4990_p

УДК 517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПО ТОЧЕЧНЫМ ДАННЫМ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

А. А. Потапков, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматриваются вопросы корректности обратных задач восстановления коэффициента теплопередачи с использованием набора значений решения в фиксированных точках на границе области. Условия типа дифракции используются на границе раздела сред. Граничные условия нелинейные и коэффициент теплопередачи представим в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. При определенных условиях на данные доказывается, что существует единственное решение задачи локально по времени, которое зависит от данных задачи непрерывно. Доказательство опирается на априорные оценки и принцип сжимающих отображений.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

Посвящается Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Введение

В статье исследуются обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи по точечным данным. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u,$$

$G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \varnothing$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0,T) \times \Gamma_0$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta(t,x)(\varphi(u) - \varphi(\overline{u}_0)) = g, \quad \varphi|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант є 25-11-20026).

где
$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_i u_{x_j},$$
и условиями сопряжения
$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t,x), \quad u^+(t,x) = u^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\, x\to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\, x\to x_0\in\Gamma_0} u(t,x),$$
$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ и $\vec{n}$ — внешние единичные нормали к ∂G^- и Γ. Условия переопределения имеют вид
$$u(t,b_i) = \psi_i(t), \quad i = 1,2,\dots,r, \tag{4}$$
где $b_i \in \Gamma$, $\{b_i\}_{i=1}^r$ — некоторый набор точек. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4), и неизвестной функции
$$\beta(t,x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_i(t)\Phi_i(t,x),$$
где функции Φ_i заданы, а функции $\beta_i(t)$ считаются неизвестными.

Обратные задачи возникают в самых различных задачах при описании процессов тепломассопереноса, диффузии, фильтрации, в экологии и т. п. (см. [1–3]). В частности, задача (1)–(4) возникает при идентификации параметров тепломассопереноса в задачах описания тепловых режимов мерзлых грунтов и техногенного загрязнения почв [4–6]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач (1)–(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, точки $\{b_i\}$ в (4) могут быть как внутренними [7–12] так и граничными точками [13–15] области G (см. стационарный случай в [16]). Имеется ряд работ, посвященных определению коэффициента теплопередачи в нелинейном граничном условии вида
$$\frac{\partial u}{\partial N} + \rho(t)\varphi(u) = g,$$
где функция ρ считается неизвестной (см. [17]). Отметим работы (см. библиографию в [18–20]), где восстанавливается функция вида $\varphi(t,x,u)$ (иногда не зависящая от независимых переменных) в граничном условии Робина вида $\frac{\partial u}{\partial N} + \varphi(t,x,u) = g$ или близком условии. В этих работах, используются интегральные условия переопределения различного вида и в некоторых случаях получены теоремы существования и единственности решений таких задач локально по времени. Основной метод построения приближенного решения — сведение задачи к задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала. Отметим, что очень часто эти две задачи не эквивалентны.

Теоретических результатов, посвященных задаче (1)–(4), немного. По-видимому, первая работа, посвященная задаче (1)–(4) в многомерном случае, есть работа [21] (см. также [22]), где в случае $Mu = u_t - \Delta u$ и $r = 1$ были показаны теорема существования и единственности классических решений задачи об определении потока и теорема единственности в задаче об определении коэффициента теплопередачи. Другой подход описан в работе [23], где получена теорема существования и единственности решений в случае $\varphi(u)=u$ и задача рассматривалась в обычной постановке (т. е. условия сопряжения отсутствуют). В данной работе мы используем ту же самую идею и получаем теорему существования и единственности решений в пространствах Соболева.

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Обозначения для пространств Лебега $L_p(G;E)$, Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и Гёльдера $C^\alpha(\overline{G};E)$ $(\alpha\geq 0)$ стандартные (см. [24, 25]). Если $E=\mathbb{R}$ или $E=\mathbb{R}^n$, то пишем просто $W_p^s(G)$ и т. д. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J=(0,T)$ положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p\big(J;W_p^r(G)\big)$. Соответственно $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p\big(J;W_p^r(\Gamma)\big)$. Пусть $(u,v)=\int\limits_G u(x)v(x)\,dx$ и $B_\delta(b_i)$ — шар радиуса δ с центром в точке b_i. Положим $G_\delta=G\cap\bigcup\limits_{i=1}^r B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta=\Gamma\cap\bigcup\limits_{i=1}^r B_\delta(b_i)$, $Q_\tau^\pm=(0,\tau)\times G$, $Q_\tau=(0,\tau)\times G$, $S_\tau=(0,\tau)\times\Gamma$.

Далее считаем, что $\Gamma,\Gamma_0\in C^2$, $\Gamma_\delta\in C^3$ (см. определение в [26, гл. 1]) для некоторого $\delta>0$. Без ограничения общности можем считать, что для каждого $i=1,2,\dots,r$ найдутся окрестность Y_i точки b_i и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такие, что $Y_i\cap\Gamma_0=\varnothing$, ось y_n направлена по внутренней нормали к Γ в точке b_i, уравнение части границы $Y_i\cap\Gamma$ имеет вид $y_n=\gamma_i(y')$, $\gamma_i(0)=0$, $|y'|<\delta$, $y'=(y_1,\dots,y_{n-1})$, причем $\gamma_i\in C^3(\overline{B'_\delta})$ $(B'_\delta=\{y':|y'|<\delta\})$ и $G\cap Y_i=\{y:|y'|<\delta, 0<y_n-\gamma_i(y')<\delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n\setminus G)\cap Y_i=\{y:|y'|<\delta,-\delta_1<y_n-\gamma_i(y')<0\}$, $\delta_1>(M+1)\delta$, где M — постоянная Липшица функции γ_i. Иначе уменьшим параметр δ. Далее считаем, что параметр $\delta>0$ зафиксирован. Мы используем выпрямление границы: $z_n=y_n-\gamma_i(y')$, $z'=y'$, где y — локальная система координат в точке b_i. Оно и обратное к нему $y_n=z_n+\gamma_i(z')$, $y'=z'$ принадлежат классу C^3 (т. е. $y=y(z)\in C^3(\overline{Y_i})$). То же самое утверждение имеет место и для преобразований $x=x(y(z))=x^i(z)$. Пусть $U=\{z:|z'|<\delta,\ 0<z_n<\delta_1\}$, $Q_1^\tau=(0,\tau)\times U$, $Q_1=(0,T)\times U$ и $S_1^\tau=(0,\tau)\times B'_\delta$, $S_1=(0,T)\times B'_\delta$.

