4992_p

*УДК 517.9*

# ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РЕШЕНИЕ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**А. Н. Артюшин**

**Аннотация.** Рассматриваются вариационные неравенства с ограничением на решение для абстрактных гиперболических уравнений. Методом штрафа доказана теорема существования решения. Указаны достаточные условия геометрического характера на множество ограничения, гарантирующие сходимость штрафных решений к решению задачи. При некоторых дополнительных условиях доказывается сильная сходимость приближенных решений. В результате получается решение, для которого выполняется закон сохранения энергии, что соответствует абсолютно упругому удару.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

**Ключевые слова:** вариационные неравенства, абстрактные гиперболические уравнения.

*Геннадию Владимировичу Демиденко*
*в связи с его 70-летием*

## 1. Введение

Пусть $X$ — гильбертово пространство, $A$ — положительный самосопряженный оператор в $X$, $K \subset X$ — выпуклое замкнутое множество. Целью наших исследований будут вариационные неравенства для абстрактных уравнений вида

$$u''(t) + Au(t) = f(t)$$

с ограничением $u(t) \in K$.

Содержательные задачи такого рода возникают уже для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве простейшего примера можно рассмотреть движение частицы под действием внешней силы. Пусть $K \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество. Частица движется внутри множества $K$. Ее координаты в момент времени $t$ обозначим через $x(t)$. Рассмотрим задачу

$$x''(t) = f(t, x, x') + h(t), \quad x(t) \in K, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

где $f(t, x, x')$ — внешняя сила, $h(t)$ — сила реакции стенки. Эта реакция, очевидно, равна 0, когда точка находится внутри $K$, и направлена внутрь множества $K$, когда точка находится на границе $\partial K$. Избавляясь от неизвестной функции $h(t)$, приходим к следующей задаче. Требуется найти такую функцию $x(t)$, что

$$(x''(t) - f(t), x(t) - \varphi(t)) \leq 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Здесь $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция такая, что $\varphi(t) \in K$ для $t \in [0,T]$. Очевидно, что этих соотношений еще недостаточно для описания движения частицы. Помимо этого требуется определить характер взаимодействия частицы со стенкой. Если удар о стенку абсолютно упругий, то абсолютная величина скорости частицы после удара не меняется. Если удар абсолютно неупругий, то проекция скорости частицы на нормаль к границе после удара равна 0. После того, как к указанной системе добавлены некие соотношения, регулирующие взаимодействие частицы со стенкой, можно ожидать, что задача поставлена, а значит, должна иметь место единственность решения. Разрешимость такой задачи можно доказать при достаточно общих условиях. Но единственности решения, вообще говоря, нет. При этом упругость или неупругость удара не имеет значения [1–3].

Следующая задача, вызывающая большой интерес, это вариационные неравенства для волнового уравнения в области $\Omega \in R^n$

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$$

с ограничением $u(t) \in K$ для п.в. $t \in (0,T)$. Аналогично предыдущему решение определяется как функция $u(t)$, удовлетворяющая неравенству (в смысле распределений)

$$(Lu - f, u - \varphi) \leq 0$$

для всех гладких $\varphi(x,t)$ таких, что $\varphi(x,t) \in K$ для всех $t \in [0,T]$. Особый интерес представляют случаи $n = 1, 2$ и ограничение $u(x) \leq m(x)$, $x \in \Omega$. Соответствующее вариационное неравенство описывает колебания струны или мембраны при наличии твердой стенки, ограничивающей движение сверху. В одномерном случае методом характеристик получен ряд результатов, касающихся однозначной разрешимости [4, 5]. Для многомерного волнового уравнения отметим работу [6] с ограничением решения на границе области. Этот случай интересен тем, что задачу удалось свести к вариационному неравенству с монотонным оператором. В работе [7] рассмотрена задача с ограничением для уравнения с дробной степенью оператора Лапласа. В ней реализован любопытный подход, связанный с минимизацией выпуклого функционала.

В ряде работ изучались задачи с ограничением для уравнений вида

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = f(x,t),$$

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \Delta^2 u_t(x,t) = f(x,t).$$

Отметим лишь [8–10].

Задачи в абстрактной постановке систематически, по-видимому, не изучались. Отметим лишь работу [9]. В этой работе $A : V \to V'$ — эллиптический самосопряженный оператор, вложение $V \subset X$ плотное и компактное. Одно из основных условий требует, чтобы множество $K$ имело непустую внутренность в интерполяционном пространстве $V_\theta$, $0 < \theta < 1$. Как увидим далее, одного этого достаточно для разрешимости задачи. Мы еще вернемся к этому моменту ниже.

В работе автора [11] для одномерного волнового уравнения использовался метод штрафа. Предельный переход удалось обосновать с помощью некого специфического приема. Однако действующие пружины доказательства остались непонятыми. В настоящей работе удалось разобраться с механизмом предельного перехода и обобщить его на абстрактный случай. Оказывается, что решающую роль играет геометрия множества $K$. Например, достаточно потребовать компактность поляры множества $K$ или (что эквивалентно) секвенциальную слабую замкнутость границы $\partial K$. Ниже будет дан ряд эквивалентных формулировок. При этих условиях удается получить содержательную оценку на штрафное слагаемое. Эта оценка позволяет доказать, что некоторая последовательность решений уравнений со штрафом сходится к искомому решению. При определенных дополнительных условиях на $K$ доказывается сильная сходимость этой последовательности, а значит, предельная функция удовлетворяет закону сохранения энергии (критерий абсолютно упругого удара).

