

Понятие t -базиса и применение к нетеровости одной банаховозначной краевой задачи с косо́й производной

Б.Т. Билалов, С.Р. Садыгова, Йонджа Сезер

Университет Одлар Юрду, Баку, Азербайджан,

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,
AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вахабзаде 9

Технический университет Йылдыз, Стамбул, Турция

Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку,
Азербайджан

e-mail: b_bilalov@mail.ru

s_sadigova@mail.ru

ysezer@yildiz.edu.tr

В работе рассматривается понятие t -базиса в банаховом тензорном произведении и вопрос о t -базисности системы экспонент $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве Бохнера $L_p(J; X)$, $1 < p < +\infty$, на промежутке $J = [-\pi, \pi)$, в случае, когда X есть UMD пространство. Вводится понятие $$ -условие Коши-Римана, порожденного инволюцией $(*)$ в X и исходя из этих понятий определяется класс X -значных гармонических в единичном круге на комплексной плоскости функций $h_p^{+,R}(X)$. В этом классе рассматривается одна краевая задача с косо́й производной для уравнения Лапласа и дан критерий разрешимости этой задачи. Также устанавливается критерий нетеровости этой задачи.*

Ключевые слова: пространство Бохнера, X -значные гармонические функции, задача с косо́й производной, нетеровость

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с применением в теории дифференциальных уравнений (в особенности в теории эволюционных уравнений) интерес к анализу в пространствах банаховозначных функций очень большой. В этом направлении сделаны большие успехи после того, как обобщены многие результаты гармонического анализа на банаховозначный случай, когда рассматриваемое пространство обладает так называемое UMD свойством. Эти направления освещены в монографиях различных математиков (см. напр., [1–4]). Отметим, что теория банаховозначных (в основном гилбертовозначных) дифференциальных уравнений от одной переменной с операторными коэффициентами, по сравнению со случаем от многих переменных достаточно хорошо изучены (по этому поводу можно рассмотреть напр., монографии [5–8] и др.). В последнее время число работ, посвященных к банаховозначным эллиптическим уравнениям возрос (см., напр., [9–16] и их литературы).

В данной работе результаты, полученные в работах [17, 18], применяются к одной банаховозначной граничной задаче. А именно, рассматривается понятие t -базиса в банаховом тензорном произведении и вопрос о t -базисности системы экспонент $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве Бохнера $L_p(J; X)$, $1 < p < +\infty$, на промежутке $J = [-\pi, \pi)$, в случае когда X обладает UMD свойством. Вводится

понятие $*$ -условие Коши-Римана, порожденного инволюцией $(*)$ в X и исходя из этих понятий определяется класс X -значных гармонических в единичном круге на комплексной плоскости функций $h_p^{+;R}(X)$. В этом классе рассматривается одна краевая задача с косою производной для уравнения Лапласа и дан критерий разрешимости этой задачи. Также устанавливается критерий нетеровости этой задачи. Отметим, что скалярный случай полученных результатов ранее были получены в работе [23].

Следует отметить, что ранее обобщения условий Коши-Римана на банаховозначный случай даны в монографиях [5, 6]. А именно, в монографии Ж. Дедонне [5] (см. стр. 263, утверждение (9. 10. 2)) в случае одной комплексной переменной эти условия приобретают вид: Пусть $A \subset C$ открытое множество, $f(x; y) : A \rightarrow X$ непрерывно дифференцируемое отображение на комплексное банахово пространство X . Тогда для того чтобы функция $g(x + iy) = f(x; y)$ была аналитической в A , необходимо и достаточно, чтобы в A выполнялось соотношение $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Аналогичное обобщение на случай комплексное аффинное пространство дано в монографии Л. Шварца [6] (см. стр. 327). Обобщение на случай многих комплексных переменных (относительно скалярнозначных функций) дано в монографии И. Стейна и Г. Вейса [19].

Представленное в данной работе условия Коши-Римана носит иной характер, оно является непосредственным обобщением классического условия Коши-Римана. А именно, если в качестве B -пространства X взять $X = C$ и в C инволюцию определить как $\lambda^* = \bar{\lambda}$ – комплексное сопряжение, то $*$ -условия Коши-Римана превращаются в обычные условия Коши-Римана.

