УДК 517.951

Преобразование Лапласа обобщенных функций в задаче Коши для уравнений соболевского типа

А. Л. Павлов

Павлов Александр Леонидович (Orcid 0000-0003-0532-7486)
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001, ДНР;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р.Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР

e-mail alex4909@gmail.com

Аннотация.Рассмотрено преобразование Лапласа обобщенных функций, носитель которых содержится в полупространстве, его свойства, теорема обращения и применение для построения слабых обобщенных решений задачи Коши для линейных уравнений соболевского типа с постоянными коэффициентами в классе функций, растущих на бесконечности.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обобщенная функций медленного роста, задача Коши, уравнение соболевского типа.

Abstract. The Laplace transform of generalized functions whose support is contained in a half-space, its properties, inversion theorem and application for constructing weak generalized solutions of the Cauchy problem for linear Sobolev-type equations with constant coefficients in the class of functions growing at infinity are considered.

Keywords: Cauchy problem, Sobolev type equation, tempered distributions, multiplier.

1. Введение

Преобразование Лапласа широко используется при исследовании дифференциальных уравнений и задач с ними связанных, в частности, задачи Коши. Статья Ю.И.Любича [1] является убедительным подтверждением тому.

Задаче Коши для уравнений соболевского типа посвящено много работ (см. [2–4] и литературу в них). Работ, в которых рассматривалась разрешимость задачи Коши для уравнений соболевского типа с постоянными коэффициентами в классах функций, растущих на бесконечности, сравнительно немного (см. [5–11] и литературу в них).

В настоящей работе преобразование Лапласа обобщенных функций применяется для построения обобщенного решения задачи Коши

$$P(D_x,\partial_t)u \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(D_x)\partial_t^k u = f, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\geq 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t^k u|_{t=0} = g_k,\ k=0,\dots,m-1, \tag{1.2}$$

где $D_x=(D_{x_1},\dots,D_{x_n})$, $D_{x_k}=-i\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $P_k(\sigma)$, $k=0,\dots,m-1$ — многочлены с комплексными коэффициентами.

Предполагается, что многочлен $P_m(\sigma)$ имеет вещественные нули, то есть уравнение (1.1) является уравнением соболевского типа. Так называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной. Исследование задач для таких уравнений начато С.Л.Соболевым в [12].

Обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) называют семейство обобщенных функций $u(t)$, $t\geq 0$, гладко зависящее от t и удовлетворяющее (1.1), (1.2) в обобщенном смысле [13]:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{d^k(P_k(D_x)u(t),\varphi)}{dt^k}=(f,\varphi),\ \left.\frac{d^k(u(t),\varphi)}{dt^k}\right|_{t=0}=(g_k,\varphi), k=0,\dots,m-1,$$

где φ — произвольная функций основного пространства. Такое решение будем называть *сильным обобщенным решением* задачи Коши (1.1), (1.2).

Слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) будем называть обобщенную функцию u в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+=\{(x,t): x\in\mathbb{R}^n,\ t\geq 0\}$ и удовлетворяющую уравнению

$$P(D_x,\partial_t)u = f+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-j-1}P_{j+k+1}(D_x)g_k\otimes\delta_t^{(j)}, \tag{1.3}$$

где f — обобщенная функция в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{supp} f\in\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

Если к обобщенным функциям u и f в (1.3) можно применить преобразование Фурье-Лапласа, то есть применить преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по выделенной переменной, то построение решения уравнения (1.3) сводится к построению решения уравнения

$$P(\sigma,\lambda)\hat{u}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-j-1}P_{j+k+1}(\sigma)\hat{g}_k\lambda^j, \tag{1.4}$$

где $\hat{u}(\lambda)$, $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье-Лапласа обобщенных функций u и f.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости уравнения (1.3) в пространствах обобщенных функций, определенных на основе пространства обобщенных функций медленного роста и его подпространств. В ней вводятся пространства обобщенных функций, отражающих анизотропную регулярность и анизотропный рост их элементов на бесконечности, дается определение преобразования Лапласа в этих пространствах, доказываются его свойства и теорема обращения, применяется преобразование Лапласа для построения слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2), используя уравнение (1.4).

Основы теории преобразования Лапласа обобщенных функций заложены Л.Шварцем и Лионсом. Элементы теории преобразования Лапласа обобщенных функций медленного роста, носители которых содержатся в замкнутом, выпуклом, остром конусе в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке 0 и примеры ее применения в математической физике изложены в [14]. Теория преобразования Лапласа в специально конструируемых пространствах основных и обобщенных функций представлена в [15], в одномерном случае подробно, в многомерном —конспективно.

В данной работе рассмотрение преобразования Лапласа обобщенных функций ориентировано на его применение к исследованию разрешимости задачи Коши (1.1), (1.2) в классах функций, растущих на бесконечности. В определенной степени в ней реализовано обобщение теории преобразования Лапласа векторнозначных функций, широко используемой в теории абстрактной задачи Коши (см., например, [1], [16–17]), на случай обобщенных функций.

Преобразование Лапласа обобщенных функций применено в работе для доказательства существования обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2), существенно усиливающее результаты, полученные автором в [7–11].

Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию Петровского [18] в такой форме

$$(\exists\gamma \in \mathbb{R})(\mathrm{Re}\lambda(\sigma) \leq \gamma,\ \text{если}\ P(\sigma,\lambda(\sigma)) = 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N), \tag{P}$$

где N — множество общих вещественных нулей многочленов $P_k(\sigma)$, $k = 0, \ldots, m$.

Если $N = \varnothing$, то это условие эквивалентно условию

$$(\exists\gamma \in \mathbb{R})(P(\sigma,\lambda) \neq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{Re}\lambda > \gamma). \tag{P$'$}$$

Как показано в [7], условие $N = \varnothing$ является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2) в классе обобщенных функций медленного росста. Этот факт отражает существенные различия в исследовании задачи Коши (1.1), (1.2) при $N = \varnothing$ и $N \neq \varnothing$.

Существование слабого обобщенного решения характеристической задачи Коши в пространстве обобщенных функций конечной регулярности $D'_F(\mathbb{R}^{n+1})$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ для уравнения (1.1), правая часть которого принадлежит этому пространству, доказано Л.Хермандером (см. [19], теорема 12.8.1) при выполнении условия более слабого, чем условие Петровского. Доказательство этого фундаментального результата существенно связано с особенностями свойств пространства $D'_F(\mathbb{R}^{n+1})$, в частности, при решении проблемы деления, и не позволяет отслеживать рост на бесконечности и регулярность решения в зависимости от свойств правой части в уравнении (1.1).

В настоящей работе приведены достаточные условия существования слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) в пространствах, построенных на основе пространства обобщенных функций медленного роста и его подпространств, учитывающих регулярность и поведение на бесконечности начальных данных и правой части уравнения (1.1).

В частности, для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию

$$N = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}, \tag{D}$$

доказано существование слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) для любых начальных данных из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ и любых обобщенных функций f из указанных пространств.

Условиям (P) и (D) удовлетворяют многие линейные уравнения соболевского типа, возникающих в приложениях, в частности, уравнение Соболева, уравнение медленных волн Россби, уравнение динамики стратифицированной жидкости и др.

С помощью преобразования Фурье-Лапласа построение слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) сводится к построению решения уравнения (1.4), существенной особенностью которого является обращение в нуль многочлена $P(\sigma, \lambda)$ при $\sigma \in N$, $\lambda \in \Pi_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \gamma\}$. Поэтому основная трудность в нахождении решения уравнения (1.4) состоит в решении задачи о делении обобщенной функции из $S'(\mathbb{R}^n)$, голоморфно зависящей от параметра, на многочлен $P(\sigma, \lambda)$, имеющий вещественные нули. Эта задача рассмотрена в [20]. Полученный в ней результат применяется в данной работе для построения слабого обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в шкале пространств, учитывающих регулярность и поведение на бесконечности рассматриваемых функций.

Для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (P′), построение слабого обобщенного решения задачи Коши в работе основано на описании мультипликаторов в рассматриваемых функциональных пространствах и получение оценок для производных функции $P^{-1}(\sigma, \lambda)$.

