Об эффективных условиях устойчивости линейного дифференциального уравнения с последействием общего вида

К.М.Чудинов

УДК: 517.929.4, MSC 2020: 34K20

Аннотация

Получены достаточные условия устойчивости скалярного линейного неавтономного дифференциального уравнения первого порядка с последействием в виде интеграла Римана – Стилтьеса, выраженные в явном виде через определяющую уравнение функцию запаздывания. Результаты работы усиливают известные теоремы о достаточных условиях устойчивости, идущие от классических теорем Мышкиса «о 3/2». Рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих преимущества полученных результатов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, последействие, устойчивость, функция Коши, теорема о 3/2.

Введение

Скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(s)\, d_s r(t,s) = 0, \quad t \in [0, +\infty) \equiv \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

включает в себя широкие классы линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с последействием [1, §§ 1.1, 5.1], [2, 1.1, 1.2]. Настоящая статья посвящена исследованию условий устойчивости уравнения (1), в котором функция r не убывает по второму аргументу, что в случае уравнения с сосредоточенными запаздываниями соответствует неотрицательности коэффициентов.

Основными результатами настоящей работы являются условия на функцию r, обеспечивающие устойчивость уравнения относительно начальных данных. Эти результаты обобщают результаты недавней работы [3], которые, в свою очередь, усиливают известные достаточные условия устойчивости, идущие от теорем Мышкиса «о $3/2$» [4, 5].

Устойчивость решений дифференциальных уравнений с последействием в большинстве работ определяется как непрерывная в том или ином смысле зависимость решений уравнения относительно начальной функции. Уравнение вида (1) формально не требует задания начальной функции; а все асимптотические свойства его решений определяются как свойства соответствующей уравнению *функции*

Коши. В частности, все традиционно исследуемые виды устойчивости относительно начальной функции выражаются через оценки сверху абсолютных значений функции Коши. Основные результаты в данной работе представлены как теоремы о свойствах функции Коши уравнения (1). Необходимые сведения для соотнесения свойств функции Коши с традиционными определениями устойчивости приведены в разделе 1.

В разделе 2 описан исторический контекст исследуемой проблемы. В разделе 3 получены условия ограниченности функции Коши уравнения (1), то есть его равномерной устойчивости. В разделе 4 проведен подробный анализ преимуществ новых условий равномерной устойчивости над известными. Мы сравниваем результаты применения разных условий ограниченности функции Коши к относительно простым уравнениям, для которых сильные и слабые стороны таких условий проявляются наиболее отчетливо. В разделе 5 рассмотрены дополнительные условия, обеспечивающие некоторые виды асимптотической устойчивости уравнения (1).

1 Устойчивость как свойство функции Коши

Ниже символ ∞ везде обозначает $+\infty$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать семейство т. н. «s-урезанных» уравнений

$$\dot{x}(t) + \int\limits_s^t x(\tau)\, d_\tau r(t,\tau) = 0, \quad t \in [s,\infty), \tag{2}$$

где $s \in \mathbb{R}_+$, считая *решением* уравнения (2) локально абсолютно непрерывную функцию $x\colon [s,\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению почти всюду.

Интеграл в уравнении (2) понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Однозначную разрешимость уравнения (2) при задании начального значения $x(s)$ обеспечивают, например, следующие предположения о функции r [2, с. 17]: будем считать, что она локально суммируема по первому аргументу при фиксированном втором и имеет ограниченное изменение $\rho(t) = \bigvee\limits_0^t r(t,\cdot) = \int\limits_0^t d_s r(t,s)$, при этом функция ρ локально суммируема.

Определение 1 ([2, с. 93])**.** *Функцией Коши* уравнения (1) называется функция $C\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, такая что

$$\frac{\partial C(t,s)}{\partial t} + \int\limits_s^t C(\tau,s)\, d_\tau r(t,\tau) = 0, \quad t \geq s;$$

$$C(s,s) = 1; \qquad C(\xi,s) = 0, \quad \xi < s.$$

Функция Коши уравнения (1) определяется однозначно. При фиксированном значении второго аргумента $s \in \mathbb{R}_+$ функция $c(\cdot) = C(\cdot,s)$ является решением уравнения (2).

Общее решения соответствующего уравнению (2) неоднородного уравнения с правой частью $f\colon [s,\infty) \to \mathbb{R}$ имеет явное представление в виде наследуемой из теории линейных уравнений без последействия *формулы Коши* [2, с. 94]

$$x(t) = C(t,s)x(s) + \int\limits_s^t C(t,\tau)f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq s.$$

В силу этого представления естественным является дать определения устойчивости уравнения (1) через свойства его функции Коши.

Определение 2. Будем называть уравнение (1)

- *равномерно устойчивым*, если для некоторого числа $N > 0$ для всех пар $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ имеем $|C(t,s)| \le N$.

- *асимптотически устойчивым*, если для любого числа $s \ge 0$ при $t \to \infty$ имеем $C(t,s) \to 0$;

- *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $l > 0$, что для любых $s \ge 0$ и $t \ge s+l$ имеем $|C(t,s)| < \varepsilon$;

- *экспоненциально устойчивым*, если для некоторых $N > 0$ и $\gamma > 0$ для всех пар $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ имеем $|C(t,s)| \le N \exp(-\gamma(t-s))$.

О соотношении определений устойчивости через начальную функцию и через функцию Коши см. [6, сс. 195–198].

Задача дальнейшего исследования — получить достаточные условия устойчивости уравнения (1), выраженные в явном виде через параметры уравнения и имеющие существенные преимущества перед известными результатами.