## 2. Основная идея

Опишем основную идею решения задачи. Пусть у нас есть линейный оператор $L$ и мы решаем задачу

$$Lu = f$$

с ограничением $u \in K$. Далее считаем, что $0 \in K$. Воспользуемся методом штрафа и для всякого $\varepsilon > 0$ решим уравнение

$$Lu_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$$

с монотонным оператором штрафа $\beta$, связанным с множеством $K$. Предположим, что для приближенных решений имеется оценка

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \le C, \tag{2.1}$$

где $H$ — некоторое гильбертово пространство. Из этой оценки вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon_n \to 0$ (далее индекс $n$ опускаем) имеет место слабая сходимость

$$u_\varepsilon \underset{H}{\rightharpoonup} u$$

и $u \in K$. Пусть $v \in K$ — пробная функция, тогда

$$(Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \le (f, u_\varepsilon - v).$$

Теперь хотелось бы перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. В неравенстве фигурирует квадратичная нелинейность, а значит, для стандартного предельного перехода слабой сходимости $u_\varepsilon$ недостаточно. Мы, однако, поступим иначе. А именно, умножим штрафное уравнение на $u - v$ и получим неравенство

$$(Lu_\varepsilon, u - v) \le (f, u - v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u).$$

Левая часть неравенства линейна, и к ней уже можно применять слабую сходимость. Но теперь надо доказать, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \to 0.$$

И вот здесь нам поможет второе слагаемое в оценке (2.1). Обычно из этой оценки извлекают лишь включение $u \in K$. Мы же получим больше. В силу монотонности оператора $\beta$ для всех $\varphi \in K$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - \varphi) \ge 0.$$

Отсюда и из оценки (2.1) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \varphi) \le \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \le C.$$

Предположим, что найдется некое банахово пространство $B$ такое, что вложение $H \subset B$ плотно и компактно. Пусть $K = K_B \cap H$, где множество $K_B \subset B$ имеет непустую внутренность и $0 \in \operatorname{int} K_B$. Тогда из последней оценки легко получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{B^*} \le C. \tag{2.2}$$

В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $u_\varepsilon \to u$ сильно в $B$, а значит,

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \to 0.$$

Такой подход можно использовать и для анализа гладкости решений вариационных неравенств. В силу оценки (2.2) имеем включение

$$Lu_\varepsilon = f - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) \in X + B^*.$$

Из этого включения можно получить более точные оценки для решения.

В работе [11] был реализован иной способ доказательства, который иногда бывает удобнее. А именно, пусть $\gamma > 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ для достаточно малых $\varepsilon$ справедливо включение $\pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K_B$. Отсюда следует, что $\varphi = \pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K$. Подставляя эту пробную функцию в неравенство (2.2), получим

$$0 \le \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \le \frac{C}{\gamma}.$$

Далее устремляем $\gamma \to \infty$.

Таким образом, предельный переход будет обоснован, если найдутся подходящие пространство $B$ и множество $K_B$. Следует отметить, что для эволюционных уравнений возникают определенные осложнения, поскольку в чистом виде эта схема для них неприменима. Но компактность вложения $H \subset B$ удачным образом помогает справиться со всеми проблемами.

Само по себе условие на множество $K$, использующее какое-то вспомогательное пространство $B$, выглядит не очень удобным. Поэтому хотелось бы иметь эквивалентную формулировку, выраженную во внутренних терминах самого множества $K$. И такую формулировку можно предъявить. Докажем одну лемму, имеющую помимо дальнейшего применения и определенный самостоятельный интерес. Сначала дадим некоторые определения. Пусть $H$ — гильбертово пространство, $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество.

Определение 2.1. Будем говорить, что $K$ *удовлетворяет $C$-условию*, если множество $K$ обладает непустой внутренностью, а его граница $\partial K$ секвенциально слабо замкнута. Иными словами, если последовательность элементов $\{x_n\}_{n \in N} \subset \partial K$ слабо сходится к некоторому элементу $x$, то $x \in \partial K$.

Определение 2.2. Будем говорить, что $K$ *удовлетворяет $C_0$-условию*, если $K$ удовлетворяет $C$-условию и $0 \in \operatorname{int} K$.

Определение 2.3. Множество $\Phi_K = \{\varphi \in H^* \mid \varphi(x) \le 1 \ \forall x \in K\}$ называется *полярой множества $K$*.

Хорошо известно, что поляра $\Phi_K$ — замкнутое выпуклое множество, которое однозначно определяет $K$, если $0 \in \operatorname{int} K$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $K$ — замкнутое выпуклое множество в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$K$ удовлетворяет $C_0$-условию.*

2. *Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$, слабо сходящейся к 0, найдется номер $n_0$ такой, что $x_n \in K$ $\forall n > n_0$.*

3. *Поляра $\Phi_K$ компактна в $H^*$.*

4. *Существуют банахово пространство $B$ и замкнутое выпуклое множество $K_B \subset B$ с непустой внутренностью, $0 \in \operatorname{int} K_B$, такие, что вложение $H \subset B$ плотное и компактное и, кроме того, $K = K_B \cap H$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть дана последовательность $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. Будем рассуждать от противного. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \notin K$ $\forall n \in N$. Поскольку $0 \in \operatorname{int} K$, для всякого $n$ найдется $0 < \gamma_n < 1$ такое, что $y_n = \gamma_n x_n \in \partial K$. Ясно, что $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу условия 1 отсюда получаем $0 \in \partial K$; противоречие.

$2 \Rightarrow 3$. Прежде всего покажем, что поляра $\Phi_K$ ограничена. От противного, предположим, что найдется неограниченная последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$. По теореме Рисса для каждого $n$ существует $x_n \in H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\varphi_n(x_n) = \|\varphi_n\|$. Положим $y_n = 2x_n/\|\varphi_n\|$. Легко видеть, что $y_n \to 0$. По условию 2 найдется $n_0$ такое, что $y_n \in K$ $\forall n > n_0$. Но тогда в силу определения $\Phi_K$ для этих $n$ имеем $2 = \varphi_n(y_n) \le 1$; противоречие.

Итак, $\Phi_K$ ограничено. Теперь покажем, что из всякой последовательности $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. В силу ограниченности множества $\Phi_K$ достаточно показать, что всякая слабо сходящаяся последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ на самом деле сходится сильно. Рассуждение вполне аналогично предыдущему. Пусть $\varphi_n \underset{H^*}{\rightharpoonup} \varphi$. Отметим, что $\varphi \in \Phi_K$, так как $\Phi_K$ — выпуклое и замкнутое множество. Обозначим $\psi_n = \varphi_n - \varphi$. Как и раньше, выбираем элементы $x_n$ так, чтобы $\|x_n\| = 1$ и $\psi_n(x_n) = \|\psi_n\|$. Без потери общности можно считать, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$ для некоторого элемента $x$. Наконец, полагая $y_n = x_n - x$, получим $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|\psi_n\| \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \psi_n(y_n)$. Пусть $\gamma > 0$ произвольно. Применяя условие 2 к последовательности $\{\gamma y_n\}_{n\in N}$, получим

$$\gamma \overline{\lim_{n\to\infty}} \psi_n(y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} (\varphi_n - \varphi)(\gamma y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_n(\gamma y_n) \le 1.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|\psi_n\| = 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Из условия 3 следует, что множество $\Phi_K$ ограничено. Пусть $M > 0$ и $\|\varphi\| \le M$ $\forall \varphi \in \Phi_K$. Тогда если $x \in H$ и $\|x\| \le 1/M$, то $\varphi(x) \le 1$ $\forall \varphi \in \Phi_K$, а значит, $x \in K$. Следовательно, внутренность $K$ непуста и $0 \in \operatorname{int} K$.

Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset \partial K$ и $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$. Так как все элементы $x_n$ принадлежат границе $\partial K$, то найдется последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ такая, что $\varphi_n(x_n) > 1 - 1/n$. В силу условия 3 из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты оставим за ней прежнее обозначение $\varphi_n$. Тогда $\varphi_n \to \varphi$ сильно в $H^*$. А значит, $\varphi \in \Phi_K$ и

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) \ge 1.$$

Следовательно, $x \in \partial K$.

$4 \Rightarrow 2$. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $x_n \to 0$ сильно в $B$ и $\|x_n\|_B \to 0$.

По условию (4) имеет место включение $0 \in \operatorname{int} K_B$. Значит, найдется номер $n_0$ такой, что $x_n \in K_B$ $\forall n > n_0$. Осталось заметить, что тогда $x_n \in K_B \cap H = K$.

$1, 2 \Rightarrow 4$. Обозначим $K_0 = K \cap (-K)$. В силу $C_0$-условия множество $K_0$ выпуклое, замкнутое, уравновешенное и имеет непустую внутренность. Значит, оно порождает некую полунорму $p(\cdot)$ в $H$. Пусть $H_1$ — произвольное банахово пространство, для которого вложение $H \subset H_1$ плотно и компактно. Норму в пространстве $H_1$ будем обозначать через $\|\cdot\|_1$. Наконец, обозначим через $B$ банахово пространство, полученное замыканием $H$ относительно нормы $\|x\|_B = p(x) + \|x\|_1$. В качестве $K_B$ выберем замыкание множества $K$ в норме $B$. Покажем, что построенные пространство $B$ и множество $K_B$ удовлетворяют требованиям условия 4.

Прежде всего, по построению вложение $H \subset B$ плотное. Докажем, что оно и компактное. Действительно, пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу выбора пространства $H_1$ считаем, что $\|x_n\|_1 \to 0$. Пусть $\gamma > 0$. Используя условие 2, аналогично предыдущему легко показать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1/\gamma$. Поскольку $\gamma$ произвольно, отсюда вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) = 0$. Значит, $x_n \to 0$ сильно в $B$.

Покажем, что множество $K_B$ содержит единичный шар в $B$. Пусть $y \in B$ и $\|y\|_B \le 1$. По определению это означает, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \to y$ сильно в $B$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \|x_n\|_B \le 1$. В частности $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1$.

Предположим, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ такая, что на ней $p(x_{n_k}) \le 1$. Тогда $x_{n_k} \in K$ $\forall k > 0$, а значит, $y \in K_B$, коль скоро $K_B$ — это замыкание $K$ в $B$.

Предположим, что такой подпоследовательности не найдется. В этом случае можно считать, что $p(x_n) > 1$ $\forall n > 0$ и $p(x_n) \to 1$. Тогда можно положить $\overline{x}_n = x_n/p(x_n)$. Легко видеть, что $\overline{x}_n \in K$ и $\|\overline{x}_n - x_n\|_B \to 0$. Значит, $\overline{x}_n \to y$ и $y \in K_B$.

Осталось показать, что $K = K_B \cap H$. Пусть $x \in K_B \cap H$. Это значит, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset K$ такая, что $\|x - x_n\|_B \to 0$ и, следовательно, $p(x - x_n) \to 0$. Рассмотрим произвольный функционал $\varphi \in \Phi_K$. Так как $p(x - x_n) \to 0$, то для любого $\gamma > 0$ найдется $n_\gamma$ такое, что $\gamma(x - x_n) \in K_0 \subset K$ $\forall n > n_\gamma$. Отсюда получаем, что $\varphi(x - x_n) \le 1/\gamma$ $\forall n > n_\gamma$ и $\varphi(x) \le 1 + 1/\gamma$. Но $\gamma$ произвольно, значит, $\varphi(x) \le 1$. В силу произвольности $\varphi$ получаем $x \in K$. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Следует отметить, что данная лемма дает конструктивное описание искомого пространства $B$, что позволяет легко применять ее на практике. Пусть, например, $\Omega \subset R^n$, мы рассматриваем тот или иной класс заданных на $\Omega$ функций, и ограничение имеет вид $K = \{u(x) \mid u(x) \le 1,\, x \in \Omega\}$. В этом случае из построения леммы сразу же получаем, что $B = C(\Omega)$. Для наших рассуждений требуется компактность вложения $H \subset B$. Это значит, что при $n = 1$ в лемме 2.1 выполняется условие 4, если $H = W_2^1(\Omega)$. А при $n = 2, 3$ приходится повышать гладкость. В этом случае в качестве $H$ подходит пространство $W_2^2(\Omega)$.

Замечание 2.2. В работе [9] предполагалось, что $K$ имеет непустую внутренность в пространстве $V_\theta$. Заметим, что при этом вложение $V \subset V_\theta$ компактно. Следовательно, в лемме 2.1 можно положить $B = V_\theta$.

