4986_p

УДК 517.929

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. В. Малыгина, И. Ю. Постаногова

Аннотация. Исследуется устойчивость систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В основе исследования лежит представление решения в виде интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемой системы уравнений нейтрального типа. Определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости сформулированы в терминах свойств функции Коши. Наряду с понятием асимптотической устойчивости рассматривается новое понятие сильной асимптотической устойчивости.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа, фундаментальная матрица, матрица Коши, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость.

Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Введение

Цель работы — исследование асимптотических свойств решений линейного функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-h_k) = \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-r_j), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где h_k — вещественные положительные, r_j — вещественные неотрицательные числа, A_k и B_j — вещественные $n \times n$-матрицы.

В настоящее время количество работ, посвященных ФДУ, продолжает расти, однако некоторые принципиальные вопросы, связанные с определениями относящихся к уравнению понятий, включая вопрос определения решения, остаются нерешенными или не имеют общепринятого решения. Несогласованность основных понятий обусловливает разрозненность результатов исследований ФДУ, в том числе исследований асимптотических свойств решений.

Если в уравнении (1) все матрицы A_k нулевые, т. е. (1) принадлежит к уравнениям запаздывающего типа, то исследование задач устойчивости упрощается тем, что определения устойчивости (как и для обыкновенных дифференциальных уравнений) формулируются в терминах одного объекта — фундаментальной матрицы, а для случая автономных уравнений различаются только два вида устойчивости: равномерная и асимптотическая (совпадающая с экспоненциальной).

Для ФДУ нейтрального типа ситуация сложнее: свойства фундаментальной матрицы уже не определяют асимптотическое поведение всех решений уравнения. Кроме того, появляются примеры уравнений, которые являются асимптотически устойчивыми, не будучи при этом экспоненциально устойчивыми. Все это требует, на наш взгляд, более внимательного отношения к определениям устойчивости для уравнений нейтрального типа. В настоящей работе мы предлагаем подойти к этому вопросу, используя идеи и методы функционального анализа, и рассматривать устойчивость как свойства линейных интегральных функционалов, определенных на пространствах начальных функций. Этот подход позволил получить ряд эффективных критериев, которые складываются в общую картину устойчивости для уравнений нейтрального типа.

2. Описание объекта исследования и постановка задачи

Нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных n-мерных вектор-столбцов и $n\times n$-матриц обозначаются одинарными линиями $|\cdot|$, при этом норма в $\mathbb{R}^n$ везде евклидова, а норма в $\mathbb{R}^{n\times n}$ согласована с ней: для $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ имеем $|A|=\sup\limits_{|x|=1}|Ax|$, где $x\in\mathbb{R}^n$.

Норма в функциональном пространстве $\mathbb{X}$ обозначается символом $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$.

Для измеримого множества $A\subseteq\mathbb{R}_+$ через $L_p(A)$ обозначаются пространства вектор-функций, действующих из A в $\mathbb{R}^n$ и суммируемых со степенью p, где $1\le p<\infty$, и через $L_\infty(A)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на множестве A вектор-функций. Нормы в этих функциональных пространствах традиционны.

Символами Θ и I будем обозначать соответственно нулевую и единичную $n\times n$-матрицы.

Определитель матрицы A обозначим через $\det A$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot x(t)-\sum_{k=1}^{K}A_k\dot x(t-h_k)=\sum_{j=0}^{J}B_jx(t-r_j),\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\tag{2}$$

где $K\in\mathbb{N}$, $0<h_1<h_2<\ldots<h_K$, $J\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\le r_0<r_1<\ldots<r_J$, $A_k,B_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

Для корректности записи (2) требуется доопределить значения $x(t)$ и $\dot x(t)$ при $t<0$. Для этого вводятся *начальные функции* $\varphi,\psi\colon[-\omega,0)\to\mathbb{R}^n$, где $\omega=\max\{h_K,r_J\}$, и при $t<0$ полагается $x(t)=\varphi(t)$, $\dot x(t)=\psi(t)$.

