A_{n+1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Аналогичным образом доказывается, что D находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$.

Лемма 2. *Допустим, что для симплекса* $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ *выполняется условие*

3) *для некоторого набора вещественных чисел* $h_1, \ldots, h_{n+1}$ *существует* $(n-1)$*-мерная сфера* S*, содержащая все определенные выше точки* $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$.

Тогда центр C *сферы* S *является одновременно центром другой сферы, полувневписанной относительно вершины* A_{n+1}.

Доказательство. Пусть выполнено условие 3. Через двумерную грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ $(i_1 < i_2 < n+1)$ проведем двумерную плоскость П. Сечением сферы S (содержащей все точки $A_{k,l}$) плоскостью П будет окружность S_1 (рис. 2).

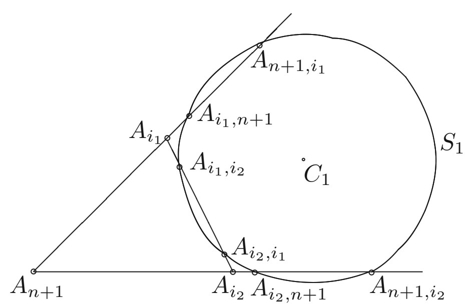

Рис. 2.

Так как $|A_{i_2,i_1}A_{i_1}| = |A_{n+1,i_1}A_{i_1}| = |h_{i_1}|$, то хорды $[A_{i_2,i_1}, A_{i_1,i_2}]$ и $[A_{n+1,i_1}, A_{i_1,n+1}]$ имеют с окружностью S_1 (в точках A_{i_2,i_1} и A_{n+1,i_1} соответственно) один и тот же угол α. Поэтому эти две хорды имеют одинаковую длину, т. е. $|A_{i_2,i_1}A_{i_1,i_2}| = |A_{n+1,i_1}A_{i_1,n+1}|$. Аналогично из равенства $|A_{n+1,i_2}A_{i_2}| = |A_{i_1,i_2}A_{i_2}| = |h_{i_2}|$ следует, что и третья хорда $[A_{n+1,i_2}, A_{i_2,n+1}]$ имеет с окружностью S_1 в точке A_{n+1,i_2} такой же угол α, поэтому

$$|A_{i_2,n+1}A_{n+1,i_2}| = |A_{i_1,i_2}A_{i_2,i_1}| = |A_{i_1,n+1}A_{n+1,i_1}|.$$

Для любой грани $[A_{i_1}, A_{j_2}, A_{n+1}]$, имеющей общее ребро $[A_{i_1}, A_{n+1}]$ с гранью $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$, будем иметь продолжение предыдущих равенств:

$$|A_{i_1,n+1}A_{n+1,i_1}| = |A_{j_2,n+1}A_{n+1,j_2}| = |A_{i_1,j_2}A_{j_2,i_1}|$$

и т. д. Поэтому в симплексе $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ все числа $|A_{k,l}A_{l,k}|$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k < l)$ равны одному числу d. Пусть R — радиус сферы S. Рассмотрим сферу S'_1 с центром в C и радиусом $r = \sqrt{R^2 - (d/2)^2}$. Эта сфера касается середины каждого отрезка $[A_{k,l}, A_{l,k}]$ $(k, l = 1, \ldots, n+1;\ k < l)$. Следовательно, центр C сферы S является одновременно и центром другой сферы S'_1 либо полувписанной в симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, либо полувневписанной относительно некоторой вершины симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$. Для выяснения точного расположения сферы S'_1 рассмотрим любую двумерную грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ $(i_1 < i_2 < n+1)$ и проведем через нее двумерную плоскость П. Пересечением сферы S'_1 и плоскости П будет некоторая окружность S_1, касающаяся трех отрезков $[A_{i_1}, A_{i_2}]$, $[A_{i_1}, A_{n+1}]$, $[A_{i_2}, A_{n+1}]$ либо их продолжений. Точки $A_{i_1,n+1}$ и A_{i_1,i_2} находятся на одинаковом расстоянии $|h_{i_1}|$ от вершины A_{i_1} и лежат на окружности S_1. Кроме этого, $A_{i_1,n+1}$ лежит на продолжении отрезка $[A_{i_1}, A_{n+1}]$ за точку A_{i_1}, а A_{i_1,i_2} лежит на отрезке $[A_{i_1}, A_{i_2}]$ либо на его продолжении за точку A_{i_2} (либо, наоборот, A_{i_1,i_2} лежит на продолжении отрезка $[A_{i_1}, A_{i_2}]$ за точку A_{i_1}, а $A_{i_1,n+1}$ лежит на отрезке $[A_{i_1}, A_{n+1}]$ либо на его продолжении за точку A_{n+1}). Это означает, что центр C_1 окружности S_1 лежит на биссектрисе внешнего угла треугольника $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$ при вершине A_{i_1}. Аналогичным образом доказывается, что C_1 лежит на биссектрисе внешнего угла этого треугольника при вершине A_{i_2}. Поэтому S_1 является вневписанной окружностью треугольника $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{n+1}]$, касающейся стороны $[A_{i_1}, A_{i_2}]$ и продолжений сторон $[A_{i_1}, A_{n+1}]$, $[A_{i_2}, A_{n+1}]$. Такая ситуация возможна в единственном случае, когда S_1' является полувневписанной сферой симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ относительно вершины A_{n+1}.