### 3. Абстрактный результат

Пусть $X, H$ — сепарабельные гильбертовы пространства, вложение $H \subset X$ плотно и непрерывно (компактность вложения не предполагается). Скалярное произведение в пространстве $X$ обозначаем круглыми скобками. Отождествляя $X$ и $X^*$, получим

$$H \subset X \subset H^*.$$

Пусть задан линейный оператор $A \in \mathscr{L}(H, H^*)$ такой, что $A = A_0 + A_1$, где $A_0 \in \mathscr{L}(H, H^*), A_1 \in \mathscr{L}(H, X)$, причем $A_0 = A_0^*$ и для некоторой константы $a_0 > 0$

$$(A_0 u, u) \geq a_0 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Пусть $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество и $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассмотрим следующую задачу:

$$u''(t) + Au(t) = f(t), \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(t) \in K \quad \text{для п.в. } t \in (0, T). \tag{3.2}$$

Для определения решения этой задачи рассмотрим пространство

$$W = \{u(t) \mid u \in L_2(0, T; H),\ u' \in L_2(0, T, X)\}$$

и множество

$$W_K = \{u(t) \in W \mid u(t) \in K \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}.$$

Для произвольных $u(t), v(t) \in W$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$ положим

$$L(u, v, \Phi) = -\int_0^T ((u'(t), v'(t))\Phi(t) + (u'(t), v(t))\Phi'(t))\,dt + \int_0^T (Au(t), v(t))\Phi(t)\,dt.$$

Пусть $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f(t) \in L_2(0, T; X)$. *Решением задачи* (3.1), (3.2) назовем функцию $u(t) \in W_K$ такую, что $u(0) = u_0$ и для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(T) = 0$, справедливо неравенство

$$L(u, u - \varphi, \Phi) \leq \int_0^T (f(t), u(t) - \varphi(t))\Phi(t)dt + (u_1, u(0) - \varphi(0))\Phi(0). \tag{3.3}$$

Данное неравенство получено формальным умножением уравнения (3.1) на $(u(t) - \varphi(t))\Phi(t)$ и интегрированием по частям. Как увидим позже, решение задачи будет более гладким. В связи с этим введем пространство

$$W^\infty = \{u(t) \mid u \in L_\infty(0, T; H),\ u' \in L_\infty(0, T, X)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^\infty} = \|u\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|u'\|_{L_\infty(0,T,X)}.$$

Решение вариационного неравенства будем получать методом штрафа. Для обоснования предельного перехода нам понадобится следующая

**Лемма 3.1.** *Пусть множество $K$ удовлетворяет $C$-условию. Пусть даны последовательности $\{u_{1n}\}_{n\in N} \subset X$, $\{f_n(t)\}_{n\in N} \subset L_2(0,T;X)$, $\{u_n(t)\}_{n\in N} \subset W^\infty$, удовлетворяющие неравенству (3.3) для всякого $n$. Предположим, что для некоторых $u_1, f(t), u(t)$ при $n\to\infty$ имеют место сходимости*

$$u_{1n} \to u_1 \quad \textit{сильно в } X,$$

$$f_n(t) \to f(t) \quad \textit{сильно в } L_2(0,T;X),$$
$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\textit{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$u_n'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\textit{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

*Тогда $u_1, f(t), u(t)$ тоже удовлетворяют неравенству (3.3).*

Доказательство. Совершим предельный переход при $n\to\infty$ в неравенстве (3.3). Правая часть в этом неравенстве линейная по $u$. Кроме этого

$$L(u_n, u_n-\varphi, \Phi) = L(u_n, u-\varphi, \Phi) + L(u_n, u_n-u, \Phi).$$

Первое слагаемое в правой части данного равенства линейно по $u_n$, поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n, u_n-u, \Phi) = 0.$$

Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Тогда это множество удовлетворяет $C_0$-условию. Применим к нему лемму 2.1 и обозначим через $B$ и $K_B$ соответствующее банахово пространство и его подмножество. По условию теоремы $u_n(t)$ и $u_n'(t)$ равномерно ограничены в пространствах $L_\infty(0,T;H)$ и $L_\infty(0,T;X)$ соответственно. В силу компактности вложения $H\subset B$ семейство функций $u_n(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C([0,T];B)$. А значит, по теореме Асколи — Арцела имеет место сильная сходимость $u_n(t)\to u(t)$ в $C([0,T];B)$. Для доказательства равностепенной непрерывности заметим, что для всякого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство (см., например, [12, лемма 5.1])

$$\|u_n\|_B \le \varepsilon\|u_n\|_H + C(\varepsilon)\|u_n\|_X.$$

Следовательно,

$$\|u_n(t+\delta)-u_n(t)\|_B \le 2\varepsilon\|u_n\|_{L_\infty(0,T;H)} + C(\varepsilon)|\delta|\|u_n'\|_{L_\infty(0,T;X)}.$$

Напомним, что $0\in \operatorname{int} K_B$. Значит, для любого $\gamma>0$ найдется номер $n_\gamma$ такой, что $\pm\gamma(u_n(t)-u(t)) \in K_B$ $\forall t\in[0,T]$, если $n>n_\gamma$. Обозначим

$$\varphi_{\pm\gamma}(t) = w_0 \pm \gamma(u_n(t)-u(t)).$$

Тогда для почти всех $t\in(0,T)$ имеет место включение $\varphi_{\pm\gamma}(t)\in w_0+(K_B\cap H) = K$. Подставляя эту функцию в неравенство (3.3), после несложных преобразований получим

$$\mp\gamma L(u_n, u_n-u, \Phi) \pm \gamma\int_0^T (f_n(t), u_n(t)-u(t))\Phi(t)dt \pm \gamma(u_{1n}, u_n(0)-u(0))\Phi(0) \le C,$$

а значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(L(u_n, u_n-u, \Phi)| \le C/\gamma.$$

Отсюда в силу произвольности $\gamma$ заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n, u_n-u, \Phi) = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

**Следствие 3.1.** *Пусть множество $K$ удовлетворяет $C$-условию. Пусть для некоторых $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0,T;X)$ имеется последовательность $\{u_n(t)\}_{n\in N} \subset W^\infty$ решений задачи* (3.1), (3.2). *Предположим, что для некоторой $u \in W^\infty$*

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$u_n'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

*Тогда $u(t)$ тоже решение задачи* (3.1), (3.2).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.1, имеем сильную сходимость $u_n(t) \to u(t)$ в $C([0,T];B)$. По условию $u_n \in W_K$ для всех $n$. Следовательно, $u \in K_B$ для всех $t \in [0,T]$, а значит, $u \in K_B \cap H = K$ для п.в. $t \in [0,T]$. Таким образом, $u \in W_K$. Остается применить лемму 3.1. $\square$

Замечание 3.1. Для последовательностей $\{u_{1n}\}_{n\in N}$ и $\{f_n(t)\}_{n\in N}$ мы потребовали сильную сходимость. Однако это условие зачастую можно ослабить. Все, что нам надо, это сходимость к нулю $(u_{1n}, u_n(0)-u(0))$ и $(f_n(t), u_n(t)-u(t))$. Пусть, например, вложение $H \subset X$ компактно. Тогда $u_n(t) \to u(t)$ сильно в $C([0,T],X)$, а значит, вместо сильной сходимости последовательностей можно ограничиться слабой.