Обозначим через S_h *оператор сдвига*, действующий в пространствах вектор-функций и матриц-функций по правилу

$$(S_hy)(t)=\begin{cases}y(t-h), & t-h\ge 0,\\ 0, & t-h<0,\end{cases}$$

и рассмотрим наряду с уравнением (2) неоднородное уравнение

$$\dot x(t)-\sum_{k=1}^{K}A_k(S_{h_k}\dot x)(t)=\sum_{j=0}^{J}B_j(S_{r_j}x)(t)+f(t).\tag{3}$$

Под *решением* $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (3) будем понимать локально (т. е. на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывную вектор-функцию, считать оператор S_h действующим в пространстве локально суммируемых функций и предполагать функцию внешнего возмущения $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ локально суммируемой.

Определим функцию σ равенством

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \psi(t-h_k)\chi_{h_k}(t) + \sum_{j=1}^{J} B_j \varphi(t-r_j)\chi_{r_j}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+; \tag{4}$$

здесь $\chi_a(t)$ — характеристическая функция множества $(-\infty, a)$.

Если положить $f(t) = \sigma(t)$, то уравнение (2) с заданными начальными функциями φ и ψ представляется в виде (3). При таком подходе начальные функции становятся частью внешнего возмущения и это определяет условия, которым мы их подчиняем. Очевидно, что нет необходимости требовать от функций φ и ψ непрерывности, необязательны также условие «непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$ и условие согласования $\dot{\varphi} = \psi$; мы будем предполагать лишь, что обе начальные функции локально суммируемы.

В указанных условиях, как известно [1, с. 84], уравнение (3) с заданным начальным значением $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Представление (5) по аналогии с известным представлением решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) называют *формулой Коши*. Матрица-функция $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — *функцией Коши* уравнения (3). На отрицательной полуоси фундаментальное решение и функцию Коши доопределим нулевой матрицей. Матрицы-функции X и Y не зависят ни от начального значения $x(0)$, ни от внешнего возмущения f.

В работе [2] показано, что фундаментальное решение уравнения (3) выражается через функцию Коши следующим образом:

$$X(t) = Y(t) - \sum_{k=1}^{K} (S_{h_k} Y)(t) A_k, \tag{6}$$

а для производной фундаментального решения выполняется соотношение

$$\dot{X}(t) = \sum_{j=0}^{M} (S_{r_j} Y)(t) B_j. \tag{7}$$

Таким образом, решение уравнения (3) задается формулой (5), где фундаментальное решение X выражается через функцию Коши Y, поэтому асимптотическое поведение решений уравнения (3) определяется свойствами функции Коши, которую, следовательно, можно выбрать основным объектом исследования при изучении асимптотических свойств решений уравнения (2).

К функции Y применимо преобразование Лапласа, и ее Лаплас-образ имеет вид $L_Y(p) = G^{-1}(p)$, где матрица-функция $G(p)$ определяется формулой

$$G(p) = p\left(I - \sum_{k=1}^{K} e^{-h_k p} A_k\right) - \sum_{j=0}^{J} e^{-r_j p} B_j, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

При исследовании асимптотических свойств решений системы уравнений нейтрального типа важно знать, для каких значений p матрица $G^{-1}(p)$ существует. Поэтому введем следующее определение.

Определение 1. Уравнение

$$\det G(p) = 0, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

называется *характеристическим* для уравнения (2).

$\mathbb{X}$-устойчивость

Устойчивость решений уравнения (2) относительно начальных условий естественно определять как непрерывную зависимость (в том или ином смысле) решений от функций φ и ψ. Но эти функции рассматриваются как элементы некоторых пространств, выбирать которые можно по-разному и снабжать разными нормами. В определениях устойчивости зависимость от выбора класса начальных функций должна быть отражена явно.

Начальные условия для уравнения (2) задаются на множестве $[-\omega, 0]$. Функции φ и ψ в силу (4) и (5) не выходят из $L_1[-\omega, 0]$, но могут принадлежать более узкому подмножеству пространства $L_1[-\omega, 0]$, снабженному собственной нормой. Применительно к введенной выше функции σ это означает выбор аналогичного подмножества пространства $L_1[0, \omega]$.

