

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ
РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ
КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ
РЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Е. В. Радкевич, О. А. Васильева

Аннотация. Хорошо известно, особенно при численных экспериментах, рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана. Несовершенство кинетического уравнения Больцмана привело к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений. Статья посвящена исследованию проблемы стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного и одномерного кинетических уравнений Бродуэлла. Установлена экспоненциально быстрая стабилизация периодических возмущений положения равновесия для одномерного уравнения Бродуэлла к бегущей волне (при общих периодических начальных возмущениях).

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: периодические возмущения, стабилизация, дискретные модели кинетики, инвариантные решения.

*Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием*

1. Введение

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц (например, молекул), тем или иным образом взаимодействующих между собой [1, 2]. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами и энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, рассматриваются [2] так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана. Дискретная кинетическая модель уравнения Больцмана представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных первого порядка, каждое уравнение которой отвечает за динамику частиц, движущихся с одной групповой скоростью. Квадратичная нелинейность задает парные взаимодействия между частицами.

Неинтегрируемость. При помощи теста Пенлеве [3, 4] была установлена *неинтегрируемость* дискретных моделей Карлемана [5]

$$\partial_t n_1 + \partial_x n_1 = (n_2^2 - n_1^2), \quad \partial_t n_2 - \partial_x n_2 = -(n_2^2 - n_1^2), \quad (1)$$

и Бродуэлла [6, 7]

$$\partial_t n_1 + c \partial_x n_1 = Q_1(u) = (n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_2 - c \partial_x n_2 = Q_1(u), \quad \partial_t n_3 + c \partial_y n_3 = -Q_1(u), \quad \partial_t n_4 - c \partial_y n_4 = -Q_1(u),$$

где $n_i(t, \hat{x})$ — функция распределения частиц в пространстве $\hat{x} \in R^d$, $d = 1, 2$, в момент времени t , движущихся с групповой скоростью $v_i \in R^d$. С физической точки зрения препятствием интегрируемости являются взаимодействия между частицами, более того, никакими заменами переменных невозможно развязать эти взаимодействия и свести динамику к движению свободных частиц. В [8] О. В. Ильин показал, что любая дискретная кинетическая модель является неинтегрируемой. Следствие неинтегрируемости — чувствительность решений к начальным данным (эффект бабочки), т. е. кинетические модели уравнения Больцмана могут рассматриваться как кандидаты на описание пространственно-неоднородной турбулентности. Теоретически обоснована возможность существования хаотической динамики в этих моделях.

Групповая классификация. С вопросами интегрируемости тесно связаны групповые свойства дифференциальных уравнений. В работе О. В. Ильина [8] установлено, что для всех кинетических моделей группа точечных симметрий конечна и состоит из сдвигов по пространственным переменным, сдвига по временной переменной и масштабного преобразования. Это ведет к тому, что класс автомодельных решений таких систем весьма узок. К нему относятся стационарные решения (до четырех групповых скоростей), стационарные решения, пространственно-однородные решения, а также решения типа бегущих волн (до девяти групповых скоростей) и стационарные решения, пространственно-однородные решения, решения типа бегущих волн, а также типа разлета газового облака (9 и 10 групповых скоростей).

Отметим, что в 2- и 3-скоростных моделях (Карлемана, Годунова, и т. д.) периодические возмущения положительных положений равновесия стабилизируются к нулю экспоненциально быстро, положения равновесия устойчивы. В 4-скоростной модели Бродуэлла и 6-скоростной модели положения равновесия неустойчивы. Нерегулярные периодические возмущения положения равновесия стабилизируются к бегущим волнам экспоненциально быстро.

Мы покажем, что коэффициенты Фурье периодического возмущения положения равновесия в 4-скоростной модели Бродуэлла экспоненциально быстро стабилизируются к нулю вне «креста» ($k^2 - l^2 = 0$). Существенно отличается поведение возмущения на «кресте». Система для коэффициентов Фурье $u_{k,l}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$, возмущения на «кресте» (для $k = l$) совпадает с системой коэффициентов Фурье периодического возмущения положения равновесия одномерной 4-скоростной системы с двумя групповыми скоростями

$$\begin{aligned} \partial_t n_1 + c \partial_x n_1 &= Q_1(u), & \partial_t n_2 - c \partial_x n_2 &= Q_1(u), \\ \partial_t n_3 + c \partial_x n_3 &= -Q_1(u), & \partial_t n_4 - c \partial_x n_4 &= -Q_1(u). \end{aligned} \quad (2)$$

Положения равновесия неустойчивы. Нерегулярные (см. ниже) периодические возмущения положения равновесия экспоненциально быстро стабилизируются к бегущим волнам. Более того, периодические возмущения периодических бегущих волн «перебрасываются» из одной группы скоростей с общей групповой скоростью в другую. В этом случае в одной из групп идет стабилизация к новой бегущей волне (ее рождение), а в другой идет экспоненциально быстрое

затухание возмущенной бегущей волны (упругие столкновения) либо возмущенная бегущая волна только деформируется экспоненциально быстро (неупругие столкновения (неправильный бильярд)). В этой статье приведено доказательство упомянутых выше утверждений для одномерной модели Бродуэлла.