Полученные результаты являются основой для построения сильных обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2). Речь идет о поиске условий на начальные данные и правую часть уравнения (1.1), обеспечивающие существование у слабых обобщенных решений следов на гиперплоскостях $t = \mathrm{const}$, гладко зависящие от t и принятие начальных данных в (1.2). Некоторые результаты в этом направлении содержатся в [7–11].

2. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Пространство обобщенных функций медленного роста $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством $S(\mathbb{R}^n)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(x)\|_{l,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |x|)^l \sum_{|\alpha| \le k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right], \ l, \ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Рассмотрим семейство подпространств S', зависящих от параметров s и l:

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s \left| \mathcal{F}_x \left((1 + |x|^2)^{l/2} f \right) \right|^2 d\sigma \right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

где $\mathcal{F}_x g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [18]. Это двупараметрическое семейство пространств является семейством гильбертовых пространств и обладает следующими свойствами:

1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s};

2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье;

3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s.

Из свойства 3) следует, что для любой обобщенной функции $g \in S'$ существуют числа s и l такие, что $g \in H_l^s$.

Пространство H_l^s можно рассматривать как пополнение пространства $S(\mathbb{R}^n)$ по указанной норме. Следовательно, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_l^s.

При целых неотрицательных l пространство H_0^l совпадает с пространством Соболева W_2^l, в частности $H_0^0 = L_2$.

Как показано в [18], $f \in H_s^l$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$f = (1+|\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}}h = (1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}}(1+|\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}}g, \tag{2.1}$$

где через $(1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}}$ обозначен псевдодифференциальный оператор, символ которого равен $(1+|x|^2)^{-\frac{l}{2}}$, $h \in L_2$, $g \in L_2$ и

$$\|h\|_{L_2} = \|g\|_{L_2} = \|f\|_s^l.$$

Через C_l^r, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{R}$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых функций φ до порядка r с конечной нормой

$$|\varphi|_l^r = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le r} |(1+|x|^2)^{\frac{l}{2}}\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

Пространство C_l^r банахово. Связь шкал пространств $\{C_l^r\}$ и $\{H_l^s\}$ отражают неравенства [18]

$$\|\varphi\|_{l-p}^r \le c_1|\varphi|_l^r \le c_2\|\varphi\|_l^{r+q},\ p,q > \frac{n}{2}. \tag{2.2}$$

Через $C_{[\gamma]}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $\upsilon(t)$ замкнутой полуоси $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0\}$ в гильбертово пространство H_s^l с конечной нормой

$$|||\upsilon(t)|||_{C_{[\gamma]}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} = \sup_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+, 0\le\nu\le r}\left[e^{-\gamma t}\|\frac{d^\nu\upsilon(t)}{dt^\nu}\|_s^l\right].$$

Пространство $C_{[\gamma]}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ банахово. Преобразование Фурье по пространственным переменным отображает изоморфно пространство $C_{[\gamma]}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на $C_{[\gamma]}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Через $D(\mathbb{R}^n)$ обозначают множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, а через $D'(\mathbb{R}^n)$ пространство, состоящее из линейных форм на $D(\mathbb{R}^n)$ таких, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существуют постоянные $C(K)$, $p(K)$ и выполняется неравенство

$$|(f,\varphi)| \le C(K)\sum_{|\alpha|\le p(K)}\sup_{\sigma\in K}|\partial^\alpha\varphi(\sigma)|,\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp}\varphi \subset K.$$

Через $E'_+(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать множество обобщенных функций пространства $E'(\mathbb{R}^n)$, где $E(\mathbb{R}^n)$ — некоторое пространство основных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\bar{\mathbb{R}}^n_+$.

Через $\mathcal{H}(G, E')$ обозначим множество голоморфных функций со значениями в пространстве обобщенных функций E', определенных в области $G \subset \mathbb{C}$:

$$\mathcal{H}(G, E') = \{f(\lambda) \in E',\ \lambda \in G;\ \forall \varphi \in E\ (f(\lambda), \varphi) \in \mathcal{H}(G)\},$$

где $\mathcal{H}(G)$ — пространство функций, голоморфных в области G.

Для исследования слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) рассмотрим функциональные пространства обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве.

Через $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ обозначим множество, состоящее из обобщенных функций $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющих условиям:

1) $\mathrm{supp} f \subset \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$;

2) для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ имеет место включение $f_\psi = (f, (\cdot)\psi) \in S'(\mathbb{R}^n)$, то есть существуют числа l, $s \in \mathbb{R}$ такие, что для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \equiv |(f, \varphi\psi)| \le c_{ls}(\psi)\|\varphi\|^l_s \tag{2.3}$$

3) последовательность f_{ψ_k} сходится к f_ψ в слабой топологии пространства $S'(\mathbb{R}^n)$, если последовательность функций $\psi_k(t) \in S(\mathbb{R})$ сходится к ψ в $S(\mathbb{R})$.

Так как $S'(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{ind}\lim\limits_{l,s} H^l_s(\mathbb{R}^{n+1})$, то для любой обобщенной функции $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in H^l_{s+}(\mathbb{R}^{n+1})$, где

$$H^l_{s+}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{f \in H^l_s(\mathbb{R}^{n+1}) : \mathrm{supp} f \subset \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+\}.$$

Следовательно, для любых $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$|(f, \varphi\psi)| \le \|f\|^l_s \|\varphi\psi\|^{-l}_{-s}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Для любых функций $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ при $l \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|^l_s \le C\|\varphi(\sigma)\|^l_s \|\psi(t)\|^{\theta(l)}_{s'}, \tag{2.5}$$

где $s' = \begin{cases} s, & \text{если } s \ge 0, \\ 0, & \text{если } s < 0, \end{cases}$ $\theta(l) = \begin{cases} l, & \text{если } l \in \mathbb{Z}_+, \\ [l]+1, & \text{если } l \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}_+. \end{cases}$

Доказательство. Если $l \in \mathbb{Z}_+$, то пользуясь оценкой нормы в H^l_s, приведенной в [8, лемма 2.1], получим неравенство

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|^l_s \le C_1 \left(\sum_{|\alpha| \le l} \int (1 + |\sigma|^2 + t^2)^s |\partial^\alpha(\varphi(\sigma)\psi(t))|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $s \ge 0$ из полученной оценки следует неравенство

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|^l_s \le$$

$$\leq C_2 \left(\sum_{|(\alpha'\alpha_{n+1})|\leq l} \int (1+|\sigma|^2)^s |\partial^{\alpha'}\varphi(\sigma)|^2 (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_2 \left(\sum_{|(\alpha'\alpha_{n+1})|\leq l} \int (1+|\sigma|^2)^s |\partial^{\alpha'}\varphi(\sigma)|^2 d\sigma \cdot \int (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_3 \|\varphi(\sigma)\|_s^l \max_{\alpha_{n+1}\leq l} (\int (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 \|\varphi\|_s^l \|\psi\|_s^l.$$

Аналогичные рассуждения при $s < 0$ с использованием неравенства

$$(1+|\sigma|^2+t^2)^s \leq (1+|\sigma|^2)^s,$$

приводят к неравенству

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C_4' \|\varphi\|_s^l \|\psi\|_0^l.$$

Следовательно, при $l \in Z_+$, $s \in \mathbb{R}$ неравенство (2.5) справедливо.

К произвольным $l \in \mathbb{R}_+$ можно перейти с помощью интерполяции. Метод построения интерполяционных пространств между двумя гильбертовыми пространствами, предложенной Лионсом (см., например, [21]), примененный к пространствам H_s^{m+1} и H_s^m, $m \in \mathbb{Z}_+$, дает пространства $H_s^{m+1-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Неравенство (2.5) выражает непрерывность оператора из $H_s^l(\mathbb{R}^n)$ в $H_s^l(\mathbb{R}^{n+1})$, который элементам φ пространства $H_s^l(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие элементы $\varphi\psi$ пространства $H_s^l(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\psi \in S(\mathbb{R})$. Выше доказано, что этот оператор непрерывен при $l \in Z_+$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C' \|\varphi(\sigma)\|_s^l \|\psi(t)\|_{s'}^l,$$

где $s' = s$, если $s \geq 0$ и $s' = 0$, если $s < 0$.

На основании теоремы об интерполяции (см. [21], гл. I, теорема 5.1) он непрерывен для любого $l \in \mathbb{R}_+$ и неравенство (2.5) справедливо. Лемма доказана.