Обозначим

$$K_t\sigma = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s)\, ds.$$

Рассмотрим семейство линейных вектор-функционалов $\{K_t\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n\}_{t\geq 0}$ и семейство линейных преобразований $\{X_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{t\geq 0}$, определенных равенствами $X_t\alpha = X(t)\alpha$. Нормы функционалов K_t и X_t определим традиционно:

$$\|K_t\| = \sup_{\|\sigma\|=1} |K_t\sigma|, \quad \|X_t\| = \sup_{|\alpha|=1} |X_t\alpha|.$$

Решение $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (2), определяемое значением $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и начальной функцией $\sigma \in \mathbb{X}$, будем называть *соответствующим* данным x_0 и σ. Для него из формулы (5) получаем

$$x(t) = X_t x_0 + K_t\sigma, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Заметим, что для всех $t \geq \omega$ имеем

$$K_t\sigma = \int\limits_0^\omega Y(t-s)\sigma(s)\, ds. \tag{11}$$

Пусть $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ — нормированное пространство (естественно считать его линейным) измеримых на отрезке $[0, \omega]$ функций.

Определение 2. Уравнение (2) называется $\mathbb{X}$-*устойчивым* (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ таких, что $|x_0| < \delta$ и $\|\sigma\|_{\mathbb{X}} < \delta$, для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (2) справедлива оценка $\sup\limits_{t\geq 0} |x(t)| < \varepsilon$.

Определение 3. Уравнение (2) называется *асимптотически* $\mathbb{X}$*-устойчивым*, если оно $\mathbb{X}$-устойчиво и для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения (2) обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$.

Определение 4. Уравнение (2) называется *экспоненциально* $\mathbb{X}$*-устойчивым*, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (2) справедлива оценка $|x(t)| \leq Ne^{-\gamma t}(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}})$.

Замечание 1. Выбор пространства $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$ произволен. В большинстве работ (например, в монографиях [2–4]) полагается $\mathbb{X} = C[0,\omega]$. В работах [5, 6] используется техника гильбертовых пространств, поэтому $\mathbb{X} = L_2[0,\omega]$. В работе [7] $\mathbb{X} = L_1[0,\omega]$, в работе [8] рассматривались случаи $\mathbb{X} = L_p[0,\omega]$ для всех $p \geq 1$.

Укажем ряд эквивалентных переформулировок определений 2–4.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (2) $\mathbb{X}$*-устойчиво;*

2) *существует такое* $N > 0$, *что для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{X}$ *и* $t \geq 0$ *для соответствующего решения* $x = x(t)$ *уравнения* (2) *справедлива оценка* $|x(t)| \leq N(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}})$;

3) $\sup\limits_{t\geq 0} |X(t)| < \infty$ *и* $\sup\limits_{t\geq 0} \|K_t\| < \infty$.

Доказательство. Проведем его по цепочке 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). В силу определения 2 линейные функционалы X_t и K_t ограничены равномерно по t. Остается применить формулу (10).

2) $\Rightarrow$ 3). Используем формулу (10). Пусть $\sigma = 0$. Тогда ограниченность фундаментального решения очевидна из неравенства $|X(t)x_0| \leq N|x_0|$. Пусть теперь $x_0 = 0$. Тогда $|K_t\sigma| \leq N\|\sigma\|_{\mathbb{X}}$, т. е. $\|K_t\| \leq N$.

3) $\Rightarrow$ 1). Следует из формулы (10) непосредственно.

В классическом определении асимптотической устойчивости [9] решения ОДУ предполагается, что асимптотически устойчивое решение устойчиво по Ляпунову. Вообще говоря, это требование существенно, однако для линейных уравнений оно излишне. Разберем вопрос о необходимости устойчивости по Ляпунову для асимптотической устойчивости применительно к уравнению (2).

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{X}$ — *банахово пространство. Если для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $\sigma \in \mathbb{X}$ *решение уравнения* (2) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, *то уравнение* (2) $\mathbb{X}$*-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (10) вытекает, что условие $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ выполняется для всех решений уравнения (2) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{X}$. В таком случае $\sup\limits_{t\geq 0} |X(t)| < \infty$ и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\sup\limits_{t\geq 0} |K_t\sigma| < \infty$. В силу теоремы Банаха — Штейнхауса [10, с. 116] получаем, что $\sup\limits_{t\geq 0} \|K_t\| < \infty$. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{X}$ — *банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (2) *асимптотически* $\mathbb{X}$*-устойчиво;*

2) *для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $\sigma \in \mathbb{X}$ *соответствующее решение* $x = x(t)$ *уравнения* (2) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ *и для любого* $\sigma \in \mathbb{X}$ *имеем* $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$.