2 Теоремы о $3/2$

В середине XX в. А. Д. Мышкис установил [4], что все решения линейного неавтономного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $a(t) \ge 0$ и $r(t) \ge 0$, при условии $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} a(t) \cdot \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \le 3/2$ устойчивы по Ляпунову, а при условиях $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, a(t) \cdot \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, r(t) < 3/2$ и $a(t) \ge m > 0$ асимптотически устойчивы, причем константа $3/2$ неулучшаема: строгое неравенство нельзя заменить нестрогим, а в нестрогом нельзя заменить верхние грани верхними пределами.

Первые обобщения и уточнения этих результатов были получены в конце 60-х гг. XX века, а на 80-е и 90-е годы в международной печати пришелся пик интереса к теоремам о $3/2$ и возможностям их уточнений. С тех пор поток работ, посвященных эффективным условиям устойчивости уравнений с последействием, продолжает нарастать, но за последние два десятилетия он изменился качественно: получено много обобщений полученных в XX веке фундаментальных результатов (см. обзор в недавней работе [7]), однако эти достижения, существенно расширяя область применимости найденных в XX веке подходов, мало углубляют сами подходы. В части новых идей, по нашему мнению, налицо кризис: так, в отношении устойчивости уравнения с одним запаздыванием (3) принято цитировать работу [8] 30-летней давности и обзор известных результатов в ней, а также работы T. Yoneyama [9] и [10]. Работа В. В. Малыгиной [11], где получены более сильные результаты, по-видимому, осталась не понятой, а основной результат из ее более ранней иногда цитируемой работы [12] удивительным образом оказался переоткрытым несколько лет назад в [13]. Современные авторы продолжают разделять в теоремах о $3/2$ случаи непрерывных и суммируемых параметров уравнения (3), хотя давно известно (в частности, из тех же работ Малыгиной), что это разделение непринципиально; более того, ненужное требование непрерывности параметров, как правило, только усложняет выкладки. Наконец, заметим, что основополагающие работы А. Д. Мышкиса не читаются и упоминаются всё реже. Таким образом, современным обзорам литературы по устойчивости дифференциальных уравнений с последействием можно доверять только отчасти и с осторожностью.

Условия устойчивости уравнения (1), обобщающие теоремы Мышкиса и объединяющие в себе все полученные ранее достижения в этом направлении, систематизированы в недавней работе Малыгиной [5]. Приведем их.

Будем считать, что $r(t,0)=0$, и обозначим $h(t)=\inf\limits_{s\geq 0} r(t,s)\neq 0$.

Заметим, что в применении к уравнению (3) в приведенных ниже пяти предложениях имеем $\rho(s)=a(s)$.

Предложение 1 ([11, 5]). *Если для некоторого $t_0\geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\geq t_0}\int\limits_{h(t)}^{t}\rho(s)\,ds\leq 3/2, \tag{4}$$

то функция Коши уравнения (1) ограничена.

Предложение 2 ([11, 5]). *Если*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int\limits_{h(t)}^{t}\rho(s)\,ds< 3/2, \tag{5}$$

то для некоторых $N>0$ и $\gamma>0$ функция Коши $C(t,s)$ уравнения (1) подчинена оценке

$$|C(t,s)|\leq Ne^{-\gamma\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau},\quad (t,s)\in\mathbb{R}_+^2. \tag{6}$$

Предложение 3 ([11, 5]). *Если $\int\limits_0^\infty \rho(s)\,ds<\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $T\geq 0$, что для любых $s\geq T$ и $t\geq s$ имеем $|C(t,s)-1|<\varepsilon$.*

Предложение 4 ([11, 5]). *Если справедливы условия (5) и*

$$\int\limits_0^\infty\rho(s)\,ds=\infty, \tag{7}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Предложение 5 ([11, 5]). *Если для некоторого $m>0$ имеем*

$$\rho(t)\geq m \tag{8}$$

и справедливо условие (5), то уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

В предложениях 2, 4 и 5 нельзя заменить строгое неравенство нестрогим, а в предложении 1 даже заменить точную верхнюю грань верхним пределом.

В 1991 г. в работе [14] T. Krisztin впервые обратил внимание на то, что условия устойчивости в теоремах о 3/2 при переходе от уравнения (3) к уравнению с несколькими запаздываними при сохранении неулучшаемости константы 3/2 резко теряют в точности.

Рассмотрим обобщающее (3) уравнение

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

где $a_k(t) \geq 0$ и $h_k(t) \leq t$.

Предложение 6 ([14]). *Если в уравнении* (9) $a_k(t) \equiv \alpha_k \geq 0$ *и для некоторого* $t_0 \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \sup_{t \geq t_0}(t - h_k(t)) < 3/2,$$

то уравнение асимптотически устойчиво.

Предложение 7 ([14]). *Если для некоторого* $t_0 \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \sup_{t \geq t_0} a_k(t) \cdot \sup_{t \geq t_0}(t - h_k(t)) < 1,$$

то уравнение асимптотически устойчиво, причем константу 1 *в правой части неравенства нельзя увеличить.*

Таким образом, при переносе результатов Мышкиса на уравнение с несколькими запаздываниями границу устойчивости 3/2 удается сохранить для случая постоянных коэффициентов, но если коэффициент только ограничен сверху константой, то граница устойчивости уменьшается скачком.