Лемма 3. *Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задан симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Допустим, что существует $(n-1)$-мерная сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$ и всех продолжений за точку A_i ребер $[A_i, A_{n+1}]$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда существует набор чисел $h_1, \dots, h_{n+1}$ такой, что все числа $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$, $a_{k,n+1}$ $(k = 1, \dots, n)$, определяемые формулами* (1), *равны между собой.*

Доказательство. Обозначим точку касания сферы и ребра $[A_k, A_l]$ (или его продолжения) через $B_{k,l}$. Из условия касания следует, что для каждого фиксированного k все длины $|A_k B_{k,l}|$ $(l = 1, \dots, n+1; l \neq k)$ равны между собой и равны a_k. Из определения чисел a_k вытекают равенства

$$|A_k A_l| = a_k + a_l, \quad |A_k A_{n+1}| = a_{n+1} - a_k \quad (k, l = 1, \dots, n; k \neq l). \tag{2}$$

Для фиксированного параметра λ полагаем

$$h_k = \lambda + \sum_{j \neq k}^{n} (a_{n+1} - a_j) \ (k = 1, \dots, n), \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i<j}^{n} (a_i + a_j). \tag{3}$$

Тогда все числа

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= h_k + h_l - |A_k A_l| \\ &= 2\lambda + 2a_{n+1} - a_k - a_l + \sum_{j \neq k}^{n} (a_{n+1} - a_j) + \sum_{j \neq l}^{n} (a_{n+1} - a_j) \\ &= 2\lambda + 2n a_{n+1} - 2(a_1 + \dots + a_n) \quad (k, l = 1, \dots, n; k < l), \end{aligned}$$

$$a_{k,n+1} = h_k + |A_k A_{n+1}| - h_{n+1} = 2\lambda + 2n a_{n+1} - 2(a_1 + \dots + a_n)$$

равны между собой. Мы построили однопараметрическое семейство сфер, проходящих через все точки $A_{k,l}$ (полувневписанная сфера тоже входит в это семейство).

Для данного n-мерного симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ $(n \geq 3)$ и вещественного параметра λ рассмотрим $n+1$ вещественных чисел

$$h_k = \lambda + \sum_{j \neq k}^{n} |A_j A_{n+1}|; \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i<j}^{n} |A_i A_j|. \tag{4}$$

По набору $h_1, \dots, h_{n+1}$ на ребрах $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$ и на продолжении ребер $[A_k, A_{n+1}]$ за точку A_k строим точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1)$, как описано в начале этого раздела. Определим также числа $a_{k,l}$ $(k < l \leq n+1)$ по формулам (1). Теперь основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны между собой:*

(α) *все числа $a_{k,l}$, определяемые формулами* (1), *равны между собой;*

(β) *существует $(n-1)$-мерная сфера (полувневписанная сфера), касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ $(k, l = 1, \ldots, n; k < l)$ и касающаяся всех продолжений за точки A_k ребер $[A_k, A_{n+1}]$ $(k = 1, \ldots, n)$;*

