

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ  
ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Чечкина

**Аннотация.** Рассматривается задача Зарембы для дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами. Найдена оценка спектральной функции.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

**Ключевые слова:** задача Зарембы, эллиптический оператор, спектральная функция.

### 1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке спектральной функции для дивергентного эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами однородной задачи Зарембы, рассматриваемой в ограниченной строго липшицевой области  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Напомним, что область  $D$  называется *строго липшицевой*, если для каждой точки  $x_0 \in \partial D$  существует открытый куб  $Q$  с центром в  $x_0$ , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от  $x_0$  и в некоторой декартовой системе координат с началом в  $x_0$  множество  $Q \cap \partial D$  есть график липшицевой функции с постоянной Липшица, не зависящей от  $x_0$ .

Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций  $W_2^1(D, F)$ . Здесь  $F \subset \partial D$  — замкнутое множество,  $W_2^1(D, F)$  — пополнение множества бесконечно дифференцируемых в замыкании  $D$  функций, равных нулю в окрестности  $F$ , по норме пространства  $W_2^1(D)$

$$\|v\|_{W_2^1(D, F)} = \left( \int_D |v|^2 dx + \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций  $v \in W_2^1(D, F)$  требуется выполнение неравенства Фридрикса

$$\int_D |v|^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx. \quad (1)$$

Приведем необходимое и достаточное условие на множество  $F \subset \partial D$ , гарантирующее выполнение неравенства (1). Для этого нам потребуется понятие емкости.

Обозначим через  $\mathcal{Q}_d$  открытый куб с длиной ребра  $d$  и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что строго липшицева область  $D$  имеет диаметр  $d$  и  $D \subset \mathcal{Q}_d$ . Введем понятие емкости  $C_p(K, \mathcal{Q}_{2d})$  компакта  $K \subset \overline{\mathcal{Q}_d}$  по отношению к кубу  $\mathcal{Q}_{2d}$  следующим равенством:

$$C_p(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^p dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи (см. [1, разд. 14.1.2] и комментариев к результатам гл. 14 монографии [1]) следует, что для функций  $v \in W_2^1(D, F)$  неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$C_p(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим спектральную задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \lambda u, \quad u|_F = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_G = 0 \quad (3)$$

с собственными функциями, нормированными равенством

$$\int_D u^2 dx = 1. \quad (4)$$

Здесь  $\{a_{ij}(x, t)\}_{i,j=1}^n$  — измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$\alpha |\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \alpha^{-1} |\eta|^2, \quad \alpha > 0,$$

для всех  $\eta \in \mathbb{R}^n$  и почти всех  $x \in D$ ;  $G = \partial D \setminus F$ , а  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — единичная внешняя нормаль к границе  $\partial D$ .

Под *решением* задачи (3) понимается ненулевая функция  $u \in W_2^1(D, F)$ , для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \lambda \int_D u \varphi dx,$$

выполненное на пробных функциях  $\varphi \in W_2^1(D, F)$ . Те значения  $\lambda$ , для которых существуют собственные функции, называются *собственными значениями*.

Поскольку оператор задачи является самосопряженным в  $W_2^1(D, F)$  и положительным, при сделанных выше предположениях относительно области  $D$  задача (3) имеет полную ортонормированную систему обобщенных собственных функций. Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Оценкам собственных функций задачи Дирихле для равномерно эллиптических операторов посвящены многочисленные исследования (см. [2–7]). В частности, в работе В. А. Ильина и И. А. Шипмарева [5] показано, что если область и коэффициенты  $a_{ij}(x)$  достаточно гладкие, то для классической собственной функции  $u_k(x)$ , отвечающей собственному значению  $\lambda_k$ , имеет место оценка

$$\max_{x \in \overline{D}} |u_k(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda_k^{\frac{n}{4}}.$$

В. Я. Якубовым показано, что оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda^{\frac{n}{4}}$$

для обобщенной собственной функции является точной. Аналогичные оценки для задачи Зарембы установлены в [8].

Рассмотрим спектральную функцию

$$e_\lambda(x, x') = \sum_{\lambda_j < \lambda} u_j(x) u_j(x'),$$

где  $u_j$  — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению  $\lambda_j$ . Нашей целью является оценка максимума модуля данной функции.

Оценки максимума модуля спектральной функции однородной задачи Дирихле можно найти в [9, 10].

