УДК 517.956.4

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. Зикиров

В работе исследована разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями для линейного уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. При доказательстве разрешимости задачи применяются методы теории дифференциальных уравнений, функции Грина для уравнения теплопроводности и теории интегральных уравнений.

Исследуемые нелокальные задачи сводятся к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо.

Ключевые слова: краевая задача; регулярное решение; разрешимость; нелокальное условие; условие интегрального вида; нелокальная задача; уравнение теплопроводности; функция Грина; интегральное уравнение; уравнение Вольтерра; уравнение Абеля.

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории неклассических задач математической физики. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с распространением тепла [1], [2], физикой плазмы [3], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

В большинстве работ, связанных с разрешимостью нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида, изучается лишь уравнения второго порядка [5]–[9]. Различные нелокальные задачи с интегральными условиями для отдельных типов уравнений в частных производных третьего порядка изучались во многих работах (см. например [10]–[15]).

В данной работе исследуется разрешимость нелокальных задач с интегральными граничными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

§ 1. Постановка задачи

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + a(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \qquad (1)$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции.

Заметим, что уравнение (1) в области D относительно старшей производной имеет трёхкратную характеристику $t = const$, по классификации работы [16] уравнение (1) соответствует первому каноническому виду. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость. В работе [17] уравнение (1) названо уравнением с кратными характеристиками и рассмотрены различные краевые задачи для этого уравнения.

Для уравнения (1) рассмотрим нелокальную задачу с граничным условием интегрального вида в следующей постановке: *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \qquad (2)$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

и интегральным условиям

$$u(\ell,t) = \int\limits_0^\ell p(x,t)u(x,t)dx + \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (4)$$

где $\varphi(x)$, $p(x,t)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0); \qquad \varphi'(0) = \mu_2(0); \qquad \varphi(\ell) = \int\limits_0^\ell p(x,0)\varphi(x)dx + \mu_3(0). \qquad (*)$$

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,t)/\partial x^m \partial t^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Определение. *Под регулярным в области D решением задачи будем понимать функцию $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.*

§ 2. Разрешимость нелокальной задачи (1)–(4)

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{3,1}(D)\cap C^{2,0}(\overline{D})$, при этом, справедлива следующая теорема о разрешимости исследуемой нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия:*

1) $a(x,t)$, $a_x(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $p(x,t)$, $p_x(x,t) \in C(\overline{D})$;

2) $\varphi(x) \in C^1[0,\ell]$, $\mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $(i = 1,2,3)$, *кроме того выполнены условия согласования (*).*

Тогда регулярное решение задачи (1)–(4) в классе $C^{3,1}(D)\cap C^{2,0}(\overline{D})$ *существует и единственно.*

Доказательство. Сведем задачу (1)–(4) к эквивалентной смешанной задаче для линейного нагруженного параболического уравнения.

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x получим линейное нагруженное уравнение теплопроводности вида

$$u_t - u_{xx} + a(x,t)u = -u_{xx}(0,t) + \int\limits_0^x b(z,t)u(z,t)dz + f_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$b(z,t) = a_z(z,t) + c(z,t),$$

$$f_1(x,t) = \mu_1'(t) - a(0,t)\mu_1(t) + \int\limits_0^x f(z,t)dz.$$

Для уравнения (5) исследуем вспомогательную задачу: *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (5) удовлетворяющее начальному условию (2) и следующим граничным условиям*

$$u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad u(\ell,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

здесь $\mu(t)$ – пока неизвестная функция.

Она определяется равенством

$$\mu(t) = \int\limits_0^\ell p(x,t)u(x,t)dx + \mu_3(t). \tag{7}$$

Для нахождения условий разрешимости задачи (1)–(4) установим условия ее эквивалентности к смешанной задаче, используя при этом функция Грина $G(x,t;\xi,\tau)$, для уравнения теплопроводности с начальным условием (2) и краевыми условиями (6).

