4964_p

УДК 517.956.4

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. Зикиров

Аннотация. Исследована разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями для линейного уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. При доказательстве разрешимости задачи применяются методы теории дифференциальных уравнений, функции Грина для уравнения теплопроводности и теории интегральных уравнений. Изучаемые нелокальные задачи сводятся к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: краевая задача, регулярное решение, разрешимость, нелокальное условие, условие интегрального вида, нелокальная задача, уравнение теплопроводности, функция Грина, интегральное уравнение, уравнение Вольтерра, уравнение Абеля.

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории неклассических задач математической физики. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с распространением тепла [1, 2], физикой плазмы [3], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

В большинстве работ, связанных с разрешимостью нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида, изучается лишь уравнения второго порядка [5–9]. Различные нелокальные задачи с интегральными условиями для отдельных типов уравнений в частных производных третьего порядка изучались во многих работах (см., например, [10–15]).

В данной работе исследуется разрешимость нелокальных задач с интегральными граничными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

§ 1. Постановка задачи

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + a(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

© 1960 Зикиров О. С.

где $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции.

Заметим, что уравнение (1) в области D относительно старшей производной имеет трехкратную характеристику $t = \mathrm{const}$, по классификации работы [16] уравнение (1) соответствует первому каноническому виду. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость. В работе [17] уравнение (1) названо уравнением с кратными характеристиками и рассмотрены различные краевые задачи для этого уравнения.

Для уравнения (1) рассмотрим нелокальную задачу с граничным условием интегрального вида в следующей постановке: *найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральному

$$u(\ell,t) = \int\limits_0^\ell p(x,t)u(x,t)dx + \mu_3(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

условиям, где $\varphi(x)$, $p(x,t)$, $\mu_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(0) = \mu_2(0), \quad \varphi(\ell) = \int\limits_0^\ell p(x,0)\varphi(x)\,dx + \mu_3(0). \tag{$*$}$$

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными $\partial^{m+n}u(x,t)/\partial x^m \partial t^n$ для всех $m = 0,\dots,k$, $n = 0,\dots l$, $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Определение. Под *регулярным в области D решением* задачи будем понимать функцию $u(x,t)$ из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.

§ 2. Разрешимость нелокальной задачи (1)–(4)

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, при этом справедлива следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия*

1) $a(x,t)$, $a_x(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $p(x,t)$, $p_x(x,t) \in C(\overline{D})$;

2) $\varphi(x) \in C^1[0,\ell]$, $\mu_i(t) \in C^1[0,T]$ $(i = 1,2,3)$, *кроме того, выполнены условия согласования* $(*)$.

Тогда регулярное решение задачи (1)–(4) *в классе* $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$ *существует и единственно.*

Доказательство. Сведем задачу (1)–(4) к эквивалентной смешанной задаче для линейного нагруженного параболического уравнения.

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x, получим линейное нагруженное уравнение теплопроводности вида

$$u_t - u_{xx} + a(x,t)u = -u_{xx}(0,t) + \int\limits_0^x b(z,t)u(z,t)\,dz + f_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$b(z,t)=a_z(z,t)+c(z,t),\quad f_1(x,t)=\mu_1'(t)-a(0,t)\mu_1(t)+\int\limits_0^x f(z,t)\,dz.$$

Для уравнения (5) исследуем вспомогательную задачу: *найти решение* $u(x,t)$ *уравнения* (5), *удовлетворяющее начальному условию* (2) *и следующим граничным условиям*:

$$u_x(0,t)=\mu_2(t),\quad u(\ell,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le T,\tag{6}$$

здесь $\mu(t)$ — пока неизвестная функция. Она определяется равенством

$$\mu(t)=\int\limits_0^\ell p(x,t)u(x,t)\,dx+\mu_3(t).\tag{7}$$

Для нахождения условий разрешимости задачи (1)–(4) установим условия ее эквивалентности смешанной задаче, используя при этом функцию Грина $G(x,t;\xi,\tau)$, для уравнения теплопроводности с начальным условием (2) и краевыми условиями (6).

Нетрудно проверить, что функция Грина для уравнения теплопроводности с краевыми условиями (6) задается формулой (см., например, [18])

$$G(x,t:\xi,\tau)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n[U(x-\xi+2n\ell,t-\tau)-U(x+\xi+2n\ell,t-\tau)],\quad t>\tau,$$

здесь $U(x,t;\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Для функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ справедливы следующие свойства:

1) $G_t(x,t;\xi,\tau)-G_{xx}(x,t;\xi,\tau)=0$ и $G_\tau(x,t;\xi,\tau)+G_{\xi\xi}(x,t;\xi,\tau)=0$;

2) $G(x,t;\ell,\tau)=0$, $G_\xi(x,t;0,\tau)=0$ при $(x,t)\in D$;

3) $\lim\limits_{\tau\to t}G(x,t;\xi,\tau)=0$ при $x\neq\xi$.