(γ) *существует набор из $n+1$ положительных чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$, для которого выполняются равенства* (2);

(δ) *существует $(n-1)$-мерная сфера, проходящая через все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$;*

(ε) *существует набор из $n+1$ вещественных чисел $\{h_k : k = 1, \ldots, n+1\}$ для которого все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$, определенные в начале раздела по этому набору, лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере.*

При этом центры сфер в утверждениях (β) *и* (δ), (ε) *совпадают.*

Доказательство. Импликация $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ следует из леммы 1. Импликация $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ доказана в лемме 3. Импликация $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ обоснована тем, что из равенств (2) и (3) следуют равенства (4) и в лемме 3 доказано, что тогда все числа $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k < l)$, определяемые формулами (1), равны между собой. Следовательно, выполнено свойство 3 из леммы 1 и доказана также импликация $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$. Импликация $(\delta) \Rightarrow (\varepsilon)$ очевидна (мы не предполагаем в утверждении (ε), что числа $h_1, \ldots, h_{n+1}$ обязательно определяются по формулам (4)). Импликация $(\varepsilon) \Rightarrow (\beta)$ доказана в лемме 2. Установлена эквивалентность между собой всех утверждений $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\varepsilon)$. В частности доказано, что если существует набор из $n+1$ вещественных чисел $\{h_1, \ldots, h_{n+1}\}$, для которого все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1; k \neq l)$ лежат на одной $(n-1)$-мерной сфере, то h_k определяются при некотором λ формулами (4).

Для симплекса $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$ $(n \geq 3)$, удовлетворяющего одному из условий $(\alpha), \ldots, (\varepsilon)$, мы построили семейство сфер S_λ, зависящее от вещественного параметра λ. Особый интерес представляет случай, когда набор чисел $\{h_k : k = 1, \ldots, n+1\}$ определяется формулами (4) при $\lambda = 0$. Сферу S_0, проходящую через все точки $A_{k,l}$ $(k, l = 1, \ldots, n+1)$, определяемые по этому набору $\{h_k : k = 1, \ldots, n+1\}$, будем далее называть *внешней сферой Конвея* (*внешней относительно вершины* A_{n+1}).

При $n = 2$ и $\lambda = 0$ формулы (4) для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$ принимают следующий вид: $h_1 = |A_2A_3|$, $h_2 = |A_1A_3|$, $h_3 = |A_1A_2|$. Точки $A_{k,l}$ и $A_{l,k}$ на продолжении сторон $[A_k, A_l]$ определяются теперь не так, как при построении стандартной («внутренней») окружности Конвея. А именно, две точки $A_{3,1}$, $A_{3,2}$ откладываются на продолжениях сторон $[A_1, A_3]$ и $[A_2, A_3]$ так же, как и в случае «внутренней» окружности Конвея. Остальные четыре точки $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{1,3}$, $A_{3,1}$ откладываются на соответствующих продолжениях сторон $[A_1, A_2]$ $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$ в направлениях, противоположных тем, в которых они откладывались бы при построении внутренней окружности Конвея. Шесть точек $\{A_{k,l} : k, l = 1, 2, 3; k \neq l\}$ будут лежать на окружности, которую можно назвать *внешней окружностью Конвея* (*относительно вершины* A_3). Центр этой окружности совпадает с центром вневписанной окружности, касающейся стороны $[A_1, A_2]$ и продолжений сторон $[A_1, A_3]$, $[A_2, A_3]$. Такая внешняя окружность рассматривалась ранее в [7]. При $n = 2$ в теореме 1 утверждения $(\beta), (\gamma)$ становятся тавтологиями, поэтому случай $n = 2$ переформулируется (с заменой слов «сферы» на «окружности» следующим образом.