Нетрудно проверить, что функция Грина для уравнения теплопроводности с краевыми условиями (6) задается формулой (см. например [18])

$$G(x,t:\xi,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\Big[U(x-\xi+2n\ell,t-\tau) - U(x+\xi+2n\ell,t-\tau)\Big], \quad t>\tau,$$

здесь $U(x,t;\xi,\tau)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Для функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ справедливы следующие свойства:
1) $G_t(x,t;\xi,\tau)-G_{xx}(x,t;\xi,\tau)=0$ и $G_\tau(x,t;\xi,\tau)+G_{\xi\xi}(x,t;\xi,\tau)=0$;
2) $G(x,t;\ell,\tau)=0,\quad G_\xi(x,t;0,\tau)=0$ при $\forall(x,t)\in D$;
3) $\lim\limits_{\tau\to t}G(x,t;\xi,\tau)=0$ при $x\neq\xi$.

Считая, что правую часть уравнения (5) известной функцией и согласно результатам [17], решение смешанной краевой задачи $\{(5),(2),(6)\}$ существует, единственно и может быть представлено в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^\ell\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi-\int\limits_0^t G(x,t;0,\tau)\mu_2(\tau)d\tau-$$
$$+\int\limits_0^t G_\xi(x,t;\ell,\tau)\mu(\tau)d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)u_{xx}(0,\tau)d\xi d\tau+ \tag{8}$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)\left[\int\limits_0^\xi b(z,\tau)u(z,\tau)dz+f_1(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau.$$

Введем обозначения

$$K_1(x,t,\tau)=\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)d\tau; \tag{9}$$

$$K_2(x,t;\xi,\tau)=a(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)-b(\xi,\tau)\int\limits_\xi^\ell G(x,t;z,\tau)dz;$$

$$g_0(x,t)=\int\limits_0^\ell\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+\int\limits_0^t G(x,t;0,\tau)\mu_2(\tau)d\tau-$$
$$\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Тогда формулу (8) можно переписать следующим образом:

$$u(x,t)=g_0(x,t)-\int\limits_0^t K_1(x,t,\tau)u_{xx}(0,\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_\xi(x,t;\ell,\tau)\mu(\tau)d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\ell K_2(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi. \tag{10}$$

Формулу (10) будем рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x,t)$ с особенностью $(t-\tau)^{1/2}$, решение которого можно выписать через резольвенту $R(x,t;\xi,\tau)$ ядра $K_2(x,t;\xi,\tau)$, тогда относительно нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,t)$ получим интегро-дифференциальное уравнение в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^t K_3(x,t;\tau)u_{xx}(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t K_4(x,t,\tau)\mu(\tau)d\tau+g_1(x,t), \tag{11}$$

здесь

$$g_1(x,t)=\int\limits_0^\ell K_5(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t K_6(x,t;\tau)\mu_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\ell\int\limits_0^t K_7(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\tau d\xi;$$

$$K_3(x,t,\tau)=K_1(x,t;\tau)+\int\limits_0^\ell\left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)K_1(\xi,\tau;s)ds\right)d\xi;$$

$$K_4(x,t,\tau)=G_\xi(x,t;\ell,\tau)+\int\limits_0^\ell\left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)G_\xi(\xi,\tau;\ell,s)ds\right)d\xi;$$

$$K_5(x,t,\xi)=G(x,t;\xi,0)+\int\limits_0^\ell\left(\int\limits_0^t R(x,t;z,\tau)G(\xi,\tau;z,0)d\tau\right)dz;$$

$$K_6(x,t,\tau)=G(x,t;0,\tau)+\int\limits_0^\ell\left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)G(\xi,\tau;0,s)ds\right)d\xi;$$

$$K_7(x,t;\xi,\tau)=G(x,t;\xi,\tau)+\int\limits_0^\ell\left(\int\limits_\tau^t R(x,t;z,s)G(\xi,\tau;z,s)ds\right)dz.$$

В равенстве (11) входят неизвестные функции $u_{xx}(0,t)$ и $\mu(t)$. Переходим к их нахождению.