Согласно результатам [17] если правая часть уравнения (5) — известная функция, то решение смешанной краевой задачи (5), (2), (6) существует, единственно и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}u(x,t)={}&\int\limits_0^\ell\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)\,d\xi-\int\limits_0^t G(x,t;0,\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau\\&+\int\limits_0^t G_\xi(x,t;\ell,\tau)\mu(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)u_{xx}(0,\tau)\,d\xi d\tau\\&+\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)\left[\int\limits_0^\xi b(z,\tau)u(z,\tau)\,dz+f_1(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

Введем обозначения:

$$K_1(x,t,\tau)=\int\limits_0^\ell G(x,t;\xi,\tau)\,d\tau;\tag{9}$$

$$K_2(x,t;\xi,\tau) = a(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau) - b(\xi,\tau)\int\limits_{\xi}^{\ell} G(x,t;z,\tau)\,dz;$$

$$g_0(x,t) = \int\limits_0^{\ell} \varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^{t} G(x,t;0,\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\ell} G(x,t;\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Тогда формулу (8) можно переписать следующим образом:

$$u(x,t) = g_0(x,t) - \int\limits_0^{t} K_1(x,t,\tau)u_{xx}(0,\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t} G_{\xi}(x,t;\ell,\tau)\mu(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_0^{\ell} K_2(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi. \quad (10)$$

Формулу (10) будем рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x,t)$ с особенностью $(t-\tau)^{1/2}$, решение которого можно выписать через резольвенту $R(x,t;\xi,\tau)$ ядра $K_2(x,t;\xi,\tau)$, тогда относительно нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,t)$ получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u(x,t) = \int\limits_0^{t} K_3(x,t;\tau)u_{xx}(0,\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t} K_4(x,t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau + g_1(x,t), \quad (11)$$

здесь

$$g_1(x,t) = \int\limits_0^{\ell} K_5(x,t;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{t} K_6(x,t;\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{t} K_7(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\tau d\xi;$$

$$K_3(x,t,\tau) = K_1(x,t;\tau) + \int\limits_0^{\ell}\left(\int\limits_{\tau}^{t} R(x,t;\xi,s)K_1(\xi,\tau;s)\,ds\right)d\xi;$$

$$K_4(x,t,\tau) = G_{\xi}(x,t;\ell,\tau) + \int\limits_0^{\ell}\left(\int\limits_{\tau}^{t} R(x,t;\xi,s)G_{\xi}(\xi,\tau;\ell,s)\,ds\right)d\xi;$$

$$K_5(x,t,\xi) = G(x,t;\xi,0) + \int\limits_0^{\ell}\left(\int\limits_0^{t} R(x,t;z,\tau)G(\xi,\tau;z,0)\,d\tau\right)dz;$$

$$K_6(x,t,\tau) = G(x,t;0,\tau) + \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s) G(\xi,\tau;0,s)\, ds \right) d\xi;$$

$$K_7(x,t;\xi,\tau) = G(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_\tau^t R(x,t;z,s) G(\xi,\tau;z,s)\, ds \right) dz.$$

В равенство (11) входят неизвестные функции $u_{xx}(0,t)$ и $\mu(t)$. Переходим к их нахождению.

Сначала находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0,t)$. В дальнейшем необходимо знать дифференциальные свойства $K_3(x,t,\tau)$, $K_4(x,t,\tau)$ и свободного члена $g_1(x,t)$ в окрестности точки $x=0$.

Уравнение (11) будем решать методом сведения к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $u_{xx}(0,t)$. Но непосредственно дифференцировать по x два раза равенство (11) нельзя, так как $\frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}$ имеет особенность $(t-\tau)^{-3/2}$ при $x=0$.