Если в определении пространства $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ заменить $S'(\mathbb{R}^n)$ на его подпространство $H_s^l(\mathbb{R}^n)$, то получим определение пространства $S'_+(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n))$. При этом последовательность обобщенных функций f_{ψ_k} сходится к f_ψ по норме пространства H_s^l, если последовательность функций $\psi_k \in S(\mathbb{R})$ сходится к ψ в $S(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in S'_+(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n))$. Тогда для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ определена функция $f_\psi \in H_s^l(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \leq \|f_\psi\|_s^l \|\varphi\|_{-s}^{-l}. \qquad (2.6)$$

Лемма 2.4. *Справедливо равенство*

$$S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n)) = \bigcup_{s,l} S'_+(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)). \qquad (2.7)$$

Доказательство. Так как $S'_+(\mathbb{R}, H^l_s(\mathbb{R}^n)) \subset S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ по определению, то достаточно показать, что для любой обобщенной функции $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in S'_+(\mathbb{R}, H^l_s(\mathbb{R}^n))$.

Как было отмечено выше, для любой обобщенной функции $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in H^l_s(\mathbb{R}^{n+1})$ и справедливо неравенство (2.4).

Если $l \leq 0$, то из неравенств (2.4) и (2.5) следует неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \leq C\|f\|^l_s \|\varphi(\sigma)\|^{-l}_{-s} \|\psi(t)\|^{\theta(-l)}_{-s'}.$$

Из этого неравенства следует, что для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ обобщенная функция $f_\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ может быть продолжена по непрерывности на пространство $H^{-l}_{-s}(\mathbb{R}^n)$, то есть $f_\psi \in H^l_s$ и справедливо неравенство

$$\|f_\psi\|^l_s \leq C\|f\|^l_s \|\psi\|^{\theta(-l)}_{-s'}. \tag{2.8}$$

Из неравенства (2.8) следует, что последовательность обобщенных функций f_{ψ_k} сходится к f_ψ в $H^l_s(\mathbb{R}^n)$, если последовательность $\psi_k(t) \in S(\mathbb{R})$ сходится к $\psi(t)$ в пространстве $S(\mathbb{R})$. Следовательно, при $l \leq 0$ $f \in S'_+(\mathbb{R}, H^l_s(\mathbb{R}^n))$.

Если $l > 0$ и $f \in H^l_{s_+}(\mathbb{R}^{n+1})$, то справедливо включение

$$(1 + |\sigma|^2 + t^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Коши-Буняковского для произвольных $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ получим

$$|(f_\psi, \varphi)| = |(f, \varphi\psi)| = |((1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f, (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)\psi(t)| \leq$$

$$\left| \int (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) (1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)\psi(t) d\sigma dt \right| \leq$$

$$\leq \int \left| \int (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) (1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma) d\sigma \right| |\psi(t)| dt \leq$$

$$\leq \int \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} |\psi(t)| dt \leq$$

$$\|\varphi\|^{-l}_{-s} \int \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} |\psi(t)| dt.$$

Дальнейшее оценивание зависит от знака s. Если $s \leq 0$, то справедливо неравенство

$$(1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + t^2)^{\frac{s}{2}} \leq (1 + |\sigma|^2 + t^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Используя это неравенство получим оценку

$$|(f_\psi,\varphi)| \le \|\varphi\|_{-s}^{-l}\|\psi\|_{-s}^{0}\left(\int |(1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}(1+|D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}}f(\sigma,t)|^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, при $s\le 0$ справедливо неравенство

$$|(f_\psi,\varphi)| \le C(f)\|\psi\|_{-s}^{0}\|\varphi\|_{-s}^{-l},$$

где $C(f)=\left(\int |(1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}(1+|D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}}f(\sigma,t)|^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Если $s>0$, то справедливо неравенство

$$(1+|\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} \le (1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Используя это неравенство получим аналогичную оценку при $s>0$

$$|(f_\psi,\varphi)| \le C(f)\|\psi\|_{0}^{0}\|\varphi\|_{-s}^{-l}.$$

Следовательно, при $l>0$ обобщенная функция f_ψ может быть продолжена по непрерывности на пространство $H_{-s}^{-l}(\mathbb{R}^n)$, то есть $f_\psi\in H_s^l(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\|(f_\psi\|_s^l \le C(f)\|\psi\|_{s'}^{0}, \tag{2.9}$$

где $s'=0$, если $s>0$ и $s'=-s$, если $s\le 0$.

Из этого неравенства следует непрерывная зависимость f_ψ от $\psi\in S(\mathbb{R})$, то есть при $l>0$ $f\in S'_+(\mathbb{R},H_s^l(\mathbb{R}^n))$. Лемма доказана.

Обозначим через $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$ множество обобщенных функций $f\in D'_+(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$ таких, что $e^{-\gamma t}f\in S'_+(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$, то есть $f=e^{\gamma t}g$, $g\in S'_+(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$.

Пространство $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$ инвариантно относительно дифференцирования. Это следует из описания элементов пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n))$ и равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\gamma e^{\gamma t}g+e^{\gamma t}\frac{\partial g}{\partial t}=e^{\gamma t}\left(\gamma g+\frac{\partial g}{\partial t}\right).$$

Аналогично определяются пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},H_s^l(\mathbb{R}^n))$:

$$S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},H_s^l(\mathbb{R}^n))=\{f\in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},S'(\mathbb{R}^n):e^{-\gamma t}f\in S'_+(\mathbb{R},H_s^l(\mathbb{R}^n)).$$

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства S' в себя, то есть функция $a(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S', тогда и только тогда, когда для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ выполняются неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma)|\le c_\alpha(1+|\sigma|)^{q(\alpha)},\sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

где $c_\alpha>0$, $q(\alpha)$ — числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка α (см. [18]).

Так как S' является объединением пространств H^l_s, l, $s \in \mathbb{R}$, то представляет интерес описание действия мультипликатора $a(\sigma)$ в шкале пространств H^l_s.

Теорема 2.1. *Умножение на функцию $a(\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10) является непрерывным отображением из пространства H^l_s, l, $s \in \mathbb{R}$ в $H^l_{s-q(l)}$, где*

$$q(l) = \max_{|\alpha| \le \nu(l)} q(\alpha), \quad \nu(l) = \begin{cases} |l|, & \text{если } l \in \mathbb{Z}, \\ [|l|] + 1, & \text{если } l \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и для любой обобщенной функции $g \in H^l_s$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma)g\|^l_{s-q(l)} \le C(\max_{|\alpha| \le \nu(l)} c_\alpha)\|g\|^l_s, \tag{2.11}$$

где $C > 0$ — некоторое число, не зависящее от функции $a(\sigma)$.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [8]. В нем используются только производные функции $a(\sigma)$ и их оценки до порядка $\nu(l)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Умножение на функцию $a(\sigma) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10) при $|\alpha| \le \nu(l)$, является непрерывным отображением из пространства H^l_s, l, $s \in \mathbb{R}$ в пространство $H^l_{s-q(l)}$ и справедливо неравенство (2.11).*

Приведенное утверждение означает, что функция $a(\sigma) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая неравенствам (2.10) при $|\alpha| \le \nu(l)$ является мультипликатором в $H^l_{-\infty} = \bigcup\limits_s H^l_s$.

Рассмотрим семейство функций $a(\sigma, \lambda)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in G \subset \mathbb{C}$, непрерывно дифференцируемых по σ до порядка $\nu \in \mathbb{Z}_+$ при каждом $\lambda \in G$, голоморфных по переменной λ в области G вместе с производными по σ до порядка ν и удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial^\alpha a(\sigma, \lambda)| \le c_\alpha (1 + |\lambda|)^{p(\alpha)} (1 + |\sigma|)^{q(\alpha)}, \ |\alpha| \le \nu, \ \lambda \in G, \ \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

где $c_\alpha > 0$, $p(\alpha)$, $q(\alpha)$ — некоторые числа, зависящие от α.