Сначала находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0,t)$.

В дальнейшем, необходимо знать дифференциальные свойства ядра $K_3(x,t,\tau)$, $K_4(x,t,\tau)$ и свободного члена $g_1(x,t)$ в окрестности точки $x=0$.

Полученное уравнение (11) будем решать методом сведения к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $u_{xx}(0,t)$. Но непосредственно дифференцировать по x два раза равенство (11) нельзя, так как ядро $\dfrac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}$ имеет особенность $(t-\tau)^{-3/2}$ при $x=0$.

Сначала выделяем главную часть ядра $K_3(x,t,\tau)$, т. е. функцию Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ представим в виде

$$G(x,t;\xi,\tau) = G_0(x,t;\xi,\tau) + [G(x,t;\xi,\tau) - G_0(x,t;\xi,\tau)] =$$

$$= G_0(x,t;\xi,\tau) + G_1(x,t;\xi,\tau),$$

где $G_0(x,t;\xi,\tau)$ – функция Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0,\ell]$, и имеет место равенство

$$\int\limits_0^\ell G_0(x,t;\xi,\tau)d\xi = 1,$$

в чем легко убедиться [19], воспользовавшись представлением функции Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Тогда функция $G_1(x,t;\xi,\tau)$ имеет вид

$$G_1(x,t;\xi,\tau) = -2\sum_{-\infty}^{+\infty}\Big[U(x-\xi+2(2k+1)\ell,t-\tau) + U(x+\xi+2(2k+1)\ell,t-\tau)\Big].$$

Таким образом, ядро $K_3(x,t,\tau)$ представим в виде

$$K_3(x,t,\tau) = 1 + \int\limits_0^\ell G_1(x,t;\xi,\tau)d\xi + q(x,t;\xi,\tau), \tag{12}$$

здесь

$$q(x,t,\tau) = \int\limits_0^\ell \Big(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)K_1(\xi,\tau;s)ds\Big)d\xi.$$

Правая часть функции $q(x,t,\tau)$ и ее производные являются непрерывными и ограниченными функциями и при помощи известных оценок функции Грина и ее производных [17]

$$\left|\frac{\partial^{i+j}G(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^i t^j}\right| \le \frac{c_0}{(t-\tau)^{(i+2j+1)/2}} exp\left\{-c_1\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\},\ i,j = 1,2,3,..., \tag{13}$$

$c_0 = const > 0, \quad 0 < c_= const < 1$, а также неравенство [7]

$$z^n \exp\{-z^2\} \le A_n \le \infty, \quad n\in[0,\infty), \quad n = 1,2,3,...,$$

легко установить оценку

$$|q(x,t,\tau)| \le \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_\tau^t |R(x,t;\xi,s)||K_1(\xi,\tau;s)|ds \le c_2\ell\pi, \quad c_2 = const > 0.$$

Здесь и всюду ниже через c_i, $i = 0, 1, 2, ...$ будем обозначать положительную постоянную, конкретное значение которой для наших исследований принципиального значения не имеет.

Относительно ядра $K_3(x, t, \tau)$, имеет место утверждение:

Лемма 1 [14]. При $t > \tau$, ядро $K_3(x, t, \tau) \in C_x^2(D)$ и при $x = 0$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} \right| \le M.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (12) под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial K_3}{\partial x} = -2\int\limits_0^\ell \frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\,d\xi = 2\int\limits_0^\ell \frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi}\,d\xi =$$

$$= -2\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} U(x-\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau)d\xi + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} U(x+\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau)d\xi =$$

$$= 2\sum_{-\infty}^{+\infty}[-U(x+(4k+1)\ell, t-\tau) + U(x+(4k+3)\ell, t-\tau)].$$