Рассмотренная задача продемонстрирует применения понятия t -базиса, введенного в работах [17, 18, 20]. Более того, при получении основных результатов применяются современные математические результаты теории анализа в банаховых пространствах, а также предложен абстрактный подход к определению гармонических функций.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Примем следующие обозначения. N – натуральные числа; $Z_+ = \{0\} \cup N$; Z – целые числа; R – действительные числа; C – комплексные числа; $\omega = \{z \in C : |z| < 1\}$; $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$; $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$; $\omega^c = C \setminus \bar{\omega}$; H – пространство – гильбертово пространство; $(\bar{\cdot})$ – комплексное сопряжение; B – пространство – банахово пространство; \mathcal{B} – множество всех банаховых пространств; $\|\cdot\|_X$ – норма в X ; $[X; Y]$ – B – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y ; $[X] = [X; X]$; X^* – сопряженное к X пространство; R_T – область значений оператора T ; $Ker T$ – ядро оператора T ; M – замыкание множества M ; $J \equiv [-\pi; \pi)$; δ_{ij} – символ Кронекера; p' – сопряженное к p число: $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Через c будем обозначать постоянные (может быть различные в разных местах). Будем считать, что все рассматриваемые B -пространства определены на поле C .

2.2. Понятие t -базиса. Пусть $X; Y; Z \in \mathcal{B}$ и $t : X \times Y \rightarrow Z$ – билинейное отображение, которое удовлетворяет условию

$$\exists \delta > 0 : \delta \|x\|_X \|y\|_Y \leq \|t(x; y)\|_Z \leq \delta^{-1} \|x\|_X \|y\|_Y, \forall (x; y) \in X \times Y.$$

Для простоты обозначений в дальнейшем примем $xy = t(x; y)$. Для множества $M \subset Y$ через $L_t[M]$ будем обозначать его t -оболочку, определенную соотношением

$$L_t[M] = \left\{ z \in Z : \exists \{(x_k; y_k)\}_1^{n_0} \subset X \times M \Rightarrow z = \sum_{k=1}^{n_0} x_k y_k \right\}.$$

Систему $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ будем называть t -полной в Y , если $\overline{L_t[\{y_k\}_{k \in N}]} = Z$ (замыкание берется в Z).

Операторы $\{t_n\}_{n \in N} \subset [Z; X]$ будем называть t -биортогональной к системе $\{y_k\}_{k \in N} \subset Y$, если $t_n(x y_k) = \delta_{nk} x$, $\forall x \in X \ \& \ \forall n; k \in N$.

Систему $\{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ назовем t -базисом в Z , если $\forall z \in Z$ имеет единственное разложение вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $\{x_k\}_{k \in N} \subset X$.

Тройку $(X; Y; Z)$ будем называть t_Y -инвариантной, если из $\{(x_k; \vec{y}_k)\} \subset X \times Y : \sum_k x_k \vec{y}_k = 0$, следует $\sum_k v(\vec{y}_k) x_k = 0$, $\forall v \in Y^*$.

Тройку $(X; Y; Z)$ назовем t -плотной, если $\overline{L[X \times Y]} = Z$ (замыкание берется в Z).

Справедлив следующий критерий t -базисности.

Теорема 2.1. Пусть тройка $(X; Y; Z)$ является t_Y -инвариантной и t -плотной. Система $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ образует t -базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены следующие утверждения: (i) \vec{y} t -полна в Z ; (ii) \vec{y} имеет t -биортогональную систему $\{t_n\}_{n \in N} \subset [Z; X]$; (iii) проекторы $\{P_m\}_{m \in N} \subset [Z]$: $P_m(z) = \sum_{n=1}^m t_n(z) y_n$, $\forall z \in Z \ \& \ \forall m \in N$, равномерно ограничены, т.е.

$$\sup_m \|P_m\|_{[Z]} < +\infty.$$

Более подробно этими понятиями можно познакомиться из работ [17, 18, 20].

Рассмотрим случай, когда $X; Y \in \mathcal{B}$ и $X \bar{\otimes} Y = Z$ есть их некоторое банахово тензорное произведение. Билинейное отображение $t : X \times Y \rightarrow Z$ определим выражением $t(x; y) = x \otimes y$, где $x \otimes y$ есть элементарное тензорное произведение элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда ясно, что тройка $(X; Y; Z)$ в этом случае является t_Y -инвариантной и t -плотной (см. напр. [21]). Тогда из Теоремы 2.1 следует

Следствие 2.1. Пусть $X; Y \in \mathcal{B}$ и $Z = X \bar{\otimes} Y$. Система $\vec{y} \subset Y$ образует t -базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)-(iii) Теоремы 2.1.