Доказательство. Как и доказательство теоремы 1, нетрудно провести по цепочке 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1), опираясь на представление решения (10).

Обратим внимание на вывод условия 3) из условия 2). Из условия 2) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)x_0 = 0$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{X}$. Первое из этих следствий равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$, что можно интерпретировать как сходимость семейства вектор-функционалов X_t по норме $\|X_t\|$, т. е. как *равномерную* сходимость. Однако второе следствие не равносильно равномерной сходимости $\lim\limits_{t\to+\infty} \|K_t\| = 0$ семейства функционалов $\{K_t\}$ по норме $\|K_t\|$. В связи с этим введем новое понятие.

Определение 5. Назовем уравнение (2) *сильно асимптотически* $\mathbb{X}$*-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$.

После того как различие между асимптотической и сильной асимптотической устойчивостями формально зафиксировано с помощью определения семейства функционалов $\{K_t\}$, оно становится очевидным. Традиционно в исследованиях асимптотической устойчивости линейных ФДУ речь идет именно о сильной асимптотической устойчивости в смысле определения 5, что не всегда согласуется с формальными определениями вследствие их неточности или даже отсутствия. Обоснованием введения нового определения служат примеры уравнений, для которых понятия асимптотической и сильной асимптотической устойчивостей неэквивалентны. Один из таких примеров рассмотрен в разд. 5.

Определение экспоненциальной устойчивости также переформулируем в терминах свойств фундаментального решения и функционалов K_t.

Теорема 3. *Уравнение* (2) *экспоненциально* $\mathbb{X}$*-устойчиво, если и только если существуют такие* $N, \gamma > 0$, *что для всех* $t \ge 0$

$$|X(t)| \le Ne^{-\gamma t} \text{ и } \|K_t\| \le Ne^{-\gamma t}.$$

Доказательство следует из формулы (10).

Таким образом, равномерная по t ограниченность норм функционалов семейства $\{K_t\}$ заложена в определениях 2 и 4, но не в определении 3. Определение 5 включает, как и определения 2 и 4, оценку нормы $\|K_t\|$, поэтому устойчивость по Ляпунову и экспоненциальную устойчивость можно считать по определению сильными. Можно также ввести понятия, формально относящиеся к устойчивости по Ляпунову и экспоненциальной устойчивости так же, как асимптотическая устойчивость относится к сильной асимптотической устойчивости, но если пространство $\mathbb{X}$ банахово, то эти понятия в силу теоремы Банаха — Штейнхауса совпадают с введенными в определениях 2 и 4.

Итак, устойчивость уравнения (2) естественно рассматривать как $\mathbb{X}$-устойчивость, где $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$. В следующих разделах мы получим критерии L_p-устойчивости (по Ляпунову, сильной асимптотической и экспоненциальной) для всех p ($1 \le p \le \infty$) в терминах свойств функции Коши.

Сделаем несколько замечаний о вектор-функционалах, определенных на пространствах L_p, которые будем использовать ниже.

В случае $n = 1$ общий вид функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}$, где $p \geq 1$, определяется [10, с. 150–154] функцией $\alpha \in L_q[0,\omega]$, где $1/p + 1/q = 1$, и формулой

$$Fx = \int\limits_0^\omega \alpha(s)x(s)\,ds,$$

его норма $\|F\| = \sup\limits_{|x|=1} |Fx|$ в случае $p > 1$ равна

$$\|F\| = \left(\int\limits_0^\omega |\alpha(s)|^q\,ds\right)^{1/q},$$

а в случае $p = 1$ равна

$$\|F\| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |\alpha(s)| = \inf_{\mu E=0} \sup_{s\in[0,\omega]\setminus E} |\alpha(s)|.$$