2. Постановка задачи

Целью этой статьи является исследование периодических возмущений положения равновесия 4-скоростной одномерной модели Бродуэлла (2), возможные положения равновесия которой

$$n_1^e n_3^e - n_2^e n_4^e = 0. \quad (3)$$

Для системы Бродуэлла рассмотрим периодическое возмущение состояния равновесия $n_i = n_e^i + \hat{n}_i$, где выполнено (3) и $n_e^i > 0$, $i = 1, \dots, 4$. Возмущение $N(t, x) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z})$ удовлетворяет пространственно-периодическим граничным условиям: $N(t, x) = N(t, x + 2\pi)$, x принадлежат ячейке периодичности. Сделаем перенормировку

$$N(t, x) = q(\sqrt{u_e} \hat{u}, \sqrt{v_e} \hat{v}, \sqrt{w_e} \hat{w}, \sqrt{z_e} \hat{z}),$$

тогда система для периодического возмущения $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}$ примет вид

$$\begin{aligned} u_e^{1/2} [\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u}] - LQ(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) &= qv_e^{1/2} u_e^{1/2} Q(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}), \\ v_e^{1/2} [\partial_t \hat{v} - \partial_x \hat{v}] - LQ(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) &= qu_e^{1/2} v_e^{1/2} Q(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}), \\ w_e^{1/2} [\partial_t \hat{w} + \partial_x \hat{w}] + LQ(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) &= -qz_e^{1/2} w_e^{1/2} Q(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}), \\ z_e^{1/2} [\partial_t \hat{z} - \partial_x \hat{z}] + LQ(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) &= -qz_e^{1/2} w_e^{1/2} Q(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}), \\ \hat{u}(0) = u^0, \quad \hat{v}(0) = v^0, \quad \hat{w}(0) = w^0, \quad \hat{z}(0) = z^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$LQ(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) = z_e w_e^{1/2} \hat{w} + w_e z_e^{1/2} \hat{z} - u_e v^{1/2} \hat{v} - v_e u_e^{1/2} \hat{u}$$

и квадратичная форма

$$Q(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{z}) = \hat{w}\hat{z} - \hat{u}\hat{v}.$$

Для периодических решений

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) &= u_0(t) + \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} u_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{v}(t, x) = v_0(t) + \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} v_k(t) e^{ikx}, \\ \hat{w}(t, x) &= w_0(t) + \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} w_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{z}(t, x) = z_0(t) + \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} z_k(t) e^{ikx}, \\ \mathcal{Z}_0 &= \{k \in \mathcal{Z}, k \neq 0\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем требовать, чтобы средние

$$u_0(0) = \dots = z_0(0) = 0. \quad (5)$$

Введем весовые пространства $W_{2,\varepsilon\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ с нормами

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{W_{2,\varepsilon\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)} &= \left\| \frac{d}{dt} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_{\sigma-1})} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}, \\ \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\varepsilon\gamma t} (|u_0(t)|^2 + \sup_{k \in \mathcal{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2) dt, \end{aligned}$$

и \mathcal{H}_σ с нормой

$$\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 = |u_0^0|^2 + \sup_{k \in \mathcal{Z}_0} k^{2\sigma} |u_k^0|^2.$$

3. Проблемы «креста»

В чем проблематичность модели (4)? Для двумерной модели разбиение частиц по группам связано с различием их скоростей. Для одномерной модели частицы с равными скоростями разнесены по разным группам (пары n_1, n_3 и n_2, n_4). Это приводит в методе Фурье к препятствиям построения аннуляторов секулярных членов соответствующей проекции. Такие препятствия не позволяют построить решение задачи для любых начальных данных, периодических возмущений положения равновесия.

U -проекция в системе для возмущений (5) одномерной модели Бродуэлла (2). Система для коэффициентов Фурье

$$\begin{aligned}
u_e^{1/2}[\partial_t u_k + icku_k] - LQ_k &= qv_e^{1/2}u_e^{1/2}\varepsilon Q_k, \\
v_e^{1/2}[\partial_t v_k - ickv_k] - LQ_k &= qu_e^{1/2}v_e^{1/2}\varepsilon Q_k, \\
w_e^{1/2}[\partial_t w_k + ikw_k] + LQ_k &= -qz_e^{1/2}w_e^{1/2}\varepsilon Q_k, \\
z_e^{1/2}[\partial_t z_k - ikz_k] + LQ_k &= -qz_e^{1/2}w_e^{1/2}\varepsilon Q_k, \\
u_k(0) = u_k^0, \quad v_k(0) = v_k^0, \quad w_k(0) = w_k^0, \quad z_k(0) = z_k^0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Делается переход к проекции на одну переменную, например, u_k (u -проекция), т. е. выражаются другие коэффициенты Фурье z_k, v_k, w_k уравнениями состояния через u_k . Существенную роль в исследовании скорости стабилизации, как всегда, будет играть линейаризация u -проекции, которая в этом случае есть интегро-дифференциальный оператор (9). Переход к проекции приводит к появлению секулярных членов, которые однозначно аннулируются для регулярных возмущений. Для нерегулярных возмущений возникают препятствия к стабилизации коэффициентов Фурье.

Для этой системы u -проекция определяется уравнениями состояния:

$$\begin{aligned}
\sqrt{v_e}v_k &= q_{v,k}^+ e^{ikt} + \sqrt{u_e}u_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds, \\
\sqrt{z_e}z_k &= q_{z,k}^+ e^{ikt} - \sqrt{u_e}u_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds, \\
\sqrt{w_e}w_k &= q_{w,k}^- e^{-ikt} - \sqrt{u_e}u_k,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$q_{v,k}^+ = \sqrt{v_e}v_k^0 - \sqrt{u_e}u_k^0, \quad q_{w,k}^- = \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0, \quad q_{z,k}^+ = \sqrt{z_e}z_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0.$$

Уравнение для u_k компоненты (которое назовем базовым):

$$\begin{aligned}
\partial_t \sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k - LQ_k(u) &= q\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}Q_k(u), \\
LQ_k(u) &= w_e\sqrt{z_e}z_k + z_e\sqrt{w_e}w_k - u_e\sqrt{v_e}v_k - v_e\sqrt{u_e}u_k.
\end{aligned}$$

Билинейная форма

$$Q_k = \sum_{k_1+k_2=k} (w_{k_1}z_{k_2} - u_{k_1}v_{k_2}),$$

переменные u_{k_1} , v_{k_2} , w_{k_1} в квадратичной форме и в $LQ_k(u)$ выражаются из уравнений состояния через соответствующие переменные z_{k_2} , z_{k_1} . Получаем базовое интегро-дифференциальное уравнение для компоненты u_k :

$$T_{u,k}(\sqrt{u_e}u_k) = \varepsilon\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v})_k + d_k^+ e^{ikt} + z_e q_{w,k}^- e^{-ikt}, \quad (8)$$

$$d_k^+ = w_e q_{z,k}^+ - u_e q_{v,k}^+,$$

где $K_e = u_e + v_e + w_e + z_e$ и

$$T_{u,k}(\sqrt{u_e}u_k) = \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k + K_e\sqrt{u_e}u_k + 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}\sqrt{u_e}u_k ds. \quad (9)$$