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Доказываемая в настоящей работе оценка спектральной функции будет впоследствии использоваться для получения асимптотики «считающей» функции, которая определяется как число собственных значений (с учетом кратности), меньших данного  $\lambda > 0$ . Для наших дальнейших целей достаточно «грубой» оценки спектральной функции. Отметим, что асимптотика считающей функции для задачи Дирихле впервые установлена в [11].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

**Теорема 1.** *Если выполнено условие (2), то в предположении (4) для собственных функций задачи (3) справедлива оценка*

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C \lambda^{\frac{n}{4}}, \quad n \geq 2, \quad (5)$$

с константой  $C$ , не зависящей от  $x, x' \in \Omega$  и зависящей только от  $n$ , области  $D$  и компакта  $F$ .

Как отмечалось выше, для функций из пространства  $W_2^1(D, F)$  выполнено неравенство Фридрикса (1), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (2), влекущее неравенство Фридрикса (1).

## 2. Доказательство основного результата

Пусть  $E_\lambda$  — спектральный проектор, другими словами, интегральный оператор с симметричным ядром  $e_\lambda(x, x')$ :

$$(E_\lambda f)(x) = \int_D e_\lambda(x, x') f(x') dx', \quad f \in L_2(D). \quad (6)$$

Пусть  $(\mathcal{L})^l u = \lambda^l u$ , где  $u$  — собственная функция, отвечающая собственному значению  $\lambda$ , а  $(\mathcal{L})^l$  — суперпозиция операторов  $\underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \dots \circ \mathcal{L}}_l$ . Положим

$$u_l = (\mathcal{L})^l (E_\lambda f), \quad l = 1, \dots \quad (7)$$

По определению  $\mathcal{L} u_l = u_{l+1}$ , поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_D u_{l+1} \varphi dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F).$$

Выберем пробную функцию  $\varphi = u_l |u_l|^\beta$ ,  $\beta \geq 0$ . Применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получим

$$(\beta + 1) \int_D |u_l|^\beta |\nabla u_l|^2 dx \leq \tilde{C}(\alpha) \left( \int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_D |u_l|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}.$$

Сначала предположим, что  $n > 2$ .

Далее будем пользоваться условием (2). Поскольку  $1 < p < 2$ , в силу определения емкости  $C_p(K, Q)$  и неравенства Гёльдера имеем оценку

$$C_p(K, Q_{2d}) \leq |Q_{2d}|^{(2-p)/2} (C_2(K, Q_{2d}))^{p/2}, \quad (8)$$

в которой  $|Q_{2d}|$  означает  $n$ -мерную меру куба  $Q_{2d}$ . Из этого условия следует неравенство Соболева (см. [1, разд. 14.1.2])

$$\left( \int_D |\varphi|^{2\kappa} dx \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \leq C_0 \left( \int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \kappa = \frac{n}{n-2},$$

которое будем применять. Имеем

$$\begin{aligned} & \left( \int_D |u_l|^{\kappa(\beta+2)} dx \right)^{\frac{1}{\kappa(\beta+2)}} \\ & \leq \left( \frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left( \int_D |u_l|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $C(\alpha) = C_0 \tilde{C}(\alpha)$ . Дальнейшие рассуждения основаны на итерационном методе Мозера. Для получения рекуррентного соотношения положим в (9)  $\beta = 2\kappa^j - 2$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Обозначим

$$\chi_j = 2\kappa^j, \quad a_j = \left( \frac{C(\alpha)\chi_j^2}{4(\chi_j - 1)} \right)^{\frac{1}{\chi_j}}, \quad \Phi_{l,j} = \left( \int_D |u_l|^{\chi_j} dx \right)^{\frac{1}{\chi_j}}.$$

Тогда (9) запишется в виде

$$\Phi_{l,j+1} \leq a_j (\Phi_{l+1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{l,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (10)$$

В частности, для  $l = 0$  имеем

$$\Phi_{0,j+1} \leq a_j (\Phi_{1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{0,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (11)$$

Проитерируем (11), пользуясь (10). Для этого заметим, что сумма степеней множителей в правой части (10) равна 1. Поэтому после каждой итерации в (11) будут появляться множители  $a_{j-1}, a_{j-2}, \dots$ . В результате найдем, что

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=k}^j a_l \prod_{i=0}^{j-k+1} (\Phi_{i,k})^{\gamma_{ij}^k}, \quad k = 0, 1, \dots, j.$$