Будем использовать в пространстве $W_p^s(0,\beta;E)$ $(s\in(0,1)$, $\beta>0$, E — банахово пространство) норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(0,\beta;E)}=\big(\|q\|^p_{L_p(0,\beta;E)}+\langle q\rangle^p_{s,\beta}\big)^{1/p},$$

$$\langle q\rangle^p_{s,\beta}=\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\beta\frac{\|q(t_1)-q(t_2)\|_E^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\,dt_1dt_2.$$

При $s\in(0,1)$ положим

$$\widetilde{W}_p^s(0,\beta;E)=\big\{q\in W_p^s(0,\beta;E):t^{-s}q(t)\in L_p(0,\beta;E)\big\}.$$

Наделим это пространство нормой

$$\|q(t)\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\beta;E)}=\Big\|\frac{q}{t^s}\Big\|^p_{L_p(0,\beta;E)}+\langle q\rangle^p_{s,\beta}.$$

Если $s \neq 1/p$, то эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(0,\beta;E)}$ для функций $q(t)$ таких, что $q(0) = 0$ при $s > 1/p$, эквивалентны (см. [24, п. 3.2.6, лемма 1]). Положим

$$\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta) = \widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G)) \cap L_p\big(0,\beta;W_p^{2s}(G)\big).$$

Нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G))}$ определяются естественным образом, например,

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)} = \big(\|u\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G))} + \|u\|^p_{L_p(0,\beta;W_p^{2s}(G))}\big)^{1/p}.$$

Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(\Gamma))$, $\widetilde{W}_p^{s,2s}(S_\beta)$. Далее считаем, что параметр $p > n+2$ зафиксирован. Следующие две леммы известны (см. [27, леммы 1.19, 1.20]).

Лемма 1. *Существует постоянная C, не зависящая от $\tau \in (0,T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}, \quad \left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\tau)$ таких, что $v(x,0) = 0$. Здесь $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$ и $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$.

Лемма 2. *Пусть $s \in ((n+2)/2p, 1)$. Тогда если $q \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то $qv \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_0\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}(\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}).$$

Если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_1\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

а если $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_2\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Для функций $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \leq c_3\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Постоянные c_i, $i = 0,1,2,3$, не зависит от q, v и $\tau \in (0,T]$. Множество Q_τ в этих утверждениях может быть заменено на S_τ (при этом считаем, что $s \in ((n+1)/2p, 1)$).

Замечание 1. Условие $s \in ((n+2)/2p, 1)$ гарантирует включение $W_p^{s,2s}(Q) \subset C(\overline{Q})$ (см. теорему 1.22 в [27]).

Лемма 3. *Пусть $\varphi(u) \in W^2_\infty(-R,R)$ для всех $R > 0$. Пусть $v \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$ и $\|v\|_{L_\infty(S_\tau)} = M$. Тогда*

$$\|\varphi(v)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq c_1(M) + c_2(M)\|v\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p. \qquad (5)$$

Пусть $v_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$, $i = 1,2$, $\|v_i\|_{L_\infty(S_\tau)} + \|v_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq M$ и $v_1(0,x) = v_2(0,x)$. Тогда

$$\|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(M)\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}. \qquad (6)$$

Здесь постоянные $c_i(M)$, $i = 1,2,3$, не зависят от $\tau \le T$.

Доказательство. Оценка (5) вытекает непосредственно из определения нормы в пространстве $W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$. Чтобы получить оценку (6), воспользуемся равенством

$$\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \int\limits_0^1 \varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\, d\xi (v_1 - v_2).$$

Используя лемму 2 и неравенство (5), получим

$$\|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le \int\limits_0^1 (\|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}$$
$$+ \|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{L_\infty(S_\tau)})\, d\xi \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_3(M)\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}.$$

Приведем условия на данные. Оператор L предполагается эллиптическим, т. е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_0|\xi|^2 \text{ для всех } (t,x) \in Q,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Кроме того, предположим, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad a_{kl}|_{Q^\pm} \in C(\overline{Q^\pm}), \quad a_{kl}|_\Gamma \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \quad a_{kl}^\pm|_{\Gamma_0} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_0), \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}, \quad u_0^+ = u_0^-, \quad x \in \Gamma_0,\ s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \tag{8}$$

$$\beta \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \quad g(0,x) = B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma, \quad \varphi(u) \in W_\infty^2(-R,R) \quad \forall R > 0, \tag{9}$$

$$u_0(x)|_{G^\pm} \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm), \quad f \in L_p(Q), \quad g, \overline{u}_0 \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \tag{10}$$

$$a_i \in L_\infty\big(0,T; W_p^1(G_\delta)\big), \quad a_{kl} \in L_\infty\big(0,T; W_\infty^1(G_\delta)\big), \quad \varphi(u) \in W_\infty^3(-R,R), \tag{11}$$

для каждого $R > 0$.

Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$.

Пусть Y_i — координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma$. Выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Мы также предполагаем, что

$$\nabla_{z'}\beta(x^i(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1), \tag{12}$$

$$\nabla_{z'}\varphi_i g(t, x^i(z',0)),\ \nabla_{z'}\varphi_i\overline{u}_0(t, x^i(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\nabla_{z'}\varphi_i u_0(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U), \quad \nabla_{z'}a_{kl}(t, x^i(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1),\\ \nabla_{z'}\varphi_i f(t, x^i(z)) \in L_p(Q_1),\end{gathered} \tag{14}$$

где $k,l = 1,2\dots,n,\ i \le r$. Можно показать, что условия (12)–(14) не зависят от введенной локальной системы координат y и системы координат z.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (7)–(10). Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение* u *задачи (1)–(3) такое, что* $u|_{Q^{\pm}_{\tau_0}} \in W_p^{1,2}(Q^{\pm}_{\tau_0})$. *Если* $\beta = 0$, *то справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+_{\tau_0})} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-_{\tau_0})} \le C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{\tau_0})}). \quad (15)$$

Если $u_0 \equiv 0$, $\beta = 0$, *то оценка может быть переписана в виде*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+_{\tau_0})} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-_{\tau_0})} \le C_1(\|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{\tau_0})}), \quad (16)$$

где постоянная C_1 *не зависит от* τ.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$M\Psi = f, \quad \Psi|_{t=0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial N}\right|_S = g_0, \quad g_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial N},$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial \Psi^-}{\partial N}(t,x), \quad \Psi^+(t,x) = \Psi^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0.$$

Фиксируем $\tau \le T$. По теореме 2.19 в [27] существует единственное решение этой задачи из класса $\Psi \in W_p^{1,2}(Q^+_\tau) \cap W_p^{1,2}(Q^-_\tau)$ (обозначим его через $R_\tau(g_0)$), причем имеет место оценка

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q^+_\tau)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q^-_\tau)} \le C_1(\|g_0\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}).$$

Если $u_0 = 0$, то последнюю оценку можно уточнить:

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q^+_\tau)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q^-_\tau)} \le C_2(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}), \quad (17)$$

где постоянная C_2 не зависит от параметра τ. Доказательство этой оценки повторяет соответствующее в теореме 2 в [28], поэтому его опустим. Тогда $u \in W_p^{1,2}(Q^+_\tau) \cap W_p^{1,2}(Q^-_\tau)$ — решение задачи (1)–(3) в том и только в том случае, если

$$u|_S = R_\tau(g - \beta(t,x)(\varphi(u) - \varphi(\overline{u}_0)))|_S, \quad u|_S \in W_p^{s_1,2s_1}(S_\tau).$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение, если параметр τ достаточно мал. Сделаем замену $u = v + \Phi$, $\Phi = R_\tau(g - \beta(\varphi(u_0) - \varphi(\overline{u}_0))$. Тогда имеем уравнение

$$v|_S = R_\tau(g - \beta(t,x)(\varphi(v + \Phi) - \varphi(\overline{u}_0)))|_S - \Phi|_S = R_{0\tau}(v|_S). \quad (18)$$

Ищем решение этого уравнения в классе $v \in \widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)$, $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$. Возьмем $v = 0$. Получим $R_{0\tau}(0)$ — решение задачи

$$Mv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial N}\right|_{S_\tau} = -\beta(\varphi(\Phi) - \varphi(u_0)) \in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau).$$

Возьмем $R_1 = 2\|R_{0T}(0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S)}$. Пусть $\|v_i\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le R_1$. В силу теорем вложения $\|v_i\|_{C(\overline{S_\tau})} \le C_0 R_1$, где C_0 — некоторая постоянная. По определению оператора R_τ правая часть в (18) обращается в нуль при $t = 0$. Покажем, что на малом промежутке времени оператор $R_{0\tau}(v)$ удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. В силу (17) и лемм 2, 3 имеем оценку

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le c_1 \|\beta(\varphi(v_1) - \varphi(v_2))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}$$
$$\le c_2 \|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_3(R_1)\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}. \quad (19)$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c\tau^{1/2}\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \quad (20)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \le T$. Действительно, непосредственно из определения нормы имеем

$$\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_0}(0,\tau;L_p(\Gamma))} \le c\tau^{1/2}\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_1}(0,\tau;L_p(\Gamma))}.$$

Далее,

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_0}(\Gamma))} \le c\|v\|^{\theta}_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_1}(\Gamma))}\|v\|^{1-\theta}_{L_p(S_\tau)} \le c_4\tau^{s_1(1-\theta)}\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)},$$

где $s_1(1-\theta) = 1/2$, $\theta = s_0/s_1$, используем лемму 1.14 в [27] и определение нормы в $W_p^{s_1}(0,\tau;L_p(\Gamma))$. Две последние оценки гарантируют (20). Используя оценки (20), (19), получим

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le c_5(R_1)\tau^{\frac{1}{2}}\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)}.$$

Выберем τ_0 такое, что $\tau^{1/2}c_5(R_1) \le \frac{1}{2}$ при $\tau \le \tau_0$. Тогда выполняются условия теоремы о неподвижной точке и уравнение (18) имеет решение. Если $u_0 = 0$, то легко увидеть, что постоянные в используемых неравенствах не зависят от $\tau \le \tau_0$ и, значит, имеет место оценка (16).