Сначала выделяем главную часть ядра $K_3(x,t,\tau)$, т. е. функцию Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ представим в виде

$$G(x,t;\xi,\tau) = G_0(x,t;\xi,\tau) + [G(x,t;\xi,\tau) - G_0(x,t;\xi,\tau)] \\ = G_0(x,t;\xi,\tau) + G_1(x,t;\xi,\tau),$$

где $G_0(x,t;\xi,\tau)$ — функция Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0,\ell]$. Имеет место равенство

$$\int\limits_0^\ell G_0(x,t;\xi,\tau)\, d\xi = 1,$$

в чем легко убедиться [19], воспользовавшись представлением функции Грина второй краевой задачи для уравнения теплопроводности. Тогда функция $G_1(x,t;\xi,\tau)$ имеет вид

$$G_1(x,t;\xi,\tau) = -2\sum_{-\infty}^{+\infty} [U(x-\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau) + U(x+\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau)].$$

Таким образом, ядро $K_3(x,t,\tau)$ представимо в виде

$$K_3(x,t,\tau) = 1 + \int\limits_0^\ell G_1(x,t;\xi,\tau)\, d\xi + q(x,t;\xi,\tau), \tag{12}$$

здесь

$$q(x,t,\tau) = \int\limits_0^\ell \left(\int\limits_\tau^t R(x,t;\xi,s) K_1(\xi,\tau;s)\, ds \right) d\xi.$$

Правая часть функции $q(x,t,\tau)$ и ее производные являются непрерывными ограниченными функциями, и при помощи известных оценок функции Грина и ее производных [17]

$$\left| \frac{\partial^{i+j} G(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^i t^j} \right| \le \frac{c_0}{(t-\tau)^{(i+2j+1)/2}} exp\left\{ -c_1 \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots, \tag{13}$$

$c_0 = \text{const} > 0$, $0 < c_= \text{const} < 1$, а также неравенства [7]

$$z^n \exp\{-z^2\} \le A_n < \infty, \quad n \in [0,\infty),\ n = 1,2,3,\dots,$$

легко установить оценку

$$|q(x,t,\tau)| \le \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_\tau^t |R(x,t;\xi,s)||K_1(\xi,\tau;s)|\,ds \le c_2\ell\pi, \quad c_2 = \text{const} > 0.$$

Здесь и всюду ниже через c_i, $i = 0,1,2,\dots$, будем обозначать положительную постоянную, конкретное значение которой для наших исследований принципиального значения не имеет.

Относительно ядра $K_3(x,t,\tau)$ имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [14]. *При $t > \tau$ ядро $K_3(x,t,\tau)$ принадлежит $C_x^2(D)$ и при $x = 0$ имеет место неравенство*

$$\left| \frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} \right| \le M.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (12) под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial K_3}{\partial x} = -2\int\limits_0^\ell \frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\,d\xi = 2\int\limits_0^\ell \frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi}\,d\xi$$

$$= -2\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\xi} U(x-\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau)\,d\xi + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\xi} U(x+\xi+2(2k+1)\ell, t-\tau)\,d\xi$$

$$= 2\sum_{-\infty}^{+\infty} [-U(x+(4k+1)\ell, t-\tau) + U(x+(4k+3)\ell, t-\tau)].$$

Отсюда видно, что функция $K_{3x}(x,t,\tau)$ непрерывно дифференцируемая и

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x+(4k+1)\ell}{2(t-\tau)} U(x+(4k+1)\ell, t-\tau) - \frac{x+(4k+3)\ell}{2(t-\tau)} U(x+(4k+3)\ell, t-\tau)\right].$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{(4k+1)\ell}{2(t-\tau)} U((4k+1)\ell, t-\tau) - \frac{(4k+3)\ell}{2(t-\tau)} U((4k+3)\ell, t-\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)\ell}{2(t-\tau)} \exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}. \quad (14)$$

Общий член ряда (14) представим в виде

$$\frac{(2k+1)\ell}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}$$

$$= \frac{[(2k+1)\ell]^3}{4\sqrt{\pi}(\sqrt{t-\tau})^3} \exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\} \cdot \frac{1}{[(2k+1)\ell]^2} \exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Используя известное неравенство [17]

$$0 < \left\{ \frac{(2k+1)\ell}{2\sqrt{t-\tau}} \right\}^3 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(2k+1)\ell}{2\sqrt{t-\tau}} \right]^2 \right\} \le c_3,$$

получим оценку для общего члена ряда (14)

$$\left| \frac{(2k+1)\ell}{2(t-\tau)} U((2k+1)\ell, t-\tau) \right| \le \frac{2c_3}{\sqrt{\pi}[(2k+1)\ell]^2} \exp\left\{ -\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)} \right\}.$$

Так как $(2k+1)\ell \ne 0$ при любом $k \in N$, знакочередующийся ряд (14) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \le M.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим второй интеграл в правой части (11). Обозначим

$$W(x,t) = \int_0^t \left[G_{1\xi}(x,t;\ell,\tau) + \int_0^\ell \left(\int_\tau^t R(x,t;\xi,s) G_{1\xi}(\xi,\tau;\ell,s)\, ds \right) d\xi \right] \mu(\tau)\, d\tau.$$

Учитывая свойство теплового потенциала двойного слоя и неравенства (13) при $t > \tau$, $x \ne \ell$, получаем, что $W_{xx}(x,t)$ принадлежит $C^2(D)$ и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Функция $g_1(x,t)$, входящая в равенство (11), состоит из суммы тепловых потенциалов (см., например, [19, 20]). Для нахождения нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,t)$ из интегрального уравнения (11) достаточно показать существование ограниченной и непрерывной производной $g_{1xx}(x,t)$.