Отсюда видно, что функция $K_{3x}(x, t, \tau)$ непрерывно дифференцируемая и вторые производные

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x+(4k+1)\ell}{2(t-\tau)}U(x+(4k+1)\ell, t-\tau) - \frac{x+(4k+3)\ell}{2(t-\tau)}U(x+(4k+3)\ell, t-\tau)\right].$$

В последнем равенстве полагая $x = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{(4k+1)\ell}{2(t-\tau)}U((4k+1)\ell, t-\tau) - \frac{(4k+3)\ell}{2(t-\tau)}U((4k+3)\ell, t-\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k+1)\ell}{2(t-\tau)}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}. \tag{14}$$

Общий член ряда (14) представим в виде

$$\frac{(2k+1)\ell}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\} =$$

$$= \frac{[(2k+1)\ell]^3}{4\sqrt{\pi}(\sqrt{t-\tau})^3}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\}\cdot\frac{1}{[(2k+1)\ell]^2}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Используя, известное неравенство [17]

$$0 < \left\{\frac{(2k+1)\ell}{2\sqrt{t-\tau}}\right\}^3\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)\ell}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^2\right\} \le c_3,$$

получим оценку для общего члена ряда (14)

$$\left|\frac{(2k+1)\ell}{2(t-\tau)}U((2k+1)\ell,t-\tau)\right| \leq \frac{2c_3}{\sqrt{\pi}[(2k+1)\ell]^2}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Так как $(2k+1)\ell \neq 0$ при $\forall k \in N$, то знакочередующийся ряд (14) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0} \leq M.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь рассмотрим второй интеграл в правой части (11). Обозначим

$$W(x,t) = \int\limits_0^t \left[G_{1\xi}(x,t;\ell,\tau) + \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)G_{1\xi}(\xi,\tau;\ell,s)ds\right)d\xi\right]\mu(\tau)d\tau,$$

и учитывая свойство теплового потенциала двойного слоя и неравенства (13) при $t>\tau$, $x\neq\ell$, имеем $W_{xx}(x,t)\in C^2(D)$, которое удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Функция $g_1(x,t)$ входящая в равенство (11) состоит из суммы тепловых потенциалов (см. например [19], [20]). Для нахождения нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,t)$ из интегрального уравнения (11) достаточно показать существование ограниченного и непрерывного производного от $g_{1xx}(x,t)$.

Из теории тепловых потенциалов известны следующие свойства:

1) Если $\varphi(x)\in C^1(0,\ell)$, то при $t>0$ функция $\int\limits_0^\ell K_5(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi \in C_x^2[0,\ell]$ и ограничена.

2) Если $f(x,t)\in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{D})$, то при $t>0$ объемный потенциал

$$\int\limits_0^\ell\int\limits_0^t K_7(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\tau d\xi \in C_{x,t}^{2,1}(D),$$

ограничен и удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности.

Потенциал простого слоя

$$V_0(x,t) = \int\limits_0^t \left[G_1(x,t;0,\tau) + \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)G_1(\xi,\tau;0,s)ds\right)d\xi\right]\mu_2(\tau)d\tau, \qquad (15)$$

определен на границе $x=0$, поэтому надо доказать дифференцируемость и ограниченность $V_{xx}(0,t)$.

$$K_6(x,t,\tau) = G_1(x,t;0,\tau) + \int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s)G_1(\xi,\tau;0,s)ds$$

Относительно потенциала простого слоя $V_0(x,t)$ докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $\mu_2(t) \in C[0,+\infty)$ и $\mu_2(0)=0$, тогда функция $V_0(x,t) \in C_x^2(D)$ и имеет место

$$\left| \frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2} \bigg|_{x=0} \right| \le M.$$