Следствие 1. *При* $n = 2$ *для треугольника* $[A_1, A_2, A_3]$ *свойства* (α),(δ),(ε) *в теореме* 1 *эквивалентны.*

Особый интерес имеет также пространственный случай $n = 3$. Для тетраэдров, имеющих полувписанную сферу (каркасных тетраэдров), задача о (внутренней) сфере Конвея была поставлена и решена В. А. Александровым [4, 5]. Внешняя сфера Конвея согласно нашим определениям строится следующим образом. Для тетраэдра $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ на прямых, проходящих через ребра $[A_1, A_4]$, $[A_2, A_4]$, $[A_3, A_4]$, откладываются три точки $A_{1,4}$, $A_{2,4}$, $A_{3,4}$ на расстоянии $h_4 = (|A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_1A_3|)/2$ от точки A_4 в направлении векторов $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$. На прямой, проходящей через ребро $[A_1, A_4]$, откладываем точку $A_{4,1}$ на расстоянии $h_1 = |A_2A_4| + |A_3A_4|$ от точки A_1 в направлении вектора $\overrightarrow{A_4A_1}$. Кроме этого, откладываем еще две точки $A_{2,1}$, $A_{3,1}$ на том же расстоянии h_1 от точки A_1 в направлении векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Аналогичным образом откладываем точки $A_{k,2}$ $(k = 1, 3, 4)$ и $A_{k,3}$ $(k = 1, 2, 4)$ на расстояниях $h_2 = |A_1A_4| + |A_3A_4|$ и $h_3 = |A_1A_4| + |A_2A_4|$ от точек A_2 и A_3 соответственно. Из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Точки* $A_{k,l}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4; k \neq l)$ *будут лежать на сфере* (*внешней сфере Конвея*) *тогда и только тогда, когда тетраэдр* $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ *имеет полувневписанную сферу* (*относительно вершины* A_4). *Центры внешней сферы Конвея и полувневписанной сферы совпадают.*

Из критерия (γ) теоремы 1 и равенств (2) получаем

Следствие 3. *Тетраэдр* $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ *имеет полувневписанную сферу* (*относительно вершины* A_4) *тогда и только тогда, когда разности длин следующих противолежащих ребер равны*

$$|A_1A_4| - |A_2A_3| = |A_2A_4| - |A_1A_3| = |A_3A_4| - |A_1A_2|. \tag{5}$$

Введем новый термин и будем называть тетраэдр $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, для которого выполняются равенства (5), *внекаркасным тетраэдром* (*относительно вершины* A_4).

3. Характеризация симплексов с полувневписанной сферой

В теореме 1 дается критерий существования внешней сферы Конвея, но естественно возникает вопрос о достаточном разнообразии тех симплексов, для которых можно построить такую сферу. Иными словами, как много симплексов имеют полувневписанную сферу? В [6] получена характеризация n-мерных симплексов, имеющих полувписанную сферу. В этом разделе будет дана аналогичная полная характеризация n-мерных симплексов, имеющих полувневписанную сферу.

Лемма 4. *Рассмотрим набор положительных чисел* $a_1, \dots, a_{n+1}$. *Если в* n*-мерном евклидовом пространстве* E_n *существует симплекс* $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ *с ребрами, длины которых удовлетворяют равенствам* (2), *то существует набор чисел* $h_1, \dots, h_{n+1}$ *такой, что все числа* $a_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n+1; k < l)$, *задаваемые формулами* (1), *будут одинаковыми. Кроме этого, существует сфера, касающаяся всех ребер* $[A_k, A_l]$ *в точках* $B_{k,l}$ $(k, l = 1, \dots, n; k < l)$ *и всех продолжений за точку* A_k *ребер* $[A_k, A_{n+1}]$ *в точках* $B_{k,n+1}$ (*полувневписанная сфера*), *при этом* *будут выполняться равенства* $|A_kB_{k,l}| = a_k$, $|A_kB_{k,n+1}| = a_{n+1}$ $(k, l = 1, \ldots, n;$ $k \neq l)$.

Доказательство. Достаточно положить для произвольного вещественного параметра λ

$$h_k = \lambda + \sum_{j \neq k}^{n} (a_{n+1} - a_j) \ (k = 1, \ldots, n), \quad h_{n+1} = -\lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i<j}^{n} (a_i + a_j).$$

