

## Определение коэффициента теплопередачи по точечным данным в слоистых средах

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026)

А. А. Потапов, С. Г. Пятков

Потапов Алексей Александрович, аспирант, Инженерная школа цифровых технологий, ФГБОУ ВО 'Югорский государственный университет', 628012, Ханты-Мансийский автономный округ - Югра, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.

Пятков Сергей Григорьевич, профессор, Инженерная школа цифровых технологий, ФГБОУ ВО 'Югорский государственный университет', 628012, Ханты-Мансийский автономный округ - Югра, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.

E-mail: a\_potakov@ugrasu.ru, s\_pyatkov@ugrasu.ru

### Аннотация

В статье рассматриваются вопросы корректности обратных задач восстановления коэффициента теплопередачи с использованием набора значений решения в фиксированных точках на границе области. Условия типа дифракции используются на границе раздела сред. Граничные условия нелинейные и коэффициент теплопередачи представим в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами зависящими от времени. При определенных условиях на данные доказывается что существует единственное решение задачи локально по времени, которое зависит от данных задачи непрерывно. Доказательство опирается на априорные оценки и принцип сжимающих отображений.

**Ключевые слова:** обратная задача, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, теплоперенос.

In the article we consider well-posedness questions in Sobolev spaces of inverse problems of recovering the heat transfer coefficient with the use of a given collection of values of a solution at fixed points of the boundary. The diffraction type conditions are employed at the interface. The boundary condition is nonlinear and the heat transfer coefficient is representable in the form of a finite segments of the series with unknown coefficients depending on time. Under certain conditions on the data, it is demonstrated that there exists a unique solution to the problem locally in time which depends on the data continuously. The proof relies on a priori estimates and the contraction mapping principle.

**Keywords:** inverse problem, heat transfer coefficient, parabolic equation heat and mass transfer.

### Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи по точечным данным. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

где  $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x)u_{x_i} + a_0(t, x)u$ ,  $G \in \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\Gamma$ . Считаем, что область  $G$  разделена на два открытых множества  $G^+$  и  $G^-$ ,  $\overline{G^-} \subset G$ ,  $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$ ,  $G^+ \cap G^- = \emptyset$ , положим  $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ ,  $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$ ,  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta(t, x)(\varphi(u) - \varphi(\bar{u}_0)) = g, \quad \varphi|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}n_i u_{x_j}$ , и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x) \quad (t, x) \in S_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(t, x),$$

$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  и  $\vec{n}$  — внешние единичные нормали к  $\Gamma$  и  $\partial G^-$ . Условия переопределения имеют вид

$$u(t, b_i) = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

где  $b_i \in \Gamma$ ,  $\{b_i\}_{i=1}^r$  — некоторый набор точек. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(4) и неизвестной функции  $\beta(t, x) = \sum_{j=1}^r \beta_j(t) \Phi_j(t, x)$ , где функции  $\Phi_i$  заданы, а функции  $\beta_i(t)$  считаются неизвестными.

Обратные задачи возникают в самых различных задачах при описании процессов тепломассопереноса, диффузии, фильтрации, в экологии и т.п. (см. [1–3]). В частности, задача (1)-(4) возникает при идентификации параметров тепломассопереноса в задачах описания тепловых режимов мерзлых грунтов и техногенного загрязнения почв [4–6]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач (1)-(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, точки  $\{b_i\}$  в (4) могут быть как внутренними [7–12] так и граничными точками [13–15] области  $G$  (см. стационарный случай в [16]). Имеется ряд работ, посвященных определению коэффициента теплопередачи в нелинейном граничном условии вида  $\frac{\partial u}{\partial N} + \rho(t)\varphi(u) = g$ , где функция  $\rho$  считается неизвестной (см. [17]). Отметим работы (см. библиографию в [18–20]), где восстанавливается функция вида  $\varphi(t, x, u)$  (иногда не зависящая от независимых переменных) в граничном условии Робина вида  $\frac{\partial u}{\partial N} + \varphi(t, x, u) = g$  или близком условии.

В этих работах, используются интегральные условия переопределения различного вида и в некоторых случаях получены теоремы существования и единственности решений таких задач локально по времени. Основной метод построения приближенного решения – сведение задачи к задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала. Отметим, что очень часто эти две задачи не эквивалентны.

Теоретических результатов, посвященных задаче (1)-(4) немного. По-видимому, первая работа, посвященная задаче (1)-(4) в многомерном случае есть работа [21] (см. также [22]), где в случае  $Mu = u_t - \Delta u$  и  $r = 1$  была показана теорема существования и единственности классических решений задачи об определении потока и теорема единственности в задаче об определении коэффициента теплопередачи. Другой подход описан в работе [23], где была получена теорема существования и единственности решений в случае  $\varphi(u) = u$  и задача рассматривалась в обычной постановке (т.е. условия сопряжения отсутствуют). В данной работе мы используем ту же самую идею и получаем теорему существования и единственности решений в пространствах Соболева.

### Определения и вспомогательные результаты

Пусть  $E$  – банахово пространство. Обозначения для пространств Лебега  $L_p(G; E)$ , Соболева  $W_p^s(G; E)$ ,  $W_p^s(Q; E)$  и Гельдера  $C^\alpha(\bar{G}; E)$  ( $\alpha \geq 0$ ) стандартные (см. [24, 25]). Если  $E = \mathbb{R}$  или  $E = \mathbb{R}^n$ , то пишем просто  $W_p^s(G)$  и т.д. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала  $J = (0, T)$ , положим  $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$ . Соответственно,  $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$ . Пусть  $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$  и  $B_\delta(b_i)$  – шар радиуса  $\delta$  с центром в точке  $b_i$ . Положим  $G_\delta = G \cap \bigcup_{i=1}^r B_\delta(b_i)$ ,  $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \bigcup_{i=1}^r B_\delta(b_i)$ ,  $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G$ ,  $Q_\tau = (0, \tau) \times G$ ,  $S_\tau = (0, \tau) \times \Gamma$ .