Из теории тепловых потенциалов известны следующие свойства.

1. Если $\varphi(x) \in C^1(0,\ell)$, то при $t > 0$ функция $\int_0^\ell K_5(x,t;\xi)\varphi(\xi)\, d\xi$ принадлежит $C_x^2[0,\ell]$ и ограничена.

2. Если $f(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{D})$, то при $t > 0$ объемный потенциал

$$\int_0^\ell \int_0^t K_7(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\tau d\xi \in C_{x,t}^{2,1}(D),$$

ограничен и удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности.

Потенциал простого слоя

$$V_0(x,t) = \int_0^t \left[G_1(x,t;0,\tau) + \int_0^\ell \left(\int_\tau^t R(x,t;\xi,s) G_1(\xi,\tau;0,s)\, ds \right) d\xi \right] \mu_2(\tau)\, d\tau \quad (15)$$

определен на границе $x = 0$, поэтому надо доказать дифференцируемость и ограниченность $V_{xx}(0,t)$. Имеем

$$K_6(x,t,\tau) = G_1(x,t;0,\tau) + \int_0^\ell d\xi \int_\tau^t R(x,t;\xi,s) G_1(\xi,\tau;0,s)\, ds.$$

Относительно потенциала простого слоя $V_0(x,t)$ докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\mu_2(t) \in C[0,+\infty)$ и $\mu_2(0)=0$. Тогда функция $V_0(x,t)$ принадлежит $C_x^2(D)$ и*

$$\left|\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}\right| \le M.$$

Доказательство. Для краткости доказательства рассмотрим сингулярное слагаемое функции

$$V_0(x,t) = \int_0^t \mu_2(\tau) G_1(x,t;0,\tau)\,d\tau.$$

При $x \ne 0$ и $t \ne \tau$ ядро $G(x,t;0,\tau)$ принадлежит $C_{x,t}^{2,1}(\overline{D})$. Дифференцируя два раза по x под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu_2(\tau)\frac{\partial^2 G_1(x,t;0,\tau)}{\partial x^2}\,d\tau = -\int_0^t \mu_2(\tau)\frac{\partial G_1(x,t;0,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойства функции Грина и $\mu_2(0)=0$, получим

$$\frac{\partial^2 V_0(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu_2'(\tau) G_1(x,t;0,\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Правая часть (16) является потенциалом простого слоя с ядром $G(x,t;0,\tau)$. При $x=0$ оно будет непрерывной и ограниченной функцией при $0<t<T$:

$$\frac{\partial^2 V_0(0,t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu_2'(\tau) G_1(0,t;0,\tau)\,d\tau,$$

где

$$G_1(0,t;0,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n \exp\left\{-\frac{[(2n+1)\ell]^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что производная $\frac{\partial^2 V_0(0,t)}{\partial x^2}$ сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 V(0,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} \le M.$$

Лемма 2 доказана.

Теперь находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0,t)$. Из доказанных лемм следует, что равенство (11) можно дифференцировать по x два раза. Поэтому, дифференцируя (11) по x и затем полагая $x=0$, относительно $u_{xx}(0,t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u_{xx}(0,t) = \int_0^t K_{3xx}(0,t,\tau) u_{xx}(0,\tau)\,d\tau + \Phi_{xx}(0,t). \tag{17}$$

Правая часть (17) является потенциалом простого слоя с ядром. Покажем, что ядро $K_{3xx}(0,t,\tau)$ — ограниченная функция. Используя равенство (9), представим $K_3(x,t,\tau)$ в виде

$$K_3(x,t,\tau) = \int\limits_0^\ell [G_0(x,t;\xi,\tau) - 2G_1(x,t;\xi,\tau]\, d\xi + q(x,t,\tau)$$

$$= 1 - 2\int\limits_0^\ell G_1(x,t;\xi,\tau)\, d\xi + q(x,t,\tau).$$

В силу доказанных лемм имеем

$$\left|\frac{\partial^2 K_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0} \le \frac{2c_3}{\sqrt{\pi}[(2k+1)\ell]^2}\, \exp\left\{-\frac{[(2k+1)\ell]^2}{8(t-\tau)}\right\} + c_4.$$

Легко заметить, что ядро интегрального уравнения Вольтерра второго рода (17) — непрерывная и ограниченная функция. Решение $u_{xx}(0,t)$ интегрального уравнения (17) можно найти методом последовательных приближений.