Заметим, что формула нормы справедлива и в случае $p = \infty$ (тогда $q = 1$). Отсюда получаем вид вектор-функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$Fx = \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{1i}(s)x_i(s)\,ds, \ldots, \sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{ni}(s)x_i(s)\,ds\right),$$

где компоненты матрицы-функции $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ принадлежат $L_p[0,\omega]$. В силу согласованности норм в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ в случае $p > 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \left(\int\limits_0^\omega |A(s)|^q\,ds\right)^{1/q}, \tag{12}$$

а в случае $p = 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |A(s)|. \tag{13}$$

4. Устойчивость по Ляпунову

Покажем, что ограниченность интеграла функции Коши уравнения (2) на отрезке длины ω влечет ограниченность фундаментального решения на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Лемма 2. *Если* $\sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds < \infty$, *то* $\sup\limits_{t\geq 0} |X(t)| < \infty$.

Доказательство. Из соотношений (6) и (7) и условий леммы следует, что

$$\sup_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds = N_1 < \infty, \quad \sup_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+\omega} |\dot{X}(s)|\,ds = N_2 < \infty. \tag{14}$$

Предположим, что $\sup\limits_{t\geq 0} |X(t)| = \infty$. Тогда найдется такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)| > \frac{N_1}{\omega} + N_2.$$

Значит, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ имеем

$$|X(t)-X(t_0)| \le \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{X}(s)|\,ds \le \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |\dot{X}(s)|\,ds \le N_2.$$

Таким образом, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ справедлива оценка $|X(t)| > \frac{N_1}{\omega}$. Следовательно, $\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds > N_1$, что противоречит первому из соотношений (14).

Теперь получим критерий устойчивости по Ляпунову в терминах функции Коши.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Тогда уравнение* (2) L_p*-устойчиво, если и только если* $\sup\limits_{t\ge 0} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds < \infty$, *где* $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. В силу (11) и (12) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \left(\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds \right)^{1/q}. \tag{15}$$

Отсюда в силу теоремы 1 получаем доказательство теоремы в части необходимости. Учитывая неравенство Гёльдера и лемму 2, получаем достаточность.

Случай $p = 1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 5. *Уравнение* (2) L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t\ge 0} |Y(t)| < \infty.$$

Доказательство. В силу (11) и (12) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_1[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |Y(s)|. \tag{16}$$

Остается применить теорему 1 и лемму 2.

Из теорем 4 и 5 получаем

Следствие 1. *Если функция Коши уравнения* (2) *ограничена, то уравнение* (2) L_p*-устойчиво для всех* p, $1 \le p \le \infty$.

5. Асимптотическая устойчивость

Лемма 3. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|\,ds = 0$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|\,ds = 0$. Тогда в силу соотношений (6) и (7) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |X(s)|\,ds = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |\dot{X}(s)|\,ds = 0. \tag{17}$$

Предположим, что при этом $X(t)$ не стремится к Θ при $t \to \infty$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и бесконечно большая последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $|X(t_n)| \geq \varepsilon$.

В соответствии со вторым из соотношений (17) возьмем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$

$$\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим произвольные $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_n, t_n + \omega]$. Имеем

$$|X(t) - X(t_n)| \leq \int\limits_{t_n}^{t} |\dot{X}(s)|\, ds \leq \int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $|X(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in [t_n, t_n + \omega]$ и, значит,

$$\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |X(s)|\, ds \geq \frac{\varepsilon\omega}{2} > 0$$

для всех $n \geq N$, что противоречит первому из соотношений (17).

Теорема 6. *Пусть* $1 < p \leq \infty$. *Тогда уравнение* (2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво, если и только если* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0$, *где* $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (15). Следовательно, если $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0$, что доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (15), неравенства Гёльдера и леммы 3.

Теорема 7. *Уравнение* (2) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_1[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (16), из которой следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, если и только если $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$. Остается заметить, что в силу (6) из $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$.

Из теорем 6 и 7 получаем

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *то уравнение* (2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво для всех* p, $1 \leq p \leq \infty$.

Обозначим $E_{\alpha,\varepsilon}(t) = \{s \in [t, t+\omega] : u^\alpha(s) \geq \varepsilon\}$, где u — скалярная неотрицательная локально суммируемая функция.