Доказательство. Для краткости доказательства, рассмотрим сингулярное слагаемое функции $V_0(x,t)$

$$V_0(x,t) = \int\limits_0^t \mu_2(\tau) G_1(x,t;0,\tau) d\tau.$$

При $x \ne 0$ и $t \ne \tau$, ядро $G(x,t;0,\tau) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D})$. Дифференцируя два раза по x под знаком интеграла имеем

$$\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu_2(\tau) \frac{\partial^2 G_1(x,t;0,\tau)}{\partial x^2}\, d\tau = -\int\limits_0^t \mu_2(\tau) \frac{\partial G_1(x,t;0,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойства функции Грина и $\mu_2(0)=0$, получим

$$\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu_2'(\tau) G_1(x,t;0,\tau) d\tau. \tag{16}$$

Правая часть (16) является потенциалом простого слоя с ядром $G(x,t;0,\tau)$. При $x=0$ оно будет непрерывной и ограниченной функцией при $0<t<T:$

$$\frac{\partial^2 V_0(0,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu_2'(\tau) G_1(0,t;0,\tau) d\tau,$$

где

$$G_1(0,t;0,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left\{ -\frac{[(2n+1)\ell]^2}{4(t-\tau)} \right\}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что производная $\dfrac{\partial^2 V_0(0,t)}{\partial x^2}$ сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2 V(0,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \le M.$$

Лемма 2 доказана.

Теперь находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0,t)$. Из доказанных лемм следует, что равенство (11), можно дифференцировать по x два раза. Поэтому дифференцируя (11) по x, затем полагая $x=0$, относительно $u_{xx}(0,t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u_{xx}(0,t)=\int\limits_0^t K_{3xx}(0,t,\tau)u_{xx}(0,\tau)d\tau+\Phi_{xx}(0,t). \tag{16}$$

Правая часть (16) является потенциалом простого слоя с ядром Покажем, что ядро $K_{3xx}(0,t,\tau)$ ограниченная функция. Используя равенство (9) ядро $K_3(x,t,\tau)$ представим в виде

$$K_3(x,t,\tau)=\int\limits_0^\ell [G_0(x,t;\xi,\tau)-2G_1(x,t;\xi,\tau]d\xi+q(x,t,\tau)=$$

$$=1-2\int\limits_0^\ell G_1(x,t;\xi,\tau)d\xi+q(x,t,\tau).$$

В силу доказанных лемм, имеем

$$\left|\frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0}\le\frac{2c_3}{\sqrt{\pi}[(2k+1)\ell]^2}\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\}+c_4.$$

Легко заметить, что ядро интегрального уравнения Вольтерра второго рода (16) непрерывная и ограниченная функция. Решение $u_{xx}(0,t)$ интегрального уравнения (16) можно найти методом последовательных приближений.

Пусть $R_3(t,\tau)$ резольвента ядра $K_{3xx}(0,t,\tau)$, тогда решение уравнения (16) имеет вид

$$u_{xx}(0,t)=\int\limits_0^t K_8(t,\tau)\mu(\tau)d\tau+g_2(t), \tag{17}$$

где

$$K_8(t,\tau)=K_{3xx}(0,t,\tau)+\int\limits_\tau^t R_3(t,s)K_{3xx}(0,\eta,s)ds;$$

$$g_2(t)=g_{1xx}(0,x)+\int\limits_0^t R_3(t,\tau)g_{1xx}(0,\tau)d\tau.$$

Подставляя значение $u_{xx}(0,t)$ из (17) в формулу (11), получим

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\left[K_4(x,t,\tau)+\int\limits_\tau^t K_3(x,t,s)K_8(s,\tau)ds\right]\mu(\tau)d\tau+g_3(x,t), \tag{18}$$