Сопоставим эти результаты с применением к уравнению (9) предложений 1 и 2. Здесь имеем $h(t) = \min\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} h_k(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Предложение 8 ([11]). *Если для некоторого* $t_0 \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{h(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} a_k(s)\, ds \leq 3/2,$$

то функция Коши уравнения (9) *ограничена.*

Предложение 9 ([11]). *Если справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{t \to \infty} \int_{h(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} a_k(s)\, ds < 3/2,$$

то для некоторых $N > 0$ *и* $\gamma > 0$ *функция Коши* $C(t,s)$ *уравнения* (9) *подчинена оценке* (6).

Видимый недостаток этих результатов состоит в том, что все коэффициенты интегрируются по одному и тому же промежутку, хотя их влияние на устойчивость, очевидно, может сильно различаться.

Таким образом, более 30 лет назад была обозначена проблема поиска условий устойчивости, обобщающих известные результаты типа теорем о 3/2, которые учитывали бы влияние разных запаздываний независимо. Недавно поиск таких условий привел к следующему результату.

В работе [3] предложения 1 и 2 существенно усилены по отношению к уравнению (3), которое рассматривается в предположении, что функция $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируема, а функция $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима; по-прежнему, полагается, что $a(t) \geq 0$ и $h(t) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим

$$\mu(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \tau, & \tau \in [0,1], \\ 1, & \tau > 1. \end{cases}$$

Предложение 10 ([3])**.** *Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t \geq t_0} \int\limits_t^\infty \mu\left(\int\limits_{h(s)}^t a(\tau)\,d\tau \right) a(s)\,ds \leq 1,$$

то функция Коши уравнения (3) *ограничена.*

Предложение 11 ([3])**.** *Если*

$$\varlimsup_{t \to \infty} \int\limits_t^\infty \mu\left(\int\limits_{h(s)}^t a(\tau)\,d\tau \right) a(s)\,ds < 1,$$

то для некоторых $N > 0$ и $\gamma > 0$ функция Коши $C(t,s)$ уравнения (3) *подчинена оценке* (6)*.*

В работе [3] показано, что предложения 8 и 9 в случае $m = 1$ являются следствиями предложений 10 и 11 соответственно, при этом существуют уравнения, устойчивость которых устанавливается последними, но не устанавливается первыми. В следующем разделе подход, примененный в [3] к исследованию уравнения (3), будет применен к уравнению (1).

3 Новые условия равномерной устойчивости

В дальнейшем значения $\rho(t)$ будем записывать в виде интеграла $\int\limits_0^t d_s r(t,s)$. Это удобно в связи с тем, что часто будет использоваться тот же интеграл с другими пределами.

Теорема 1. *Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t \geq t_0} \int\limits_t^\infty \int\limits_0^t \mu\left(\int\limits_\tau^t \int\limits_0^\xi d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi \right) d_\tau r(s,\tau)\,ds \leq 1, \tag{10}$$

то уравнение (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $s \geq 0$ значения $C(t,s)$ не меняют знак при $t > s$, то в силу невозрастания функции r по второму аргументу они не возрастают с ростом t, следовательно, $0 \leq C(t,s) \leq 1$.

Зафикируем произвольное $s \geq t_0$ такое, что значения $C(t,s)$ меняют знак при $t \geq s$. Обозначим для краткости $c(t) = C(t,s)$. Функция c есть решение s-урезанного уравнения (2).

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $t_1 \geq s$, что $c(t_1) < 0$, имеем: если $c(t) \leq M$ для всех $t \in [s, t_1)$, то $c(t_1) \geq -M$.

В силу линейности без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $s_0 = \sup\{t \in [s, t_1] \mid c(t) > 0\}$. Очевидно, $c(s_0) = 0$.

С учётом предположения $c(t) \leq 1$ для $t \in [s, s_0]$ получаем:

$$c(t) = -(c(s_0) - c(t)) = \int\limits_t^{s_0} \int\limits_s^{\xi} c(\eta)\, d_\eta r(\xi,\eta)\, d\xi \leq \int\limits_t^{s_0} \int\limits_s^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\, d\xi,$$

следовательно, для всех $t \in [s, t_1]$ справедливо неравенство

$$c(t) \leq \mu \left(\int\limits_t^{s_0} \int\limits_s^{\eta} d_\tau r(\eta,\tau)\, d\eta \right). \tag{11}$$

Отсюда при выплнении (10) получаем:

$$\begin{aligned} c(t_1) = c(t_1) - c(s_0) = -\int\limits_{s_0}^{t_1} \int\limits_s^{\zeta} c(\tau)\, d_\tau r(\zeta,\tau)\, d\zeta \geq -\int\limits_{s_0}^{t_1} \int\limits_s^{s_0} c(\tau)\, d_\tau r(\eta,\tau)\, d\eta \\ \geq -\int\limits_{s_0}^{t_1} \int\limits_s^{s_0} \mu \left(\int\limits_\tau^{s_0} \int\limits_s^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\, d\xi \right) d_\tau r(\zeta,\tau)\, d\zeta \\ \geq -\int\limits_{s_0}^{\infty} \int\limits_0^{s_0} \mu \left(\int\limits_\tau^{s_0} \int\limits_0^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\, d\xi \right) d_\tau r(s,\tau)\, ds \geq -1. \end{aligned}$$

Итак, если $c(t) \leq M$ для всех $t \in [s, t_1)$, то $c(t_1) \geq -M$. Аналогично получаем, что если функция $c(t)$ меняет знак при $t \in [s, t_1]$ и $c(t_1) > 0$, то $c(t_1) \leq -\min\limits_{t \in [s,t_1)} c(t)$. Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1) ограничена. Теорема доказана.

Покажем, что предложение 1 следует из теоремы 1.

Заметим, что $\int\limits_0^{3/2} \mu(\tau)\, d\tau = 1$ и при $s > t$ имеем $\mu\left(\int\limits_s^t a(\tau)\, d\tau\right) = 0$.