Лемма 4. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} u(s)\, ds = 0$, *то для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\alpha > 0$ *справедливо предельное соотношение:* $\operatorname{mes} E_{\alpha,\varepsilon}(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Из условий леммы и определения множества $E_{\alpha,\varepsilon}(t)$ получаем оценки

$$\operatorname{mes} E_{\alpha,\varepsilon}(t) \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{E_{\alpha,\varepsilon}(t)} u(s)\,ds \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t}^{t+\omega} u(s)\,ds \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

из которых и следует утверждение леммы.

Теорема 8. *Пусть* $\sup\limits_{t\ge 0} |Y(t)| = K < \infty$. *Тогда если уравнение* (2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво хотя бы для одного* $p_0 > 1$, *то оно сильно асимптотически* L_p*-устойчиво для всех* $p > 1$.

Доказательство. Так как уравнение (2) сильно асимптотически L_p-устойчиво при всех $p \ge p_0$, из теоремы 6 следует, что

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|\,ds \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть $1 < p \le \infty$, q — сопряженное к p число из промежутка $[1,\infty)$. Зафиксируем произвольное положительное ε и построим множество

$$e(t) = \{s \in [t, t+\omega] : |Y(s)|^q \ge \varepsilon/2\omega\}.$$

Применяя лемму 4 при $u(s) = |Y(s)|$, находим $T > 0$ такое, что при любом $t \ge T$ справедливо неравенство $\operatorname{mes} e(t) < \frac{\varepsilon}{2K^q}$. Следовательно,

$$\int\limits_{e(t)} |Y(s)|^q\,ds \le K^q \operatorname{mes} e(t) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $s \in [t, t+\omega] \setminus e(t)$. Тогда по построению множества $e(t)$ имеем $|Y(s)|^q < \varepsilon/2\omega$, значит, $\int\limits_{[t,t+\omega]\setminus e(t)} |Y(s)|^q\,ds < \varepsilon/2$. Следовательно, при всех $t \ge T$

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds = \int\limits_{e(t)} |Y(s)|^q\,ds + \int\limits_{[t,t+\omega]\setminus e(t)} |Y(s)|^q\,ds < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, требуемое утверждение следует из теоремы 6.

Случай $p = 1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 9. *Пусть* $\sup\limits_{t\ge 0} |Y(t)| = K < \infty$. *Тогда если уравнение* (2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво хотя бы для одного* $p \ge 1$, *то оно асимптотически* L_1*-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (5) имеем

$$|x(t)| \le |X(t)||x(0)| + \int\limits_{0}^{\omega} |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds.$$

Из теоремы 2 следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$, значит, в оценке нуждается только второе слагаемое. Пусть $\sigma \in L_1[0,\omega]$, а ε — произвольное положительное число.

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое $\delta > 0$, что для любого множества $e \subseteq [0, \omega]$, у которого $\operatorname{mes} e < \delta$, справедливо неравенство $\int\limits_e |\sigma(s)|\,ds < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Построим множество

$$E(t) = \left\{ s \in [t-\omega, t] : |Y(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1} \right\}.$$

В силу леммы 4 найдется $T > 0$ такое, что при любом $t \geq T$ справедливо неравенство $\operatorname{mes} E(t) < \delta$. Так как множество $e = \{s \in [0, \omega] : t - s \in E(t)\}$ получается из множества $E(t)$ отображением симметрии и сдвигом на t, то $\operatorname{mes} e < \delta$, следовательно,

$$\int\limits_e |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds \leq K \int\limits_e |\sigma(s)|\,ds < \varepsilon/2.$$

Пусть $s \in [0, \omega] \setminus e$. Тогда $t - s \in [t-\omega, t] \setminus E(t)$, по построению множества $E(t)$ имеем $|Y(t-s)| < \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1}$, значит,

$$\int\limits_{[0,\omega]\setminus e} |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds < \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1} \int\limits_0^\omega |\sigma(s)|\,ds = \varepsilon/2$$

и, следовательно, при всех $t \geq T$

$$\int\limits_0^\omega |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds = \int\limits_e |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds + \int\limits_{[0,\omega]\setminus e} |Y(t-s)||\sigma(s)|\,ds < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^\omega Y(t-s)\sigma(s)\,ds = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, и асимптотическая L_1-устойчивость доказана.