2.3. Пространство Бохнера $L_p(S; X)$. UMD свойство. Пусть $(S; \mathcal{A}; \mu)$ некоторое измеримое пространство с мерой μ . Как обычно через $L_p(S; X)$, $1 \leq p < +\infty$, обозначим пространство Бохнера X -значных на S функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(S; X)} = \left(\int_S \|f\|_X^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Напомним UMD свойство.

Определение 2.1. Говорят, что пространство $X \in \mathcal{B}$ обладает UMD свойством, если для $\forall p \in (1, \infty)$ существует константа $\beta \geq 0$ (зависящей только от p и X), такая, что если $(S; \mathcal{A}; \mu)$ есть σ -конечное измеримое пространство (с мерой μ), $\{F_n\}_{n=0}^m$ есть σ -конечная фильтрация и $\{f_n\}_{n=0}^m$ есть конечные мартингалы в $L_p(S; X)$, то для $\forall \{\varepsilon_n\} : |\varepsilon_n| = 1, n = \overline{1, m}$, выполнено

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n df_n \right\|_{L_p(S; X)} \leq \beta \left\| \sum_{n=1}^m df_n \right\|_{L_p(S; X)},$$

где $df_n = f_n - f_{n-1}$ -разность мартингалов.

Множество всех пространств, обладающих UMD свойством, обозначим также через UMD.

Более подробно касающимися фактами можно познакомиться в монографии [1].

Для дальнейшего изложения примем следующее соглашение. отождествим единичную окружность γ и полуинтервал J отображением $e^{it} : J \leftrightarrow \gamma$. Аналогично пространству $L_p(J; X)$, порожденного мерой Лебега dx в J , определяется бохнерово пространство $L_p(\gamma; X)$, порожденного мерой dl (dl есть элемент длины γ) на γ . Отображение e^{it} позволяет отождествить также пространства $L_p(J; X)$ и $L_p(\gamma; X)$ и примем $L_p(X) =: L_p(J; X) \cong L_p(\gamma; X)$. Для функции $f : \omega \rightarrow X$ примем $f_r(t) = f(re^{it})$, $\forall re^{it} \in \omega$.

Линейное пространство всех X -значных тригонометрических полиномов вида

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt},$$

с коэффициентами $\{a_k\} \subset X$, обозначим через $P(X)$.

2.4. Мультипликатор. t -Рисс свойство. На $P(X)$ определим мультипликатор $m : P(X) \rightarrow L_p(X)$, выражением

$$(mP)(t) = \tilde{P}(t) = -i \sum_k \text{sign}(k) a_k e^{ikt},$$

где

$$P(t) = \sum_k a_k e^{ikt} \in P(X),$$

и

$$\text{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -1, & k < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее X -значное преобразование Гильберта

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad x \in R.$$

Хорошо известна следующая

Теорема 2.2 ([1]). (*Burkholder- Bourgain*). Пусть $X \in \mathcal{B}$ & $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (1) $X \in \text{UMD}$; (2) $H \in [L_p(R; X)]$.

Также справедливо

Утверждение 2.1 ([1]). Пусть $X \in \mathcal{B}$ & $p \in (1, +\infty)$. Тогда, если $H \in [L_p(R; X)]$, то $t \in [L_p(X)]$.

Всюду в дальнейшем для $f \in L_1(X)$ примем

$$\hat{f}_k =: t_k(f) =: \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad \forall k \in Z.$$

Используя Теорему 2.2 и Утверждение 2.1 в работе [7] доказана следующая

Теорема 2.3 ([7]). Пусть $X \in UMD$ & $p \in (1, +\infty)$. Тогда система экспонент $\mathcal{E} \equiv \{e^{int}\}_{n \in Z}$ образует t -базис в $L_p(X)$, т.е. $\forall f \in L_p(X)$ имеет единственное разложение в $L_p(X)$ вида

$$f(t) = \sum_{n \in Z} \hat{f}_n e^{int}.$$

Более того, для $\forall t \in Z$, следующие t -Рисс проекторы

$$(R_m^+ f)(t) =: f_+(t) =: \sum_{n=m}^{+\infty} \hat{f}_n e^{int},$$

$$(R_m^- f)(t) =: f_-(t) =: \sum_{n=-\infty}^{m-1} \hat{f}_n e^{int},$$

ограничены в $L_p(X)$, т.е. $R_m^\pm \in [L_p(X)]$.

2.5. $h_p(X)$ - класс гармонических функций. *-сопряженные гармонические функции. В этой части будем предполагать, что $X \in UMD$ & $p \in (1, +\infty)$. Пусть X обеспечено инволюцией $(*)$, которая обладает свойствами:

- (i) $*$: $X \leftrightarrow X$ — является биективным отображением X на X ;
- (ii) $x^{**} = x, \forall x \in X$;
- (iii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \forall \lambda \in C \& \forall x \in X$;
- (iv) $\|x^*\|_X = \|x\|_X, \forall x \in X$.