Как увидим в дальнейшем, этот интегро-дифференциальный оператор — базовый оператор построения решения u -проекции. Ниже установим (см. также [9, 10]), что существенную роль в исследовании проблемы стабилизации решений задачи Коши для системы (7), (8) играют свойства интегро-дифференциального оператора $T_{u,k}$. Его символ (преобразование Лапласа по t) —

$$\sigma(T_{u,k}) = p + ik + \frac{1}{\varepsilon}K_e + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e)\frac{1}{p - ik}.$$

Заметим, что в разложении символа

$$\Sigma(T_{u,k})(p) = \frac{\sigma(T_{u,k})}{p + ik} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left((v_e + z_e)\frac{1}{p + ik} + (w_e + u_e)\frac{1}{p - ik} \right)$$

все коэффициенты положительны. Таким образом, здесь выполнены условия леммы 6.1. Функция $1/\sigma(T_{u,k})(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\gamma$ для достаточно малого $\gamma > 0$. Этот факт позволяет применить теорему Пэли — Винера и построить обратный оператор $T_{u,k}^{-1}$.

Теорема (Пэли — Винера). 1. Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\widetilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t) dt \quad (10)$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$, $p \in C$, $\operatorname{Re} p > \gamma \geq 0$.

2. Для любой вектор-функции $\widetilde{f}(p) \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ существует единственное представление (10), где $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$, причем справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma+iy)t} \widetilde{f}(\gamma + iy) dy, \quad t \in R_+, \quad \gamma \geq 0.$$

3. Для вектор-функций $\widetilde{f}(p) \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$, связанных соотношением (10), справедливо равенство

$$\|\widetilde{f}\|_{H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)}^2 \equiv \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x + iy)\|_H^2 dy = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|_{L_2(R_+, H)}^2.$$

Если преобразование Лапласа функции $L(f)$ таково, что $L(f)$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, то по теореме Пэли — Винера функция f принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(R_+)$ и, следовательно, $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ для любого $g \in L_{2,\gamma}(R_+)$. Справедлива оценка

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq a_0 \|g\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

4. Базовые оценки символа $\sigma(T_{u,k})(p)$

Как мы установим ниже, существенную роль в исследовании проблемы стабилизации решений задачи Коши для системы (13) играют свойства интегродифференциального оператора $T_{u,k}$. Приведем результаты, следующие из леммы 6.1 и теоремы Пэли — Винера (см. [10]).

Лемма 4.1. *Равномерно по $k \in Z_0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\gamma$, $\gamma = \mu^2/K_e$ (для достаточно малого $\mu \in (0, 1)$) справедлива оценка*

$$|\sigma(T_{u,k}(p))| > c(\mu).$$

Отсюда в силу теоремы Пэли — Винера следует, что для любой функции $g(t) \in L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)$ решение $f = T_{u,k}^{-1}g$ задачи Коши

$$T_{u,k}f = g, \quad f|_{t=0} = 0$$

принадлежит $L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)$ и $f|_{t=0} = 0$. Справедлива оценка

$$\|T_{u,k}^{-1}g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)} \leq c_0 \|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)}.$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия леммы 4.1. Тогда*

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} + ik \right) T_{u,k}^{-1}g \right\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)} \leq c_1 \|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(R_+)}.$$

Лемма 4.3. *В условиях леммы 4.1*

$$\|T_{u,k}^{(-1)}(e^{ikt})\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}} \leq c_2.$$

5. Секулярные члены

Переход к проекции приводит к появлению секулярных членов $q_{w,k}^- e^{-ikt}$, $d_{v,k}^+ e^{ikt}$. Покажем, что секулярность e^{ikt} устранимая ($T_{z,k}^{-1}(e^{ikt}) \in L_{2,\gamma}(R_+)$), в то время как секулярность e^{-ikt} неустраняемая ($T_{z,k}^{-1}(e^{-ikt}) \notin L_{2,\gamma}(R_+)$). Это приводит в методе Фурье к препятствиям построения аннигиляторов секулярных членов соответствующей проекции (например u -проекции):

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad k \in Z_0. \quad (11)$$

Такие препятствия не позволяют построить решение задачи для любых начальных данных, периодических возмущений положения равновесия. Начальные данные, для которых выполнены условия (11), будем называть регулярными для системы (6).

Теорема 5.1. Пусть выполнено (5), $\sigma > 1$ и

$$\| \{u_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{v_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{w_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{z_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} < \infty.$$

Тогда для регулярного возмущения системы (6) существует взаимно однозначная линейная замена независимых переменных, которая переводит нелинейную интегро-дифференциальную Фурье-систему в алгебраическую. Эта система имеет единственное глобальное решение, экспоненциально быстро стабилизирующееся к нулю. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \| \{u_k, v_k, w_k, z_k\} \|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_{\sigma-1})}^2 \\ & \leq C_0 (\| \{u_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{v_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{w_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{z_k^0\} \|_{\mathcal{H}_\sigma}), \end{aligned}$$

где $C_0 > 0$.

Покажем, что нарушение второго условия препятствия

$$\sqrt{w_\epsilon} w_k^0 + \sqrt{u_\epsilon} u_k^0 \neq 0$$

хотя бы для одного $k \in Z_0$ порождает неустойчивость положения равновесия. Нерегулярное периодическое возмущение положения равновесия приводит к рождению бегущей волны.