Приведем пример, который показывает, что в теореме 8 нельзя строгое неравенство $p > 1$ заменить нестрогим, а в теореме 9 — асимптотическую L_1-устойчивость сильной асимптотической.

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = -bx(t) + cx(t-1), \quad t \geq 0, \tag{18}$$

для функции Коши которого в работах [8, 11] установлены следующие свойства:

1) $\sup\limits_{t\geq 0} |Y(t)| < \infty$;

2) $\int\limits_t^{t+1} |Y(s)|^2\,ds \underset{t\to\infty}{\to} 0$;

3) функция Y имеет в точках $t = k$, $k \in \mathbb{N}_0$, разрывы первого рода, причем $Y(k) = \lim\limits_{t\to k-0} Y(t) + (-1)^k$.

Второе свойство означает, что рассматриваемое уравнение является сильно асимптотически L_2-устойчивым. Из теоремы 8 вытекает сильная асимптотическая L_p-устойчивость уравнения (18) при всех $p > 1$, а из теоремы 9 — его асимптотическая L_1-устойчивость. При этом уравнение (18) не является сильно асимптотически L_1-устойчивым, так как третье свойство функции Коши противоречит теореме 7.

6. Экспоненциальная устойчивость

Лемма 5. *Если* $\int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds \le Ne^{-\gamma t}$, *то* $|X(t)| \le Me^{-\gamma t}$.

Доказательство. Из соотношений (6) и (7) следует, что если условия леммы выполнены, то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеют место соотношения

$$\int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds \le M_1 e^{-\gamma t}, \quad \int\limits_t^{t+\omega} |\dot X(s)|\,ds \le M_2 e^{-\gamma t}. \tag{19}$$

Предположим, что существует такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)e^{\gamma t_0}| > e^{\gamma\omega}\left(\gamma M_1 + \frac{M_1}{\omega} + M_2\right).$$

Тогда для произвольного $t \in [t_0, t_0+\omega]$ имеем

$$\begin{aligned}|X(t)e^{\gamma t} - X(t_0)e^{\gamma t_0}| &= \left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(X(s)e^{\gamma s})\,ds\right| \\ &\le \gamma \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\,ds + \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |\dot X(s)e^{\gamma s}|\,ds \\ &\le \gamma e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds + e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |\dot X(s)|\,ds \le \gamma e^{\gamma\omega} M_1 + e^{\gamma\omega} M_2.\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ справедлива оценка $|X(t)e^{\gamma t}| > \frac{M_1 e^{\gamma\omega}}{\omega}$. Значит,

$$e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds \ge \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\;ds > M_1 e^{\gamma\omega},$$

что противоречит первому из соотношений (19).

Теорема 10. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Уравнение* (2) *экспоненциально* L_p-*устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *справедлива оценка* $\int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds \le Ne^{-\gamma t}$, *где* $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (15). В силу теоремы 3 это доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (15), неравенства Гёльдера и леммы 5.

Теорема 11. *Уравнение* (2) *экспоненциально* L_1-*устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что его функция Коши подчинена экспоненциальной оценке*

$$|Y(t)| \le Ne^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{20}$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (16). Следовательно, $\|K_t\| \le Ne^{-\gamma t}$, если и только если $|Y(t)| \le Ne^{-\gamma t}$. Остается сослаться на соотношение (6).

Из теорем 10 и 11 получаем

Следствие 3. *Если функция Коши уравнения* (2) *подчинена экспоненциальной оценке* (20), *то уравнение* (2) *экспоненциально L_p-устойчиво для всех p, $1 \le p \le \infty$.*

Покажем, что экспоненциальная оценка матрицы Коши (20) является критерием не только экспоненциальной L_1-устойчивости, но и экспоненциальной устойчивости для любого L_p, $1 \le p \le \infty$.

Для этого используем следующее известное [12, 13] свойство функции Коши уравнений нейтрального типа.