Замечание 1. Без ограничения общности можем считать, что параметр τ_0 — убывающая функция от величины R_1. В свою очередь, величина R_1 ограничена постоянной cM с $M = \|\beta\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|\beta\|_{L_\infty(S_\tau)}$, c — постоянная, не зависящая от β, при этом норма v в $W_p^{s_1,2s_1}(S_{\tau_0})$ оценивается через $2R_1$ и норма v в $W_p^{1,2}(S_{\tau_0})$ оценивается постоянной, зависящей от R_1.

В следующей теореме используем локальную систему координат z.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (7)–(14) и $\beta = 0$. Тогда решение задачи (1)–(3), полученное в теореме 1, обладает свойством $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)$, $i = 1, \ldots, r$, причем если $u_0 \equiv 0$, то имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i u(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_1(\|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}$$
$$+ \sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g(x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)})),$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau \in (0,\tau_0]$.

Доказательство. Доказательство дословно повторяет рассуждения из теоремы 2 в [23] и использует оценку (17).

3. Основные результаты

Далее считаем, что функции $\Phi_i(t,x)$ обладают следующими свойствами:

$$\Phi_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \quad \nabla_{z'}\Phi_i(t,x^j(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1), \quad i,j=1,2,\dots,r. \tag{21}$$

Пусть $\Phi(t)$ — матрица с элементами $\phi_{ij} = \Phi_j(t,b_i)$, $i,j=1,2,\dots,r$. В силу теорем вложения $\Phi_i(t,b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$ (см. [27, теорема 1.22]). Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\begin{gathered} |\varphi(\psi_i(t)) - \varphi(\overline{u}_0)(t,b_i)| \geq \delta_1, \quad |\det\Phi| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall t \in [0,T], \\ \psi_i \in W_p^{s_1}(0,T), \quad u_0(b_i) = \psi_i(0), \quad i=1,2,\dots,r, \end{gathered} \tag{22}$$

где δ_1 — положительная постоянная. Возьмем первое из равенств (2) в точке $(0,b_j)$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i(0)\Phi_i(0,b_j) = \frac{1}{(\varphi(u_0(b_j)) - \varphi(\overline{u}_0(b_j)))}\left(g(0,b_j) - \frac{\partial u_0(b_j)}{\partial N}\right), \tag{23}$$

где $j=1,\dots,r$. Отсюда определяем величины $\beta_i(0)$. Если решение задачи (1)–(4) существует, то выполнено равенство

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial N} + \beta(0,x)[\varphi(u_0) - \varphi(\overline{u}_0)] = g(0,x), \quad x \in \Gamma, \tag{24}$$

где постоянные $\beta_j(0)$ — решение системы (23). Положим

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(0)\Phi_i(t,x), \quad \alpha = \beta - \beta_0, \quad \alpha_i = \beta_i(t) - \beta_i(0), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_r).$$

В силу условия (21) $\beta_0 \in W_p^{s_0,2s_0}(S)$, $\nabla_{z'}\beta_0(x^j(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1)$ для всех j. Построим функцию w_0 как решение задачи (1)–(3) с $\beta = \beta_0$. Решение существует на некотором промежутке $[0,\tau_0]$ и обладает свойствами, указанными в теоремах 1, 2. Сделаем замену $u = v + w_0$ в (1)–(4). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{25}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta_0(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) = -\alpha(\varphi(v+w_0) - \varphi(\overline{u}_0)), \tag{26}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t,x), \quad v^+(t,x) = v^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \tag{27}$$

$$v(t,b_i) = \widetilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0(t,b_i). \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (7), (8), (10), (11), (13), (14), (21), (22), (24). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (1)–(4) *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$, $\beta_i(t) \in W_p^{s_0}(0,\tau_0)$, $i=1,2,\dots,r$, *причем* $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^{\tau_0})$, $i=1,\dots,r$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (25)–(28).

Построение операторного уравнения для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируем $R_2 > 0$ (эту величину определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau) : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq R_2\}$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_2}$

и решая задачу (25)–(27) на некотором промежутке $[0, \tau_0]$), мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Кроме этого отображения нам понадобится еще одно отображение. Фиксируя i и умножая уравнение (25) на φ_i, имеем

$$Mv_i = v_{it} - Lv_i = [\varphi_i, L]v = f_0, \quad v_i\big|_{t=0} = 0, \quad v_i = \varphi_i v, \tag{29}$$

где

$$[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk}\varphi_{ix_l x_k} v - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{ix_k} v.$$

Сделав замену переменных $x = x^i(z)$, перепишем уравнение в (29) в виде

$$v_{it} - c_{nn}(t,z) v_{iz_n z_n} = \sum_{l+k<2n} c_{kl} v_{iz_k z_l} + \sum_{k=1}^{n} c_k v_{iz_k} + c_0 v_i + f_0 = f_{1i}, \quad z \in U. \tag{30}$$

Отметим, что $c_{nn} > 0$ для всех t, z. В силу свойств решения v и условий на коэффициенты имеем $\varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^\tau)$, $\nabla_{z'} \varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^\tau)$ и, более того, $f_{1i}(t, z', z_n) \in C^\alpha(\overline{B'_\delta}; L_p((0,\tau) \times (0, \delta_1)))$ с $\alpha \le 1 - (n-1)/p$ (см. теорему 1.22 в [27]), после может быть изменение на множестве меры нуль. Рассмотрим задачу

$$\omega_{it}(t, z_n) - c_{nn}(t, 0, z_n)\omega_{iz_n z_n} = f_{1i}(t, 0, z_n), \quad i \le r, \ z_n \in (0, \delta_1), \tag{31}$$

$$\omega_i(0, z_n) = 0, \quad \omega_i|_{z_n=0} = \widetilde{\psi}_i(t), \quad \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{32}$$