Далее, считаем, что  $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$ ,  $\Gamma_\delta \in C^3$  (см. определение в [26, Гл. 1] для некоторого  $\delta > 0$ . Без ограничения общности, можем считать что для каждого  $i = 1, 2, \dots, r$  найдется окрестность  $Y_i$  точки  $b_i$  и система координат  $y$  (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такая, что  $Y_i \cap \Gamma_0 = \emptyset$ , ось  $y_n$  направлена по внутренней нормали в  $\Gamma$  в точке  $b_i$ , уравнение части границы  $Y_i \cap \Gamma$  имеет вид  $y_n = \gamma_i(y')$ ,  $\gamma_i(0) = 0$ ,  $|y'| < \delta$ ,  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ , причем  $\gamma_i \in C^3(\bar{B}'_\delta)$  ( $B'_\delta = \{y' : |y'| < \delta\}$ ) и  $G \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, 0 < y_n - \gamma_i(y') < \delta_1\}$ ,  $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma_i(y') < 0\}$ ,  $\delta_1 > (M + 1)\delta$ , где  $M$  постоянная Липшица функции  $\gamma_i$ . Иначе уменьшим параметр  $\delta$ . Далее, мы считаем, что параметр  $\delta > 0$  зафиксирован. Мы используем выпрямление границы:  $z_n = y_n - \gamma_i(y')$ ,  $z' = y'$ , где  $y$  – локальная система координат в точке  $b_i$ . Оно и обратное к нему  $y_n = z_n + \gamma_i(z')$ ,  $y' = z'$  принадлежат классу  $C^3$  (т.е.  $y = y(z) \in C^3(\bar{Y}_i)$ ). Тоже самое утверждение имеет место и для преобразований  $x = x(y(z)) = x^i(z)$ . Пусть  $U = \{z : |z'| < \delta, 0 < z_n < \delta_1\}$ ,  $Q_\tau^1 = (0, \tau) \times U$ ,  $Q_1 = (0, T) \times U$  и  $S_\tau^1 = (0, \tau) \times B'_\delta$ ,  $S_1 = (0, T) \times B'_\delta$ .

Будем использовать в пространстве  $W_p^s(0, \beta; E)$  ( $s \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $E$  - банахово пространство) норму  $\|q(t)\|_{W_p^s(0, \beta; E)} = (\|q\|_{L_p(0, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, \beta}^p)^{1/p}$ ,  $\langle q \rangle_{s, \beta}^p = \int_0^\beta \int_0^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+s p}} dt_1 dt_2$ . При  $s \in (0, 1)$  положим  $\tilde{W}_p^s(0, \beta; E) = \{q \in W_p^s(0, \beta; E) : t^{-s}q(t) \in L_p(0, \beta; E)\}$ . Наделим это пространство нормой  $\|q(t)\|_{\tilde{W}_p^s(0, \beta; E)}^p = \|\frac{q}{t^s}\|_{L_p(0, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, \beta}^p$ . Если  $s \neq 1/p$ , то эта норма и обычная норма  $\|\cdot\|_{W_p^s(\alpha, \beta; E)}$  для функций  $q(t)$  таких, что  $q(0) = 0$  при  $s > 1/p$ , эквивалентны (см. [24, пункт 3.2.6, лемма 1]). Положим  $\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\beta) = \tilde{W}_p^s(0, \beta; L_p(G)) \cap L_p(0, \beta; W_p^{2s}(G))$ . Нормы  $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\beta)}$ ,  $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^s(0, \beta; L_p(G))}$  определяются естественным образом, например,  $\|u\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\beta)} = (\|u\|_{\tilde{W}_p^s(0, \beta; L_p(G))}^p + \|u\|_{L_p(0, \beta; W_p^{2s}(G))}^p)^{1/p}$ . Аналогично определяем пространства  $\tilde{W}_p^s(0, \beta; L_p(\Gamma))$ ,  $\tilde{W}_p^{s, 2s}(S_\beta)$ . Далее, мы считаем, что параметр  $p > n + 2$  зафиксирован. Следующие две леммы известны (см. [27, леммы 1.19, 1.20]).

**Лемма 1.** *Существует постоянная  $C$ , не зависящая от  $\tau \in (0, T]$  такая, что*

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} \leq C \|v\|_{W_p^{1, 2}(Q_\tau)}, \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq C \|v\|_{W_p^{1, 2}(Q_\tau)},$$

для всех  $v \in W_p^{1, 2}(Q_\tau)$  таких, что  $v(x, 0) = 0$ . Здесь  $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$  и  $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ .

**Лемма 2.** *Пусть  $s \in ((n + 2)/2p, 1)$ . Тогда, если  $q \in \tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)$  и  $v \in W_p^{s, 2s}(Q_\tau)$ , то  $qv \in \tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)$  и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} \leq c_0 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} (\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}).$$

Если  $v \in W_p^{s, 2s}(Q)$ , то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} \leq c_1 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} \|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q)},$$

а если  $v \in \tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)$ , то в виде

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} \leq c_2 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)}.$$

Для функций  $v \in \tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)$  имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \leq c_3 \|v\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\tau)}.$$

Постоянные  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , не зависят от  $q, v$  и  $\tau \in (0, T]$ . Множество  $Q_\tau$  в этих утверждениях может быть заменено на  $S_\tau$  (при этом считаем, что  $s \in ((n + 1)/2p, 1)$ ).

**Замечание 1.** Условие  $s \in ((n + 2)/2p, 1)$  гарантирует включение  $W_p^{s, 2s}(Q) \subset C(\bar{Q})$  (см. теорему 1.22 в [27]).

**Лемма 3.** *Пусть  $\varphi(u) \in W_\infty^2(-R, R)$  для всех  $R > 0$ . Пусть  $v \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)$  и  $\|v\|_{L_\infty(S_\tau)} = M$ . Тогда*

$$\|\varphi(v)\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_1(M) + c_2(M) \|v\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p. \quad (5)$$

Пусть  $v_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\|v_i\|_{L_\infty(S_\tau)} + \|v_i\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq M$  и  $v_1(0, x) = v_2(0, x)$ . Тогда

$$\|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(M) \|v_1 - v_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}, \quad (6)$$

Здесь постоянные  $c_i(M)$ ,  $i = 1, 2, 3$  не зависят от  $\tau \leq T$ .