Теорема 2.2. *Умножение на функцию $a(\sigma, \lambda)$, удовлетворяющую неравенствам (2.12) при $\nu = \nu(l)$, $l \in \mathbb{R}$, является непрерывным отображением пространства $\mathcal{H}(G, H^l_s)$, $s \in \mathbb{R}$, в пространство $\mathcal{H}(G, H^l_{s-q(l)})$ и для любой функции $f(\lambda) \in \mathcal{H}(G, H^l_s)$ справедливо неравенство*

$$\|a(\sigma, \lambda) f(\lambda)\|^l_{s-q(l)} \le C_l (1 + |\lambda|)^{p(l)} \|f(\lambda)\|^l_s, \tag{2.13}$$

где $C_l > 0$ — некоторое число, $p(l) = \max\limits_{|\alpha| \le \nu(l)} p(\alpha)$.

Доказательство. Из условия теоремы и теоремы 2.1 следует, что обобщенная функция $a(\sigma, \lambda) f(\lambda)$ при каждом $\lambda \in G$ принадлежит пространству $H^l_{s-q(l)}$ и справедливо неравенство (2.13).

Докажем голоморфность функции $a(\sigma, \lambda) f(\lambda)$. Для произвольной точки $\lambda_0 \in G$ функцию $f(\lambda) \in \mathcal{H}(G, H^l_s)$ в некотором замкнутом круге $V_r(\lambda_0)$ можно представить в виде

$$f(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m, \ \lambda \in V_r(\lambda_0),$$

где $f_m(\lambda_0) \in H_s^l$ и справедливы неравенства

$$\|f_m(\lambda_0)\|_s^l \le \frac{M}{r^m},\ M = \max_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_s^l,\ m = 0, 1, \dots \tag{2.14}$$

Аналогичное представление в круге $V_r(\lambda_0)$ имеет голоморфная в области G функция $a(\sigma, \lambda)$, гладко зависящая от $\sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$a(\sigma, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\sigma, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k,\ \lambda \in V_r(\lambda_0),$$

где $a_k(\sigma, \lambda_0) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$. Это следует из интегрального представления функции $a_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$a_k(\sigma, \lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} \frac{a(\sigma, \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} d\lambda.$$

Пользуясь этим представлением и неравенствами (2.12) получим оценки производных по σ функций $a_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$|\partial^\alpha a_k(\sigma, \lambda_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} |\partial^\alpha a(\sigma, \lambda)| \frac{|d\lambda|}{r^{k+1}} \le$$

$$\le C'_\alpha (1 + |\sigma|)^{q(\alpha)} \frac{1}{r^{k+1}} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} (1 + |\lambda|)^{p(\alpha)} |d\lambda| \le C''_\alpha (1 + |\lambda_0|)^{p(\alpha)} (1 + |\sigma|)^{q(\alpha)} \frac{1}{r^k}, \tag{2.15}$$

где C'_α, $C''_\alpha(r)$ — числа не зависящие от k. Следовательно функции $a_k(\sigma, \lambda_0)$, $k = 0, 1, \dots$ удовлетворяют условию следствия 2.1.

Из следствия 2.1 и неравенств (2.15) при $r < 1$ следует неравенство

$$\|a_k(\sigma, \lambda_0) f_m(\lambda_0)\|_{s-q(l)}^l \le C_l \frac{1}{r^k} (1 + |\lambda_0|)^{p(l)} \|f_m(\lambda_0)\|_s^l.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.14) следует, что обобщенная функция

$$g_\tau(\lambda_0) = \sum_{m+k=\tau} a_k(\sigma, \lambda_0) f_m(\lambda_0)$$

принадлежит пространству $H_{s-q(l)}^l$ и справедливо неравенство

$$\|g_\tau(\lambda_0)\|_{s-q(l)}^l \le \frac{\tilde{C}_l}{r_1^\tau} (1 + |\lambda_0|)^{p(l)} \max_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_s^l,\ r_1 < r.$$

Следовательно, внутри круга $V_{r_1}(\lambda_0)$ сходится ряд

$$F(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g_\tau(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^\tau.$$

Из равенства $a(\sigma,\lambda)f(\lambda) = F(\lambda)$ следует, что $a(\sigma,\lambda)f(\lambda) \in \mathcal{H}(G, H^l_{s-q(l)})$. Непрерывная зависимость $a(\sigma,\lambda)f(\lambda)$ от $f(\lambda) \in \mathcal{H}(G, H^l_s)$ следует из неравенства (2.13). Теорема доказана.

Важным примером функции $a(\sigma,\lambda)$, удовлетворяющей неравенствам (2.12), является функция $P^{-1}(\sigma,\lambda)$, где $P(\sigma,\lambda)$ — многочлен, удовлетворяющий условию (P'). Из этого условия следует, что функция $P^{-1}(\sigma,\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой по переменной $\sigma \in \mathbb{R}^n$ и голоморфной по переменной $\lambda \in \Pi_\gamma$.

Теорема 2.3. *Если многочлен $P(\sigma,\lambda)$ удовлетворяет условию* (P′), *то справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|P(\sigma,\lambda)|} \leq C(1+|\lambda|)^p(1+|\sigma|)^q,\ (\sigma,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_{\gamma'}, \tag{2.16}$$

где $C(\gamma') > 0$, p, q — некоторые числа, $\gamma' > \gamma$.

Теорема 2.3 является частным случаем теоремы 3.3 в [22], доказанной с помощью оценки модуля многочлена от вещественных переменных (см. [23] Теорема А.3. Дополнения).

Обобщением теоремы 2.3 является следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если многочлен $P(\sigma,\lambda)$ удовлетворяет условию* (P′), *то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ справедливо неравенство*

$$\left|\partial^\alpha \frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| \leq C(\gamma')_\alpha (1+|\sigma|)^{q(\alpha)}(1+|\lambda|)^{p(\alpha)},\ (\sigma,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_{\gamma'}, \tag{2.17}$$

где $C_\alpha\gamma' > 0$, $q(\alpha) = |\alpha|(q + \deg_\sigma P(\sigma,\lambda)) + q$, $p(\alpha) = |\alpha|(p+m)+p$, $\gamma' > \gamma$.

Доказательство. При $|\alpha| = 0$ неравенство (2.17) справедливо, так как совпадает с неравенством (2.16). Предположим, что неравенство (2.17) справедливо для всех $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\beta| \leq k$ и $\alpha' = \alpha + \gamma_i$, $|\alpha| = k$, $|\gamma_i| = 1$.

Воспользовавшись формулой Лейбница и предположением, получим:

$$\left|\partial^{\alpha'} \frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| = \left|\partial^\alpha \left(\frac{\partial_i P(\sigma,\lambda)}{P^2(\sigma,\lambda)}\right)\right| \leq c'_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \left|\partial^{\alpha-\beta}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| \left|\partial^\beta \frac{\partial_i P(\sigma,\lambda)}{P(\sigma,\lambda)}\right| \leq$$

$$\leq c''_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \left|\partial^{\alpha-\beta}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| \sum_{\gamma\leq\beta} \left|\partial^{\beta-\gamma}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| |\partial^\gamma \partial_i P(\sigma,\lambda)| \leq$$

$$\leq c'''_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha\ \gamma\leq\beta} (1+|\sigma|)^{q(\alpha-\beta)+q(\beta-\gamma)+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)}(1+|\lambda|)^{p(\alpha-\beta)+p(\beta-\gamma)+m} \leq$$

$$\leq c_{\alpha'}(1+|\sigma|)^{\tilde{q}(\alpha')}(1+|\lambda|)^{\tilde{p}(\alpha')},$$

где

$$\tilde{q}(\alpha') = \sup_{\beta\leq\alpha\ \gamma\leq\beta}(q(\alpha-\beta)+q(\beta-\gamma)+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)) =$$

$$= \sup_{\beta\leq\alpha\ \gamma\leq\beta}[(|\alpha|-|\beta|)(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)) + q + (|\beta|-|\gamma|)(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)) + q +$$

$$+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)] = |\alpha'|(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)) + q = q(\alpha'),$$

$$\tilde{p}(\alpha') = \sup_{\beta\le\alpha}\sup_{\gamma\le\beta}(p(\alpha-\beta)+p(\beta-\gamma)+m) =$$

$$= \sup_{\gamma\le\alpha}[(|\alpha|-|\gamma|+1)(p+m)+p] = |\alpha'|(p+m)+p = p(\alpha').$$

Следовательно, неравенство (2.17) справедливо. Теорема доказана.

