Об оценке спектральной функции задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами

А.Г. Чечкина

Аннотация

Рассматривается задача Зарембы для дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами. Найдена оценка спектральной функции.

0.1 Введение

Настоящая работа посвящена оценке спектральной функции для дивергентного эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами однородной задачи Зарембы, рассматриваемой в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Напомним, что область D называется строго липшицевой, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0, грани которого паралллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0.

Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_2^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_2^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F, по норме пространства $W_2^1(D)$

$$\| v \|_{W_2^1(D,F)} = \left(\int\limits_D |v|^2 \, dx + \int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенство Фридрихса

$$\int\limits_D |v|^2 \, dx \leq C \int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx. \tag{1}$$

Приведем необходимое и достаточное условие на множество $F \subset \partial D$ гарантирующее выполнение неравенства (1). Для этого нам потребуется понятие ёмкости.

Обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что строго липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Введём понятие емкости $C_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}}_d$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ следующим равенством:

$$C_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2 \, dx : \ \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \ \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи (см. [1, §14.1.2] и комментариев к результатам главы 14 монографии [1]) следует, что для функций $v \in W_2^1(D,F)$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$C_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим спектральную задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = \lambda u, \quad u|_F = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_G = 0, \tag{3}$$

с собственными функциями, нормированными равенством

$$\int\limits_D u^2\,dx = 1. \tag{4}$$

Здесь $\{a_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^n$ — измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

$$\alpha|\eta|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \le \alpha^{-1}|\eta|^2, \quad \alpha > 0, \tag{5}$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in D$; $G = \partial D \setminus F$, а $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂D.

Под решением задачи (3) понимается функция $u \in W_2^1(D,F)$ для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_D a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = \lambda \int\limits_D u\varphi dx, \tag{6}$$

выполненного на пробных функциях $\varphi \in W_2^1(D,F)$. Те значения λ, для которых существуют собственные функции, называются собственными значениями.

Поскольку оператор задачи является самосопряжённым в $W_2^1(D,F)$ и положительным, при сделанных выше предположениях относительно области D задача (3) имеет полную ортонормированную систему обобщенных собственных функций. Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Оценкам собственных функций задачи Дирихле для равномерно эллиптических операторов посвящены многочисленные исследования (см. [2]-[7]). В частности, в работе В.А. Ильина и И.А. Шишмарева [5] показано, что если область и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие, то для классической собственной функции $u_k(x)$, отвечающей собственному значению λ_k, имеет место оценка

$$\max_{x\in\overline{D}} |\, u_k(x)| \le C(n, D, \alpha)\lambda_k^{\frac{n}{4}}.$$

В.Я. Якубовым, показано, что оценка для обобщённой собственной функции выполняется

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |\, u(x)| \le C(n, D, \alpha)\lambda^{\frac{n}{4}} \tag{7}$$

является точной. Аналогичные оценки для задачи Зарембы установлены в [8].

Рассмотрим спектральную функцию

$$e_\lambda(x, x') = \sum_{\lambda_j < \lambda} u_j(x) u_j(x'),$$

где u_j — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_j. Нашей целью является оценка максимума модуля данной функции.

Оценки максимума модуля спектральной функции однородной задачи Дирихле можно найти в [9] и [10].

Замечание 1. *Доказываемая в настоящей работе оценка спектральной функции будет впоследствии использоваться для получения асимптотики "считающей" функции, которая определяется как число собственных значений (с учётом кратности), меньших данного $\lambda > 0$. Для наших дальнейших целей достаточно "грубой" оценки спектральной функции. Отметим, что асимптотика считающей функции для задачи Дирихле впервые установлена в работе* [11].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 1. *Если выполнено условие* (2)*, то в предположении* (4) *для собственных функций задачи* (3) *справедлива оценка*

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C\lambda^{\frac{n}{4}}, \qquad n \geq 2, \tag{8}$$

с константой C, не зависящей от $x, x' \in \Omega$ и зависящей только от n, области D и компакта F.

Как отмечалось выше, для функций из пространства $W_2^1(D, F)$ выполнено неравенство Фридрихса (1), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (2), влекущее неравенство Фридрихса (1).