Может показаться, что условие леммы слишком ограничительное. Однако вот пример, в котором слабый предел решений задачи решением не является. Пусть $X = H = \ell_2$. Естественный базис в этом пространстве обозначим через $\{e_n\}_{n\in N}$. Будем выделять первую компоненту элементов из $X$ и записывать $x = (x_1, x_2, \dots)$ в виде $x = (x_1, y)$, где $y = (x_2, x_3, \dots)$. Множество $K$ — объединение двух конусов с общим основанием: $K = K_1 \cup K_2$

$$K_1 = \left\{x \in X \mid x_1 \geq 0, x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}|y| \leq 1\right\},$$
$$K_2 = \{x \in X \mid x_1 \leq 0, -x_1 + 2\sqrt{3}|y| \leq 3\}.$$

Будем рассматривать простейшее уравнение

$$u''(t) = 0.$$

По аналогии с конечномерным случаем будем говорить о движении частицы в множестве $K$. В начальный момент $u'(0) = (1,0,0,\dots)$. Предполагается, что все удары частицы абсолютно упругие. Углы конусов подобраны так, что частица сначала движется до столкновения с границей конуса $\partial K_1$, отразившись от стенки движется до границы $\partial K_2$, на которую она падает под прямым углом. Значит, после отражения частица движется обратно по той же самой траектории. Главной особенностью данного примера является следующий факт. Изначально вся энергия сосредоточена в первой компоненте («гармонике»). После первого удара некоторая (вполне определенная) часть энергии переносится в другие компоненты, а в какие именно зависит от начального значения $u(0)$. Выбирая $u(0)$ подходящим образом, можно добиться передачи энергии во все более дальние компоненты. В соответствии с этим для всякого $n > 1$ рассмотрим движение частицы с начальными данными $u_{0n} = \frac{1}{n}e_n$. Рассмотрим слабый предел решений задачи с этими начальными данными. Легко видеть, что предельная функция $u(t)$ имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{при } t \leq 1, \\ (1 - \frac{t-1}{2}, 0) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ \left(\frac{t-2}{2}, 0\right) & \text{при } 2 \leq t. \end{cases}$$

Сначала частица движется с единичной скоростью до тех пор, пока не попадет в вершину конуса $K_1$. После этого происходит отражение и частица движется обратно со скоростью $1/2$. Предельная функция все еще является решением задачи, хотя часть энергии уже потеряна (удар оказался неупругим). Но когда частица приходит в точку $x = 0$, скорость вновь меняет знак, как если бы произошло отражение. В этот момент данная функция перестает быть решением задачи.

Данный пример может показаться искусственным, но он важен тем, что наглядно показывает роль геометрии границы множества $K$. Углы способны непредсказуемым образом перемещать энергию из одних «гармоник» в другие. Это лишний раз показывает, что трудности в обосновании предельного перехода носят объективный характер и связаны с существом дела. В частности, нет каких-то особых оснований ожидать, что решения уравнений со штрафом будут сходиться к решению исходной задачи. В этом контексте стоит отметить, что $C$-условие запрещает появление конических углов на границе $K$.

Нам понадобится еще одна техническая лемма.

**Лемма 3.2.** *Пусть $\psi \in H^*$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$ такая, что*
$$|\psi(u)| \le \varepsilon\|u\|_H + C(\varepsilon)\|u\|_X \quad \forall u \in H.$$

Доказательство. Доказательство стандартное от противного. Пусть утверждение неверно для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $n > 0$ найдется такой элемент $u_n \in H$, что $\|u_n\|_H = 1$ и
$$|\psi(u_n)| > \varepsilon + n\|u_n\|_X.$$
Переходя, если надо, к подпоследовательности, отсюда заключаем, что для некоторого $v \in H$ имеет место слабая сходимость $u_n \underset{H}{\rightharpoonup} v$. Следовательно, $\psi(u_n) \to \psi(v)$. С другой стороны, $u_n \to 0$ сильно в $X$. Значит, $v = 0$ и получаем противоречие: $\varepsilon < |\psi(u_n)| \to 0$. $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать разрешимость задачи (3.1), (3.2).

**Теорема 3.1.** *Пусть множество $K$ удовлетворяет $C$-условию. Пусть $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0,T;X)$. Тогда существует решение $u(t)$ задачи* (3.1), (3.2) *такое, что $u \in W^\infty$.*

Доказательство. Воспользуемся методом штрафа. Для этого надо построить соответствующий оператор штрафа. Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Это множество удовлетворяет $C_0$-условию. Далее исключительно ради простоты считаем, что $w_0 = 0$ и $K_0 = K$. В общем случае следует использовать сдвиг вида $u(t) - w_0$.

В силу леммы 2.1 множество $\Phi_{K_0}$ компактно. Значит, по теореме Крейна — Мильмана оно является замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Обозначим его через $E_K$. Пусть $\{\psi_k\}_{k\in N} \subset E_K$ — счетное плотное подмножество в $E_K$. Как обычно, определяем положительную срезку
$$\xi^+ = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \ge 0. \end{cases}$$
Для всякой $u(t) \in W$ и $k \ge 1$ обозначим
$$b^+_{k,u}(t) = (\psi_k(u(t)) - 1)^+,$$

и для всякого $n \geq 1$ определим $\beta_{n,u}(t) \in H^*$ по формуле

$$\beta_{n,u}(t) = n \sum_{k=1}^{n} b_{k,u}^{+}(t)\psi_k.$$

С геометрической точки зрения мы заменили множество $K_0$ пересечением конечного количества полупространств, порожденных некоторыми опорными функционалами. Элемент $\beta_{n,u}$ состоит из суммы слагаемых, каждое из которых штрафует выход из соответствующего полупространства.