Предположим, что выполнены условия предложения 1.

Зафиксируем произвольно $t \geq t_0$ определим на полуоси $[t, \infty)$ функцию

$$\alpha = \alpha(s) = \int\limits_t^s \rho(\tau)\, d\tau = \int\limits_t^s \int\limits_0^{\tau} d_\xi r(\tau,\xi)\, d\tau.$$

Для любых $s \geq t$ имеем:

$$\int\limits_{h(s)}^{t} \rho(\tau)\,d\tau = \int\limits_{h(s)}^{t} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi$$

$$= \int\limits_{h(s)}^{s} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi - \int\limits_{t}^{s} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi \leq 3/2 - \alpha(s).$$

Функция α непрерывна и не убывает,

$$\alpha'(s) = \rho(s) = \int\limits_{0}^{s} d_\tau r(s,\tau), \quad d\alpha = \alpha'(s)\,ds = \rho(s)\,ds = \int\limits_{0}^{s} d_\tau r(s,\tau)\,ds.$$

Следовательно, либо существует такая точка $t_1 > t$, что $\alpha(t_1) = 1/2$, либо $\alpha(s) < 1/2$ для всех $s \geq t$. В первом случае для любой точки $t_2 \geq t$ получаем:

$$\int\limits_{t}^{t_2} \int\limits_{0}^{t} \mu\left(\int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right) d_\tau r(s,\tau)\,ds$$

$$= \int\limits_{t}^{t_2} \int\limits_{h(s)}^{t} \mu\left(\int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right) d_\tau r(s,\tau)\,ds$$

$$\leq \int\limits_{t}^{t_2} \int\limits_{0}^{s} \mu\left(\int\limits_{h(s)}^{t} \int\limits_{0}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right) d_\tau r(s,\tau)\,ds$$

$$\leq \int\limits_{t}^{t_2} \int\limits_{0}^{s} d_\tau r(s,\tau)\,\mu\left(3/2 - \alpha(s)\right) ds = \int\limits_{t}^{t_2} \mu\left(3/2 - \alpha(s)\right) d\alpha(s)$$

$$= \int\limits_{t}^{t_1} \mu\left(3/2 - \alpha(s)\right) d\alpha(s) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu\left(3/2 - \alpha(s)\right) d\alpha(s)$$

$$= 1/2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(3/2 - \alpha(s)\right) d\alpha(s) \leq 1/2 + \sup_{x \geq 0} \int\limits_{0}^{x} (1-y)\,dy = 1.$$

Во втором случае то же самое неравенство очевидно.

Таким образом, если выполнено условие (4) предложения 1, то выполнено и условие (10) теоремы 1.

В следующем разделе рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сильные стороны приведенных выше новых результатов и поясняющих идеи, заложенные в их основе. Чтобы сделать это наиболее ясно и выпукло, постараемся сделать это с помощью по возможности наиболее простых примеров.

Применение к уравнению (9) теоремы 1 дает

Следствие 1. *Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\geq t_0} \int_t^\infty \sum_{k=1}^m a_k(s)\,\mu\left(\int_{h_k(s)}^t \sum_{i=1}^m a_i(\tau)\,d\tau\right) ds \leq 1,$$

то функция Коши уравнения (9) *ограничена.*

Обратим внимание на множества, по которым интегрируются коэффициенты a_k в предложении 8 и следствии 1. В предложении 8 все коэффициенты интегрируются по одному общему промежутку, длина которого равна наибольшему запаздыванию. В следствии 1 каждый коэффициент a_k интегрируется фактически по своему подмножеству полуоси $[t, \infty)$, которое определяется весовым коэффициентом в виде значения функции μ, который может быть нулевым, единичным и промежуточным. Мера множества, на котором этот коэффициент не нулевой, во всяком случае не превосходит максимальной длины соответствующего запаздывания $t - h_k(t)$, а не общего максимального запаздывания $t - h(t)$, как в предложении 8. Это само по себе является весомым аргументом в пользу следствия 1: влияние каждого из m запаздываний на устойчивость уравнения (9) оценивается отдельно. Более подробный анализ свойств новых условий устойчивости проводится в следующем разделе.

Для большей ясности такого анализа приведем следующий результат, ослабляющий следствие 1, но имеющий простую формулировку и обладающий простотой применения.

Обозначим $E_k(t) = \{s \geq t \mid h_k(s) \leq t\}$, $k = \overline{1,m}$. Множества $E_k(t)$ измеримы в силу измеримости функций h_k.

Следствие 2. *Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\geq t_0} \int_{E_k(t)} \sum_{k=1}^m a_k(s)\,ds \leq 1,$$

то функция Коши уравнения (9) *ограничена.*

4 Несколько примеров

В данном разделе рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сильные стороны приведенных выше новых результатов и поясняющих идеи, заложенные в их основе. Ради ясности постараемся сделать это с помощью по возможности простых примеров уравнений вида (3) и (9), периодически «теряющих память».

Будем сопоставлять результаты применения к уравнению (9) представленных выше условий устойчивости. Для удобства будем, приводя эти результаты, нумеровать их везде следующим образом.

1. Результат применения предложений 7 и 6.

2. Результат применения предложения 8.

3. Результат применения следствия 2.

4. Результат применения следствия 1. Этот результат по определению будет давать условия не слабее, чем предыдущий, но мы намеренно разделяем эти результаты, чтобы пояснить, какие именно идеи позволяют существенно улучшить условия из пунктов 1 и 2.