3. Преобразование Лапласа обобщенных функций и его свойства

Определение преобразования Лапласа обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, основано на определении преобразования Лапласа скалярных функций $f(t)$, $t\ge 0$ по формуле

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt.$$

Если $e^{-\gamma t}|f(t)| < C$, $t\ge 0$, то преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda)$ функции $f(t)$ определено и является голоморфной функцией в полуплоскости Π_γ.

Приведенное определение преобразования Лапласа обобщается на случай векторнозначных функций со значениями в банаховом и локально выпуклом пространствах. Это обобщение находит применение в теории абстрактной задачи Коши (см. [1], [16–17], [24]).

Такой же подход может быть использован для определения преобразования Лапласа обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

Пусть $f\in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$. Рассмотрим обобщенную функцию $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi_\gamma$, определенную равенством

$$(\hat{f}(\lambda),\varphi) \equiv (e^{-\gamma t}f, \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}),\ \varphi\in S(\mathbb{R}^n), \tag{3.1}$$

где $\eta_\varepsilon(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t\ge 0 \\ 0, & t<-\varepsilon. \end{cases}$

Так как $\varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\in S(\mathbb{R}^{n+1})$, $\lambda\in\Pi_\gamma$ и $e^{-\gamma t}f\in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, то правая часть в (3.1) определена и непрерывна в $S(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\hat{f}(\lambda)\in S'(\mathbb{R}^n)$, $\lambda\in\Pi_\gamma$.

Независимость $\hat{f}(\lambda)$ от ε следует из того, что функция $\eta_{\varepsilon_1}(t)-\eta_{\varepsilon_2}(t)$ обращается в нуль вместе с производными любого порядка при $t\ge 0$, а $\operatorname{supp} e^{-\gamma t}f\subset\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. Поэтому справедливо равенство

$$(e^{-\gamma t}f, \varphi(\eta_{\varepsilon_1}(t)-\eta_{\varepsilon_2}(t))e^{(\gamma-\lambda)t}) = 0,\ \varphi\in S(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Для его доказательства рассмотрим разбиение единицы $\{\varphi_i,\Omega_i\}$, $\bigcup\limits_i\Omega_i = \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{\Omega}_i\Subset\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\varphi_i e^{-\gamma t}f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp}\varphi_i e^{-\gamma t}f = \operatorname{supp}\varphi_i\cap\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = K_i\Subset\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. По теореме 2.3.3 [25] $(\varphi_i e^{-\gamma t}f, \varphi(\eta_{\varepsilon_1}(t)-\eta_{\varepsilon_2}(t))e^{(\gamma-\lambda)t}) = 0$ для любой функции $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, равенство (3.2) справедливо, то есть значение правой части в (3.1) от ε не зависит. А это означает, что оно не зависит от значений функции $\eta_\varepsilon(t)$ при $t<0$.

Функция $\hat{f}(\lambda)\in S'(\mathbb{R}^n)$, $\lambda\in\Pi_\gamma$ называется *преобразованием Лапласа* обобщенной функции $f\in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ и обозначается Lf.

Теорема 3.1. *Если обобщенная функция $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, то ее преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Pi_\gamma, S'(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. Из равенства (3.1) при $Re\Delta\lambda > \gamma - Re\lambda$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ следуют равенства

$$(\hat{f}(\lambda+\Delta\lambda) - \hat{f}(\lambda), \varphi) = (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)(e^{(\gamma-(\lambda+\Delta\lambda))t} - e^{(\gamma-\lambda)t})) =$$

$$= (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}(-t\Delta\lambda + \frac{t^2}{2}e^{-\theta(\Delta\lambda)t}(\Delta\lambda)^2)) =$$

$$= (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)(-t)e^{(\gamma-\lambda)t})\Delta\lambda + (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2}e^{(\gamma-(\lambda+\theta(\Delta\lambda)))t})(\Delta\lambda)^2,$$

где $0 \le \theta = \theta(\Delta\lambda) \le 1$.

Из определения пространства $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ следует справедливость равенства

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}(e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2}e^{(\gamma-(\lambda+\theta(\Delta\lambda)))t}) = (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2}e^{(\gamma-\lambda)t}).$$

Следовательно, функция $(\hat{f}(\lambda), \varphi)$ дифференцируема по λ в полуплоскости Π_γ, то есть обобщенная функция $\hat{f}(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости Π_γ как функция со значениями в локально выпуклом пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

Из определения преобразования Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ в (3.1) следует линейность отображения $f \to \hat{f}(\lambda)$. Это отображение обратимо.

Теорема 3.2. *Если $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ и $\hat{f}(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, то $f = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f \ne 0$. Тогда существует функция $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ такая, что не равна нулю обобщенная функция $g_\varphi \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}) : (g_\varphi, \psi) = (f, \varphi\psi), \psi \in S(\mathbb{R})$.

Так как $S'(\mathbb{R}) = \bigcup\limits_{l,s} H^l_s$, то существуют числа l и s такие, что $\hbar_\varphi = e^{-\gamma t} g_\varphi \in H^l_s$.

Если $l \ge 0$, то $\hbar_\varphi \in H^0_l$ и справедливо равенство $(\hbar_\varphi, \eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda(t)}) = (\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}\hbar_\varphi; e^{-i\eta t})$, $\eta = \mathrm{Im}\lambda$, $\mathrm{Re}\lambda > \gamma$. По построению $\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}\hbar_\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. По условию левая часть полученного равенства равна нулю при $\mathrm{Re}\lambda > \gamma$, а правая является преобразованием Фурье функции из $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\eta_\varepsilon(t)\hbar_\varphi = 0$. А тогда $g_\varphi = 0$, так как $\mathrm{supp} g_\varphi \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, что противоречит предположению.

Если $l < 0$, то $\hbar_\varphi \in H^{-2k}_l$ для некоторого $k \in N$. Из равенства (2.1) следует равенство

$$\eta_\varepsilon(t)\hbar_\varphi = (1+\partial_t^2)^k(1+|t|)^{-\frac{l}{2}}u, \quad u \in L_2(-2\varepsilon, +\infty).$$

Тогда справедливы равенства

$$(\hbar_\varphi, \eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}) = \Big((1+|t|)^{-\frac{l}{2}}u, (1+\partial_t^2)^k e^{(\gamma-\lambda)t}\Big) =$$

$$((1+|t|)^{-\frac{l}{2}}u, Q(\gamma-\lambda)e^{(\gamma-\lambda)t}) = (Q(\gamma-\lambda)e^{(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}(1+|t|)^{-\frac{l}{2}}u, e^{-i\eta t}), \eta \in \mathbb{R},$$

где $Q(\gamma-\lambda)$ — некоторый многочлен от $\gamma - \lambda$.

Рассуждениями, аналогичным предыдущим, приходим к противоречию и в этом случае. Следовательно, $f = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если обобщенная функция $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$, то ее преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^l_s)$.*

Доказательство. Принадлежность $\hat{f}(\lambda)$ при $\lambda \in \Pi_\gamma$ пространству H^l_s следует из определения пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s(\mathbb{R}^n))$ и равенства

$$(\hat{f}(\lambda), \varphi) = (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}),$$

которое имеет смысл для всех $\varphi \in H^{-l}_{-s}$.

Из этого равенства следует равенство норм

$$\|\hat{f}(\lambda)\|^l_s = \|e^{-\gamma t} f_{\psi(\varepsilon,k)}\|^l_s, \tag{3.3}$$

где $\psi(\varepsilon, \lambda) = \eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}$.

Голоморфность функции $(\hat{f}(\lambda), \varphi)$, $\varphi \in H^{-l}_{-s}$ устанавливается рассуждениями, аналогичными использованным в доказательстве теоремы 3.1.

Обобщенная функция $\hat{f}(\lambda)$, как функция со значениями в H^l_s сильно непрерывна. Это следует из определения пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$ и непрерывной зависимости функции $\psi(\varepsilon, \lambda)$ от $\lambda \in \Pi_\gamma$ в пространстве $S(\mathbb{R})$. Следовательно, обобщенная функция $\hat{f}(\lambda)$ сильно голоморфна по переменной λ в полуплоскости Π_γ как функция со значениями в пространстве H^l_s (см. [26], теорема 3.31). Теорема доказана.