**Доказательство.** Оценка (5) вытекает непосредственно из определения нормы в пространстве  $W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)$ . Чтобы получить оценку (6), воспользуемся равенством

$$\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \int_0^1 \varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2)) d\xi (v_1 - v_2).$$

Используя лемму 2 и неравенство (5), получим

$$\begin{aligned} \|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} &\leq \int_0^1 (\|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \\ &\|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{L_\infty(S_\tau)}) d\xi \|v_1 - v_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(M) \|v_1 - v_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}. \end{aligned}$$

Приведем условия на данные. Оператор  $L$  предполагается эллиптическим, т.е., существует постоянная  $\delta_0 > 0$  такая, что  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2$  for all  $(t, x) \in Q$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Кроме того мы предположим, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad a_{kl}|_{Q^\pm} \in C(\overline{Q^\pm}), \quad a_{kl}|_\Gamma \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_{kl}^\pm|_{\Gamma_0} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}, \quad u_0^+ = u_0^-, \quad x \in \Gamma_0, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p, \quad (8)$$

$$\beta \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad g(0, x) = B(x, 0, \partial_x)u_0|_\Gamma, \quad \varphi(u) \in W_\infty^2(-R, R) \quad \forall R > 0, \quad (9)$$

$$u_0(x)|_{G^\pm} \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm), \quad f \in L_p(Q), \quad g, \bar{u}_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad (10)$$

$$a_i \in L_\infty(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad a_{kl} \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G_\delta)), \quad \varphi(u) \in W_\infty^3(-R, R), \quad (11)$$

для каждого  $R > 0$ .

Построим функции  $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  такие, что  $\varphi_i(x) = 1$  в  $B_{\delta/2}(b_i)$  и  $\varphi_i(x) = 0$  в  $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$ .

Пусть  $Y_i$  – координатная окрестность точки  $b_i \in \Gamma$ . Выпрямим границу и перейдем к системе координат  $z = (z', z_n)$ . Мы также предполагаем, что

$$\nabla_{z'} \beta(x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1). \quad (12)$$

$$\nabla_{z'} \varphi_i g(t, x^i(z', 0)), \quad \nabla_{z'} \varphi_i \bar{u}_0(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{z'} \varphi_i u_0(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U), \quad \nabla_{z'} a_{kl}(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \\ \nabla_{z'} \varphi_i f(t, x^i(z)) \in L_p(Q_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $k, l = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \leq r$ . Можно показать, что условия (12)-(14) не зависят от введённой локальной системы координат  $y$  и системы координат  $z$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (7)-(10). Тогда на некотором промежутке  $[0, \tau_0]$  существует единственное решение и задачи (1)-(3) такое, что  $u|_{Q_{\tau_0}^{\pm}} \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^{\pm})$ . Если  $\beta = 0$ , то справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} \leq C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau_0})}). \quad (15)$$

Если  $u_0 \equiv 0$ ,  $\beta = 0$ , то оценка может быть переписана в виде

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} \leq C_1(\|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau_0})}), \quad (16)$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $\tau$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную задачу

$$M\Psi = f, \quad \Psi|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N}|_S = g_0, \quad g_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial N},$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial \Psi^-}{\partial N}(t, x), \quad \Psi^+(t, x) = \Psi^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0,$$

Фиксируем  $\tau \leq T$ . По теореме 2.19 в [27] существует единственное решение этой задачи из класса  $\Psi \in W_p^{1,2}(Q_{\tau}^+) \cap W_p^{1,2}(Q_{\tau}^-)$  (обозначим его через  $R_{\tau}(g_0)$ ), причем имеет место оценка

$$\|R_{\tau}g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau}^+)} + \|R_{\tau}g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau}^-)} \leq C_1(\|g_0\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau})} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_{\tau})}).$$

Если  $u_0 = 0$ , то последнюю оценку можно уточнить

$$\|R_{\tau}g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau}^+)} + \|R_{\tau}g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau}^-)} \leq C_2(\|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau})} + \|f\|_{L_p(Q_{\tau})}), \quad (17)$$

где постоянная  $C_2$  не зависит от параметра  $\tau$ . Доказательство этой оценки повторяет соответствующее в теореме 2 в [28]. Поэтому мы его опустим. Тогда  $u \in W_p^{1,2}(Q_{\tau}^+) \cap W_p^{1,2}(Q_{\tau}^-)$  есть решение задачи (1)-(3) тогда и только тогда, когда

$$u|_S = R_{\tau}(g - \beta(t, x)(\varphi(u) - \varphi(\bar{u}_0)))|_S, \quad u|_S \in W_p^{s_1, 2s_1}(S_{\tau}).$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение если параметр  $\tau$  достаточно мал. Сделаем замену  $u = v + \Phi$ ,  $\Phi = R_{\tau}(g - \beta(\varphi(u_0) - \varphi(\bar{u}_0)))$ . Тогда имеем уравнение

$$v|_S = R_{\tau}(g - \beta(t, x)(\varphi(v + \Phi) - \varphi(\bar{u}_0)))|_S - \Phi|_S = R_{0\tau}(v|_S). \quad (18)$$

Ищем решение этого уравнения в классе  $v \in \tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_{\tau})$ ,  $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$ . Возьмем  $v = 0$ . Получим  $R_{0\tau}(0)$  - решение задачи

$$Mv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N}|_{S_{\tau}} = -\beta(\varphi(\Phi) - \varphi(u_0)) \in \tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau}).$$

Возьмем  $R_1 = 2\|R_{0T}(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S)}$ . Пусть  $\|v_i\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} \leq R_1$ . Следовательно, в силу теорем вложения  $\|v_i\|_{C(\overline{S_\tau})} \leq C_0 R_1$ , где  $C_0$  некоторая постоянная. По определению оператора  $R_\tau$  правая часть в (18) обращается в ноль при  $t = 0$ . Покажем, что на малом промежутке времени оператор  $R_{0\tau}(v)$  удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. В силу (17) и лемм 2, 3 имеем оценку

$$\begin{aligned} \|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} &\leq c_1 \|\beta(\varphi(v_1) - \varphi(v_2))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq \\ &c_2 \|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(R_1) \|v_1 - v_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c\tau^{1/2} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \quad (20)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\tau \leq T$ . Действительно, непосредственно из определения нормы имеем, что  $\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(0, \tau; L_p(\Gamma))} \leq c\tau^{1/2} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(0, \tau; L_p(\Gamma))}$ . Далее,

$$\|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^{2s_0}(\Gamma))} \leq c \|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^{2s_1}(\Gamma))}^\theta \|v\|_{L_p(S_\tau)}^{1-\theta} \leq c_4 \tau^{s_1(1-\theta)} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)},$$

где  $s_1(1 - \theta) = 1/2$ ,  $\theta = s_0/s_1$ , используем лемму 1.14 в [27] и определение нормы в  $W_p^{s_1}(0, \tau; L_p(\Gamma))$ . Две последние оценки гарантируют (20). Используя оценки (20), (19), получим.