Сначала продемонстрируем роль весового коэффициента $\mu(\cdot)$ в подынтегральном выражении следствия 1. Для простоты и ясности рассмотрим уравнение с одним запаздыванием.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (9), в котором $m = 1$, $a_1(t) \equiv \alpha$ и для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $t \in [2n, 2n+2)$ имеем $h_1(t) = 2n$:

$$\dot{x}(t) + \alpha x(2n) = 0, \quad t \in [2n, 2n+2), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Общее решение этого уравнения на полуоси $\mathbb{R}_+$ имеет вид

$$x(t) = x(0)(1-2\alpha)^n(1-\alpha(t-2n)), \quad t \in [2n, 2n+2), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, что уравнение равномерно устойчиво, если и только если $\alpha \le 1$. Применение приведенных выше утверждений дает следующие условия равномерной устойчивости.

1. Предложение 7 дает условие

$$\sup_{t\in[2n,2n+2)} a_1(t) \cdot \sup_{t\in[2n,2n+2)} (t - h_1(t)) \cdot 2 \le 1,$$

   то есть $\alpha \le 1/2$. Предложение 6 усиливает этот результат: $\alpha \le 3/4$.

2. Предложение 8 дает условие $\sup\limits_{t\in[2n,2n+2)} \int\limits_{h_1(t)}^{t} a_1(s)\,ds \le 3/2$, то есть $\alpha \le 3/4$.

3. Следствие 2 дает $\sup\limits_{t\in[2n,2n+2)} \int\limits_{t}^{2n+2} a_1(s)\,ds \le 1$, то есть $\alpha \le 1/2$.

4. Следствие 1 дает условие

$$\sup_{t\in[2n,2n+2)} \int\limits_{t}^{2n+2} a_1(s)\cdot\mu\left(\int\limits_{2n}^{t} a_1(\tau)\,d\tau\right) ds = \alpha\cdot \sup_{t\in[0,2)} \int\limits_{t}^{2} \mu(\alpha t)\,ds$$
$$= \alpha\cdot\max\left\{\sup_{t\in[0,1/\alpha)} [(2-t)(\alpha t)], \sup_{t\in[1/\alpha,2)} (2-t)\right\} \le 1,$$

   откуда $\alpha \le 1$.

Лучший результат здесь дает следствие 1 (в данном случае необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости), поскольку функция μ хорошо применима к исследованию устойчивости уравнения с рассмотренным типом запаздывания.

Преимущество новых условий устойчивости становятся ощутимее, если изменить параметры уравнения так, чтобы поведение решения изменилось непринципиально, но увеличивались величины функционалов в левых частях известных условий устойчивости.

Пример 2. Как и в примере 1, рассмотрим уравнение (9), в котором $m = 1$ и $a_1(t) \equiv \alpha$. Выберем произвольный период $T \geq 2$ и для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $t \in [Tn, T(n+1))$ положим

$$h_1(t) = \begin{cases} Tn, & t \in [Tn, Tn+2), \\ 2n + 1/\alpha, & t \in [Tn+2, T(n+1)). \end{cases}$$

Тогда для решения при $t \in [Tn, Tn+T)$ имеем $x(t) = x(2n)(1-2\alpha)^n y(t)$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \alpha(t - Tn), & t \in [Tn, Tn+2), \\ 1 - 2\alpha, & t \in [Tn+2, Tn+T). \end{cases}$$

Таким образом, при $T = 2$ мы имеем уравнение из предыдущего примера, а для бо́льших T общее решение отличается тем, что периодически сохраняет постоянное значение на промежутках длины $T - 2$.

Применяя приведенные выше результаты, получаем следующие условия равномерной устойчивости.

1. Предложение 7 дает условие
$$\sup_{t \in [nT,(n+1)T)} a_1(t) \cdot \sup_{[nT,(n+1)T)} (t - h_1(t)) \leq 1,$$
то есть $\alpha \leq 1/T$. Предложение 6 дает условие $\alpha \leq 3/(2T)$.

2. Предложение 8 дает условие $\sup\limits_{t \in [nT,(n+1)T)} \int\limits_{h_1(t)}^{t} \alpha \, ds \leq 3/2$, то есть $\alpha \leq 3/(2T)$.

3. Следствие 2 дает $\int\limits_{nT}^{nT+2} \alpha \, ds \leq 1$, то есть $\alpha \leq 1/2$.

4. Следствие 1 дает

$$\sup_{t \in [nT,(n+1)T)} \int\limits_{t}^{(n+1)T} \alpha \cdot \mu \left(\int\limits_{h_1(s)}^{t} \alpha \, d\tau \right) ds = \alpha \cdot \sup_{t \in [0,T)} \int\limits_{t}^{T} \mu(\alpha(t - h_1(s)) \, ds$$
$$= \alpha \cdot \max \left\{ \sup_{t \in [0,2)} \int\limits_{t}^{2} \mu(\alpha t) \, ds, \sup_{t \in [2,T)} \int\limits_{t}^{T} ds \right\} \leq 1.$$

Получаем условие равномерной устойчивости $\alpha \leq 1$.

В примере 2 относительно примера 1 диапазон значений α, для которых предложения 7 и 8 устанавливают устойчивость, сузились в T раз, притом что результаты применения следствий 1 и 2 не изменились. Таким образом, следствие

2, которое проигрывало предложениям 6 и 8, при $T > 3$ дает лучший результат. Причина этого в выборе множества интегрирования $E_1(t)$ (то же действие оказывает функция μ).

Теперь проиллюстрируем применение новых условий устойчивости к уравнению с несколькими слагаемыми.