Основную роль это неравенство играет при  $k = 0$ :

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=0}^j a_l \prod_{i=0}^{j+1} (\Phi_{i,0})^{\gamma_{ij}^0}. \quad (12)$$

Показатели степени  $\gamma_{ij}^k$  могут быть получены как коэффициенты многочлена

$$F_{kj}(x) = \prod_{i=k}^j \left( 1 - \frac{1}{\chi_i} + \frac{x}{\chi_i} \right) = \sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k x^i.$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k = F_{kj}(1) = 1, \quad (13)$$

а также

$$\sum_{i=0}^{j+k-1} i \gamma_{ij}^k = F'_{kj}(1) = \sum_{i=k}^j \frac{1}{\chi_i}. \quad (14)$$

Далее нам понадобятся тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^i} = \frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)} = \frac{n}{4}, \quad (15)$$

а также следствие тождества  $\sum_{j=0}^{\infty} jx^j = x(1-x)^{-2}$ :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} j \varkappa^{-j} = \frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)^2} = \frac{n(n-2)}{8}. \quad (16)$$

В силу неравенства  $x^2/(2x-1) \leq 2x$  при  $x \geq 1$  из определения  $a_j$  получаем  $a_j \leq (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j}$ . Отсюда, используя соотношения (15), (16), приходим к оценке

$$\prod_{j=0}^{\infty} a_j \leq \prod_{j=0}^{\infty} (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j} = ((2C(\alpha))^{\varkappa-1} \varkappa)^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)^2}} =: C(n, \alpha) < \infty.$$

Поскольку  $\Phi_{i,0} \leq \lambda^i \Phi_{0,0}$ , ввиду (12) и (17) получаем

$$\Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha) \lambda^{\theta_j} (\Phi_{0,0})^{\mu_j},$$

где

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{j+1} i \gamma_{ij}^0, \quad \mu_j = \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{ij}^0.$$

В силу (13)–(15) имеем

$$\mu_j = 1, \quad \theta_j = \sum_{i=0}^j \frac{1}{\chi_j} \leq \frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)} = \frac{n}{4}.$$

Окончательно

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \Phi_{0,0}. \quad (18)$$

Поскольку  $\Phi_{0,0} = \|u_0\|_{L_2(D)}$  (см. (7)) и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} = \sup_D |u_0|, \quad \text{где } u_0 = E\lambda f,$$

с учетом величины  $\varkappa$  имеем

$$\sup_D |E_\lambda f| \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{n}{4}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \quad (19)$$

Заметим, что  $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \leq \|f\|_{L_2(D)}$ . Значит, из (6) и (19) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{n}{4}}. \quad (20)$$

Выбирая в (19)  $f = e_\lambda(x, \cdot)$ , ввиду равенства  $E_\lambda f = e_\lambda(x, \cdot)$  получаем искомое соотношение (5).

Теперь рассмотрим случай  $n = 2$ .

В этом случае применяем неравенство Соболева вида

$$\left( \int_D |\varphi|^{2\varkappa} dx \right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \leq C_0 \left( \int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \varkappa > 1.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, придем к оценке (18). Следовательно,

$$\sup_D |E_\lambda f| \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}.$$

Отсюда, как и выше при  $n > 2$ , приходим к оценке, аналогичной (20), вида

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}},$$

в силу которой получаем соотношение

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}}, \quad \varkappa > 1, \quad n = 2.$$

Уточним эту оценку.

Поскольку функция  $e_\lambda(x, x')$  ограничена и непрерывна в области  $D$ , найдется точка  $x_0$  в  $D$  такая, что

$$|e_\lambda(x, \cdot)| \geq |e_\lambda(x_0, \cdot)| - \varepsilon$$

для некоторого положительного  $\varepsilon$ . Сделаем замену переменных (гомотетию)

$$y = (x - x_0) \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad v(y) = u(x_0 + y \lambda^{-\frac{1}{2}}),$$

где  $y \in D^1$ , а  $D^1$  — образ области  $D$  при таком преобразовании. Задача (3) переписывается в виде

$$\mathcal{L}^1 v := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( b_{ij}(y) \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) = -v \text{ в } D^1, \quad v|_{\tilde{F}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} \Big|_{\tilde{G}} = 0,$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(y) \frac{\partial v}{\partial y_i} \nu_j,$$