Теорема 5.2. Пусть выполнено (5), $\sigma > 2$ и справедливо одно условие препятствия u -проекции

$$\sqrt{z_\epsilon} z_k^0 + \sqrt{v_\epsilon} v_k^0 = 0, \quad k \in Z_0,$$

(один первый интеграл), в то время как

$$q_{w,k}^- = \sqrt{u_\epsilon} u_k^0 + \sqrt{w_\epsilon} w_k^0 \neq 0$$

хотя бы для одного $k \in Z_0$. Тогда заменой

$$\sqrt{u_\epsilon} u_k = (u_k^0 - N_k) e^{-K_\epsilon t} + N_k e^{-ikt} + S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + T_{u,k}^{-1}(\mathcal{X}_k^{(2)}), \quad \mathcal{X}_k^{(2)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$$

Фурье-система u -проекции приводится к виду

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_\epsilon} \mathcal{X}_k^{(2)}) &= \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} + q Q_k^{(1)}(u, u), \\ \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} &= \mathcal{F}_{u,k}^{(1)} - 2(\partial_t S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) + (ik + K_\epsilon) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt})). \end{aligned}$$

Квадратичная форма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_k^{(1)}(u, u) &= \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(F_{z,k_1} + G_{z,k_1} - \sqrt{u_\epsilon} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \sqrt{u_\epsilon} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} ds \right) q_{w,k_2}^- e^{-ik_2 t} \right\} \in L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma), \end{aligned}$$

для любого $\{\mathcal{X}_k^{(2)}\} \in W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$.

Как видим, квадратичная форма $Q_k^{(1)}(u, u)$ линейна относительно независимой переменной $\{\mathcal{X}_k^{(2)}\}$. Это снимает проблемы слабой сходимости. Для регулярного процесса имеем $q_{w,k_2}^- = 0$, что аннулирует квадратичную часть. Линейной заменой $\sqrt{u_\epsilon} \mathcal{X}_k^{(2)} = T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_\epsilon} \mathcal{Y}_k)$ приходим к алгебраическому уравнению

$$\sqrt{u_\epsilon} \mathcal{Y}_k = \mathcal{F}_{u,k}^{(1)}.$$

Теорема 5.3. Пусть $\sigma > 2$, выполнены условия теоремы 5.2 и

$$q(\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\{v_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\{z_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma})$$

достаточно мало. Тогда нерегулярное периодическое возмущение положения равновесия одномерной модели Бродуэлла стабилизируется к бегущей волне экспоненциально быстро.

5.1. Оператор L_{BD} уничтожения-рождения. Перейдем к доказательству теорем 5.2 и 5.3. Вопрос в том, как выделить бегущую волну стабилизации нерегулярного возмущения. Попробуем «уравновесить» вторую и первую компоненты с групповой скоростью $c = 1$. Введем оператор

$$L_{BD}u_k = u_k + 2ike^{ikt} \int_0^t e^{ik(t-s)} u_k ds.$$

Заметим, что

$$L_{BD}(e^{-ikt}) = e^{-2iks} + 2ik \int_0^t e^{-2iks} ds = e^{ikt}, \quad (12)$$

т. е. неустраняемая секулярность переходит в устранимую. Сделаем замену

$$\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k = N_{k,u} e^{ikt} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)}$$

с неизвестной амплитудой $N_{k,u}$ в уравнениях состояния и в уравнении для \mathcal{X}_k -компоненты. В силу (12) получим

$$T_{u,k}(N_{k,u} e^{ikt}) = (z_e + v_e) N_{k,u} e^{-ikt} + (w_e + u_e) N_{k,u} e^{ikt}.$$

Отсюда в переменной $\mathcal{X}_k^{(1)}$ имеем

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)}) + (z_e + v_e) N_{k,u} e^{-ikt} + (w_e + u_e) N_{k,u} e^{ikt} \\ = d_k^+ e^{ikt} + z_e q_{w,k}^- e^{-ikt} + \mathcal{F}_{u,k}^{(1)} + qQ_k^{(1)}(u, u). \end{aligned}$$

Выбираем $N_{k,u}$ из условия

$$(w_e + u_e) N_{k,u} = z_e q_{w,k}^-.$$

Тогда в переменной $\mathcal{X}_k^{(1)}$

$$\sqrt{z_e} z_k = F_{z,k} + (q_{z,k}^+ - N_{u,k}) e^{ikt} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)} - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)} ds,$$

$$\sqrt{v_e} v_k = F_{v,k} + (q_{v,k}^+ + N_{u,k}) e^{ikt} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)} + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)} ds,$$

$$\sqrt{w_e} w_k = \frac{v_e}{z_e + v_e} q_{w,k}^- e^{-ikt} - F_{u,k} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)},$$

$$\sqrt{w_e} u_k = \frac{z_e}{z_e + v_e} e^{-ikt} + F_{u,k} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(1)}.$$

Получили золотое сечение в распределении секулярности e^{-ikt} по компонентам w_k, u_k . В другой группе компонент v_k, z_k ее нет. Уравнение для $\mathcal{X}_k^{(1)}$ -компоненты

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(1)}) + (w_e + u_e)N_{k,u}e^{ikt} &= d_k^+e^{ikt} + \mathcal{F}_{u,k}^{(1)} \\ &+ q \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(-N_{k,u}e^{ik_1t} + F_{z,k_1} - \sqrt{u_e}\mathcal{X}_{k_1}^{(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)}\sqrt{u_e}\mathcal{X}_{k_1}^{(1)} ds \right) q_{w,k_2}^- e^{-ik_2t} \right\}, \\ \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(1)}|_{t=0} &= \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(1)}|_{t=0} - N_{u,k}, \quad k \in Z_0. \end{aligned}$$

В линейной части базового уравнения осталась только устранимая секулярность.