Сначала рассмотрим случай второго слагаемого без запаздывания.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1), где $m = 2$, в котором для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $t \in [2n, 2n+2)$ положим

$$a_1(t) = \alpha, \quad a_2(t) = \beta, \quad h_1(t) = 2n, \quad h_2(t) = t.$$

На каждом промежутке $[2n, 2n+2)$ уравнение можно рассматривать как неоднородное уравнение без запаздывания вида $\dot{x} + \beta x = f$, где $f(t) = -\alpha x(2n)$. Его решение имеет вид

$$x(t) = e^{-\beta(t-2n)}x(2n) + \int\limits_{2n}^{t} e^{-\beta(t-s)}(-\alpha x(2n))\,ds = e^{-\beta(t-2n)}x(2n)\left(1 - \alpha \int\limits_{0}^{t-2n} e^{\beta s}ds\right),$$

следовательно, если $\beta > 0$, то

$$x(2n+2) = e^{-2\beta}x(2n)\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}(e^{2\beta} - 1)\right) = x(2n)\left(\frac{e^{-2\beta}(\alpha+\beta) - \alpha}{\beta}\right).$$

Уравнение является равномерно устойчивым при $\frac{e^{-2\beta}(\alpha+\beta)-\alpha}{\beta} \geq -1$, то есть при

$$\alpha \leq \left(\frac{1 + e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}}\right)\beta. \tag{12}$$

Применяя приведенные выше результаты, получаем следующие условия равномерной устойчивости.

1. Предложение 7 дает условие

$$\sum_{k=1}^{2} \sup_{t\in[2n,2n+2]} a_k(t) \cdot \sup_{[2n,2n+2]} (t - h_k(t)) = 2\alpha \leq 1.$$

   Предложение 6 улучшает результат: $\alpha \leq 3/4$.

2. Предложение 8 дает условие устойчивости

$$\sup_{t\in[2n,2n+2]} \int\limits_{\min\{h_1(t),h_2(t)\}}^{t} (a_1(s) + a_2(s))\,ds = 2(\alpha+\beta) \leq 3/2.$$

3. Следствие 2 дает

$$\sup_{t\in[2n,2n+2)} \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{E_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds = \int\limits_{2n}^{2n+2} (\alpha+\beta)\,ds = 2(\alpha+\beta) \leq 1.$$

4. Следствие 1 дает
$$\sup_{t\in[2n,2n+2)} \int\limits_{t}^{2n+2} \alpha\cdot\mu\left(\int\limits_{2n}^{t}(\alpha+\beta)\,d\tau\right)ds = \alpha\cdot\sup_{t\in[0,2)}[(2-t)\cdot\mu((\alpha+\beta)t)]$$
$$= \alpha\cdot\max\left\{\sup_{t\in[0,1/(\alpha+\beta)]}[(\alpha+\beta)t(2-t))],\ \sup_{t\in[1/(\alpha+\beta),2]}(2-t)\right\} = \alpha+\beta\le 1.$$

   Пункт 4 дает лучший результат, чем пункты 2 и 3. В случае $\beta = 0$ условие $\alpha\le 1$ необходимо и достаточно для равномерной устойчивости.

   В случае $\beta > 1/4$ лучший результат дает пункт 1. Остальные пункты в сравнении с полной областью равномерной устойчивости (12) дают тем худший результат, чем больше β.

Теперь пусть второе слагаемое, как и первое, имеет запаздывание.

Пример 4. Рассмотрим уравнение (1), где $m = 2$, в котором для всех $n\in\mathbb{N}_0$ и $t\in[2n,2n+2)$ положим $a_1(t)=\alpha\ge 0$, $a_2(t)=\beta\ge 0$, $h_1(t)=2n$ и
$$h_2(t) = \begin{cases} 2n, & t\in[2n,2n+1);\\ 2n+1, & t\in[2n+1,2n+2).\end{cases}$$

Общее решение уравнения на промежутке $[2n,2n+2)$ имеет вид
$$x(t) = \begin{cases} x(2n)(1-(\alpha+\beta)(t-2n)), & t\in[2n,2n+1);\\ x(2n)(1-\alpha(t-2n))+x(2n+1)[1-\beta(t-2n-1)], & t\in[2n+1,2n+2).\end{cases}$$
Таким образом,
$$x(2n+2) = [(1-\alpha-\beta)-(\alpha-\beta(1-\alpha-\beta)]x(2n) = [1-(2-\beta)(\alpha+\beta)]x(2n).$$
Следовательно, уравнение равномерно устойчиво при $0\le(2-\beta)(\alpha+\beta)\le 2$.

Применяя приведенные выше результаты, получаем следующие достаточные условия равномерной устойчивости.

1. Предложение 7 дает условие
$$\sum_{k=1}^{2}\sup_{t\in[2n,2n+2]} a_k(t)\cdot\sup_{[2n,2n+2]} r_k(t) = 2\alpha+\beta\le 1.$$

   Предложение 6 неприменимо.

2. Предложение 8 дает условие устойчивости
$$\sup_{t\in[2n,2n+2]}\int\limits_{\min\{h_1(t),h_2(t)\}}^{t}(a_1(s)+a_2(s))\,ds$$
$$= \int\limits_{2n+1}^{2n+2}\alpha\,ds + \int\limits_{2n+1}^{2n+2}(\alpha+\beta)\,ds = 2\alpha+\beta\le 3/2,$$

   то есть $2\alpha+\beta\le 3/2$.