Пусть $v(\vec{\alpha})$ — решение задачи (25)–(27), построим функции ω_i как решения задач (31), (32). Таким образом, каждому $\vec{\alpha}$ отвечает функция v и набор функций ω_i $(i = 1, 2, \dots, r)$. Имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial N} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(t, z') v_{iz_j}(t, x^i(z', 0)).$$

Полагая $z' = 0$ и используя (28), запишем равенства

$$\eta_n(t,0)\omega_{jz_n}(t,0) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t,0) v_{z_i}(t, x^j(0)) \\ + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(u_0)) = -\alpha(t, b_j)(\varphi(\psi_j) - \varphi(\overline{u}_0)), \tag{33}$$

которые также можно переписать в виде

$$\alpha(t, b_j) = \frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \Bigg(\eta_n(t,0)\omega_{jz_n}(t,0) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t,0) v_{z_i}(t, b_j) + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(u_0)) \Bigg), \tag{34}$$

где $\varphi(\psi_j) - \varphi(\overline{u}_0(t, b_j)) \ne 0$ (см. (22)). Это и есть система для нахождения вектора $\vec{\alpha}$. Она может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \tag{35}$$

где координата F_j вектора $\vec{F}$ есть правая часть (34). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\|\vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{36}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_2\}$ и переводит его в себя. Рассмотрим систему (35) и найдем $R(0)$. Если $\vec{\alpha} = 0$, то в силу теоремы единственности решение v задачи (25)–(27) есть 0. Тогда правая часть в (31) равна нулю и решения w_i задачи (31), (32) не зависит от $\vec{\alpha}$. Положим $R_2 = 2\|R(0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S)}$. Величина R_2 зависит только от известных данных задачи и не зависит от $\vec{\alpha}, \tau$.

Оценки для решений задачи (25)–(27). Без ограничения общности можем считать (см. замечание 1 и теорему 1), что промежуток $[0,\tau_0]$, на котором решение задачи (25)–(27) существует и единственно, не зависит от $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le R_2\}$, а зависит только от величины R_2. Далее, имеет место оценка (теорема 1)

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_2(R_2),$$

где постоянная C_2 зависит от R_2, но не зависит от параметра τ. Пусть

$$g_0 = -\beta_0(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha(\varphi(v+w_0) - \varphi(\overline{u}_0)).$$

Из теоремы 2 вытекает, что найдется постоянная c_3 такая, что

$$\sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le c\Bigg(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \sum_{i=1}^{r} \|\varphi_i \nabla_{z'} g_0(t, x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(S_1^\tau)}\Bigg).$$

Воспользовавшись леммами 2, 3, получим

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c(R_2).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\partial_{z_k} g_0 = -\beta_{0z_k}(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha_{z_k}(\varphi(v+w_0) - \varphi(\overline{u}_0))\\ - \beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k}))-\\ - \alpha(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(\overline{u}_0)\overline{u}_{0z_k}).\end{aligned}$$

Каждое слагаемое оценивается с использованием лемм 2, 3. Рассмотрим, например, третье слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned}&\|\varphi_i\beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k}))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c\|\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)w_{0z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c_1\|(\varphi'(v+w_0) - \varphi'(w_0))(v_{z_k} + w_{0z_k}) + \varphi'(w_0)v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c_2(\|\varphi'(v+w_0) - \varphi'(w_0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}(\|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} + \|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{L_\infty(S_1^\tau)})\\ &\quad + (\|\varphi'(w_0)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} + \|\varphi'(w_0)\|_{L_\infty(S_1^\tau)})\|v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}).\end{aligned} \tag{37}$$

Далее используем оценки

$$\|\nabla_{z'} w_0\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} + \|\nabla_{z'} w_0\|_{L_\infty(S_1^\tau)} \le c_1\|w_0\|_{W_p^{s_1,2s_1}(S_1)}, \tag{38}$$

$$\|\nabla_{z'} v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} \le c_2\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau)}, \quad v \in \widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau), \tag{39}$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от τ. Первая вытекает из [27, следствие 1.3, теорема 1.22]. Вторая также вытекает из следствия 1.3 в [27], но надо показать, что постоянная c_2 не зависит от τ. Существует оператор продолжения P функций, заданных на B'_δ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такой, что $P \in L\big(W_p^s(B'_\delta), W_p^s(\mathbb{R}^{n-1})\big)$ для всех $s \in [0,2]$ (метод Хестенса [24, § 4.2]). Поэтому достаточно получить оценки в случае, когда S_1^τ заменено на $\widetilde{S}_1^\tau = (0,\tau)\times\mathbb{R}^{n-1}$. Мы используем эквивалентные нормы в $\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)$, $\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)$ (см. нормы в [24, п. 2.5.1]):

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \|vt^{-s_0}\|_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)} + \langle v\rangle^p_{s_0,\tau} + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|v(t,z^1)-v(t,z^2)|^p}{|z^1-z^2|^{n-1+2s_0p}}\,dx^1dx^2dt,$$

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \|vt^{-s_1}\|_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)} + \langle v\rangle^p_{s_1,\tau} + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|v_{z_k}(t,z^1)-v_{z_k}(t,z^2)|^p}{|z^1-z^2|^{n-1+2ps_0}}\,dx^1dx^2.$$

Сделаем замену переменных $t=\xi\tau$, $x=\sqrt{\tau}y$, $z^1=\sqrt{\tau}y_1$, $z^2=\sqrt{\tau}y_2$. Имеем

$$\|\nabla_{z'}v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2}\|\nabla_{y'}v(\tau\xi,\sqrt{\tau}y)\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^1)}.$$