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} \leq c_5(R_1) \tau^{\frac{1}{2}} \|v_1 - v_2\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)}.$$

Выберем  $\tau_0$  такое что  $\tau^{1/2} c_5(R_1) \leq \frac{1}{2}$  при  $\tau \leq \tau_0$ . Тогда выполняются условия теоремы о неподвижной точке и уравнение (18) имеет решение. Если  $u_0 = 0$ , то легко увидеть, что постоянные в используемых неравенствах не зависят от  $\tau \leq \tau_0$  и значит имеет место оценка (16).

**Замечание 1.** Без ограничения общности можем считать, что параметр  $\tau_0$  есть убывающая функция от величины  $R_1$ . В свою очередь, величина  $R_1$  ограничена постоянной  $cM$  с  $M = \|\beta\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \|\beta\|_{L_\infty(S_\tau)}$ ,  $c$  - постоянная не зависящая от  $\beta$ , при этом норма  $v$  в  $W_p^{s_1, 2s_1}(S_{\tau_0})$  оценивается через  $2R_1$  и норма  $v$  в  $W_p^{1, 2}(S_{\tau_0})$  оценивается постоянной зависящей от  $R_1$ .

В следующей теореме мы используем локальную систему координат  $z$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (7)–(14) и  $\beta = 0$ . Тогда решение задачи (1)–(3), полученное в теореме 1 обладает свойством  $\nabla_{z'} \varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1, 2}(Q_1^\tau)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , причем если  $u_0 \equiv 0$ , то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i u(t, x^i(z))\|_{W_p^{1, 2}(Q_1^\tau)} &\leq C_1 (\|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)} + \\ &\sum_{i=1}^r (\|\nabla_{z'} \varphi_i f\|_{L_p(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{z'} \varphi_i g(x^i(z'), 0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)}), \end{aligned}$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $\tau \in (0, \tau_0]$ .

**Доказательство.** Доказательство дословно повторяет рассуждения из теоремы 2 в [23] и использует оценку (17).

### Основные результаты

Далее считаем, что функции  $\Phi_i(t, x)$  обладают свойствами:

$$\Phi_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad \nabla_{z'} \Phi_i(t, x^j(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (21)$$

Пусть  $\Phi(t)$  - матрица с элементами  $\phi_{ij} = \Phi_j(t, b_i)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ). В силу теорем вложения  $\Phi_i(t, b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0, T])$  (см. [27, теорема 1.22]). Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\begin{aligned} |\varphi(\psi_i(t)) - \varphi(\bar{u}_0)(t, b_i)| &\geq \delta_1, \quad |\det \Phi| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ \psi_i &\in W_p^{s_1}(0, T), \quad u_0(b_i) = \psi_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\delta_1$  - положительная постоянная. Возьмем первое из равенств (2) в точке  $(0, b_j)$ . Имеем

$$\sum_{i=1}^r \beta_i(0) \Phi_i(0, b_j) = \frac{1}{(\varphi(u_0(b_j)) - \varphi(\bar{u}_0(b_j)))} (g(0, b_j) - \frac{\partial u_0(b_j)}{\partial N}), \quad (23)$$

где  $j = 1, \dots, r$ . Отсюда определяем величины  $\beta_i(0)$ . Тогда, если решение задачи (1)-(4) существует, то выполнено равенство

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial N} + \beta(0, x)[\varphi(u_0) - \varphi(\bar{u}_0)] = g(0, x), \quad x \in \Gamma, \quad (24)$$

где постоянные  $\beta_j(0)$  - решение системы (23). Положим  $\beta_0 = \sum_{i=1}^r \beta_i(0) \Phi_i(t, x)$ ,  $\alpha = \beta - \beta_0$ ,  $\alpha_i = \beta_i(t) - \beta_i(0)$ ,  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ . В силу условия (21)  $\beta_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S)$ ,  $\nabla_{z'} \beta_0(x^j(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1)$  для всех  $j$ , построим функцию  $w_0$  как решение задачи (1)-(3) с  $\beta = \beta_0$ . Решение существует на некотором промежутке  $[0, \tau_0]$  и обладает свойствами указанными в теоремах 1,2. Сделаем замену  $u = v + w_0$  в (1)-(4). Функция  $v$  есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (25)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta_0(\varphi(v + w_0) - \varphi(w_0)) = -\alpha(\varphi(v + w_0) - \varphi(\bar{u}_0)), \quad (26)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t, x), \quad v^+(t, x) = v^-(t, x) \quad (t, x) \in S_0, \quad (27)$$

$$v(t, b_i) = \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0(t, b_i). \quad (28)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (7), (8), (10), (11), (13), (14), (21), (22), (24). Тогда на некотором промежутке  $[0, \tau_0]$  существует единственное решение задачи (1)-(4) такое, что  $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ ,

$\beta_i(t) \in W_p^{s_0}(0, \tau_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), причем  $\nabla_{z'} \varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^{\tau_0})$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (25)-(28).

Построение операторного уравнения для нахождения вектор-функции  $\vec{\alpha}$ . Фиксируем  $R_2 > 0$  (эту величину мы определим позже) и предположим, что  $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau) : \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq R_2\}$ . Фиксируя  $\vec{\alpha} \in B_{R_2}$  и решая задачу (25)-(27) на некотором промежутке  $[0, \tau_0]$ , мы тем самым построим отображение  $\vec{\alpha} \rightarrow v(\vec{\alpha})$ . Кроме этого отображения, нам понадобится еще одно отображение. Фиксируя  $i$  и умножая уравнение (25) на  $\varphi_i$ , имеем

$$Mv_i = v_{it} - Lv_i = [\varphi_i, L]v = f_0, \quad v_i|_{t=0} = 0, \quad v_i = \varphi_i v, \quad (29)$$

где  $[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2 \sum_{l,k=1}^n a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk} \varphi_{ix_l x_k} v - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ix_k} v$ . Сделав замену переменных  $x = x^i(z)$ , перепишем уравнение в (29) в виде

$$v_{it} - c_{nn}(t, z)v_{iz_n z_n} = \sum_{l+k < 2n} c_{kl} v_{iz_k z_l} + \sum_{k=1}^n c_k v_{iz_k} + c_0 v_i + f_0 = f_{1i}, \quad z \in U. \quad (30)$$