Доказательство основного результата

Пусть E_λ — спектральный проектор, другими словами, интегральный оператор с симметричным ядром $e_\lambda(x, x')$:

$$(E_\lambda f)(x) = \int_D e_\lambda(x, x') f(x') dx', \quad f \in L_2(D). \tag{9}$$

Пусть $(\mathcal{L})^l u = \lambda^l u$, где u — собственная функция, отвечающая собственному значению λ, а $(\mathcal{L})^l$ — суперпозиция операторов $\underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L}}_{l}$, тогда положим

$$u_l = (\mathcal{L})^l (E_\lambda f), \quad l = 1, \ldots \tag{10}$$

По определению $\mathcal{L}u_l = u_{l+1}$, поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{D} a_{ij}(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_{D} u_{l+1} \varphi dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F). \tag{11}$$

Выберем пробную функцию $\varphi = u_l |u_l|^\beta$, $\beta \geq 0$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получим

$$(\beta+1) \int\limits_D |u_l|^\beta |\nabla u_l|^2 dx \leq \widetilde{C}(\alpha) \Big(\int\limits_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \Big)^{\frac{1}{\beta+2}} \Big(\int\limits_D |u_l|^{\beta+2} dx \Big)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \tag{12}$$

Сначала предположим, что $n > 2$.

Далее будем пользоваться условием (2). Поскольку $1 < p < 2$, имеем в силу определения ёмкости $C_p(K, Q)$ и неравенства Гёльдера оценку

$$C_p(K, Q_{2d}) \leq |Q_{2d}|^{(2-p)/2} (C_2(K, Q_{2d}))^{p/2}, \tag{13}$$

в которой $|Q_{2d}|$ означает n-мерную меру куба Q_{2d}. Из этого условия следует неравенство Соболева (см. [1, Section 14.1.2])

$$\Big(\int\limits_D |\varphi|^{2\varkappa} dx \Big)^{\frac{1}{2\varkappa}} \leq C_0 \Big(\int\limits_D |\nabla \varphi|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F),\ \varkappa = \frac{n}{n-2}, \tag{14}$$

которое будем применять. Имеем

$$\begin{aligned} \Big(\int\limits_D |u_l|^{\varkappa(\beta+2)} dx \Big)^{\frac{1}{\varkappa(\beta+2)}} \leq & \Big(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \Big)^{\frac{1}{\beta+2}} \Big(\int\limits_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \Big)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \times \\ & \times \Big(\int\limits_D |u_l|^{\beta+2} dx \Big)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $C(\alpha) = C_0 \widetilde{C}(\alpha)$. Дальнейшие рассуждения основаны на итерационном методе Мозера. Для получения рекуррентного соотношения положим в (42) $\beta = 2\varkappa^j - 2$, $j = 0, 1, \ldots$ Обозначим

$$\chi_j = 2\varkappa^j, \quad a_j = \Big(\frac{C(\alpha)\chi_j^2}{4(\chi_j - 1)} \Big)^{\frac{1}{\chi_j}}, \quad \Phi_{l,j} = \Big(\int\limits_D |u_l|^{\chi_j} dx \Big)^{\frac{1}{\chi_j}}. \tag{16}$$

Тогда (42) запишется в виде

$$\Phi_{l,j+1} \leq a_j (\Phi_{l+1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{l,j})^{\frac{\chi_j - 1}{\chi_j}}. \tag{17}$$

В частности, для $l = 0$ имеем

$$\Phi_{0,j+1} \leq a_j (\Phi_{1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{0,j})^{\frac{\chi_j - 1}{\chi_j}}. \tag{18}$$

Проитерируем (18), пользуясь (17). Для этого заметим, что сумма степеней множителей в правой части (17) равна 1. Поэтому после каждой итерации в (18) будут появляться множители a_{j-1}, $a_{j-2}, \ldots$ В результате найдем, что

$$\Phi_{0,j+1} \le \prod_{l=k}^{j} a_l \prod_{i=0}^{j-k+1} (\Phi_{i,k})^{\gamma_{ij}^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, j. \tag{19}$$

Основную роль это неравенство играет при $k = 0$:

$$\Phi_{0,j+1} \le \prod_{l=0}^{j} a_l \prod_{i=0}^{j+1} (\Phi_{i,0})^{\gamma_{ij}^0}. \tag{20}$$

Показатели степени γ_{ij}^k могут быть получены как коэффициенты многочлена

$$F_{kj}(x) = \prod_{i=k}^{j} \left(1 - \frac{1}{\chi_i} + \frac{x}{\chi_i}\right) = \sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k x^i.$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k = F_{kj}(1) = 1, \tag{21}$$