5.2. Аннигиляция устранимой секулярности. Сделаем замену (для аннигиляции устранимой секулярности)

$$\sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(1)} = \mathcal{X}_k^{(1)}|_{t=0}e^{-K_e t} + S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(2)},$$

получим

$$\begin{aligned} \sqrt{z_e}z_k &= F_{z,k}^{(1)} - \frac{K_e - ik}{K_e + ik}N_{u,k}e^{ikt} - \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(2)} \\ &\quad - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)}(R_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(2)}) ds, \\ F_{z,k}^{(1)} &= F_{z,k} + S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) - \frac{2ik}{K_e + ik}N_{u,k}e^{-K_e t}. \\ \sqrt{v_e}v_k &= -F_{z,k}^{(1)} + \frac{K_e - ik}{K_e + ik}N_{u,k}e^{ikt} - \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(2)} \\ &\quad - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)}(S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k^{(2)}) ds, \\ F_{z,k}^{(1)} &= F_{z,k} + S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) - \frac{2ik}{K_e + ik}N_{u,k}e^{-K_e t}. \end{aligned}$$

Выделим секулярность из интеграла

$$-2ik \int_0^t e^{ik(t-s)}S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds.$$

В силу оператора $T_{u,k}$ имеем

$$\begin{aligned} S_k^+e^{ikt} &= T_{u,k}T_{u,k}^{-1}(S_k^+e^{ikt}) = 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds \\ &\quad + \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + (ik + K_e)S_k^+T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$-2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds = -\frac{1}{u_e + w_e} S_k^+ e^{ikt} + G_k^{(1)},$$

$$G_k^{(1)} = \frac{1}{u_e + w_e} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{u_e} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + (ik + K_e) S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sqrt{z_e} z_k &= F_{z,k}^{(1)} + G_k^{(1)} + \left(-\frac{1}{u_e + w_e} S_k^+ + \frac{K_e - ik}{K_e + ik} N_{u,k} \right) e^{ikt} \\ &\quad - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{v_e} v_k &= -F_{z,k}^{(1)} - G_k^{(1)} - \left(-\frac{1}{u_e + w_e} S_k^+ + \frac{K_e - ik}{K_e + ik} N_{u,k} \right) e^{ikt} \\ &\quad + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds. \end{aligned}$$

Выберем S_k^+ из уравнения

$$-\frac{1}{u_e + w_e} S_k^+ + \frac{K_e - ik}{K_e + ik} N_{u,k} = 0,$$

аннулирующего устранимую секулярность в уравнениях состояния и в базовом уравнении для независимой переменной $\mathcal{X}_k^{(2)}$. Тогда

$$\sqrt{z_e} z_k = F_{z,k}^{(1)} + G_{z,k}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds,$$

$$\sqrt{v_e} v_k = -F_{z,k}^{(1)} - G_{z,k}^{(1)} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds,$$

$$F_{z,k}^{(1)} + G_{z,k}^{(1)} \in L_{2,\gamma}(R_+),$$

$$\sqrt{w_e} w_k = \frac{v_e}{z_e + v_e} q_{w,k}^- e^{-ikt} - F_{u,k}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)},$$

$$\sqrt{u_e} u_k = \frac{z_e}{z_e + v_e} e^{-ikt} + F_{u,k}^{(1)} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)},$$

$$F_{u,k}^{(1)} = F_{u,k} + \mathcal{X}_k^{(2)} \Big|_{t=0} e^{-K_e t} + R_k^+ T_{u,k_1}^{-1}(e^{ik_1 s}) \in L_{2,\gamma}(R_+).$$

Базовое уравнение

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)}) &= \mathcal{F}_{u,k}^{(1)} + q \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} ds \right) q_{w,k_2}^- e^{-ik_2 t} \right\}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)}|_{t=0} = 0, \quad k \in Z_0.$$

Это завершает доказательство теорем 5.1 и 5.2.

5.3. Выделение бегущей волны. Сделаем сборку предельных периодических частей компонент:

$$\mathcal{B}(x-t) = \sum_{k \in Z_0} \left(\frac{z_e}{z_e + v_e}, 0, \frac{v_e}{z_e + v_e}, 0 \right) q_{w,k}^- e^{-ik(x-t)}.$$

Тогда

$$W \mathcal{B}(x-t) = (u_e + q \mathcal{B}(x-t)_1, v_e, w_e + q \mathcal{B}(x-t)_3, z_e)$$

есть бегущая волна, поскольку

$$\begin{aligned} z_e \mathcal{B}(x-t)_3 - v_e \mathcal{B}(x-t)_1 &= z_e \mathcal{B}(x-t)_3 - v_e \mathcal{B}(x-t)_1 \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{z_e v_e}{z_e + v_e} - \frac{z_e v_e}{z_e + v_e} \right) \sum_{k \in Z_0} q_{w,k}^- e^{ik(x-t)} = 0. \end{aligned}$$

В компонентах $\mathcal{B}_k^{(j)}$ имеем

$$\sqrt{z_e} z_k = \mathcal{B}_k^{(4)} + F_{z,k}^{(1)} + G_{z,k}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds,$$

$$\sqrt{v_e} v_k = \mathcal{B}_k^{(2)} + F_{v,k}^{(1)} - G_{z,k}^{(1)} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)} ds,$$

$$\sqrt{w_e} w_k = \mathcal{B}_k^{(3)} - F_{u,k}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)}, \quad \sqrt{u_e} u_k = \mathcal{B}_k^{(1)} + F_{u,k} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)},$$

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k^{(2)}) &= \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} + q \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_1}^{(2)} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_{k_2}^{(3)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}_k^{(2)}|_{t=0} = 0, \quad k \in Z_0.$$

Таким образом, имеем стабилизацию к бегущей волне, если $\mathcal{X}_k^{(2)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$, $k \in Z_0$. Переменная $\mathcal{X}_k^{(2)}$ играет роль расстояния до k -компоненты бегущей волны.