Правая часть оценивается через $\tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2}c\|v(\tau\xi,\sqrt{\tau}y)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^1)}$ (см. [27, следствие 1.3]). Сделав обратную замену переменных, придем к (39). Используя (39), (38) и лемму 3, получим, что правая часть в (37) оценивается через $c_3(R_2)$, эта постоянная зависит от $\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)}$, $\|w_0\|_{W_p^{s_1,2s_1}(S_1)}$, т. е. от R_2. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_4(R_2)$. Окончательно имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_5(R_2). \tag{40}$$

Оценки для разности решений задачи (25)–(27). Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\dots,\alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i=1,2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji}\Phi_i, \quad j=1,2.$$

Каждая из этих функций удовлетворяет оценке (40). Тогда разности $v_1-v_2=\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\alpha}=\alpha^1-\alpha^2$ есть решение задачи

$$Mv = \widetilde{\omega}_t - L\widetilde{\omega} = 0, \quad \widetilde{\omega}|_{t=0}=0, \quad (x,t)\in Q = G\times(0,T), \tag{41}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial N} = -\beta_0(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0)) - \frac{(\alpha^1+\alpha^2)}{2}(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0)) - \frac{\widetilde{\alpha}}{2}(\varphi(v_1+w_0)+\varphi(v_2+w_0)-2\varphi(\overline{u}_0)) = g_0. \tag{42}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}^+}{\partial N}(t,x)=\frac{\partial\widetilde{\omega}^-}{\partial N}(t,x),\quad \widetilde{\omega}^+(t,x)=\widetilde{\omega}^-(t,x),\quad (t,x)\in S_0. \tag{43}$$

В силу леммы 2 и (21) $\widetilde{\alpha},\alpha^j\in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$, $\nabla_{z'}\widetilde{\alpha}(t,x^i(z',0)),\nabla_{z'}\alpha^j(t,x^i(z',0))\in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)$, $i=1,\dots,r$, и имеем оценки

$$\|\widetilde{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}\le c_1\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{44}$$

$$\|\alpha^1+\alpha^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}\le c_1(\|\vec{\alpha}_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}+\|\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)})\le 2c_1R_2, \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}\widetilde{\alpha}(t,x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\le c_2\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}(\alpha^1+\alpha^2)(t,x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\le 2c_2R_2, \tag{47}$$

где постоянная c_2 не зависит от τ. В силу теоремы 1, лемм 2, 3 и оценок (44)–(47), (40) не так трудно получить неравенства

$$\begin{gathered}\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}+\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}\le c\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)},\\ \|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\le c_5(R_2)\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}+c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.\end{gathered} \tag{48}$$

Воспользовавшись неравенством (20) и леммой 1, получим оценку

$$\begin{aligned}\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}+\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}\le c_7(R_2)\tau^{1/2}(\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}\\ +\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)})+c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.\end{aligned} \tag{49}$$

Выберем $\tau_1\le\tau_0$ так, чтобы $c_7(R_2)\tau^{1/2}\le 1/2$ при $\tau\le\tau_1$. Тогда из (48), (49) вытекает неравенство

$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}+\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}\le 2c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\quad \tau\le\tau_1. \tag{50}$$

Соответственно из леммы 1 и (48) имеем

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\le c_7(R_2)\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Далее, используя теорему 2, запишем оценку для решений задачи (41)–(43). Имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}\\ &\qquad\le c\Bigg(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}+\sum_{i=1}^r\|\varphi_i\nabla_{z'}g_0(t,x^i(z',0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\Bigg).\end{aligned}$$

Первое слагаемое уже оценено. Оценим второе. Имеем

$$\begin{aligned}\partial_{z_k}g_0={}&-\beta_{0z_k}(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0))-\frac{(\alpha^1_{z_k}+\alpha^2_{z_k})}{2}(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0))\\ &-\frac{\widetilde{\alpha}_{z_k}}{2}(\varphi(v_1+w_0)+\varphi(v_2+w_0)-2\varphi(\overline{u}_0))-\beta_0(\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k}+w_{0z_k})\\ &-\varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k}+w_{0z_k}))-\frac{(\alpha^1+\alpha^2)}{2}(\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k}+w_{0z_k})\end{aligned}$$

$$
- \varphi'(v_2 + w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k})) - \frac{\widetilde{\alpha}}{2}(\varphi'(v_1 + w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) + \varphi'(v_2 + w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k}) - 2\varphi'(\overline{u}_0)\overline{u}_{0z_k}).
$$

Используя леммы 2,3, получение оценки (50) и саму оценку (50), выводим, что при $\tau \le \tau_1$ имеет место оценка

$$
\sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le c_8\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{51}
$$

Используя неравенства (50), (51), можем записать

$$
\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le c_5\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{52}
$$

Оценки для решений задачи (31), (32). Оценим правую часть в (31) в $L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))$. Имеем

$$
\|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le c_6\|f_{1i}(t, z', z_n)\|_{W_p^s(B'_\delta; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} = J
$$

при $s > (n-1)/p$ (лемма 1.9 в [27]). Далее используем интерполяционные неравенства (см. теорему 1.19 в [27]). Имеем

$$
J \le c_7\|f_{1i}(t, z)\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}\|f_{1i}(t, z)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}, \tag{53}
$$

где $2\theta - 1 = s$. Исходя из определения f_{1i} и условий на коэффициенты, имеем

$$
\|f_{1i}\|_{W_p^{-1}(B'_\delta; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le c\|v\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(U))} \le c_8\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}, \tag{54}
$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство

$$
\|v\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(U))} \le c_9\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau; W_p^2(U))}\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau; L_p(U))}
$$