Отметим, что для любой $\varphi(t) \in W_K$ справедливо неравенство

$$\beta_{n,u}(t)(u(t) - \varphi(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t \in (0,T). \tag{3.4}$$

Действительно, рассмотрим какое-нибудь $k \geq 1$. По определению $\Phi_{K_0}$ для почти всех $t \in (0,T)$ имеем неравенство $\psi_k(\varphi(t)) \leq 1$. Но тогда там, где $b_{k,u}^{+}(t) > 0$, выполняется неравенство $\psi_k(u(t) - \varphi(t)) \geq 0$. А значит, $b_{k,u}^{+}(t)\psi_k(u(t) - \varphi(t)) \geq 0$ для п.в. $t \in (0,T)$.

На интервале $(0,T)$ рассмотрим следующую штрафную задачу:

$$u''(t) + Au(t) + \beta_{n,u}(t) = f(t), \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{3.6}$$

Разрешимость этой задачи легко устанавливается методом Галёркина. Все действия абсолютно стандартны, поэтому ниже мы даем лишь схему доказательства, опуская второстепенные детали. Пусть $\{e_j\}_{j \in N}$ — ортонормированный базис в $H$. При этом выбираем первый базисный элемент следующим образом:

$$e_1 = u_0/\|u_0\|_H.$$

Как обычно, для $M > 0$ будем искать приближенное решение $u_M$ в виде

$$u_M = \sum_{j=1}^{M} a_{M,j}(t)e_j.$$

Начальные данные $a_{M,j}(0), a'_{M,j}(0)$ задаем следующим образом. Обозначим $H_M = \operatorname{span}\{e_j\}_{j \leq M}$. Тогда для задания начальных данных $a_{M,j}(0)$, $a'_{M,j}(0)$ следует указать два элемента $u_{0M}, u_{1M} \in H_M$. В силу специального выбора базиса можно положить $u_{0M} = u_0$. При этом, очевидно, $u_{0M} \in H_M \cap K$. Пусть $P_M$ — ортогональный проектор в пространстве $X$ на подпространство $H_M$. Положим $u_{1M} = P_M u_1$. Так как вложение $H \subset X$ плотно, а конечные линейные комбинации всех базисных элементов плотны в $H$, то $u_{1M} \to u_1$ в $X$ при $M \to \infty$.

Далее для простоты записи индекс $M$ опускаем. Для получения первой оценки умножаем уравнение (3.5) на $u'(t)$ и интегрируем по $t$. Заметим, что поскольку $u_0 \in K$, то $b_{k,u}^{+}(0) = 0$, $k \leq n$. В результате для всех $t \in (0,T)$ получим

$$\|u'(t)\|_X^2 + (A_0u(t), u(t)) + n\sum_{k=1}^{n}(b_{k,u}^{+}(t))^2 \\ \leq C + C\int_0^t \left(\|u'(s)\|_X^2 + \|u(s)\|_H^2 + \|u(s)\|_X^2\right) ds.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла и условием на оператор $A_0$, отсюда получаем оценку

$$\|u'(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_H^2 + n\sum_{k=1}^{n}(b_{k,u}^{+}(t))^2 \le C_0 \quad \forall t \in (0,T). \tag{3.7}$$

Вторую оценку (она нам понадобится позже) получаем умножением уравнения (3.5) на $u(t)$:

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_0^T b_{k,u}^{+}(t)\,dt \le C_1. \tag{3.8}$$

Важно отметить, что константы $C_0, C_1$ в этих оценках зависят только от $f, u_0, u_1$ и не зависят от $M, n$.

Из этих оценок вытекает существование решения $u_M(t)$ на всем интервале $(0,T)$. Далее переходим к пределу при $M \to \infty$. В результате получим $\overline{u}(t) \in W^\infty$. При этом можно считать, что

$$u_M(t) \rightharpoonup \overline{u}(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$u_M'(t) \rightharpoonup \overline{u}'(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

Легко видеть, что это и есть решение задачи (3.5), (3.6). Некоторые вопросы может вызвать лишь обоснование предельного перехода

$$(\psi_k(u_M(t)) - 1)^+ \to (\psi_k(\overline{u}(t)) - 1)^+ \text{ для п.в. } t \in (0,T).$$

Пусть $1 \le k \le n$. Покажем, что $p_M(t) = \psi_k(u_M(t))$ сходятся к $p(t) = \psi_k(\overline{u}(t))$ сильно в $C[0,T]$ при $M \to \infty$. Для этого применим теорему Асколи — Арцела. Равномерная ограниченность всех $p_M(t)$ следует из равномерной ограниченности $\|u_M\|_H$ (оценка (3.7)). Покажем, что семейство этих функций равностепенно непрерывно. Рассуждение совершенно аналогично тому, что было при доказательстве леммы 3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_2 > t_1$. Применяя лемму 3.2 к функционалу $\psi_k$, получаем

$$|p_M(t_2) - p_M(t_1)| \le 2C_0\varepsilon + C(\varepsilon)\int_{t_1}^{t_2}\|u'(t)\|_X dt \le C(\varepsilon + C(\varepsilon)|t_2 - t_1|).$$

Правую часть в этом неравенстве можно сделать сколь угодно малой, если сначала выбрать малое $\varepsilon$, а затем потребовать нужную малость $|t_2 - t_1|$.

Итак, решение задачи со штрафом получено. Обозначим его через $v_n(t)$. Теперь перейдем к пределу по $n$. Заметим, что в силу (3.4) для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, для функции $v_n(t)$ справедливо неравенство (3.3). Семейство функций $\{v_n(t)\}_{n\in N}$ равномерно ограничено в $W^\infty$. Значит, найдутся элемент $u(t) \in W^\infty$ и подпоследовательность $\{v_{n_k}(t)\}_{k\in N}$ такие, что

$$v_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$v_{n_k}'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