а также

$$\sum_{i=0}^{j+k-1} i\gamma_{ij}^k = F'_{kj}(1) = \sum_{i=k}^{j} \frac{1}{\chi_i}. \tag{22}$$

Далее нам понадобятся тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^i} = \frac{\varkappa}{2(\varkappa - 1)} = \frac{n}{4}, \tag{23}$$

а также следующее следствие тождества $\sum_{j=0}^{\infty} jx^j = x(1-x)^{-2}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} j\varkappa^{-j} = \frac{\varkappa}{2(\varkappa - 1)^2} = \frac{n(n-2)}{8}. \tag{24}$$

В силу неравенства $x^2/(2x - 1) \le 2x$ при $x \ge 1$, из определения a_j получаем $a_j \le \left(2C(\alpha)\varkappa^j\right)^{1/\chi_j}$. Отсюда, используя соотношения (23), (24), приходим к оценке

$$\prod_{j=0}^{\infty} a_j \le \prod_{j=0}^{\infty} \left(2C(\alpha)\varkappa^j\right)^{1/\chi_j} = \Big((2C(\alpha))^{\varkappa-1}\varkappa\Big)^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)^2}} := C(n, \alpha) < \infty \tag{25}$$

Поскольку $\Phi_{i,0} \le \lambda^i \Phi_{0,0}$, то ввиду (20) и (25) получаем

$$\Phi_{0,j+1} \le C(n, \alpha)\lambda^{\theta_j} (\Phi_{0,0})^{\mu_j}, \tag{26}$$

где

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{j+1} i\gamma_{ij}^0, \quad \mu_j = \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{ij}^0. \tag{27}$$

В силу (21), (22), (23) получаем

$$\mu_j = 1, \quad \theta_j = \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{\chi_j} \le \frac{\varkappa}{2(\varkappa - 1)} = \frac{n}{4}.$$

Окончательно получим

$$\lim_{j\to\infty} \Phi_{0,j+1} \le C(n,\alpha)\lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}}\Phi_{0,0}. \tag{28}$$

Так как $\Phi_{0,0} = \|u_0\|_{L_2(D)}$ (см. (39)) и

$$\lim_{j\to\infty} \Phi_{0,j+1} = \sup_D |u_0|, \quad \text{где } u_0 = E_\lambda f, \tag{29}$$

то с учетом величины $\varkappa$ имеем

$$\sup_D |E_\lambda f| \le C(n,\alpha)\lambda^{\frac{n}{4}}\|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \tag{30}$$

Заметим, что $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \le \|f\|_{L_2(D)}$. Значит, из (9) и (30) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x,\cdot)\|_{L_2(D)} \le C\lambda^{\frac{n}{4}}. \tag{31}$$

Выбирая в (30) $f = e_\lambda(x,\cdot)$, ввиду равенства $E_\lambda f = e_\lambda(x,\cdot)$ получаем искомое соотношение (8).

Теперь рассмотрим случай $n = 2$.

В этом случае применяем неравенство Соболева вида

$$\left(\int\limits_D |\varphi|^{2\varkappa} dx\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \le C_0\left(\int\limits_D |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D,F),\ \varkappa > 1. \tag{32}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, придём к оценке (28). Следовательно, имеем

$$\sup_D |E_\lambda f| \le C(n,\alpha)\lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}}\|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \tag{33}$$

Отсюда, как и выше при $n > 2$, приходим к оценке, аналогичной (44) вида

$$\|e_\lambda(x,\cdot)\|_{L_2(D)} \le C\lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}},$$

в силу которой получаем соотношение

$$|e_\lambda(x,x')| \le C\lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}}, \varkappa > 1, \qquad n = 2. \tag{34}$$

Уточним эту оценку.

Поскольку функция $e_\lambda(x,x')$ ограничена и непрерывна в области D, найдётся точка x_0 в D такая, что

$$|e_\lambda(x,\cdot)| \ge |e_\lambda(x_0,\cdot)| - \varepsilon \tag{35}$$

для некоторого положительного ε. Сделаем замену переменных (гомотетию)

$$y = (x - x_0)\lambda^{\frac{1}{2}}, \qquad v(y) = u(x_0 + y\lambda^{-\frac{1}{2}}), \tag{36}$$

где $y \in D^1$, а D^1 — образ области D при таком преобразовании. Задача (3) переписывается в виде

$$\mathcal{L}^1 v := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(b_{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial y_j}\right) = -v \text{ в } D^1, \quad v|_{\widetilde{F}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}\Big|_{\widetilde{G}} = 0, \tag{37}$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial y_i}\nu_j,$$