Существование полувневписанной сферы сразу следует из леммы 1. Если обозначить через $B_{k,l}$, $B_{k,n+1}$ точки касания этой сферы с ребрами $[A_k, A_l]$ и с продолжениями ребер $[A_k, A_{n+1}]$ соответственно, то система линейных уравнений

$$x_k + x_l = |A_kA_l|, \quad (k, l = 1, \ldots, n; k < l)$$

может иметь не более одного решения, поэтому имеем равенства $a_k = |A_kB_{k,l}|$ $(k, l = 1, \ldots, n; k \neq l)$. Так как $|A_kB_{k,l}| = |A_kB_{k,n+1}|$, то также верны равенства $|A_kA_{n+1}| = |A_kB_{k,n+1}| - a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Следовательно, $|A_kB_{k,n+1}| = a_{n+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Лемма 4 дает ответ на вопрос о характеризации. Очевидно, правильный n-мерный симплекс (с равными ребрами) имеет полувневписанную сферу (даже $n+1$ штук для каждой $(n-1)$-мерной грани). Параметры $a_1, \ldots, a_{n+1}$ в формуле (2) для этого симплекса можно менять произвольно в достаточно малых окрестностях, и новый симплекс, который строится по длинам ребер $|A_kA_l|$, заданным по формуле (2), тоже может быть реализован в E_n. Поэтому существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из всех наборов $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in U$, для которых в E_n существует n-мерный симплекс $[A_1, \ldots, A_{n+1}]$, длины ребер которого удовлетворяют равенствам (2). Следовательно, ответ на вопрос о разнообразии таких симплексов можно сформулировать в следующем виде [6, следствие 4].

Следствие 4. *Если считать симплекс заданным длинами своих ребер, то множество всех n-мерных симплексов, имеющих полувневписанную сферу (и касающуюся всех ребер грани $[A_1, \ldots, A_n]$), образует $(n+1)$-мерное подмногообразие в $[n(n+1)]/2$-мерном многообразии всех n-мерных симплексов.*

Рассмотрим вопрос о том, насколько много полувневписанных сфер может иметь один симплекс. Правильный симплекс имеет наибольшее количество таких сфер, именно $n+1$ штук (каждая такая сфера касается всех ребер одной из $(n-1)$-мерных граней). В общем случае ответ зависит от размерности. Очевидный случай $n = 2$ мы не рассматриваем.

Случай $n = 3$.

Предложение 1 [8, § 41]. *Тетраэдр имеет более одной полувневписанной сферы тогда и только тогда, когда равны длины любой его пары противолежащих ребер (равногранный тетраэдр). В этом случае тетраэдр имеет все четыре полувневписанные сферы. Как следствие в равногранном тетраэдре можно построить четыре различные внешние сферы Конвея.*

Случай $n > 3$.

Предложение 2. *Если $n \geq 4$ и n-мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ имеет более чем две полувневписанные сферы, то он является правильным симплексом. Если n-мерный симплекс имеет ровно две полувневписанные сферы S_1, S_2, где S_1 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$, а S_2 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_{n-1}, A_{n+1}]$, то для некоторых $b, c > 0$ ($b \neq c$) верны равенства*

$$|A_n A_{n+1}| = |A_k A_l| = 2b \quad (k, l = 1, \dots, n-1; k < l)$$

$$|A_k A_n| = |A_k A_{n+1}| = 2c \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Как следствие в таком симплексе существуют ровно две различные внешние сферы Конвея.

Доказательство. Существуют два набора параметров $(a_1, \dots, a_{n+1})$, $(b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых

$$a_k + a_l = b_k + b_l \ (k, l = 1, \dots, n-1; k < l), \quad a_{n+1} - a_k = b_{n+1} + b_k \ (k = 1, \dots, n-1);$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n - b_{n+1}, \quad a_k + a_n = b_n - b_k \ (k = 1, \dots, n-1).$$

Обе сферы S_1, S_2 в пересечении с гранью $[A_1, \dots, A_{n-1}]$ дают $(n-3)$-мерную сферу, полувписанную в эту грань. Из леммы 4 вытекает, что $a_k = b_k = b$. Последнее равенство следует из того, что для трехмерной грани $[A_i, A_j, A_n, A_{n+1}]$ $(i < j < n)$ имеют место равенства $a_i = b_j$, $a_j = b_i$, т. е. $a_i = b_i = b_j = a_j$, см. доказательство предложения 1. Поэтому $|A_k A_l| = a_k + a_l = 2b$ $(k, l = 1, \dots, n-1; k < l)$. Кроме того, $b_n = a_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n$ и $|A_n A_{n+1}| = a_{n+1} - a_n = 2b$, $|A_k A_n| = a_k + a_n = b_n - b_k = a_{n+1} - a_k = 2c$. Вторая часть предложения 2 доказана.