а  $\tilde{F}$  и  $\tilde{G}$  — образы  $F$  и  $G$  при этом преобразовании. Ясно, что коэффициенты  $b_{ij}(y)$  удовлетворяют условию эллиптичности с той же константой  $\alpha$ , что и коэффициенты  $a_{ij}(x)$ , матрица остается симметрической. Решение понимается в обобщенном смысле, т. е.  $v \in W_2^1(D^1, \tilde{F})$  является решением, если имеет место интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{D^1} b_{ij}(y) v_{y_i} \varphi_{y_j} dy = \int_{D^1} v \varphi dy$$

для любой функции  $\varphi \in W_2^1(D^1, \tilde{F})$ .

Пусть  $(\mathcal{L}^1)^l v = v$ , где  $v$  — собственная функция, отвечающая собственному значению 1, а  $(\mathcal{L}^1)^l$  — суперпозиция операторов  $\underbrace{\mathcal{L}^1 \circ \mathcal{L}^1 \circ \dots \circ \mathcal{L}^1}_l$ . Положим

$$v_l = (\mathcal{L}^1)^l(E_\lambda f), \quad l = 1, \dots$$

По определению  $\mathcal{L}^1 v_l = v_{l+1}$ , поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D b_{ij}(y) \frac{\partial v_l}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} dy = \int_D v_{l+1} \varphi dy, \quad \varphi \in W_2^1(D, F).$$

Выберем пробную функцию  $\varphi = v_l |v_l|^\beta$ ,  $\beta \geq 0$ . Применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получаем

$$(\beta + 1) \int_D |v_l|^\beta |\nabla v_l|^2 dy \leq \tilde{C}(\alpha) \left( \int_D |v_{l+1}|^{\beta+2} dy \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_D |v_l|^{\beta+2} dy \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}.$$

Далее будем пользоваться условием (2). Имеем оценку (8), поэтому

$$\begin{aligned} & \left( \int_D |v_l|^{\alpha(\beta+2)} dy \right)^{\frac{1}{\alpha(\beta+2)}} \\ & \leq \left( \frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left( \int_D |v_{l+1}|^{\beta+2} dy \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left( \int_D |v_l|^{\beta+2} dy \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют те, которые приведены в случае  $n > 2$ . После этого делаем обратную замену переменных. Имеем

$$\sup_D |E_\lambda f| \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{1}{2}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \quad (21)$$

Заметим, что  $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \leq \|f\|_{L_2(D)}$ . Значит, из (6) и (21) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Выбирая в (19)  $f = e_\lambda(x, \cdot)$ , ввиду равенства  $E_\lambda f = e_\lambda(x, \cdot)$  получаем искомое соотношение (5), что и доказывает теорему 1 при  $n = 2$ .

**Благодарность.** Работа посвящается юбилею Геннадия Владимировича Демиденко и вдохновлена участием автора в конференции в Новосибирске осенью 2025 г. с ее атмосферой научного поиска и плодотворными дискуссиями, которые были бы невозможны без деятельного участия, энтузиазма и поддержки Геннадия Владимировича.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maz'ya V. Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2011.
2. Смолицкий Х. Л. Оценки производных фундаментальных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 205–208.
3. Эйдус Д. М. Оценки модуля собственных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 973–974.

4. Эйдуc Д. М. Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 6. С. 796–798.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. 1960. Т. 24, № 6. С. 883–896.
6. Якубов В. Я. Точные оценки для нормированных в  $L_2$  собственных функций эллиптического оператора // Докл. АН. 1993. Т. 331, № 3. С. 286–287.
7. Якубов В. Я. Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов // Функцион. анализ и его прил. 1999. Т. 33, № 2. С. 58–67.
8. Чечкина А. Г. Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка // Сириус. Мат. журн. 2025. Т. 1, № 3. С. 15–26.
9. Avakumović V. G. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Z. 1956. V. 65. P. 327–344.
10. Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator // Acta Math. 1968. V. 121. P. 193–218.
11. Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (miteiner Anwendung auf die Theorie Hohlraumstrahlung) // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 441–449.

*Поступила в редакцию 26 января 2026 г.*

*После доработки 26 января 2026 г.*

*Принята к публикации 12 февраля 2026 г.*

Чечкина Александра Григорьевна (ORCID 0000-0002-8529-9296)  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Ленинские горы, 1, Москва 119991  
chechkina@gmail.com