Последняя замена

$$\mathcal{X}_k^{(2)} = (T_{u,k})^{-1} Y_k, \quad Y_k \in L_{2,\gamma}(R_+), \quad k \in Z_0,$$

сводит базовое уравнение к линейному оператору в $L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$:

$$Y_k = \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} + q \mathcal{Q}_k(Y), \quad (13)$$

$$\mathcal{Q}_k(Y) = \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}Y_{k_1} - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}Y_{k_1} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_{k_2}^{(3)} \right\}, \quad k \in Z_0.$$

Нулевая мода

$$Y_0 = q(F_{z,0}^{(1)} + G_{z,0}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,0})^{-1}Y_0) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_k^{(3)}. \quad (14)$$

5.4. Усеченная система. Далее, как обычно (см. [10]), достаточно рассмотреть усеченную систему для $Y_k^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $|k| \leq m$, $m \in N$,

$$\begin{aligned} Y_k^{(m)} &= \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} + q\mathcal{Q}_k(Y^{(m)}), \\ Y_0^{(m)} &= q(F_{z,0}^{(1)} + G_{z,0}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,0})^{-1}(Y_0^{(m)})) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_k^{(3)} \end{aligned} \quad (15)$$

и доказать фундаментальность последовательности итераций

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^{j,m} &= \mathcal{F}_{u,k}^{(2)} + q\mathcal{Q}_k(\mathcal{Y}^{j-1,m}), \quad \mathcal{Y}_k^{0,m} = \mathcal{F}_{u,k}^{(2)}, \\ \mathcal{Y}_0^{(j,m)} &= q(F_{z,0}^{(1)} + G_{z,0}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,0})^{-1}(\mathcal{Y}_0^{(j,m)})) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_k^{(3)}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{Q}_k(\mathcal{Y}^{j-1,m})_k = \sum_{k_1+k_2=k} \left\{ \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}\mathcal{Y}_{k_1}^{j-1,m} - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}\mathcal{Y}_{k_1}^{j-1,m} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_{k_2}^{(3)} \right\}, \quad k \in Z_0.$$

Из второго уравнения (15) следует, что

$$(1 - qc_1(\|u_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|w_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma})) \|Y_0^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq qC_1(\|u_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \dots + \|z_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma})$$

для достаточно малого $q(\|u_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|w_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma})$.

Теорема 5.4. Пусть справедливо (5), $\sigma > 2$ и достаточно мало

$$q(\|u_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|w_k^0\|_{\mathcal{H}_\sigma}).$$

Тогда последовательность

$$\{\mathcal{Y}_k^{j,m}, k \in Z, |l| \leq m, j \in N\}$$

фундаментальна в $L_{2,\gamma}(R^+, \mathcal{H}_\sigma)$. Как следствие получаем сходимость

$$\{\mathcal{Y}_k^{j,m}, k \in Z, |l| \leq m, j \in N\}$$

к решению

$$\{Y_k^{(m)}, k \in Z, |l| \leq m\}$$

системы (13), (14). Более того, следует покоординатная сходимоссть

$$Y^{(m)} = \{Y_k^{(m)}, |k| \leq m, Y_k^{(m)} = 0, |k| > m\}$$

$$\rightarrow Y^* = \{(Y_k^* \in L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)), k \in Z\} \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

5.5. Априорная оценка решения задачи Коши системы (13), (14).

Доказательство теоремы 5.4 стандартно (подробности см. в [9, 10]). Ниже приведем процедуру получения априорных оценок в весовом пространстве на примере базовой оценки для квадратичной формы. Этими замечаниями ограничимся в силу требуемого объема статьи, отсылая за подробностями к упомянутым работам [9, 10].

Базовая априорная оценка квадратичной формы. Приведем технику доказательства базовой априорной оценки квадратичной формы

$$\mathcal{Q}_k(Y) = \mathcal{Q}_k^{(0)}(Y) + \mathcal{Q}_k^{(1)}(Y),$$

$$\mathcal{Q}_k^{(1)}(Y) = \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq |k|, K-1k_2 \neq 0} \left\{ \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}Y_{k_1} - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}Y_{k_1} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_{k_2}^{(3)} \right\},$$

$$\mathcal{Q}_k^{(0)}(Y) = (F_{z,0}^{(1)} + G_{z,0}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,0})^{-1}Y_0) \frac{z_e + v_e}{v_e} \mathcal{B}_k^{(3)}.$$

Лемма 5.1. Пусть $\sigma > 2$. Тогда для любого $\{Y_k; |l| \leq m\} \in L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty e^{-2\gamma t} |k|^{2\sigma} |\mathcal{Q}_k^{(1)}(Y)|^2 dt \leq C_0 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2) \times (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \dots + \|\{z_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{Y_k\}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\int_0^\infty e^{-2\gamma t} |k|^{2\sigma} |\mathcal{Q}_k^{(1)}(Y)|^2 dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left| \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq |k|, k_1k_2 \neq 0} \frac{1}{|k_2|^\sigma} |k_1|^\sigma \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k_1})^{-1}Y_{k_1} - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1}Y_{k_1} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} |k_2|^\sigma |\mathcal{B}_{k_2}^{(3)}| \right|^2 dt$$

$$+ \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left| \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq |k|, k_1k_2 \neq 0} \frac{1}{|k_1|^\sigma} |k_1|^\sigma \left(F_{z,k_1}^{(1)} + G_{z,k_1}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k_1})^{-1}Y_{k_1} \right) \right|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
& \left. - 2ik_1 \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1} Y_{k_1} ds \right) \frac{z_e + v_e}{v_e} |k_2|^\sigma |\mathcal{B}_{k_2}^{(3)}| \Bigg|^2 dt \\
& \leq 2C_\sigma^2 C_1^2 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2) \left\| \left\{ \begin{aligned} & F_{z,k}^{(1)} + G_{z,k}^{(1)} - \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1} Y_k \\ & - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1} Y_k ds \end{aligned} \right\} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2,
\end{aligned}$$

где

$$C_1 = \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} |k|^{-\sigma} < \infty,$$

если $\sigma > 1$, $|k_1 + k_2|^\sigma \leq C_\sigma (|k_1|^\sigma + |k_2|^\sigma)$. Из оценок для оператора $T_{u,k}$ следует, что

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1} Y_k + ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}(T_{u,k})^{-1} Y_k ds \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 \\
& \leq C_2 \|\{Y_k\}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2
\end{aligned}$$

и

$$\|F_{z,k}^{(1)} + G_{z,k}^{(1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 \leq C_2 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \dots + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2).$$

Оценка нулевой моды $\mathcal{Q}_k^{(0)}(Y)$ приведена выше.