Отметим, что  $c_{nn} > 0$  для всех  $t, z$ . В силу свойств решения  $v$  и условий на коэффициенты, имеем что  $\varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^{\tau})$ ,  $\nabla_{z'} \varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^{\tau})$  и более того  $f_{1i}(t, z', z_n) \in C^\alpha(B'_\delta; L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1)))$  с  $\alpha \leq 1 - (n-1)/p$  (см. теорему 1.22 в [27]), после может быть изменения на множестве меры ноль. Рассмотрим задачу

$$\omega_{it}(t, z_n) - c_{nn}(t, 0, z_n)\omega_{iz_n z_n} = f_{1i}(t, 0, z_n), \quad i \leq r, \quad z_n \in (0, \delta_1), \quad (31)$$

$$\omega_i(0, z_n) = 0, \quad \omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i(t), \quad \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (32)$$

Пусть  $v(\vec{\alpha})$  – решение задачи (25)-(27), построим функции  $\omega_i$  как решения задач (31), (32). Таким образом, каждому  $\vec{\alpha}$  отвечает функция  $v$  и набор функций  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Имеем  $\frac{\partial v_i}{\partial N} = \sum_{j=1}^n \eta_j(t, z') v_{iz_j}(t, x^i(z', 0))$ . Полагая  $z' = 0$  и используя (28), запишем равенства

$$\eta_n(t, 0)\omega_{jz_n}(t, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t, 0)v_{z_i}(t, x^j(0)) + \quad (33)$$

$$\beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(u_0)) = -\alpha(t, b_j)(\varphi(\psi_j) - \varphi(\bar{u}_0)),$$

которые также можно переписать в виде

$$\alpha(t, b_j) = \frac{1}{\varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \left( \eta_n(t, 0)\omega_{jz_n}(t, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t, 0)v_{z_i}(t, b_j) + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(u_0)) \right), \quad (34)$$

где  $\varphi(\psi_j) - \varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) \neq 0$  (см. (22)). Это и есть система для нахождения вектора  $\vec{\alpha}$ . Она может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1} \vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \quad (35)$$

где координата  $F_j$  вектора  $\vec{F}$  есть правая часть (34). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1} \vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c \|\vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \quad (36)$$

Покажем, что оператор  $R(\vec{\alpha})$  является сжимающим в некотором шаре  $B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq R_2\}$  и переводит его в себя. Рассмотрим систему (35) и найдем  $R(0)$ . Если  $\vec{\alpha} = 0$ , то в силу теоремы единственности решение  $v$  задачи (25)-(27) есть 0. Тогда правая часть в (31) равна нулю и решения  $w_i$  задачи (31), (32) не зависят от  $\vec{\alpha}$ . Положим  $R_2 = 2\|R(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S)}$ . Величина  $R_2$  зависит только от известных данных задачи и не зависит от  $\vec{\alpha}, \tau$ .

*Оценки для решений задачи (25)-(27).* Без ограничения общности можем считать (см. замечание 1 и теорему 1), что промежуток  $[0, \tau_0]$  на котором решение задачи (25)-(27) существует и единственно не зависит от  $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} \in: \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq R_2\}$  а зависит только от величины  $R_2$ . Далее, имеет место оценка (теорема 1)  $\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq C_2(R_2)$ , где постоянная  $C_2$  зависит от  $R_2$  но не зависит от параметра  $\tau$ . Пусть  $g_0 = -\beta_0(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha(\varphi(v+w_0) - \varphi(\bar{u}_0))$ . Из теоремы 2 вытекает, что найдется постоянная  $c_3$  такая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \leq \\ & c(\|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\varphi_i \nabla_{z'} g_0(t, x^i(z', 0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(S_\tau^+)}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммами 2,3, получим  $\|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c(R_2)$ . Далее,

$$\begin{aligned} \partial_{z_k} g_0 = & -\beta_{0z_k}(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha_{z_k}(\varphi(v+w_0) - \varphi(\bar{u}_0)) \\ & - \beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k})) - \\ & - \alpha(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(\bar{u}_0)\bar{u}_{0z_k}). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое оценивается с использованием лемм 2,3. Рассмотрим, например, третье слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned} & \|\varphi_i \beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k}))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} \leq \\ & c\|\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)w_{0z_k}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} \leq c_1\|(\varphi'(v+w_0) - \\ & \varphi'(w_0))(v_{z_k} + w_{0z_k}) + \varphi'(w_0)v_{z_k}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} \leq c_2(\|\varphi'(v+w_0) - \\ & \varphi'(w_0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} (\|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} + \|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{L_\infty(S_\tau^+)}) \\ & + (\|\varphi'(w_0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)} + \|\varphi'(w_0)\|_{L_\infty(S_\tau^+)}) \|v_{z_k}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau^+)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, мы используем оценки

$$\|\nabla_{z'} w_0\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^\tau)} + \|\nabla_{z'} w_0\|_{L_\infty(\tilde{S}_1^\tau)} \leq c_1 \|w_0\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_1)}, \quad (38)$$

$$\|\nabla_{z'} v\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^\tau)} \leq c_2 \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\tilde{S}_1^\tau)}, \quad v \in \tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\tilde{S}_1^\tau), \quad (39)$$

где постоянные  $c_1, c_2$  не зависят от  $\tau$ . Первая вытекает из [27, следствие 1.3, Теорема 1.22]. Вторая также вытекает из следствия 1.3 [27] но мы должны показать, что постоянная  $c_2$  не зависит от  $\tau$ . Существует оператор продолжения  $P$  функций заданных на  $B'_\delta$  в  $\mathbb{R}^{n-1}$  такой, что  $P \in L(W_p^s(B'_\delta), W_p^s(\mathbb{R}^{n-1}))$  для всех  $s \in [0, 2]$  (метод Хестенса [24, §4.2]). Поэтому нам достаточно получить оценки в случае когда  $\tilde{S}_1^\tau$  заменено на  $\tilde{S}_1^\tau = (0, \tau) \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Мы используем эквивалентные нормы в  $\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^\tau)$ ,  $\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\tilde{S}_1^\tau)$  (см. нормы в [24, пункт 2.5.1]):