По лемме 3.1 функция $u(t)$ тоже удовлетворяет неравенству (3.3). При этом $v_n(0) = u_0$, а значит, и $u(0) = u_0$. Осталось показать, что $u(t) \in W_K$. Фиксируем $k$ и рассмотрим функционал $\psi_k$. Из оценки (3.7) следует, что для любого $t \in (0,T)$

$$\psi_k(v_n(t)) \le 1 + \sqrt{C_0/n}.$$

Как и раньше, с помощью леммы 3.2 показываем, что $\psi_k(v_n(t)) \to \psi_k(u(t))$ сильно в $C[0,T]$. Следовательно, $\psi_k(u(t)) \le 1$ $\forall t \in (0,T)$. Отсюда сначала заключаем, что соответствующее неравенство верно для всех $\psi \in E_K$, а затем и для всех $\psi \in \Phi_{K_0}$. Теорема доказана. $\square$

## 4. Абсолютно упругий удар

Пусть $u(t)$ — решение задачи (3.1), (3.2). Положим

$$E(t) = \|u'(t)\|_X^2 + 2(A_0 u(t), u(t)).$$

Будем говорить, что для $u(t)$ выполняется *закон сохранения энергии*, если для любой функции $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, справедливо равенство

$$E(0)\Phi(0) + \int_0^T E(s)\Phi'(s)\,ds = 2\int_0^T (A_1 u(s) - f, u'(s))\Phi(s)\,ds.$$

Неформально будем говорить, что в этом случае удары абсолютно упругие.

Теорема 3.1 дает существование какого-то решения, но не дает никакой информации о том, сохраняется для него энергия или нет. Отметим, что это свойство эквивалентно сильной сходимости последовательности решений уравнений со штрафом. Судя по всему, в некоторых случаях такой сходимости нет и энергия не сохраняется. Однако при некоторых дополнительных условиях на множество $K$ требуемую сходимость получить все-таки удается.

**Теорема 4.1.** *Пусть множество $K_X \subset X$ удовлетворяет $C$-условию в пространстве $X$, $K = K_X \cap H$. Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и $\{v_n\}_{n\in N}$ — последовательность решений уравнений со штрафом, которая сходится к решению $u(t)$ задачи* (3.1), (3.2). *Тогда*

$$v_n(t) \to u(t) \quad \text{сильно в } L_\infty(0,T;H), \tag{4.1}$$

$$v_n'(t) \to u'(t) \quad \text{сильно в } L_2(0,T;X) \tag{4.2}$$

*и для $u(t)$ выполняется закон сохранения энергии.*

Доказательство. Пусть $\overline{w} \in \operatorname{int} K_X \cap H$. Пусть $K_0 = K_X - \overline{w}$, $\Phi_{K_0} \subset X$ — поляра множества $K_0$ (напомним, что мы отождествляем $X$ и $X^*$). Как и ранее, для простоты считаем, что $\overline{w} = 0$.

Прежде всего, сделаем одно замечание относительно функционалов $\psi_k \in H^*$ из доказательства теоремы 3.1. Рассмотрим какой-нибудь такой функционал $\psi_k$. По условию теоремы $\operatorname{int} K_X \neq \varnothing$ и $K = K_X \cap H$. Значит, для некоторого $r > 0$ и любого $w \in H$ имеем

$$\pm r\frac{w}{\|w\|_X} \in K, \quad |\psi_k(w)| \le \frac{\|w\|_X}{r}.$$

Следовательно, по непрерывности функционал $\psi_k$ продолжается до функционала $\psi_k' \in X^*$, причем $\|\psi_k'\|_{X^*} \le 1/r$. Кроме этого, по непрерывности имеет место неравенство $\psi_k'(x) \le 1$ для всех $x \in K_X$. Поэтому $\psi_k' \in \Phi_{K_0}$. В дальнейшем просто считаем, что $\psi_k \in \Phi_{K_0}$.

Пусть $n, m > 0$. Положим $w_{n,m}(t) = v_n(t) - v_m(t)$. Далее там, где это не вызовет недоразумений, индексы $n, m$ будем опускать. Кроме этого, вместо $b_{k,u}^+$ и $\beta_{n,u}$ пишем просто $b_k^+$ и $\beta_n$. Легко видеть, что функция $w(t)$ удовлетворяет системе

$$w''(t) + Aw(t) + \chi(t) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \tag{4.3}$$

где $\chi(t) = \beta_n(t) - \beta_m(t)$. Мы хотели бы умножить уравнение (4.3) на $w'(t)$ и получить оценку для $w(t)$ в пространстве $W^\infty$. Но такое простое рассуждение не проходит. Вместо этого будем умножать уравнение на $Qw'(t)$, где $Q$ —

некий специальный проектор в $X$. Этот проектор будет подобран так, чтобы $(\chi(t), Qw'(t))$ было мало, но при этом $(A_0 w, Qw'(t)) \sim (A_0 w, w'(t))$.

Сначала докажем сходимость (4.1). В силу условий на $A_0, A_1$ найдется такое $q > 0$, что

$$q(\|u\|_X^2 + (A_0 v, v)) \geq |(A_1 v, u)| \quad \forall u \in X, \forall v \in H.$$

По лемме 2.1 поляра $\Phi_{K_0} \subset X$ компактна, а значит, вполне ограничена. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство $\eta_1, \ldots, \eta_L \subset H$, образующее $\varepsilon$-сеть в $\Phi_{K_0}$. Вообще говоря, элементы $\eta_k$ могут не принадлежать $\Phi_{K_0}$, но для нас это неважно, главное чтобы это семейство было ограничено в $X$ константой, не зависящей от $\varepsilon$. Рассмотрим штрафное слагаемое $\beta_n(t)$. По построению оно имеет вид

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b_k^+(t) \psi_k,$$

где $\psi_k \in \Phi_{K_0}$, $k = \overline{1, n}$. Используя $\varepsilon$-сеть, это слагаемое можно записать в виде

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b_k^+(t)(\psi_k - \eta_{j_k}) + \sum_{j=1}^{L} \widetilde{b}_j(t) \eta_j,$$

причем $\|\psi_k - \eta_{j_k}\|_X \leq \varepsilon$, $k = \overline{1, n}$. Аналогичное представление имеет место и для $\beta_m(t)$. В результате с учетом оценки (3.8) получаем, что

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \sum_{j=1}^{L} \theta_j(t) \eta_j,$$

где $\|\chi_0(t)\|_{L_1(0,T;X)} \leq 2C_1 \varepsilon$ и $\|\theta_j(t)\|_{L_1(0,T)} \leq 2C_1$, $j = \overline{1, L}$.