3. Следствие 2 дает
$$\sup_{t\in[2n,2n+2]}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{E_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds=\max\left\{\int\limits_{2n}^{2n+2}\alpha\,ds,\int\limits_{2n+1}^{2n+2}(\alpha+\beta)\,ds\right\}\le 1,$$
то есть систему неравенств $\{\alpha\le 1/2,\alpha+\beta\le 1\}$.

4. Следствие 1 дает
$$\sup_{t\in[0,2]}\int\limits_{t}^{2}\left[\alpha\cdot\mu\left(\int\limits_{0}^{t}(\alpha+\beta)\,d\tau\right)+\beta\cdot\mu\left(\int\limits_{h_2(s)}^{t}(\alpha+\beta)\,d\tau\right)\right]ds$$
$$=\max\left\{\sup_{t\in[0,\min\{1/(\alpha+\beta),1\})}[(2-t)\alpha+(1-t)\beta](\alpha+\beta)t\ ,\right.$$
$$\sup_{t\in[1/(\alpha+\beta),1)}[(2-t)\alpha+(1-t)\beta],$$
$$\sup_{t\in[\max\{1/(\alpha+\beta),1\},\min\{1+1/(\alpha+\beta),2\})}(2-t)[\alpha+\beta(\alpha+\beta)(t-1)],$$
$$\sup_{t\in[1+1/(\alpha+\beta),2]}(2-t)(\alpha+\beta),$$
$$\left.\sup_{t\in[1,\min\{1/(\alpha+\beta),2\}]}(2-t)(\alpha+\beta)(\alpha t+\beta(t-1))\right\},$$
$$=\max\left\{\sup_{t\in[0,\min\{1/(\alpha+\beta),1\})}(\alpha+\beta)^2\left(\tfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}-t\right)t,2\alpha+\beta-1,\alpha+\beta-1,\right.$$
$$\sup_{t\in[\max\{1/(\alpha+\beta),1\},\min\{1+1/(\alpha+\beta),2\})}\beta(\alpha+\beta)(2-t)\left(t-1+\tfrac{\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}\right),$$
$$\left.\sup_{t\in[1,\min\{1/(\alpha+\beta),2\}]}(\alpha+\beta)^2(2-t)\left(t-\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$$
$$=\max\left\{\left(\tfrac{2\alpha+\beta}{2}\right)^2,2\alpha+\beta-1,\alpha+\beta-1,\left(\frac{\alpha+\beta(\alpha+\beta)}{2\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}}\right)^2\right\}\le 1.$$
Получаемая область содержит область $2\alpha+\beta\le 2$, для которой области, полученные в предыдущих пунктах, являются собственными подмножествами.

Приведенные результаты показывают, что следствие 2 дает существенно лучшие результаты для уравнений с несколькими запаздываниями, в том числе и с малыми запаздываниями. Однако заметим, что и эти условия устойчивости оставляют желать лучших, если уравнения рссаматриваемых классов могут иметь большие коэффициенты при слагаемых с малыми запаздываниями.

5 Новые условия асимптотической устойчивости

В данном разделе предложим усиления условий теоремы 1, гарантирующие разные виды асимптотической устойчивости.

Условие
$$\varlimsup_{t\to\infty}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^t \mu\left(\int\limits_\tau^t\int\limits_0^\xi d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right)d_\tau r(s,\tau)\,ds<1 \tag{13}$$
само по себе асимптотической устойчивости уравнения (1) гарантировать не может в силу предложения 3. В работе [3] показано, что оно, в отличие от условия предложения 2, не влечет и оценку функции Коши (6).

Пример из работы [3] показывает, что конъюнкция условий (13) и (8) не гарантирует экспоненциальной устойчивости уравнения (1), то есть аналог предложения 5 не справедлив. Однако справедлив следующий аналог предложения 4.

Теорема 2. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (13) *и* (7), *то оно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Достаточно повторить ход рассуждений из доказательства теоремы 1, изменив технические детали.

Если для некоторого фиксированного $s\ge 0$ функция Коши не меняет знак при $t>s$ и выполнено условие (7), то $C(t,s)$ монотонно стремится к нулю с ростом t.

Пусть для данного $s\ge t_0$ для любого $s_0\ge s$ значения $C(t,s)$ меняют знак при $t\ge s_0$.

Обозначим $c(t)=C(t,s)$. Функция c есть решение s-урезанного уравнения (2).

При выполнении условий теоремы для некоторых $K<1$ и $t_1\ge t_0$ имеем:
$$\sup_{t\ge t_1}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^t \mu\left(\int\limits_\tau^t\int\limits_0^\xi d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right)d_\tau r(s,\tau)\,ds\le K.$$
Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого числа $M>0$ и любой такой точки $t_2\ge t_1$, что $c(t_2)<0$, имеем: если $c(t)\le M$ для всех $t\in[s,t_2)$, то $c(t_2)\ge -KM$. Аналогичный факт устанавливается для $c(t_2)>0$, а в силу в силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M=1$.

Итак, допустим, что $c(t_2)<0$ и $c(t)\le 1$ для всех $t\in[s,t_2)$, и покажем, что тогда $c(t_2)\ge -K$.

Обозначим $s_0=\sup\{t\in[s,t_2]\mid c(t)>0\}$. Очевидно, $c(s_0)=0$.

Как в доказательстве теоремы 1, получаем справедливость оценки (11) для всех $t\le t_2$, откуда
$$c(t_1)=c(t_1)-c(s_0)\ge -\int\limits_{s_0}^{t_1}\int\limits_s^{s_0} c(\tau)\,d_\tau r(\eta,\tau)\,d\eta$$
$$\ge -\int\limits_{s_0}^{t_2}\int\limits_s^{s_0}\mu\left(\int\limits_\tau^{s_0}\int\limits_s^\xi d_\eta r(\xi,\eta)\,d\xi\right)d_\tau r(\zeta,\tau)\,d\zeta\ge -K.$$
Теорема доказана.