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^\tau)}^p &= \|vt^{-s_0}\|_{L_p(\tilde{S}_1^\tau)} + \langle v \rangle_{s_0, \tau}^p + \\ &\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|v(t, z^1) - v(t, z^2)|^p}{|z^1 - z^2|^{n-1+2s_0p}} dx_1 dx_2 dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\tilde{S}_1^\tau)}^p &= \|vt^{-s_1}\|_{L_p(\tilde{S}_1^\tau)} + \langle v \rangle_{s_1, \tau}^p + \\ &\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|v_{z_k}(t, z^1) - v_{z_k}(t, z^2)|^p}{|z^1 - z^2|^{n-1+2ps_0}} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных  $t = \xi\tau, x = \sqrt{\tau}y, z^1 = \sqrt{\tau}y_1, z^2 = \sqrt{\tau}y_2$ . Имеем

$$\|\nabla_{z'} v\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^\tau)}^p = \tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2} \|\nabla_{y'} v(\tau\xi, \sqrt{\tau}y)\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\tilde{S}_1^1)}^p.$$

Правая часть оценивается через (см. [27, следствие 1.3])

$\tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2} c \|v(\tau\xi, \sqrt{\tau}y)\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\tilde{S}_1^1)}$ . Сделав обратную замену переменных, получим (39). Используя (39), (38) и лемму 3, получим, что правая часть в (37) оценивается через  $c_3(R_2)$ , эта постоянная зависит от  $\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)}$ ,  $\|w_0\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_1)}$ , т.е. от  $R_2$ . Таким образом,  $\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \leq C_4(R_2)$ . Окончательно имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\pm^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\mp^\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \leq C_5(R_2). \quad (40)$$

Оценки для разности решений задачи (25)-(27). Пусть  $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$  ( $i = 1, 2$ ) и  $v_i$  – соответствующие решения задачи (25)-(27), где функция  $\alpha$  заменяется на соответствующие функции  $\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} \Phi_i$  ( $j = 1, 2$ ). Каждая из этих функций удовлетворяет оценке (40). Тогда разности  $v_1 - v_2 = \tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha^1 - \alpha^2$  есть решение задачи

$$Mv = \tilde{\omega}_t - L\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{\omega}|_{t=0} = 0, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial N} &= -\beta_0(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) - \frac{(\alpha^1 + \alpha^2)}{2}(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) \\ &\quad - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\varphi(v_1 + w_0) + \varphi(v_2 + w_0) - 2\varphi(\tilde{u}_0)) = g_0. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial \tilde{\omega}^-}{\partial N}(t, x), \quad \tilde{\omega}^+(t, x) = \tilde{\omega}^-(t, x) \quad (t, x) \in S_0. \quad (43)$$

В силу леммы 2 и (21)  $\tilde{\alpha}, \alpha^j \in \tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau), \nabla_{z'} \tilde{\alpha}(t, x^i(z', 0)), \nabla_{z'} \alpha^j(t, x^i(z', 0)) \in \tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) и имеем оценки

$$\|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_1 \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad (44)$$

$$\|\alpha^1 + \alpha^2\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_1 (\|\tilde{\alpha}_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} + \|\tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}) \leq 2c_1 R_2, \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \tilde{\alpha}(t, x^i(z', 0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq c_2 \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} (\alpha^1 + \alpha^2)(t, x^i(z', 0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq 2c_2 R_2, \quad (47)$$

где постоянная  $c_2$  не зависит от  $\tau$ . В силу теоремы 1, лемм 2,3 и оценок (44)-(47), (40) не так трудно получить неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} &\leq c \|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)}, \quad \|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq \\ &c_5(R_2) \|\tilde{w}\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} + c_6(R_2) \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Воспользовавшись неравенством (20) и леммой 1, получим оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} &\leq c_7(R_2) \tau^{1/2} (\|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \\ &\|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) + c_6(R_2) \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Выберем  $\tau_1 \leq \tau_0$  так чтобы  $c_7(R_2) \tau^{1/2} \leq 1/2$  при  $\tau \leq \tau_1$ . Тогда из (48), (49) вытекает неравенство

$$\|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq 2c_6(R_2) \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad \tau \leq \tau_1. \quad (50)$$

Соответственно, имеем из леммы 1 и (48), что

$$\|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq c_7(R_2) \|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}.$$

Далее, используя теорему 2, запишем оценку для решений задачи (41)-(43). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} &\leq \\ &c (\|g_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\varphi_i \nabla_{z'} g_0(t, x^i(z', 0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое уже оценено. Оценим второе из них. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{z_k} g_0 = & -\beta_{0z_k} (\varphi(v_1+w_0) - \varphi(v_2+w_0)) - \frac{(\alpha_{z_k}^1 + \alpha_{z_k}^2)}{2} (\varphi(v_1+w_0) - \varphi(v_2+w_0)) \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_{z_k}}{2} (\varphi(v_1+w_0) + \varphi(v_2+w_0) - 2\varphi(\bar{u}_0)) - \beta_0 (\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ & - \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k})) - \frac{(\alpha^1 + \alpha^2)}{2} (\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ & - \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k})) - \frac{\tilde{\alpha}}{2} (\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ & + \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k}) - 2\varphi'(\bar{u}_0)\bar{u}_{0z_k}). \end{aligned}$$

Используя леммы 2,3, как и при получении оценки (50) и саму оценку (50) выводим, что при  $\tau \leq \tau_1$  имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \leq c_8 \|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (51)$$

Используя неравенства (50), (51), можем записать

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \leq \\ c_5 \|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Оценки для решений задачи (31), (32). Оценим правую часть в (31) в  $L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1))$ . Имеем

$$\|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq c_6 \|f_{1i}(t, z', z_n)\|_{W_p^s(B'_s; L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1)))} = J$$

при  $s > (n-1)/p$  (лемма 1.9 [27]). Далее используем интерполяционные неравенства (см. теорему 1.19 в [27]). Имеем

$$J \leq c_7 \|f_{1i}(t, z)\|_{W_p^1(B'_s; L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1)))}^\theta \|f_{1i}(t, z)\|_{W_p^{1-\theta}(B'_s; L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1)))}^{1-\theta}, \quad (53)$$

где  $2\theta - 1 = s$ . Исходя из определения  $f_{1i}$  и условий на коэффициенты имеем

$$\|f_{1i}\|_{W_p^{-1}(B'_s; L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1)))} \leq c \|v\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(U))} \leq c_8 \tau^{1/2} \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}, \quad (54)$$