здесь

$$g_3(x,t) = g_1(x,t) + \int\limits_0^t K_3(t,\tau) g_2(\tau) d\tau.$$

Далее определим неизвестную функцию $\mu(t)$. Подставляя функцию $u(x,t)$, представленную формулой (18), в равенство (7) будем иметь

$$\mu(t) = \int\limits_0^t K_9(t,\tau)\mu(\tau)d\tau + g_4(t), \tag{19}$$

где

$$K_9(t,\tau) = \int\limits_0^\ell p(x,t)\Big[K_4(x,t,\tau) + \int\limits_\tau^t K_3(x,t,s)K_8(s,\tau)ds\Big]dx;$$

$$g_4(t) = \mu_3(t) + \int\limits_0^\ell p(x,t) g_3(x,t)dx.$$

Ядро интегрального уравнения (19) может быть преобразоваться к виду

$$K_9(t,\tau) = \frac{p(\ell,t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{t-\tau}\right\} + \exp\left\{-\frac{[2(k+1)\ell]^2}{t-\tau}\right\}\right] +$$

$$+\frac{p(0,t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left\{-\frac{[(4k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\} + \exp\left\{-\frac{[(4k+3)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}\right] +$$

$$+\int\limits_0^\ell p(x,t)\left(\int\limits_\tau^t K_3(x,t,s)K_8(s,\tau)ds\right)dx.$$

и справедлива оценка

$$|K_9(t,\tau)| \le \frac{c_5}{\sqrt{t-\tau}} + c_6.$$

Отсюда в силу леммы 1 ядро $K_9(t,\tau)$ имеет слабую особенность при $\tau \to t$, а свободный член $g_4(t)$ непрерывен. Интегральное уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, притом имеет, притом единственное решение $\mu(t)$, и поэтому единственное решение задачи (1)–(4) задается формулой (18).

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.* – 1963. Vol. 5, № 21. – P. 155–160.

2. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференц. уравнения.* – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

3. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения.* – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

4. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* — М.: Высшая школа, 1995. –301 с.

5. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // *Дифференц. уравнения,* 1986, Том 22, №12. –С. 2117–2126.

6. Bouziani A. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 1996, 9. –P. 323–330.

7. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Дифференц. уравнения.,* 2004. Том 40, №4. –С. 547–564.

8. Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2022, номер 2. –С. 380–395.

9. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Интегральный аналог первой начально–краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Матем. заметки,* 2022. Том 111, выпуск 4. –С. 540–550.

10. Кожанов А. И., Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // *Вестник НГУ. Серия: Матем., механ. и информ.* 2010. Том 10, вып. 3. –С. 46–62.

11. Попов Н. С. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // *Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер.,* 2015, 3(125). –С. 29–43.

12. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского–Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика,* 2021. Том 36. –С. 14–28.

13. Кожанов А. И., Хромченко Д. С. Нелокальные задачи с интегральновозмущенным условием А. А. Самарского для квазипараболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки СВФУ.* 2023. Том 30, выпуск 4. –С. 12–23.

14. Zikirov O. S., Sagdullayeva M. M. Solvability of nonlocal problem with integral condition for third-order equation // *J. Math. Sci.* 2024. Vol. 284, No. 2. –P. 287–298. DOI 10.1007/s10958-024-07350-3

15. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // *Дифференц. уравнения,* 2004. Том 40, №6. –С. 763–774.

16. Джураев Т. Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.// *Дифференц. уравнения,* 1991. Том 27, №10, (1991), 1734–1745.

17. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов.* – Ташкент.: «Фан», 1979. – 240 с.

18. Орынбасаров М. О. Решение смешанной задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе.//*Изв. НАН РК. Серия физико–математическая,* 2009, №1. –С. 3–8.

19. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* – М:. Мир. 1968. – 427 с.

20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* — М.: Наука, 1977. –736 с.

Поступила в редакцию XX месяц 202X г.
После доработки XX месяц 202X г.
Принята к публикации XX месяц 202X г.

Зикиров Обиджан Салижанович
Республика Узбекистан, г.Ташкент
Национальный университет
Узбекистана им. Мирзо Улугбека
zikirov@yandex.ru