Пусть $X_L = \operatorname{span}\{\eta_j\}_{j \leq L}$, $X_L \subset X$. Обозначим через $P$ ортогональный проектор в $X$ на это подпространство $X_L$ и $Q = I - P$. Умножая уравнение (4.1) на $2e^{-2qt} Qw'(t)$ и интегрируя, для $t \in (0, T)$ получаем

$$e^{-2qt}(A_0 w(t), w(t)) \leq 4\varepsilon C_1 \|w_t\|_{L_\infty(0,T;X)} + 2 \int_0^t e^{-2qs}(A_0 w(s), Pw'(s))\, ds. \quad (4.4)$$

Пусть $e_1, \ldots, e_L$ — ортонормированный базис в $X_L$. Заметим, что в силу выбора элементов $\eta_j \in H$ имеем и $e_j \in H, j = \overline{1, L}$. Тогда

$$(A_0 w(s), Pw'(s)) = \sum_{j=1}^{L} (w'(s), e_j)(w(s), A_0 e_j). \quad (4.5)$$

Напомним, что речь идет о функции $w_{n,m}(t) = v_n(t) - v_m(t)$. По построению все эти функции равномерно ограничены в $W^\infty$. Поэтому $(w'_{n,m}(s), e_j) \in L_\infty(0, T)$ $\forall j = \overline{1, L}$. Как и раньше, из леммы 3.2 получаем, что $(w_{n,m}(s), A_0 e_j) \to 0$ $\forall j = \overline{1, L}$ сильно в $C[0, T]$. Соединяя (4.4) и (4.5), переходим к пределу при $n, m \to \infty$. В результате имеем неравенство

$$\overline{\lim_{n,m \to \infty}} \|v_n(t) - v_m(t)\|_{L_\infty(0,T;H)} \leq C\varepsilon.$$

Отсюда и из произвольности $\varepsilon$ следует (4.1).

Теперь уже легко доказать сходимость (4.2). Пусть весовая функция $\Phi(t) \in C^1[0,T]$ такова, что $\Phi(t) \geq 0$, $t \in (0,T)$ и $\Phi(T) = 0$. Умножаем уравнение (4.3) на $\Phi(t)w(t)$ и интегрируем:

$$\int\limits_0^T \|w'(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt = \int\limits_0^T \Phi(t)\left((Aw(t),w(t)) + (\chi(t),w(t))\right)\,dt$$
$$+ \int\limits_0^T (w'(t),w(t))\Phi'(t)\,dt.$$

Заметим, что $\chi \in L_1(0,T;X)$. В силу равномерной ограниченности всех $w'_{n,m}(t)$ в $L_\infty(0,T;X)$ и сходимости (4.1) получаем

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \int\limits_0^T \|v'_n(t) - v'_m(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем весовую функцию $\Phi(t)$ так, чтобы $\Phi(t) = 1$ для $0 \leq t \leq T - \varepsilon$. Тогда

$$\int\limits_0^T \|v'_n - v'_m\|_X^2\,dt \leq \int\limits_0^T \|v'_n(t) - v'_m(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt + 2\varepsilon\big(\|v'_n\|^2_{L_\infty(0,T;X)} + \|v'_m\|^2_{L_\infty(0,T;X)}\big).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \int\limits_0^T \|v'_n - v'_m\|_X^2\,dt \leq C\varepsilon.$$

Отсюда следует (4.2).

Покажем, что для предельного решения выполняется закон сохранения энергии. Пусть $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$. Мы только что доказали сильную сходимость последовательности $v_n(t)$. В силу этого достаточно установить, что

$$J_n = \int\limits_0^T (\beta_n(s), v'_n(s))\Phi(s)\,ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Легко видеть, что

$$2J_n = -\int\limits_0^T n\sum_{k=1}^n (b_k^+(s))^2 \Phi'(s)\,ds.$$

Отсюда, используя (3.7) и (3.8), получаем

$$2|J_n| \leq C \sup_{k,s} b_k^+(s) \leq C/\sqrt{n}.$$

Следовательно, $J_n \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Стоит отметить, что главную роль в этом доказательстве играет некоторая специальная $\varepsilon$-сеть. Существование такой сети обеспечивает $C$-условие для множества $K_X$. В том случае, когда вложение $H \subset X$ компактно, условия на множество $K$ можно ослабить. Эти условия носят несколько громоздкий характер и мы их не приводим.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Paoli L., Schatzman M.* Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d′énergie // Modél. Math. and Computer Modelling (M2AN). 1993. V. 27. P. 673–717.
2. *Schatzman M.* Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problems // Math. and Computer Modelling. 1998. V. 28, N 4–8. P. 1–18.
3. *Ballard P.* The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints // Arch. Rational Mech. Anal. 2000. V. 154. P. 199–274.
4. *Schatzman M.* A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: The vibrating string with a concave obstacle // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 73, N 1. P. 138–191.
5. *Bamberger A., Schatzman M.* New results on the vibrating string with a continuous obstacle // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14, N 3. P. 560–595.
6. *Lebeau G., Schatzman M.* A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary // J. Differ. Equ. 1984. V. 53. P. 309–361.
7. *Bonafini M., Novaga M., Orlandi G.* A variational scheme for hyperbolic obstacle problems // Nonlinear Anal. 2019. V. 188. P. 389–404.
8. *Ahn Jeongho, Steawart David E.* An Euler–Bernoulli beam with dynamic contact: discretization, convergence and numerical results // SIAM J. Numer. Anal. 2005. V. 43, N 4. P. 1455–1480.
9. *Ahn Jeongho, Steawart David E.* Existence of solutions for a class of impact problems without viscosity // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38, N 1. P. 37–63.
10. *Ahn Jeongho, Park Eun-Jae.* Dynamic frictionless contact of a nonlinear beam with two stops // Appl. Anal.: An Intern. J. 2014. DOI:10.1080/00036811.2014.931026.
11. *Артюшин А. Н.* Вариационные неравенства для волнового уравнения с ограничением на решение. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 5. С. 1033–1035.
12. *Лионс Ж. -Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.


*Поступила в редакцию 15 марта 2026 г.*
*После доработки 30 марта 2026 г.*
*Принята к публикации*

Артюшин Александр Николаевич (ORCID ?) **?!**
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alexsp3@yandex.ru