Если $u(t) \in C^0_{[\gamma]}(\bar{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$, то преобразование Лапласа обобщенной функции $\eta(t)u(t) \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$, где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, совпадает с обычным определением преобразования Лапласа $u(t)$, как функции со значениями в банаховом пространстве [1]. Это следует из справедливости для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ равенств:

$$(L(\eta(t)u(t)), \varphi) = (e^{-\gamma t}\eta(t)u(t), \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}) =$$

$$\int\limits_0^\infty (u(t), \varphi)\eta_\varepsilon(t)e^{-\lambda t}dt = \int\limits_0^\infty (u(t), \varphi)e^{-\lambda t}dt = \left(\int\limits_0^\infty u(t)e^{-\lambda t}dt, \varphi\right).$$

Так как $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H^{-l}_{-s}, то из приведенных равенств следует равенство

$$L\eta u(\lambda) = \int\limits_0^\infty u(t)e^{-\lambda t}dt.$$

Преобразование Лапласа L обобщенных функций пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ обладает свойством

$$L\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda L f. \tag{3.4}$$

Его справедливость следует из равенств

$$\left(L\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right) = \left(e^{-\gamma t}\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\right) =$$

$$= \left(e^{-\gamma t} f, -\frac{\partial}{\partial t}(\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t})\varphi(\sigma)\right) + \left(e^{-\gamma t} f, \gamma\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}\varphi(\sigma)\right) =$$

$$= \left(e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\left(-\frac{\partial\eta_\varepsilon(t)}{\partial t} e^{(\gamma-\lambda)t} - (\gamma-\lambda)\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t} + \gamma\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}\right)\right) =$$

$$= (e^{-\gamma t} f, \lambda\varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}) = \lambda(Lf, \varphi).$$

Здесь использованы такие же рассуждения, как и при доказательстве равенства (3.2).

Если $u(t) \in C^1_{[\gamma]}(\bar{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$, то из равенства (3.4) следует равенство

$$L\left(\eta(t)\frac{du}{dt}\right)(\lambda) = \lambda Lu(\lambda) - u(0), \tag{3.5}$$

где $\frac{du}{dt}$ — обычная производная функции $u(t)$. Его справедливость следует из равенств

$$\left(L\left(\eta(t)\frac{du}{dt}\right)(\lambda), \varphi\right) = \left(e^{-\gamma t}\eta(t)\frac{du}{dt}, \varphi\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{du}{dt}, \varphi\right) e^{-\lambda t} dt = \int\limits_0^\infty \left(\frac{d[(u(t), \varphi) e^{-\lambda t}]}{dt} + \lambda(u(t), \varphi) e^{-\lambda t}\right) dt =$$

$$= (\lambda Lu(\lambda), \varphi) - (u(0), \varphi) = (\lambda Lu(\lambda) - u(0), \varphi).$$

Преобразованием Фурье-Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ называется обобщенная функция $\tilde{f}(\lambda)$, определенная равенством

$$(\tilde{f}(\lambda), \varphi) \equiv (e^{-\gamma t} f, \hat{\varphi}(\sigma)\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}),\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\hat{\varphi}(\sigma)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(\sigma)$.

Будем обозначать преобразование Фурье-Лапласа обобщенной функции f через $\mathcal{LF}f$.

Если $u(t) \in C^m_{[\gamma]}(\bar{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$ является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2), то используя свойства преобразований Лапласа и Фурье обобщенных функций нетрудно показать, что преобразование Фурье-Лапласа обобщенной функции $\eta(t)u(t)$ является решением уравнения (1.4).

Применение преобразования Лапласа при изучении задачи Коши основано на теоремах обращения преобразования Лапласа. Классическая теорема обращения приведена, например, в [27]. Теоремы обращения преобразования Лапласа векторнозначных функций содержатся в [1], [17], [24].

Для доказательства теоремы обращения рассматриваемого преобразования Лапласа обобщенных функций приведем утверждение типа теоремы Пэли-Винера-Шварца (см. [25]. Теорема 7.3.1).

Теорема 3.4. *Если $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$. $l,\ s \in \mathbb{R}$, то справедливо неравенство*

$$\|\hat{f}(\lambda)\|^l_s \leq C'(f)C(\delta, \gamma)(1 + |\lambda|)^\mu,\ Re\lambda \geq \gamma + \delta,\ \delta > 0, \tag{3.6}$$

где $C(\delta,\gamma)$, μ — *числа, зависящие от* f.

Доказательство. Из условия следует, что $e^{-\gamma t}f\in H^{l'}_{s'}(\mathbb{R}^{n+1}), \mathrm{supp} e^{-\gamma t}f\subset\mathbb{R}^{n+1}_+$, где l', s' — некоторые числа. Из равенства (3.3) и неравенств (2.8) и (2.9) следует неравенство

$$\|\hat f(\lambda)\|^l_s\le C'(f)\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|^{l''}_{s''}, \tag{3.7}$$

где l'', s'' — числа, зависящие от l', s', а $C'(f)$ — число, зависящее от $e^{-\gamma t}f$.

Если $l''>0$, то справедливы неравенства

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|^{l''}_{s''}\le C_1\sum_{k\le\nu(l'')}\left(\int(1+t^2)^{s''}|\partial^k(\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}|^2dt\right)^{\frac12}\le$$

$$C_2\sum_{k\le\nu(l'')}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-Re\lambda)t}dt\right)^{\frac12}.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части полученного неравенства, пользуясь оценкой

$$|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|\le C\varepsilon^{-i},$$

которая может быть обеспечена построением функции $\eta_\varepsilon(t)$ (см., например, [25], теорема 1.4.1.).

Так как функция $\hat f(\lambda)$ не зависит от выбора ε, то для каждого $\lambda\in\Pi_\gamma$ выберем $\varepsilon=\frac{1}{1+|\lambda|}$.

Тогда при $i\ge1$ имеем неравенство

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-Re\lambda)t}dt\le$$

$$\le\int\limits_{-\varepsilon}^{0}(1+t^2)^{s''}(1+|\lambda|)^{2i}|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{-\frac{2(\gamma-Re\lambda)}{1+|\lambda|}}dt.$$

При $\lambda\in\Pi_\gamma$ справедливы неравенства

$$(1+|\lambda|)^{2i}|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}\le C_1(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k},$$

$$e^{-\frac{2(\gamma-Re\lambda)}{1+|\lambda|}}\le C_2(\gamma).$$

Следовательно, для рассматриваемого слагаемого справедлива оценка

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-Re\lambda)t}dt\le C_3(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}.$$

Если $i=0$ и $\varepsilon=\frac{1}{1+|\lambda|}$, то имеем неравенство

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}dt\le$$

$$\le\int\limits_{-\varepsilon}^{0}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{-\frac{(\gamma-Re\lambda)}{1+|\lambda|}}dt+\int\limits_{0}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}dt.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства не превосходит $C_1(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}$. При оценке второго слагаемого воспользуемся тем, что $\mathrm{Re}\lambda-\gamma\ge\delta,\ \delta>0$:

$$\int\limits_{0}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}dt\le C_5(\delta,\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}.$$

Учитывая все полученные оценки имеем при $l''\ge 0$ неравенство

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{l''}\le C_6(\delta,\gamma)(1+|\lambda|)^{\nu(l'')}.$$

Из этого неравенства и (3.7) следует справедливость неравенства (3.5) при $l''\ge 0$.

Если $l''<0$, то справедливо неравенство

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{l''}\le\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{0}\le$$

$$\le\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\eta_\varepsilon(t)|^2e^{2(\gamma-\mathrm{Re}\lambda)t}dt\le C_7(\delta,\gamma).$$

Следовательно, и при $l''<0$ неравенство (3.5) справедливо. Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Если обобщенная функция $\upsilon(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Pi_\gamma,H_s^l)$ и справедливо неравенство*

$$\|\upsilon(\lambda)\|_s^l\le C(1+|\lambda|)^r,\ Re\lambda>\gamma, \tag{3.8}$$

то существует обобщенная функция $u\in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R},H_s^l)$ такая, что $\hat{u}(\lambda)=\upsilon(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенную функцию $\omega(t)$, заданную формулой

$$\omega(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}e^{\lambda t}d\tau,\ \xi>\gamma,\ \tau=\mathrm{Im}\lambda,\ t>0. \tag{3.9}$$

Из неравенства (3.8) следует справедливость неравенства

$$\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\|\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}\|_s^l d\tau\le C\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\left(\frac{1+|\lambda|}{|\lambda|}\right)^r\frac{1}{|\lambda|^2}d\tau<+\infty,\ \xi>\gamma,$$

и равенства
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2} = 0.$$

Из теоремы (2.6) в [1] следует, что функция $\omega(t)$, определенная в (3.9) принадлежит пространству $C^0_{[\gamma]}(\bar{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$ и ее преобразование Лапласа совпадает в полуплоскости Π_γ с функцией $\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}$.