Предложение 1. *Функция Коши $Y(t)$ уравнения* (2) *имеет экспоненциальную оценку* (20), *если и только если корни уравнения* (9) *лежат слева от мнимой оси и отделены от нее.*

Теорема 12. *Если уравнение* (2) *экспоненциально L_p-устойчиво при некотором p, $1 \le p \le \infty$, то все корни уравнения* (9) *лежат слева от мнимой оси и отделены от нее.*

Доказательство. Пусть уравнение (2) экспоненциально L_p-устойчиво, т. е. существуют такие константы $M, \gamma > 0$, что при любой $\sigma \in L_p$ для решения (2) выполнено неравенство $|x(t)| \le Me^{-\gamma t}(|x_0| + \|\sigma\|)$, $t > 0$.

Предположим, что характеристическое уравнение (9) имеет корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, для которого $\alpha > -\gamma$. Обозначим через $\xi_0 = \zeta + i\eta$ вектор, являющийся нетривиальным решением системы $G(\lambda_0)\xi = 0$.

Построим при $t \in [-\omega, 0]$ функции $\varphi(t) = e^{\lambda_0 t}\xi_0$, $\psi(t) = \dot{\varphi}(t)$, для которых, очевидно, $\sigma \in L_p([0, \omega])$. Если уравнение (2) дополнить такими начальными функциями, то его решением при всех $t \ge 0$ будет функция $x(t) = e^{\lambda_0 t}\xi_0$:

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-h_k) - \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-r_j)$$
$$= e^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0\left(I - \sum_{k=1}^{K} A_k e^{-\lambda_0 h_k}\right) - \sum_{j=0}^{J} B_j e^{-\lambda_0 r_j}\right)\xi_0 = e^{\lambda_0 t} G(\lambda_0)\xi_0 = 0.$$

Но при $\alpha > -\gamma$ функция $|x(t)|e^{\gamma t} = e^{(\alpha+\gamma)t}|\xi_0|$ неограниченная, что противоречит приведенному выше неравенству $|x(t)|e^{\gamma t} \le M(|x_0| + \|\sigma\|)$, которое должно выполняться для всех решений уравнения (2).

Теорема 13. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Уравнение* (2) *экспоненциально L_p устойчиво хотя бы при одном p, $1 \le p \le \infty$.*

2) *Уравнение* (2) *экспоненциально L_p устойчиво при всех p, $1 \le p \le \infty$.*

3) *Для функции Коши справедлива оценка* (20).

Доказательство. Проведем его по цепочке 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3).

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть для функции Коши выполнена оценка (20). Тогда по теореме 11 уравнение (2) экспоненциально L_1-устойчиво. Поскольку для любого множества E и любого $p > 1$ имеем $L_p(E) \subset L_1(E)$, то экспоненциальная оценка (20) влечет экспоненциальную L_p-устойчивость уравнения (2) при любом p, $1 \le p \le \infty$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

1) $\Rightarrow$ 3). Наконец, пусть верно утверждение 1, т. е. уравнение (2) экспоненциально L_p-устойчиво при некотором p, $1 \le p \le +\infty$. Тогда из теоремы 12 следует, что все корни уравнения (9) лежат слева от мнимой оси и отделены от нее, а из предложения 1 вытекает оценка (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: Макс Пресс, 2016.
6. *Junca S., Lombard B.* Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // J. Differ. Equ. 2014. V. 256, N 7. P. 2368–2391.
7. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально- разностных систем // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6. С. 37–49.
8. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Мат. тр. 2020. Т. 23, № 2. С. 3–49.
9. *Демидович Б.П.* Введение в математическую теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
11. *Малыгина В. В., Баландин А. С.* Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 106–116.
12. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
13. *Баландин А. С.* Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. I // Изв. вузов. Математика. 2023. № 3. С. 12–28.

Поступила в редакцию 20 февраля 2026 г.
После доработки 20 февраля 2026 г.
Принята к публикации 10 марта 2026 г.

Малыгина Вера Владимировна (ORCID 0000-0003-2194-680X)
Постаногова Ирина Юрьевна (ORCID 0009-0003-7014-2426)
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет (ПНИПУ),
Комсомольский пр., 29, Пермь 614990
`mavera@list.ru`, `ipostanogova@psu.ru`