5.6. Априорная оценка итераций. В силу полученной выше оценки имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty |k|^{2\sigma} |\mathcal{Y}_k^{j,m}|^2 dt \leq C_2 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \dots + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2) \\
& \quad + q C_0 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2) \\
& \quad \times (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \dots + \|\{z_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{\mathcal{Y}_k^{j,m}\}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& (1 - q C_0 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2)) \|\{\mathcal{Y}_k^{j,m}\}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 \\
& \leq (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \dots + \|\{z_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{\mathcal{Y}_k^{j,m}\}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2) \\
& \quad \times (C_2 + q C_0 (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2)),
\end{aligned}$$

если достаточно мало $q (\|\{u_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|\{w_k^0\}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2)$. Из этой оценки следует ограниченность последовательности итераций в $L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$. В силу этой оценки фундаментальность последовательности итераций и вторая часть теоремы 5.4 доказываются стандартно (см. [9, 10]). Это завершает доказательство теоремы 5.4.

5.7. Аппроксимационное решение. Из приведенных выше оценок следует слабая сходимость (подробности см. [10]) аппроксимационного решения

$$\widehat{u}^{(m)}(t, x) = u_0^{(m)}(t) + \sum_{|k| \leq m, k \in \mathcal{Z}_0} u_k^{(m)}(t) e^{ikx},$$

$$\widehat{v}^{(m)}(t, x) = v_0^{(m)}(t) + \sum_{|k| \leq m, k \in \mathcal{Z}_0} v_k^{(m)}(t) e^{ikx},$$

$$\widehat{w}^{(m)}(t, x) = w_0^{(m)}(t) + \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} w_k^{(m)}(t) e^{ikx},$$

$$\widehat{z}^{(m)}(t, x) = z_0^{(m)}(t) + \sum_{|k| \leq m; k \in \mathcal{Z}_0} z_k^{(m)}(t) e^{ikx},$$

$$u_0^{(m)}(0) = \dots = z_0^{(m)}(0) = 0.$$

к периодическому возмущению положения равновесия, которое стабилизирует-ся к бегущей волне. Это завершает доказательство теоремы 5.3.

5.8. Каскад. В общей ситуации, когда не выполнены оба условия препятствия, есть возможность подключения второй проекции для построения Фурье-решения. Для этого начальные данные разбиваются на две группы. Начальное возмущение

$$\begin{aligned} n_1^0 &= u_e + q\sqrt{u_e}\widehat{u}^0, & n_2 &= v_e + q\sqrt{v_e}\widehat{v}^0, \\ n_3 &= w_e + q\sqrt{w_e}\widehat{w}^0, & n_4^0 &= z_e + q\sqrt{z_e}\widehat{z}^0 \end{aligned} \quad (16)$$

разобьем на два.

1. Для первой группы:

$$n_1^0 = u_e + q\sqrt{u_e}\widehat{u}^0, \quad n_3^0 = w_e + q\sqrt{w_e}\widehat{w}^0, \quad n_4^0 = z_e + q\sqrt{z_e}\widehat{z}^0$$

выполнено первое начальное условие (11) для u -проекции

$$n_2^0 = v_e - q\sqrt{z_e}\widehat{z}^0.$$

Для такого начального периодического возмущения решение соответствующей задачи Коши для 1d 4v системы Бродуэлла в общем случае стабилизируется к бегущей волне $SW_1(x - t)$ экспоненциально быстро.

2. Второе начальное условие:

$$n_1^0 = n_3^0 = n_4^0 = 0, \quad n_2^0 = q(\sqrt{v_e}\widehat{v}^0 + \sqrt{z_e}\widehat{z}^0),$$

для которого выполнено второе условие препятствия (11)

$$\sqrt{u_e}\widehat{u}^0 + \sqrt{v_e}\widehat{v}^0 = 0$$

z -проекции. Оно рассматривается как возмущение бегущей волны $SW_1(x - t)$. Каскад этих двух решений (решение задачи Коши с начальными данными (16)), если

$$\sqrt{v_e}\widehat{v}^0 + \sqrt{z_e}\widehat{z}^0 \neq 0, \quad (17)$$

стабилизируется к бегущей волне $SW_2(x + t)$ также экспоненциально быстро.

3. Отметим, что каскад некоммутативен. При справедливости неравенства (17) мы не можем стартовать с u -проекции, поскольку не выполнено условие препятствия u -проекции.

6. Условия устойчивости полинома четной степени

Пусть многочлен $P_{2n}(\xi)$ четной степени $2n$ есть возмущение полинома

$$(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)$$

четной степени

$$P_{2n}(\xi) = A_0(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2) + P_{2n-1}(\xi),$$

корни которого чисто мнимые и разные $\pm ia_1, \pm ia_2, \dots, \pm ia_n, a_j \in R$, с расстояниями между ними

$$|a_j - a_k| \geq \mu_0 > 0, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k.$$

Тогда

$$\frac{P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} = A_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j^+}{\xi + ia_j} + \frac{A_j^-}{\xi - ia_j} \right).$$

Леммы 4.1–4.3 вытекают из следующей леммы.

Лемма 6.1. Пусть для полинома $P_{2n}(\xi)$ четной степени $2n$ выполнены сформулированные выше условия. Более того, пусть

$$A_0 > 0, \quad A_j^\pm > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для

$$\gamma = \frac{A_0}{2K_0\mu^2}, \quad K_0 = \sum_{j=1}^n (A_j^+ + A_j^-), \quad \mu \in (0, \mu_0),$$

вещественные части корней ξ_j полинома $P_{2n}(\xi)$

$$\operatorname{Re} \xi_j < -\gamma, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

для достаточно малого μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. вещественная часть

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \\ = A_0 + \operatorname{Re} \xi \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j^+}{(\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi + a_j)^2} + \frac{A_j^-}{(\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi - a_j)^2} \right) \geq A_0, \end{aligned}$$

если $\operatorname{Re} \xi > 0$.