Рассмотрим обобщенную функцию $u = \partial_t^{r+2}(\eta(t)u(t))$. По построению supp$u \subset \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. Так как для произвольных функций $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$(e^{-\gamma t}u, \varphi(\sigma)\psi(t)) = (\eta(t)\omega(t), (-1)^{r+2}\partial_t^{r+2}(\psi(t)e^{-\gamma t})\varphi) =$$

$$= \int\limits_0^\infty (e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)(-1)^{r+2}e^{\gamma t}\partial_t^{r+2}(\psi(t)e^{-\gamma t})dt, \tag{3.10}$$

то $u \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$.

Докажем, что $u \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$. Так как $\omega(t) \in C^0_{[\gamma]}(\bar{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$, то справедливо неравенство

$$|(e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)| \le \|e^{-\gamma t}\omega(t)\|^l_s \|\varphi\|^{-l}_{-s} \le C\|\varphi\|^{-l}_{-s}. \tag{3.11}$$

Из равенства (3.10) и неравенства (3.11) следует справедливость неравенств

$$|(e^{-\gamma t}u, \varphi\psi)| \le C_1 \int\limits_0^\infty |(e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)| \sum_{k=0}^{r+2} |\partial_t^k \psi(t)| dt \le$$

$$\le C_2 \int\limits_0^\infty \|\varphi\|^{-l}_{-s} \sum_{k=0}^{r+2} |\partial_t^k \psi(t)| dt \le C_3 \|\varphi\|^{-l}_{-s} \|\psi\|^{r+2}_0.$$

Следовательно $u_\psi \in H^l_s$ и непрерывно зависит от $\psi \in S(\mathbb{R})$, то есть $e^{-\gamma t}u \in S'_+(\mathbb{R}, H^l_s)$.

Пользуясь определением обобщенной функции u, найдем ее преобразование Лапласа. Для произвольной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$(Lu, \varphi) = (e^{-\lambda t}u, \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}) =$$

$$= (\eta(t)\omega(t), (-1)^{r+2}\partial_t^{r+2}(\eta_\varepsilon(t)e^{-\lambda t})\varphi) =$$

$$= \int_0^\infty (\omega(t), \varphi)(-1)^{r+2} \sum_{k=0}^{r+2} C_k \partial_t^k \eta_\varepsilon(t) \partial_t^{r+2-k} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \int_0^\infty (\omega(t), \varphi)\lambda^{r+2}e^{-\lambda t}dt = \lambda^{r+2} \int_0^\infty (\omega(t), \varphi)e^{-\lambda t}dt =$$

$$= \lambda^{r+2}(\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}, \varphi) = (\upsilon(\lambda), \varphi).$$

Следовательно, $\hat{u}(\lambda) = \upsilon(\lambda)$. Теорема доказана.

4. Построение слабого обобщенного решения задачи Коши

Для построения слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) воспользуемся преобразованием Фурье-Лапласа. Задача (1.1), (1.2) при этом преобразовании переходит в задачу нахождения решения уравнения (1.4) в классе функций, голоморфных в полуплоскости Π_γ со значениями в пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$ и являющихся преобразованиями Фурье-Лапласа обобщенных функций из пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$.

Рассмотрим уравнение

$$P(\sigma,\lambda)\upsilon(\lambda) = g(\lambda). \tag{4.1}$$

В работе [20] доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любой обобщенной функции $g(\lambda) \in \mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^l_s)$ можно построить обобщенную функцию $\upsilon(\lambda)$, принадлежащую пространству $\mathcal{H}(\Pi_{\gamma_0}, H^{\tilde l}_{\tilde s})$, где $\gamma_0 \geq \gamma$, $\tilde l$, $\tilde s$ — некоторые числа, зависящие от многочлена $P(\sigma,\lambda)$, чисел l и s, которая удовлетворяет уравнению* (4.1) *и справедливо неравенство*

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\tilde l}_{\tilde s} \leq c(1+|\lambda|)^{\nu}\|g(\lambda)\|^l_s,\ \lambda \in \Pi_{\gamma_0}, \tag{4.2}$$

где $c > 0$, ν — некоторые числа, зависящие от s и l.

Доказательство теоремы 4.1 состоит в построении сначала регуляризации обобщенной функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda) \in D'(\mathbb{R}^n\backslash N)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, голоморфно зависящей от параметра λ, а затем нахождение обобщенной функции, носитель которой принадлежит множеству общих вещественных нулей многочленов $P_i(\sigma)$, $i = 0,1,\ldots,m$, голоморфно зависящей от параметра λ и такой, что сумма построенной регуляризации и этой обобщенной функции является решением уравнения (4.1), голоморфно зависящем от параметра λ. Следовательно, указанное в теореме 4.1 решение уравнения 4.1 имеет вид

$$\upsilon(\lambda) = [P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\bar q} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{|\alpha|\leq r_i} u_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))\delta^{(\alpha)}_{\sigma_i}. \tag{4.3}$$

Первое слагаемое в (4.3) является регуляризацией семейства обобщенных функций $P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda) \in D'(\mathbb{R}^n\backslash N)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, где $g(\lambda) \in \mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^l_s)$, принадлежащей пространству $\mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^{l'}_{s'})$, где l', s' — некоторые числа, зависящие от l и s. При выполнении условий (P) и (D) существование указанной регуляризации доказано в [20]. Вектор $\bar q = (q_1,\ldots,q_p) \in \mathbb{Z}^p_+$ зависит от порядка особенностей функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)$ в точках $\sigma_1,\ldots,\sigma_p$. При этом справедливо неравенство ([20], лемма 2.2)

$$\|[P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\bar q}\|^{l'}_{s'} \leq C(1+|\lambda|)^{\tilde\nu}\|g(\lambda)\|^l_s,\ \lambda \in \Pi_\gamma, \tag{4.4}$$

где $C > 0$, $\tilde\nu$ — некоторые числа, не зависящие от $g(\lambda)$.

Во втором слагаемом в (4.3) δ_{σ_i} — дельта-функция, сосредоточенная в точке σ_i, $u_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))$ — голоморфные функции, являющиеся решением системы линейных уравнений

$$\sum_{|\gamma|\leq r_i-|\alpha|} C^{\alpha}_{\alpha+\gamma} b_{i\gamma}(\lambda)u_{i\gamma+\alpha}(\lambda, g(\lambda)) = \tilde h_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda)),\ |\alpha| \leq r_i, \tag{4.5}$$

где $b_{i\gamma}(\lambda) = (-1)^{|\gamma|}\partial^\gamma P(\sigma_i, \lambda)$ — многочлены, $C^\alpha_\beta = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|\le q_i} \tilde{h}_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))\delta^{(\alpha)}_{\sigma_i} = g(\lambda) - P(\sigma,\lambda)[P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\bar{q}}.$$

В [20] доказано существование решения системы (4.5), удовлетворяющее неравенствам

$$|u_{i_\beta}(\lambda, g(\lambda))| \le c(1+|\lambda|)^{\nu'}\|g(\lambda)\|^l_s, \ \lambda \in \Pi_{\gamma_0}, \ i = 1, \dots, p, \tag{4.6}$$

где $\gamma_0 \ge \gamma$, ν' — некоторые числа.

Из равенства (4.3) и неравенств (4.4), (4.6) следует справедливость неравенства (4.2).

Теорема 4.1 обеспечивает существование слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Теорема 4.2. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любых начальных данных* $g_i \in H^s_l$, $i = 0, \dots, m-1$ *и любой обобщенной функции* $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^{s'}_{l'})$ *существует слабое обобщенное решение задачи Коши (1.1), (1.2), принадлежащее пространству* $S'_{[\tilde\gamma]}(\mathbb{R}, H^{\tilde s}_{\tilde l})$, *где* $\tilde\gamma > \gamma$, $\tilde s$, $\tilde l$ *— некоторые числа, зависящие от* s, l, s', l'.