Для доказательства первой части допустим, что существует еще одна полувневписанная сфера S_3, касающаяся всех ребер грани $[A_2, \dots, A_{n+1}]$. Тогда еще для одного набора параметров $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ имеем равенства

$$a_1 + a_k = c_1 - c_k \ (k = 2, \dots, n), \quad a_k + a_l = c_k + c_l \ (k, l = 2, \dots, n+1; k < l).$$

Так же, как и раньше, получаем $a_k = c_k = b$ $(k = 2, \dots, n)$. Поэтому $a_n = c_n = b$, $a_{n+1} = a_n + 2b = 3b$. И наконец, $|A_k A_{n+1}| = |A_k A_n| = a_k + a_n = 2b$, т. е. длины всех ребер симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ равны $2b$.

Предложение 3. *Если n-мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ $(n \geq 3)$ имеет полувписанную сферу и по крайней мере две полувневписанные сферы, то он является правильным симплексом. Если n-мерный симплекс имеет полувписанную сферу и одну полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$, то для некоторых $b, c > 0$ ($b \neq c$) будем иметь*

$$|A_k A_l| = 2b \ (k, l = 1, \dots, n; k < l); \quad |A_k A_{n+1}| = 2c \ (k = 1, \dots, n).$$

Как следствие в таком симплексе существует внутренняя сфера Конвея и существует ровно одна внешняя сфера Конвея.

Доказательство. Случай $n = 3$ рассмотрен в [8]. Если $n > 3$ и симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ имеет две полувневписанные сферы S_1, S_2, где S_1 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$, а S_2 касается всех ребер грани $[A_1, \dots, A_{n-1}, A_{n+1}]$, по предложению 2 уже имеем равенства $|A_n A_{n+1}| = |A_k A_l| = 2b$ $(k, l = 1, \dots, n-1;$ $k < l)$, $|A_k A_n| = |A_k A_{n+1}| = 2c$ $(k = 1, \dots, n-1)$. Если симплекс имеет также полувписанную сферу, то из [4, 5] следует, что 3-мерная грань $[A_k, A_l, A_n, A_{n+1}]$ $(k < l < n)$ является каркасным тетраэдром, поэтому

$$4b = |A_kA_l| + |A_nA_{n+1}| = |A_kA_n| + |A_lA_{n+1}| = 4c.$$

Значит, $b = c$ и $|A_kA_n| = |A_kA_{n+1}| = 2b$, что означает равенство всех ребер симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$.

Допустим теперь, что n-мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ $(n \geq 3)$ имеет полувписанную сферу и одну полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$. Из теоремы 1 (критерий (γ)) следует существование набора $(a_1, \dots, a_{n+1})$, для которого $|A_kA_l| = a_k + a_l$, $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - a_k$ $(k, l = 1, \dots, n; k \neq l)$. Из существования полувписанной сферы следует существование еще одного набора $(b_1, \dots, b_{n+1})$, для которого $|A_kA_l| = b_k + b_l$ $(k, l = 1, \dots, n + 1; k < l)$. Так как полувписанная и полувневписанная сферы касаются всех ребер одной и той же грани $[A_1, \dots, A_n]$, то $a_k = b_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Но тогда $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - a_k = a_k + b_{n+1}$, поэтому $a_k = (a_{n+1} - b_{n+1})/2 = b$ не зависит от k. Поэтому $|A_kA_{n+1}| = a_{n+1} - b = 2c$ тоже не зависит от k.