Пусть $R_3(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_{3xx}(0,t,\tau)$. Тогда решение уравнения (17) имеет вид

$$u_{xx}(0,t) = \int\limits_0^t K_8(t,\tau)\mu(\tau)\, d\tau + g_2(t), \tag{18}$$

где

$$K_8(t,\tau) = K_{3xx}(0,t,\tau) + \int\limits_\tau^t R_3(t,s)K_{3xx}(0,\eta,s)\, ds;$$

$$g_2(t) = g_{1xx}(0,x) + \int\limits_0^t R_3(t,\tau)g_{1xx}(0,\tau)\, d\tau.$$

Подставляя значение $u_{xx}(0,t)$ из (18) в формулу (11), получим

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \left[K_4(x,t,\tau) + \int\limits_\tau^t K_3(x,t,s)K_8(s,\tau)\, ds\right]\mu(\tau)\, d\tau + g_3(x,t), \tag{19}$$

здесь

$$g_3(x,t) = g_1(x,t) + \int\limits_0^t K_3(t,\tau)g_2(\tau)\, d\tau.$$

Далее определим неизвестную функцию $\mu(t)$. Подставляя функцию $u(x,t)$, представленную формулой (19), в равенство (7) будем иметь

$$\mu(t) = \int\limits_0^t K_9(t,\tau)\mu(\tau)\, d\tau + g_4(t), \tag{20}$$

где

$$K_9(t,\tau) = \int\limits_0^\ell p(x,t)\left[K_4(x,t,\tau) + \int\limits_\tau^t K_3(x,t,s)K_8(s,\tau)\, ds\right] dx;$$

$$g_4(t) = \mu_3(t) + \int\limits_0^\ell p(x,t) g_3(x,t)\, dx.$$

Ядро интегрального уравнения (20) может быть преобразовано к виду

$$K_9(t,\tau) = \frac{p(\ell,t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{ -\frac{[(2k+1)\ell]^2}{t-\tau} \right\} + \exp\left\{ -\frac{[2(k+1)\ell]^2}{t-\tau} \right\} \right]$$
$$+ \frac{p(0,t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{ -\frac{[(4k+1)\ell]^2}{4(t-\tau)} \right\} + \exp\left\{ -\frac{[(4k+3)\ell]^2}{4(t-\tau)} \right\} \right]$$
$$+ \int\limits_0^\ell p(x,t) \left(\int\limits_\tau^t K_3(x,t,s) K_8(s,\tau)\, ds \right) dx,$$

и справедлива оценка

$$|K_9(t,\tau)| \le \frac{c_5}{\sqrt{t-\tau}} + c_6.$$

Отсюда в силу леммы 1 ядро $K_9(t,\tau)$ имеет слабую особенность при $\tau \to t$, а свободный член $g_4(t)$ непрерывен. Интегральное уравнение (20) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо, и поэтому единственное решение задачи (1)–(4) задается формулой (19).

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 5, N 21. P. 155–160.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
3. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
5. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
6. *Bouziani A.* Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1996. V. 9. P. 323–330.
7. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
8. *Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С.* Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. № 2. С. 380–395.
9. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 540–550.
10. *Кожанов А. И., Попов Н. С.* О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика и информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 46–62.
11. *Попов Н. С.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. Т. 3. С. 29–43.
12. *Кожанов А. И., Тарасова Г. И.* Задача Самарского — Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 36. С. 14–28.
13. *Кожанов А. И., Хромченко Д. С.* Нелокальные задачи с интегральновозмущенным условием А. А. Самарского для квазипараболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 12–23.

14. *Zikirov O. S., Sagdullayeva M. M.* Solvability of nonlocal problem with integral condition for third-order equation // J. Math. Sci. 2024. V. 284, N 2. P. 287–298.

15. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

16. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

17. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.

18. *Орынбасаров М. О.* Решение смешанной задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе // Изв. НАН РК. Сер. физико-математическая. 2009. № 1. С. 3–8.

19. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

20. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 14 января 2026 г.
После доработки 14 января 2026 г.
Принята к публикации 10 февраля 2026 г.

Зикиров Обиджан Салижанович (ORCID 0009-0001-0168-2707)
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Республика Узбекистан
zikirov@yandex.ru