Доказательство. Из условия теоремы и теоремы 4.1 следует, что существует семейство обобщенных функций $\upsilon(\lambda) \in \mathcal{H}(\Pi_{\gamma_0}, H^{\tilde l}_{\tilde s})$, удовлетворяющее уравнению (1.4) и справедливо неравенство

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\tilde l}_{\tilde s} \le c(1+|\lambda|)^\nu\|\tilde f(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma)\lambda^j\hat g_k\|^{l''}_{s''}, \tag{4.7}$$

где $l'' = \min\{l, l'\}$, $s'' = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma,\lambda)\}$.

Так как функция $\tilde f(\lambda)$ является преобразованием Фурье-Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^{s'}_{l'})$, то из теоремы 3.4 следует справедливость неравенства

$$\|\hat f(\lambda)\|^{l''}_{s''} \le C(\gamma')(1+|\lambda|)^\mu, \quad \mathrm{Re}\lambda \ge \gamma', \tag{4.8}$$

где $\gamma' > \gamma$, а $C(\gamma')$, μ — числа, зависящие от f.

Из неравенств (4.7) и (4.8) следует справедливость неравенства

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\tilde l}_{\tilde s} \le \tilde c(\tilde\gamma)(1+|\lambda|)^{\nu'}, \quad \mathrm{Re}\lambda \ge \tilde\gamma,$$

где $\tilde\gamma = \max\{\gamma_0, \gamma'\}$, $\nu' = \max\{\nu+\mu, \nu+m\}$, $\tilde c(\tilde\gamma)$, μ — числа, зависящие от f и g_i, $i = 0, \dots, m-1$.

По теореме 3.5 существует обобщенная функция $u = (\mathcal{LF})^{-1}\upsilon(\lambda)$, принадлежащая пространству $S'_{[\tilde\gamma]}(\mathbb{R}, H^{\tilde s}_{\tilde l})$. По построению она удовлетворяет уравнению (1.3), то есть является слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (P'), построение слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) упрощается. Решение уравнения (4.1) в этом случае сводится к умножению обобщенной функции $g(\lambda)$, голоморфно зависящей от $\lambda \in \Pi_\gamma$, на функцию $P^{-1}(\sigma, \lambda)$.

Теорема 4.3. *Если уравнение (1.1) удовлетворяет условию* (P'), *то для любых начальных данных* $g_i \in H^s_l$, $i = 0, \dots, m-1$ *и любой обобщенной функции* $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^{s'}_{l'})$ *существует единственное слабое обобщенное решение задачи Коши (1.1), (1.2), принадлежащее пространству* $S'_{[\gamma']}(\mathbb{R}, H^{\tilde{s}}_{\tilde{l}'})$, *где* $\gamma' > \gamma$, $\tilde{l} = \min\{l, l'\}$, $\tilde{s} = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma, \lambda)\} - q(\tilde{l})$.

Доказательство. Из условия (P') следует, что функция $P^{-1}(\sigma, \lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 в полуплоскости $\Pi_{\gamma'}$, $\gamma' > \gamma$. Это следует из неравенств (2.17). Из этой теоремы следует, что решением уравнения (4.1), где $g(\lambda) \in \mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^{\tilde{l}}_{\hat{s}}$ является обобщенная функций $v(\lambda) = P^{-1}(\sigma, \lambda) g(\lambda)$, принадлежащее пространству $\mathcal{H}(\Pi_{\gamma'}, H^l_{\hat{s}-q(\tilde{l})})$ и справедливо неравенство

$$\|v(\lambda)\|^{\tilde{l}}_{\hat{s}-q(\tilde{l})} \leq C(\tilde{l}, \gamma')(1 + |\lambda|)^{\nu(\tilde{l})(p+m)+P} \|g(\lambda)\|^{\tilde{l}}_{\hat{s}}, \quad \mathrm{Re}\lambda \geq \gamma', \tag{4.9}$$

где $C(\tilde{l}, \gamma') > 0$, p — константа в (2.16), а $q(\tilde{l})$ — функция, определенная в теореме 2.1.

Если уравнение (4.1) получено в результате применения преобразования Фурье — Лапласа к уравнению (1.3), то его правая часть имеет вид

$$g(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma) \lambda^j \hat{g}_k$$

и принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Pi_\gamma, H^{\tilde{l}}_{\hat{s}})$, где $\tilde{l} = \min\{l, l'\}$, $\hat{s} = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma, \lambda)\}$.

Тогда искомое решение уравнения (1.4) имеет вид

$$v(\lambda) = P^{-1}(\sigma, \lambda)(\tilde{f}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma) \lambda^j \hat{g}_k),$$

а неравенство (4.9) принимает вид

$$\|v(\lambda)\|^{\tilde{l}}_{\tilde{s}} \leq C(\tilde{l}, \gamma')(1 + |\lambda|)^{\nu(\tilde{l})(p+m)+p} (\|\tilde{f}(\lambda)\|^{l'}_{s'} + (1 + |\lambda|)^m \sum_{k=0}^{m-1} \|\hat{g}_k\|^l_s),$$

где $\mathrm{Re}\lambda \geq \gamma'$, $\tilde{s} = \hat{s} - q(\tilde{l})$.

Так как это неравенство аналогично неравенству (4.7), то дальнейшие рассуждения совпадают с приведенными в доказательстве теоремы 4.2 после получения неравенства (4.7). Следовательно, по теореме 3.5 существует обобщенная функция $u = (\mathcal{LF})^{-1} v(\lambda)$, принадлежащая пространству $S'_{[\gamma']}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{\tilde{s}}_{\tilde{l}})$, которая по построению является решением уравнения (1.3), то есть является слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2).

Единственность решения задачи Коши (.1), (1.2) в рассматриваемых пространствах следует из теоремы 3.2. Теорема доказана.

Представляют интерес условия на начальные данные в (1.2) и правую часть в (1.1), при которых построенные слабые обобщенные решения задачи Коши (1.1), (1.2) являются сильными обобщенными решениями.

Список литературы

[1] *Любич Ю.И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // УМН. 1966. Т. 21, №3 (129). С. 3–51.

[2] *Гальперн С.А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Тр. ММО. 1960. Т. 9. С. 401–423.

[3] *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск. Науч.книга, 1998.

[4] *Свешников А.Г., Алешин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.А.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

[5] *Костюченко А.Г, Эскин Г.И.* Задачи Коши для уравнений типа Соболева —Гальперна // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 273–284.

[6] *Эскин Г.И.* О единственности решения задачи Коши для уравнений не типа Ковалевской // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 285–295.

[7] *Павлов А.Л.* Задача Коши для уравнения типа Соболева —Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. 1993. Т. 184, №11. С. 3–20.

[8] *Павлов А.Л.* Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. тр.2018. Т. 21, №1. С. 125–154.

[9] *Павлов А.Л.* Существование решения задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, №4. С. 824–844.

[10] *Павлов А.Л.* Разрешимость задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, №5. С. 1119–1136.

[11] *Павлов А.Л.* О задаче Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, №4. С. 118–232.

[12] *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, №1. С. 3–50.

[13] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции. Вып. 3). М.: Физматгиз, 1958.

[14] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978.

[15] *Земанян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974.

[16] *Крейн С.Г., Хазан М.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1983. Т. 21. С. 13–264.

[17] *Хилле В., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во ин.лит., 1962.

[18] *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, №4. С. 65–143.

[19] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.

[20] *Павлов А.Л.* О делении обобщенной функции медленного роста, голоморфно зависящей от параметра, на многочлен // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, №1. С. 1130–1141.

[21] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[22] *Павлов А.Л.* Регуляризация обобщенной функции медленного роста, голоморфно зависящей от параметра // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, №6. С. 1279–1303.

[23] *Трев Ж.* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.

[24] *Arendt W. et al.* Vector-valued Laplase Transforms and Cauchy Problems: Second Edition. Monographs in Mathematics 96, Springer Basel A6, 2011.

[25] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4 т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

[26] *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[27] *Фукс Б.А., Левин В.И.* Функции комплексного переменного и их приложения. М., Л.: Гостехиздат, 1951