и оценку $\|v\|_{L_p(0,\tau; L_p(U))} \le \tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau; L_p(U))}$, вытекающую из формулы Ньютона — Лейбница. Оценки (53), (54) влекут, что

$$
\|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le c_{10}\tau^{(1-\theta)/2}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t, z)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) \le C_8(R_2)\tau^{(1-\theta)/2}, \tag{55}
$$

где C_8 — постоянная, не зависящая от τ. Используя свойства решений первой начально-краевой задачи [27, теорема 2.9], получаем

$$
\sum_{i=1}^{r} \|w_i(t, z_n)\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le c\sum_{i=1}^{r} \|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le C_9(R_2)\tau^{(1-\theta)/2} + \sum_{j=1}^{r} \|\widetilde{\psi}_i\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(0,\tau)}.
$$

Оценки для разности решений задачи (31), (32). Пусть, как и ранее, $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i = 1, 2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$
\alpha^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ji}\Phi_i, \quad j = 1, 2.
$$

Пусть w_i^j, $j=1,2$, — решения задач (31), (32) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j и $w^0=\varphi_i\widetilde{\omega}$. Тогда разности $k_i=w_i^1-w_i^2$ суть решения задач

$$k_{it}-c_{nn}(t,0,z_n)k_{iz_nz_n}=\sum_{i+j<2n}c_{ij}\omega^0_{z_iz_j}+\sum_{i=1}^{n}c_i\omega^0_{z_i}+c_0\omega^0$$
$$+[\varphi_i,L]\widetilde{\omega}|_{z'=0}=\widetilde{f}_i,\quad k_i|_{t=0}=0,\ k_i|_{z_n=0}=0,\ k_i|_{z_n=\delta_1}=0,\ i\le r.$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, теорему 2.1 в [27] или [26]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))}\le\sum_{i=1}^{r}\|\widetilde{f}_i\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))}.$$

Используя аналог оценки (55) для оценки правой части, получим

$$\sum_{i=1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))}\le c_2\tau^{\frac{1-\theta}{2}}\left(\|\widetilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}+\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}\right).$$

В частности, отсюда, из леммы 1 и (52) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}\|k_{iz_n}(t,0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_4\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.\tag{56}$$

Оценки для оператора R. Считаем, что $\vec{\alpha}_i\in B_{R_2}$, $i=1,2$. Из (36) имеем

$$\|R(\vec{\alpha}_1)-R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c\sum_{i=1}^{r}\|F_i(\vec{\alpha}_1)-F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Используем старые обозначения: v_i, $i=1,2$, $\widetilde{w}=v_1-v_2$, $k_i=\omega_i^1-\omega_i^2$, ω_j^i, $i=1,2$, — решения задач (31), (32). Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1)-F_i(\vec{\alpha}_2)$. Оно записывается в виде

$$J_1=\frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t,b_j))-\varphi(\psi_j)}\eta_n(t,0)k_{jz_n}(t,0),$$

где

$$\eta_n=-\sqrt{1+|\nabla\gamma_i|^2}\sum_{k,l=1}^{n}\widetilde{a}_{kl}(y^i(z))n_kn_l|_{z_n=0}.$$

Здесь $n_k=\gamma_{iz_k}(z')/\sqrt{1+|\nabla\gamma_i|^2}$ при $k<n$, $n_n=-1/\sqrt{1+|\nabla\gamma_i|^2}$ и $\widetilde{a}_{kl}$ — старшие коэффициенты оператора L, записанного в локальной системе координат y. В силу леммы 2 и неравенства (56)

$$\|J_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_1\|k_{iz_n}(t,0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_2\tau^{\beta_1}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\tag{57}$$

где все постоянные не зависят от τ и β_1 — положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2=\frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t,b_j))-\varphi(\psi_j)}\sum_{j=1}^{n-1}\eta_i(t,0)\widetilde{w}_{z_j}(t,b_j).$$

В силу леммы 2
$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2 \sum_{i=1}^{r} (\|\widetilde{w}(t,x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} + \|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}).$$
Здесь каждое из слагаемых оценивается одинаково. Оценка (39) влечет, что
$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^1(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le c\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau)} \le c_1\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}.$$
В силу теорем вложения (теорема 1.22 в [27])
$$\|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(z))|_{z=0}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2\|\nabla_{z'}\varphi_i(\widetilde{w}(t,x^i(z',0)))\|_{W_p^s(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))},$$
при $s \in ((n-1)/p, 1)$. Далее, из вышеприведенных неравенств получим
$$\begin{aligned} & c_2\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|_{W_p^s(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\ & \le c_3\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\ & \qquad \le c_4\|\nabla_{z'}\varphi_i(\widetilde{w}(t,x^i(z))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}\|\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\ & \quad \le c_5\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}\tau^{(1-\theta)/2}\|\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}. \end{aligned}$$
Ссылаясь на лемму 1 и используя (52), получим оценку
$$\|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(z))|_{z=0}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_6\tau^{\beta_2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$
Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $\|J_2\|$, и можно сказать, что
$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_7\tau^{\beta_2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{58}$$
для некоторой постоянной $\beta_2 > 0$ и не зависящей от τ постоянной c_7. Окончательная оценка, как вытекает из (57), (58), имеет вид
$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_8\tau^{\beta_0}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$
где $\beta_0 = \min(\beta_1, \beta_2)$ и постоянная c_8 не зависит от τ. Возьмем $\tau_2 \le \tau_1$ такое, что $c_8\tau_2^{\beta_0} \le 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_2} в себя при $\tau \le \tau_2$ и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (35) имеет решение $\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)$. Найдено v как решение задачи (25)–(27).