где постоянная  $c_1$  не зависит от  $\tau$ . Последняя оценка получается если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(U))} \leq c_9 \|v\|_{L_p(0,\tau; W_p^2(U))}^{1/2} \|v\|_{L_p(0,\tau; L_p(U))}^{1/2}$$

и оценку  $\|v\|_{L_p(0,\tau; L_p(U))} \leq \tau \|v_t\|_{L_p(0,\tau; L_p(U))}$ , вытекающую из формулы Ньютона-Лейбница. Оценки (53), (54) влекут, что

$$\begin{aligned} \|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq c_{10} \tau^{(1-\theta)/2} (\|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, z)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \\ + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) \leq C_8 (R_2) \tau^{(1-\theta)/2}, \end{aligned} \quad (55)$$

где  $C_8$  – постоянная, не зависящая от  $\tau$ . Тогда используя свойства решений первой начально-краевой задачи [27, теорема 2.9], получим

$$\sum_{i=1}^r \|w_i(t, z_n)\|_{W_p^{1,2}((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq c \sum_{i=1}^r \|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq C_9(R_2)\tau^{(1-\theta)/2} + \sum_{j=1}^r \|\tilde{\psi}_i\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(0,\tau)}.$$

*Оценки для разности решений задачи (31), (32).* Пусть, как и ранее,  $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$  ( $i = 1, 2$ ) и  $v_i$  – соответствующие решения задачи (25)-(27), где функция  $\alpha$  заменяется на соответствующие функции  $\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} \Phi_i$  ( $j = 1, 2$ ). Пусть  $w_i^j$  ( $j = 1, 2$ ) решения задач (31), (32) с новыми правыми частями, где вместо  $v$  стоят функции  $v_i$  и  $w^0 = \varphi_i \tilde{\omega}$ . Тогда разности  $k_i = w_i^1 - w_i^2$  есть решения задач

$$k_{it} - c_{nn}(t, 0, z_n)k_{iz_n z_n} = \sum_{i+j < 2n} c_{ij} \omega_{z_i z_j}^0 + \sum_{i=1}^n c_i \omega_{z_i}^0 + c_0 \omega^0 +$$

$$[\varphi_i, L]\tilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i, \quad k_i|_{t=0} = 0, \quad k_i|_{z_n=0} = 0, \quad k_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i \leq r.$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, теорему 2.1 [27] или [26]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq \sum_{i=1}^r \|\tilde{f}_i\|_{L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))}.$$

Используя аналог оценки (55) для оценки правой части, получим

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq c_2 \tau^{\frac{1-\theta}{2}} (\|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^i)}).$$

В частности, отсюда и из леммы 1 и (52) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^r \|k_{iz_n}(t, 0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_4 \tau^{(1-\theta)/2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (56)$$

*Оценки для оператора  $R$ .* Считаем, что  $\vec{\alpha}_i \in B_{R_2}$ ,  $i = 1, 2$ . Из (36) имеем, что

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c \sum_{i=1}^r \|F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Используем старые обозначения:  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\tilde{w} = v_1 - v_2$ ,  $k_i = \omega_i^1 - \omega_i^2$ ,  $\omega_j^i$  ( $i = 1, 2$ ) – решения задач (31), (32). Рассмотрим первое слагаемое в координате  $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$ . Оно записывается в виде  $J_1 = \frac{1}{\varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \eta_m(t, 0) k_{jz_n}(t, 0)$ , где  $\eta_m = -\sqrt{1 + |\nabla \gamma_i|^2} \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y^i(z)) n_k n_l |_{z_n=0}$ . Здесь  $n_k = \gamma_{iz_k}(z') / \sqrt{1 + |\nabla \gamma_i|^2}$

при  $k < n$  и  $n_n = -1/\sqrt{1 + |\nabla\gamma_i|^2}$ , и  $\tilde{a}_{kl}$  – старшие коэффициенты оператора  $L$  записанного в локальной системе координат  $y$ . В силу леммы 2 и неравенства (56) имеем

$$\|J_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_1 \|k_{iz_n}(t, 0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2 \tau^{\beta_1} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad (57)$$

где все постоянные не зависят от  $\tau$  и  $\beta_1$  – положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое  $J_2 = \frac{1}{\varphi(\tilde{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \sum_{j=1}^{n-1} \eta_i(t, 0) \tilde{w}_{z_j}(t, b_j)$ . В силу леммы 2 имеем

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2 \sum_{i=1}^r (\|\tilde{w}(t, x^i(0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} + \|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}).$$

Здесь каждое из слагаемых оценивается одинаково. Оценка (39) влечет, что

$$\|\tilde{w}\|_{W_p^1(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \leq c \|\tilde{w}\|_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S'_1)} \leq c_1 \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q'_\tau)}.$$

В силу теореме вложения (теорема 1.22 в [27])

$$\|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{z=0} \|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2 \|\nabla_{z'} \varphi_i(\tilde{w}(t, x^i(z', 0)))\|_{W_p^s(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))},$$

при  $s \in ((n-1)/p, 1)$ . Далее, из вышеприведенных неравенств получим

$$\begin{aligned} & c_2 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^s(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \leq \\ & c_3 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^1(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}^\theta \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^{-1}(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}^{1-\theta} \\ & \leq c_4 \|\nabla_{z'} \varphi_i(\tilde{w}(t, x^i(z)))\|_{W_p^{1,2}(Q'_1)}^\theta \|\varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{L_p(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}^{1-\theta} \leq \\ & c_5 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^{1,2}(Q'_1)}^\theta \tau^{(1-\theta)/2} \|\varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{L_p(B'_\delta; \tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Ссылаясь на лемму 1 и используя (52), получим оценку

$$\|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{z=0} \|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_6 \tau^{\beta_2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в  $\|J_2\|$ , и можно сказать, что

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_7 \tau^{\beta_2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (58)$$

для некоторой постоянной  $\beta_2 > 0$  и не зависящей от  $\tau$  постоянной  $c_7$ . Окончательная оценка, как вытекает из (57), (58), имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_8 \tau^{\beta_0} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где  $\beta_0 = \min(\beta_1, \beta_2)$  и постоянная  $c_8$  не зависит от  $\tau$ . Возьмем  $\tau_2 \leq \tau_1$  такое, что  $c_8 \tau_2^{\beta_0} \leq 1/2$ . В этом случае оператор  $R$  переводит шар  $B_{R_2}$  в себя при  $\tau \leq \tau_2$  и является в нем сжимающим. Следовательно уравнение (35) имеет решение  $\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_2)$ . Найден  $v$  как решение задачи (25)-(27).