4. Еще один критерий существования полувневписанной сферы

Рассмотрим полный граф K_{n+1} с $n+1$ вершинами $1, 2, \dots, n+1$. Рассмотрим также абелеву группу $(G, +)$, в которой для любого элемента $a \in G$ уравнение $2x := x + x = a$ имеет единственное решение, которое будем обозначать через $x/2$. Задача о делении весов с вычитанием формулируется следующим образом. Каждому ребру графа K_{n+1}, соединяющему вершины i и j, сопоставим вес $w_{i,j} \in G$. Нужно найти условия, при которых существует последовательность $a_1, \dots, a_{n+1} \in G$, для которой $w_{i,j} = a_i + a_j$ $(i, j = 1, \dots, n; i < j)$, $w_{i,n+1} = a_{n+1} - a_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Лемма 5. *При $n \geq 3$ задача о делении весов разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда для любой четверки $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n+1$ выполняются равенства*

$$w_{i_1,i_2} + w_{i_3,i_4} = w_{i_1,i_3} + w_{i_2,i_4} = w_{i_1,i_4} + w_{i_2,i_3} \tag{6}$$

и для любой тройки $i_1 < i_2 < i_3 < n + 1$ выполняются равенства

$$w_{i_1,n+1} - w_{i_2,i_3} = w_{i_2,n+1} - w_{i_1,i_3} = w_{i_3,n+1} - w_{i_1,i_2}. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость условий (6), (7) очевидна. Докажем достаточность. Для четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n + 1$ обозначим $b = w_{i_1,i_2} + w_{i_3,i_4}$ и полагаем

$$x_1 = b - (w_{i_2,i_3} + w_{i_2,i_4} + w_{i_3,i_4})/2; \quad x_2 = b - (w_{i_1,i_3} + w_{i_1,i_4} + w_{i_3,i_4})/2;$$

$$x_3 = b - (w_{i_1,i_2} + w_{i_2,i_4} + w_{i_1,i_4})/2; \quad x_4 = b - (w_{i_1,i_2} + w_{i_2,i_3} + w_{i_1,i_3})/2.$$

Непосредственно проверяется, что $w_{i_k,i_l} = x_k + x_l$ $(k, l = 1, 2, 3, 4; k < l)$. Пусть $i_1 < i_2 < i_3 < n + 1$ и $c = w_{i_1,n+1} - w_{i_2,i_3}$. Полагаем

$$y_1 = [(w_{i_2,n+1} + w_{i_3,n+1} - w_{i_2,i_3})/2] - c; \quad y_2 = [(w_{i_1,n+1} + w_{i_3,n+1} - w_{i_1,i_3})/2] - c;$$

$$y_3 = [(w_{i_1,n+1} + w_{i_2,n+1} - y_{i_1,i_2})/2] - c; \quad y_4 = c + [(w_{i_1,i_2} + w_{i_1,i_3} + w_{i_2,i_3})/2].$$

Непосредственно проверяется, что $w_{i_k,i_l} = y_k + y_l$ $(k, l = 1, 2, 3; k < l)$, $w_{i_k,n+1} = y_4 - y_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Далее будем действовать по индукции. В качестве базы индукции рассмотрим четверку индексов $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = n + 1$ и положим $a_i = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_{n+1} = y_4$, где $y_1, y_2, y_3, y_4 \in G$ — полученное выше решение. Допустим, что для некоторого $4 \le p < n$ уже найдены элементы $a_1, \dots, a_p, a_{n+1} \in G$, для которых $w_{i,j} = a_i + a_j$ $(i, j = 1, \dots, p; i < j)$, $w_{i,n+1} = a_{n+1} - a_i$ $(i = 1, \dots, p)$. Положим $a_{p+1} = w_{1,p+1} - a_1$. Необходимо проверить, что для любого $1 < i \le p$ выполняется $w_{i,p+1} = a_i + a_{p+1}$. Для этого рассмотрим четверку индексов $1, i, j, p + 1$, где $1 < j \le p; j \ne i$. По предыдущему условию для этой четверки тоже существует решение x_1, x_2, x_3, x_4, т. е. $w_{1,i} = x_1 + x_2$, $w_{1,j} = x_1 + x_3$, $w_{i,j} = x_2 + x_3$, $w_{1.p+1} = x_1 + x_4$. Вычтя из первого равенства третье и сложив со вторым, получим $2x_1 = w_{1,i} - w_{i,j} + w_{1,j} = 2a_1$, что означает $x_1 = a_1$. Аналогично получаем $x_2 = a_i$, $x_3 = a_j$ и $x_4 = w_{1,p+1} - x_1 = a_{p+1}$. Поэтому $w_{i,p+1} = x_2 + x_4 = a_i + a_{p+1}$. Последнее равенство $w_{p+1,n+1} = a_{n+1} - a_{p+1}$ следует из

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_{p+1} &= a_{n+1} - w_{1,p+1} + a_1 \\ &= a_{n+1} - a_2 - w_{1,p+1} + a_1 + a_2 = w_{2,n+1} - w_{1,p+1} + w_{1,2} = w_{p+1,n+1}, \end{aligned}$$

в силу равенств (7).