Итак, при условии (13) необходимое для асимптотической устойчивости условие (7) оказывается достаточным.

Чтобы обеспечить равномерную асимптотическую устойчивость, необходимо усилить ограничения на последействие.

Теорема 3. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (13) *и*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int\limits_{h(t)}^{t}\rho(s)\,ds<\infty, \tag{14}$$

то для некоторых $N>0$ и $\gamma>0$ его функция Коши $C(t,s)$ подчинена оценке (6).

Доказательство. Если не выполнено условие (7), то утверждение теоремы следует из предложения 2. Поэтому далее считаем, что условие (7) выполнено.

Точно так же, как это сделано в доказательстве леммы 2 в работе [5], с помощью преобразования оси времени $\varphi(t)=\int\limits_0^t\rho(s)\,ds$ сведем исследование функции Коши уравнения (1) к исследованию функции Коши уравнения

$$y'(u)+\int\limits_0^u y(v)\,d_vq(u,v)=0,\quad u\in\mathbb{R}_+, \tag{15}$$

в котором $\bigvee\limits_0^u q(u,\cdot)=1$. Оценка (6) функции Коши уравнения (1) соответствует экспоненциальной устойчивости уравнения (15), которую, таким образом, и надо установить.

В доказательстве леммы 2 в [5] показано, что выполнение условия (14) означает, что запаздывание в уравнении (15) ограничено, то есть найдется такое $\omega>0$, что нижний предел интеграла в (15) можно положить равным $u-\omega$. Повторяя с учетом этого факта рассуждения из доказательства теоремы 2 (аналогичные проведенным в доказательстве теоремы 1), при выполнении условий (13) и (14) для некоторого $K>0$ для всех $t\geq s\geq 0$ получаем оценку

$$\min_{\tau\in[t,t+\omega]}C(\tau,s)\geq -K\max_{\tau\in[s,t]}C(\tau,s),$$

и аналогичную оценку сверху значений $C(\tau,s)$ для $\tau\in[t,t+\omega]$, откуда следует, что уравнение (15) экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

Рассмотрим следующее условие для уравнения (1):

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(t-h(t))<\infty. \tag{16}$$

Выполнение условия (7) не влечет связи между условиями (14) и (16), но условие (16) следует из конъюнкции условий (14) и (8).

Следствие 3. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (13), (8) *и* (14), *то оно экспоненциально устойчиво.*

Следствие 4. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия* (13), (8) *и* (16), *то оно экспоненциально устойчиво.*

Примеры в работе [3] показывают, что выполнение для уравнения (1) условий (13) и (16) не влечет оценки (6) его функции Коши, а конъюнкция условий (13), (7), (14) и (16) — экспоненциальной устойчивости.

Наконец, отметим, что в свете полученных выше результатов приобретает новые краски соотношение между равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивостями уравнения (1).

Предложение 12 ([15]). *При выполнении условия* (14) *равномерная асимптотическая и экспоненциальная устойчивости уравнения* (1) *равносильны.*

Остается открытым вопрос, может ли в общем случае уравнение (1) быть равномерно асимптотически устойчивым, но при этом не быть экспоненциально устойчивым.

Заключение

В настоящей работе удалось усилить известные результаты типа теорем о $3/2$. Примеры показывают, что эти усиления во всяком случае существенны, однако мы далеки от мысли, что они принципиально меняют представления об условиях устойчивости уравнений с последействием. Полученные новые условия устойчивости показывают, что граница области применимости теорем о $3/2$ не является непреодолимой преградой, и указывают некоторые возможности обобщений этих теорем без потери точности.

Мы надеемся, что представленные в настоящей работе результаты дают основания утверждать, что как в обобщении знаменитых теорем Мышкиса, так и вообще в исследовании асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений с последействием следует двигаться не только вширь, но также и вглубь — к уточнениям известных результатов, содержательным даже для уравнений простейших видов.

Список литературы

[1] *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

[2] *Azbelev N. V., Simonov P. M.* Stability of Differential Equations with Aftereffect. London: CRC Press, 2002.

[3] *Чудинов К. М.* Развитие подходов к задаче Мышкиса об устойчивости дифференциального уравнения первого порядка с последействием // Матем. труды. 2026. В печати.

[4] *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. Т. 8, № 3. С. 641–658.

[5] *Малыгина В. В.* Теорема Мышкиса о 3/2 и ее обобщения // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1248–1262.

[6] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[7] *Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* On exponential stability of linear and nonlinear delay differential equations: a review and new results // arXiv preprint. 2026. arXiv:2601.03454

[8] *So J. W.-H., Yu J. S., Chen M.-P.* Asymptotic stability for scalar delay differential equations // Funkcial. Ekvac. 1996. V. 39, № 1. P. 1–17.

[9] *Yoneyama T.* On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 125, № 1. P. 161–173.

[10] *Yoneyama T.* The 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 165, № 1. P. 133–143.

[11] *Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной // Изв. вузов. Матем. 1992. № 7. С. 46–53.

[12] *Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1716–1723.

[13] *Stavroulakis J. I., Braverman E.* Oscillation, convergence, and stability of linear delay differential equations // J. Differential Equations. 2021. V. 293. P. 282–312.

[14] *Krisztin T.* On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // Funkcial. Ekvac. 1991. V. 34. P. 241–256.

[15] *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. № 65. P. 1–8.