Покажем выполнение (28). Возьмем равенства (26), записанные в системе координат  $z$  и взятые в точке  $t, x^i(0)$  ( $x^i(0) = b_i$ ), и вычтем их из соответствующих равенств (33), получим, если используем равенство  $w_j(t, 0) + w_0(t, b_j) = \psi_j$ , что

$$\eta_n(t, 0)(w_{jz_n}(t, 0) - v_{z_n}(t, x^j(0))) - (\beta_0 + \alpha)(\varphi(w_j(t, 0) + w_0(t, b_j)) - \varphi(v(t, b_j) + w_0(t, b_j))) = 0, \quad (59)$$

где  $i = 1, 2, \dots, r$ . Функция  $w_{0i} = \varphi_i v$  удовлетворяет уравнению (30). Возьмем в этом уравнении  $z' = 0$  и вычтем его из равенства (31). Получим равенства

$$w_{it}(t, z_n) - w_{0it}(t, x^i(t, z_n, 0)) - c_{nn}(t, 0, z_n)(w_{iz_n z_n} - w_{0iz_n z_n}(t, x^i(t, z_n, 0))) = 0, \quad (60)$$

где  $i \leq r$ . Функции  $w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, z_n, 0))$  удовлетворяет уравнениям (60) начальному условию  $w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, z_n, 0))|_{t=0} = 0$ , равенству (59) и  $w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, z_n, 0))|_{z_n=\delta_1} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Для этой задачи справедлив аналог теоремы 1 (доказательство ничем не отличается), и тогда в силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи  $w_i(t, z_n) = w_{0i}(t, x^i(t, z_n, 0))$ . Следовательно, выполнены равенства  $w_{0i}(t, x^i(0)) = v(t, x^i(0)) = \psi_i$  для всех  $i$ . Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, то утверждение о единственности решений здесь очевидно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. Москва: Янус-К, 2009.
2. Ткаченко В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наукова думка, 2008.
3. Glagolev M. V., Sabrekov A. F. Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling // *Mat. Biolog. Bioinform.*, 2012, V. 7, № 1, P. 81–101.
4. Пермяков П. П. Идентификация параметров модели теплопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // *Вестн. Том. гос. ун-та.* 2004. №284. с. 236-238.
5. Пермяков П. П. Математическое моделирование негативных мерзлотных процессов. Новосибирск: СО РАН, 2023.
6. Пермяков П. П., Аммосов А. П. Математическое моделирование техногенного загрязнения в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 2003.
7. Dantas L. V., Orlande H. R. B., Cotta R. M. An inverse problem of parameter estimation for heat and mass transfer in capillary porous media // *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* 2003. V. 46, №. 9. P. 1587–1599.

8. *Lugon J. Jr., Neto A. J. S.* An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a onedimensional porous medium. In Proceedings of COBEM 2003. 17-th International Congress on Mechanical Engineering. San-Paolo: ABCM, 2003
9. *Varan L. A. B., Orlande H. R. B., Vianna F. L. V.* Estimation of the convective heat transfer coefficient in pipelines with the Markov chain Monte-Carlo method // Blucher Mechanical Engineering Proceedings. 2014. V. 1, № 1. P. 1214–1225.
10. *Osman A. M., Beck J. V.* Nonlinear Inverse Problem for the Estimation of Time-and-Space-Dependent Heat-Transfer Coefficients // J. Thermophysics. 2003. V. 3, № 2. P. 146–152.
11. *Farahani S. D., Kowsary F., Ashjaee M.* Experimental estimation heat flux and heat transfer coefficient by using inverse methods // Scientia Iranica B. 2016. V. 3, № 4. P. 1777–1786.
12. *Su J., Hewitt G. F.* Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient // Numerical Heat Transfer, Part A. 2004. V. 45. P. 777–789.
13. *Hao D. N., Thanh P. X., Lesnic D.* Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Problems. 2013. V. 29. 095020 (21p).
14. *Lee J. D., Tanabe I., Takada K.* Identification of the heat transfer coefficient on machine tool surface by inverse analysis // JSME International J., Series C. 1999. V. 42, № 4. P. 1056–1060.
15. *Onyango T. M., Ingham D. B., Lesnic D.* Restoring boundary conditions in heat conduction // J. Eng. Math. 2008. V. 62. P. 85-101.
16. *Wang S., Zhang L., Sun X., and Jia H.* Solution to Two-Dimensional Steady Inverse Heat Transfer Problems with Interior Heat Source Based on the Conjugate Gradient Method // Mathematical Problems in Engineering. 2017. V. 2017, article ID 2861342, 9 p.
17. *Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimdt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G.* Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // Applied Mathematical Modelling. 2012. V. 89, № 1. P. 654–668.
18. *Hao D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnic D.* Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // Applicable Analysis. 2015. V. 94, № 9. P. 1784-1799.
19. *Slodicka M., Van Keer R.* Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // Inverse Problems. 2002. V. 18, № 1. P. 139–152.
20. *Rösch A.* Stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws // Inverse Problems. 1996. V. 12, № 5. P. 743–756.

21. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, II // *Differ. Equat.* 1996. V. 32, № 11. P. 1515–1525.
22. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // *Differ. Equat.* 1996. V. 32, № 1. P. 113–122.
23. *Pyatkov S. G., Baranchuk V. A.* Determination of the Heat Transfer Coefficient in Mathematical Models of Heat and Mass Transfer. *Mathematical Notes.* 2023. V. 113, № 1, P. 93–108.
24. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutscher Verlag des Wissenschaften, 1978.
25. *Amann H.* Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // *Glasnik matemicki.* 2000. T. 35, № 1, P. 161-177.
26. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence, RI: Am. Math. Soc., V.23, 1968.
27. *Пятков С. Г.* Краевые и обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений и систем. Новосибирск: Наука, 2025.
28. *Белоголов В.А., Пятков С. Г.* О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // *Известия вузов. Математика.* 2020. №7. С. 18-32.

Потапков Алексей Александрович  
Пятков Сергей Григорьевич  
Югорский государственный университет  
Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16, 628012  
a\_potapkov@ugrasu.ru, s\_pyatkov@ugrasu.ru