а $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ — образы F и G при этом преобразовании. Ясно, что коэффициенты $b_{ij}(y)$ удовлетворяют условию эллиптичности с той же константой α, что и коэффициенты $a_{ij}(x)$, матица остаётся симметрической. Решение понимается в обобщённом смысле, т.е. $v \in W_2^1(D^1, \widetilde{F})$ является решением, если имеет место интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D^1} b_{ij}(y) v_{y_i}\varphi_{y_j}dy = \int\limits_{D^1} v\varphi dy \tag{38}$$

для любой функции $\varphi \in W_2^1(D^1, \widetilde{F})$.

Пусть $(\mathcal{L}^1)^l v = v$, где v — собственная функция, отвечающая собственному значению 1, а $(\mathcal{L}^1)^l$ — суперпозиция операторов $\underbrace{\mathcal{L}^1 \circ \mathcal{L}^1 \circ \cdots \circ \mathcal{L}^1}_{l}$, тогда положим

$$v_l = (\mathcal{L}^1)^l (E_\lambda f), \quad l = 1, \dots \tag{39}$$

По определению $\mathcal{L}^1 v_l = v_{l+1}$, поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{D} b_{ij}(y)\frac{\partial v_l}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\,dy = \int\limits_{D} v_{l+1}\varphi dy, \quad \varphi \in W_2^1(D, F). \tag{40}$$

Выберем пробную функцию $\varphi = v_l|v_l|^\beta$, $\beta \geq 0$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получим

$$(\beta+1)\int\limits_{D} |v_l|^\beta |\nabla v_l|^2 dy \leq \widetilde{C}(\alpha)\left(\int\limits_{D} |v_{l+1}|^{\beta+2}dy\right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int\limits_{D} |v_l|^{\beta+2}dy\right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \tag{41}$$

Далее будем пользоваться условием (2). Имеем оценку (13), поэтому

$$\begin{gathered}\left(\int\limits_{D} |v_l|^{\varkappa(\beta+2)}dy\right)^{\frac{1}{\varkappa(\beta+2)}} \leq \left(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int\limits_{D} |v_{l+1}|^{\beta+2}dy\right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \times \\ \times \left(\int\limits_{D} |v_l|^{\beta+2}dy\right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}.\end{gathered} \tag{42}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют те, которые приведены в случае $n > 2$. После этого делаем обратную замену переменных. Имеем

$$\sup_D |E_\lambda f| \leq C(n, \alpha)\lambda^{\frac{1}{2}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \tag{43}$$

Заметим, что $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \leq \|f\|_{L_2(D)}$. Значит, из (9) и (43) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C\lambda^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Выбирая в (30) $f = e_\lambda(x, \cdot)$, ввиду равенства $E_\lambda f = e_\lambda(x, \cdot)$ получаем искомое соотношение (8), что и доказывает теорему 1 при $n = 2$.

Благодарности

Работа посвящается юбилею Геннадия Владимировича Демиденко и вдохновлена участием автора в конференции в Новосибирске осенью 2025 года с её атмосферой научного поиска и плодотворными дискуссиями, которые были бы невозможны без деятельного участия, энтузиазма и поддержки Геннадия Владимировича.

Список литературы

[1] V. Maz'ya, Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[2] Смолицкий Х.Л. Оценки производных фундаментальных функций. ДАН СССР. 1950. Т. 74. № 2. С. 205–208.

[3] Эйдус Д.М. Оценки модуля собственных функций. ДАН СССР. 1953. Т. 90. № 6. С. 973–974.

[4] Эйдус Д.М. Некоторые неравенства для собственных функций. ДАН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798.

[5] Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных. Изв. АН СССР. 1960. Т. 24. № 6. С. 883–896.

[6] Якубов В.Я. Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора. Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 3. С. 286–287.

[7] Якубов В.Я. Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов. Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33. Вып. 2. С. 58–67.

[8] Чечкина А.Г. Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка. Сириус. Математический журнал. 2025. Т. 1. № 3. С. 15–26.

[9] Avakumovič V.G. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. – Math.Z. 65 (1956), 327–344.

[10] Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121(1968) 193–218.

[11] Weyl H. Das asimptotishe Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differntialeichungen (miteiner Anuendung auf die Theorie Hohlraumstranhlung) //Math. Ann. 71(1912). pp. 441–449.