Предложение 4. *Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задан симплекс $[A_i, \dots, A_{n+1}]$ с вершинами $A_1, \dots, A_{n+1}$. Если для любой четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < n + 1$ выполняются равенства*

$$|A_{i_1}A_{i_2}| + |A_{i_3}A_{i_4}| = |A_{i_1}A_{i_3}| + |A_{i_2}A_{i_4}| = |A_{i_2}A_{i_3}| + |A_{i_1}A_{i_4}| \tag{6'}$$

и для любой тройки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < n + 1$ выполняются равенства

$$|A_{i_1}A_{n+1}| - |A_{i_2}A_{i_3}| = |A_{i_2}A_{n+1}| - |A_{i_1}A_{i_3}| = |A_{i_3}A_{n+1}| - |A_{i_1}A_{i_2}|, \tag{7'}$$

то симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ имеет полувневписанную сферу, касающуюся всех ребер грани $[A_1, \dots, A_n]$.

Доказательство. Рассмотрим полный граф с вершинами $A_1, \dots, A_{n+1}$, ребрами которого являются все ребра симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Применим лемму 5, положив $G = \mathbb{R}$ и выбрав веса $w_{i,j} = |A_iA_j|$ $(i, j = 1, \dots, n + 1; i < j)$. В этом случае условия $(6')$, $(7')$ совпадают с условиями $(6), (7)$, т. е. найдено единственное решение $a_1, \dots, a_{n+1}$ задачи о делении весов. Условие положительности $a_i > 0$ $(i = 1, \dots, n + 1)$ сразу следует из того, что для любых трех различных индексов $i, j, k < n + 1$ имеем $a_i = \frac{1}{2}(|A_iA_j| + |A_iA_k| - |A_jA_k|) > 0$ в силу неравенства треугольника. Кроме этого, $a_{n+1} = |A_1A_{n+1}| + a_1 > 0$. Существование требуемой полувневписанной сферы теперь следует из леммы 4.

Исходя из изложенного выше можно сформулировать

Следствие 5 (см. [6, следствие 5]). *В евклидовом пространстве E_n $(n \ge 3)$ n-мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ имеет полувневписанную сферу относительно вершины A_{n+1} тогда и только тогда, когда любая его трехмерная грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}]$ $(1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le n)$ является каркасным тетраэдром, а любая его трехмерная грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{n+1}]$ $(1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n)$ является (относительно вершины A_{n+1}) внекаркасным тетраэдром.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Villiers M.* Conway's circle theorem as a special case of a more general side divider theorem // Learning and Teaching Mathematics. 2023. N 34. P. 37–42.
2. *Акопян А. В.* Геометрия в картинках. М.: МЦНМО, 2011.
3. *Braude E.* Conway's circle theorem: A short proof enabling generalization to polygons. 2021. arXiv:2111.01835[math.GM].
4. *Александров В. А.* Задача M2747 из Задачника «Кванта» // Квант. 2023. № 5. С. 28.
5. *Александров В. А.* Решение задачи M2747 из Задачника «Кванта» // Квант. 2023. № 8. С. 17–18.
6. *Малюгин С. А.* Многомерный аналог окружности Конвея // Сиб. мат. журн. 2024. № 4. С. 693–701.
7. *García Capitán F. J.* A generalization of the Conway circle // Forum Geom. 2013. N 13. P. 191–195.
8. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: Т. 3. Треугольники и тетраэдры. М.: МЦНМО, 2009.

Поступила в редакцию 11 декабря 2025 г.
После доработки 11 декабря 2025 г.
Принята к публикации 6 января 2026 г.

Малюгин Сергей Артемьевич (ORCID 0009-0004-0202-7669)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mal@math.nsc.ru