Покажем выполнение (28). Возьмем равенства (26), записанные в системе координат z и взятые в точке $t, x^i(0)$ ($x^i(0) = b_i$), и вычтем их из соответствующих равенств (33). Используя равенство $w_j(t,0) + w_0(t,b_j) = \psi_j$, получим
$$\begin{aligned} & \eta_n(t,0)(w_{jz_n}(t,0) - v_{z_n}(t,x^j(0))) \\ & \qquad - (\beta_0 + \alpha)(\varphi(w_j(t,0) + w_0(t,b_j)) - \varphi(v(t,b_j) + w_0(t,b_j))) = 0, \end{aligned} \tag{59}$$
где $i = 1, 2, \ldots, r$. Функция $w_{0i} = \varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (30). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (31). Получим равенства
$$w_{it}(t,z_n) - w_{0it}(t,x^i(t,0,z_n)) - c_{nn}(t,0,z_n)(w_{iz_nz_n} - w_{0iz_nz_n}(t,x^i(t,0,z_n))) = 0, \tag{60}$$
где $i \le r$. Функции $w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))$ удовлетворяют уравнениям (60), начальному условию $w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))|_{t=0} = 0$, равенству (59) и
$$w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$
Для этой задачи справедлив аналог теоремы 1 (доказательство ничем не отличается), и тогда в силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t,z_n) = w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))$. Следовательно, $w_{0i}(t,x^i(0)) = v(t,x^i(0)) = \widetilde{\psi}_i$ для всех i. Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, утверждение о единственности решений здесь очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов В. Е.* Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус и К, 2009.
2. *Ткаченко В. Н.* Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наук. думка, 2008.
3. *Глаголев М.В., Сабреков А.Ф.* Идентификация газообмена на границе экосистема/атмосфера: метод обратной задачи // Мат. биология и биоинформатика. 2012. Т. 7, № 1. С. 81–101.
4. *Пермяков П. П.* Идентификация параметров модели тепломассопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2004. № 284. С. 226-238.
5. *Пермяков П. П.* Математическое моделирование негативных мерзлотных процессов. Новосибирск: СО РАН, 2023.
6. *Пермяков П. П., Аммосов А. П.* Математическое моделирование техногенного загрязнения в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 2003.
7. *Dantas L. V., Orlande H. R. B., Cotta R. M.* Идентификация параметров модели тепломассопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46, N 9. P. 1587–1599.
8. *Lugon J. Jr., Neto A. J. S.* An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a onedimensional porous medium // Proc. COBEM 2003. 17-th Intern. Congress on Mechanical Engineering. San-Paolo: ABSM, 2003. P. .
   в 8 надо указать страницы!
9. *Varan L. A. B., Orlande H. R. B., Vianna F. L. V.* Estimation of the convective heat transfer coefficient in pipelines with the Markov chain Monte-Carlo method // Blucher Mechan. Engin. Proc. 2014. V. 1, N 1. P. 1214–1225.
10. *Osman A. M., Beck J. V.* Nonlinear inverse problem for the estimation of time-and-space-dependent heat-transfer coefficients // J. Thermophysics. 2003. V. 3, N 2. P. 146–152.
11. *Farahani S. D., Kowsary F., Ashjaee M.* Experimental estimation heat flux and heat transfer coefficient by using inverse methods // Sci. Iranica B. 2016. V. 3, N 4. P. 1777–1786.
12. *Su J., Hewitt G. F.* Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient // Numerical Heat Transfer. Part A. 2004. V. 45. P. 777–789.
13. *Hao D. N., Thanh P. X., Lesnic D.* Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Probl. 2013. V. 29. 095020.
14. *Lee J. D., Tanabe I., Takada K.* Identification of the heat transfer coefficient on machine tool surface by inverse analysis // JSME Intern. J., Ser. C. 1999. V. 42, N 4. P. 1056–1060.
15. *Onyango T. M., Ingham D. B., Lesnic D.* Restoring boundary conditions in heat conduction // J. Engin. Math. 2008. V. 62. P. 85–101.
16. *Wang S., Zhang L., Sun X., Jia H.* Solution to two-dimensional steady inverse heat transfer problems with interior heat source based on the conjugate gradient method // Math. Probl. Engin. 2017. V. 2017. Article ID 2861342.
17. *Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimidt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G.* Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // Appl. Math. Modelling. 2012. V. 89, N 1. P. 654–668.
18. *Hao D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnic D.* Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // Appl. Anal. 2015. V. 94, N 9. P. 1784–1799.
19. *Slodicka M., Van Keer R.* Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 18, N 1. P. 139–152.
20. *Rösch A.* Stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 12, N 5. P. 743–756.
21. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. II // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 11. P. 1515–1525.
22. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 1. P. 113–122.
23. *Pyatkov S. G., Baranchuk V. A.* Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer // Math. Notes. 2023. V. 113, N 1. P. 93–108.
24. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutscher Verl. des Wissenschaften, 1978.
25. *Amann H.* Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.

26. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural′tseva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1968.

27. *Пятков С. Г.* Краевые и обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений и систем. Новосибирск: Наука, 2025.

28. *Белоногов В. А., Пятков С. Г.* О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Изв. вузов. Математика. 2020. № 7. С. 18-32.

Поступила в редакцию 7 марта 2026 г.
После доработки 7 марта 2026 г.
Принята к публикации 20 марта 2026 г.

Потапков Алексей Александрович,
Пятков Сергей Григорьевич (ORCID 0000-0002-7238-9559)
Югорский государственный университет,
Инженерная школа цифровых технологий,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
a_potakov@ugrasu.ru, s_pyatkov@ugrasu.ru