2. Если $-\gamma < \operatorname{Re} \xi \leq 0$ и $|\operatorname{Im} \xi \pm a_j| \geq \mu, j = 1, \dots, n$, то

$$\operatorname{Re} \frac{P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \geq A_0 - \gamma \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j^+}{\mu^2} + \frac{A_j^-}{\mu^2} \right) = A_0 - \frac{\gamma}{\mu^2} K_0 = \frac{1}{2} A_0.$$

3. Рассмотрим замыкание непересекающихся областей $(-\gamma < \operatorname{Re} \xi < 0; |\operatorname{Im} \xi + a_j| < \mu)$, $(-\gamma < \operatorname{Re} \xi < 0; |\operatorname{Im} \xi - a_j| < \mu)$, $j = 1, \dots, n$. Так, для $(-\gamma \leq \operatorname{Re} \xi \leq 0; |\operatorname{Im} \xi - a_1| \leq \mu)$ имеем

$$\frac{(\xi - ia_1)P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \Big|_{\xi=ia_1} = \frac{P_{2n}(\xi)}{(\xi + ia_1)(\xi^2 + a_2^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \Big|_{\xi=ia_1} = A_1^-.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{(\xi - ia_1)P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \right| \geq A_1^- - \left| \frac{d}{d\xi} \left(A_0(\xi - ia_1) + \sum_{j=2}^n \left(\frac{A_j^+(\xi - ia_1)}{\xi + ia_j} + \frac{A_j^-(\xi - ia_1)}{\xi - ia_j} + \frac{A_1^+(\xi - ia_1)}{\xi + ia_1} \right) \right) \right|_{\xi=\xi^*} |\xi - ia_1|$$

для $\xi^* \in (-\gamma \leq \operatorname{Re} \xi \leq 0; |\operatorname{Im} \xi - a_1| \leq \mu)$. Теперь заметим, что для $j \neq 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\xi} \frac{A_j^-(\xi - ia_1)}{\xi - ia_j} \right| &= \frac{A_j^-}{|\xi - ia_j|} + \frac{A_j^- |\xi - ia_1|}{|\xi - ia_j|^2} \\ &\leq \frac{A_j^-}{|a_j + a_1| - \mu - \gamma} + \frac{A_j^-(\gamma + \mu)}{(|a_j - a_1| - \mu - \gamma)^2} \leq \frac{A_j^-}{\mu_0 - \mu - \gamma} + \frac{A_j^-(\gamma + \mu)}{(\mu_0 - \mu - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Так же получим ($j \neq 1$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\xi} \frac{A_j^+(\xi - ia_1)}{\xi + ia_j} \right| &= \frac{A_j^+}{|\xi + ia_j|} + \frac{A_j^+ |\xi - ia_1|}{|\xi + ia_j|^2} \\ &\leq \frac{A_j^+}{(a_j + a_1) - \mu - \gamma} + \frac{A_j^+(\gamma + \mu)}{((a_j + a_1) - \mu - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\xi - ia_1)P_{2n}(\xi)}{(\xi^2 + a_1^2) \cdots (\xi^2 + a_n^2)} \right| &\geq A_1^- - \frac{\mu}{\mu_0} \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j^-}{1 - \frac{\mu+\gamma}{\mu_0}} + \frac{A_j^-(\gamma + \mu)}{\mu_0(1 - \frac{\mu+\gamma}{\mu_0})^2} \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{(a_j + a_1)} \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j^+}{1 - \frac{\mu+\gamma}{(a_j + a_1)}} + \frac{A_j^+(\gamma + \mu)}{(a_j + a_1)(1 - \frac{\mu+\gamma}{(a_j + a_1)})^2} \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{2a_1} \left(\frac{A_1^+}{1 - \frac{\mu+\gamma}{2a_1}} + \frac{A_1^+(\gamma + \mu)}{2a_1(1 - \frac{\mu+\gamma}{2a_1})^2} \right) \geq \frac{1}{2} A_1^- \end{aligned}$$

для достаточно малого μ/μ_0 . Это завершает доказательство.

Заключение

Проведенный анализ двух-, трех-, четырех-, шести- и девяти-скоростных моделей дискретной кинетики установил возникновение в их одномерных моделях (на «кресте») с ростом числа групповых скоростей цепочки инвариантных решений, так что периодические возмущения предыдущего экспоненциально быстро стабилизируются к последующему. Такой анализ дает надежду на выяснение взаимосвязи дискретной кинетики и уравнения Больцмана. Групповой анализ дискретных моделей позволит выделить бесконечную упорядоченную цепочку инвариантных решений при неограниченном росте числа групповых скоростей. Более того, существование в каком-то смысле предела для этой цепочки, возможно, даст адекватное описание тонких кинетических эффектов, таких как ударные волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boltzmann L. Lectures on gas theory. Berkeley: Univ. California Press, 1964.
2. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. Euler N., Steeb W.-H. Painleve test and discrete Boltzmann equations // Aust. J. Phys. 1989. V. 42. P. 1–10.
4. Линдблом О., Эйлер Н. Решение уравнения Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати // Теорет. и мат. физика. 2002. Т. 131. С. 179–192.
5. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Broadwell J. E. Shock structure in a simple discrete velocity gas // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1243–1247.
7. Broadwell J. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // J. Fluid Mechanics. 1964. V. 19. P. 401–414.
8. Ильин О. В. Симметрии и инвариантные решения одномерного уравнения Больцмана для неупругих столкновений // Теорет. и мат. физика. 2016. Т. 186, № 2. С. 221–229.
9. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Духновский С. А. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 1–58.
10. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation // J. Math. Sci. 2015. V. 207, N 2. P. .
в 10 надо указать страницы.

Поступила в редакцию 6 января 2026 г.

После доработки 12 февраля 2026 г.

Принята к публикации 14 февраля 2026 г.

Радкевич Евгений Владимирович (ORCID ?)
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет,
 Ленинские горы, 1, Москва 119991
 evrad07@gmail.com

?!

Васильева Ольга Александровна (ORCID ?)
 Московский государственный строительный университет,
 Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
 vasiljeva.ovas@yandex.ru

?!