Следуя работе [22] примем

$$X^R = \{x \in X : x^* = x\},$$

и пусть

$$X^{iR} = \{ix : x \in X^R\}.$$

Таким образом, $\forall \varpi \in X$ имеет единственное представление в виде

$$\varpi = u + i\vartheta, \quad u, \vartheta \in X^R.$$

Примем обозначения $u = Re^* \varpi$ & $\vartheta = Im^* \varpi$ и назовем u — *-действительная (ϑ — *-мнимая) часть элемента ϖ . Итак, справедлива прямая сумма

$$X = X^R \dot{+} X^{iR} = X^R \dot{+} iX^R. \quad (2.1)$$

Пространство X с инволюцией " * ", будем обозначать как $(X; *)$. Далее нам понадобятся следующие пространства X - значных функций. Для $z \in \omega$ определим частные производные

$$\partial_x f(z) =: \lim_{R \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

$$\partial_y f(z) =: \lim_{R \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h}.$$

Положим

$$C^1(\omega; X) = \{f : \omega \rightarrow X : \partial_x f; \partial_y f \in C(\omega; X)\},$$

где $C(\omega; X)$ есть линейное пространство всех непрерывных функций $f : \omega \rightarrow X$. Аналогичным образом определяем

$$C^2(\omega; X) = \{f \in C(\omega; X) : \partial_{xx} f; \partial_{xy} f; \partial_{yy} f \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть

$$\Delta f(z) = \partial_{xx} f(z) + \partial_{yy} f(z),$$

где $z = x + iy$.

Примем следующий класс X -значных гармонических в ω функций

$$H(\omega; X) = \{f \in C^2(\omega; X) : \Delta f(z) = 0, \forall z \in \omega\}.$$

Прямая сумма (2.1) порождает следующую прямую сумму

$$H(\omega; x) = H^R(\omega; X) \dot{+} iH^R(\omega; X),$$

где

$$H^R(\omega; x) = \{f \in H(\omega; X) : f(z) \in X^R, \forall z \in \omega\}.$$

Для $z \in \omega$ определим следующее комплексное производное

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

и вводим в рассмотрение следующий класс X -значных аналитических в ω функций

$$A(\omega; X) = \{f \in C(\omega; X) : f' \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть $A^R(\omega; X) = Re^* A(\omega; X)$ и также положим

$$A_0(\omega; X) = \{\varpi \in A(\omega; X) : (Im^* \varpi)(0) = 0\}.$$

В работе [22] установлена следующая

Лемма 2.1. Пусть $(X; *) \in \mathcal{B}$. Тогда относительно классов гармонических функций $H(\omega; X)$ и аналитических функций $A(\omega; X)$ справедливы следующие утверждения:

1) имеет место прямая сумма $H(\omega; X) = H^R(\omega; X) \dot{+} iH^R(\omega; X)$, а также справедливо $A(\omega; X) \subset A^R(\omega; X) \dot{+} iA^R(\omega; X)$;

2) $A(\omega; X) \subset H(\omega; X)$ (собственное включение);

3) пусть $\varpi \in H(\omega; X)$. Тогда $\varpi \in A(\omega; X) \Leftrightarrow u = Re^* \varpi$ и $v = Im^* \varpi$ удовлетворяют *-условию Коши-Римана

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned} \right\};$$

4) $A^R(\omega; X) \equiv H^R(\omega; X)$;

5) линейные пространства $H^R(\omega; X)$ и $A_0(\omega; X)$ изоморфны и оператор $T = I + iI^*$ осуществляет соответствующий изоморфизм, где I – единичный в $H^R(\omega; X)$ оператор и

$$(I * u)(x; y) = \int_0^{(x; y)} -\partial_y u dx + \partial_x u dy, \quad \forall (x; y) \in \omega, \quad \forall u \in H^R(\omega; X).$$

Через K обозначим следующий X -значный интеграл типа Коши

$$(Kf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \omega.$$

Положим $L_p^+(X) = R^+(L_p(X))$, где $R^+ = R_0^+ - t$ - Рисс проектор и пусть

$$H_p(X) = \{F \in A(X) : \exists f \in L_p^+(X) \Rightarrow F = Kf\}.$$

Исходя из класса $H_p(X)$ определим

$$h_p^R(X) = Re^* H_p(X).$$

По результатам работы [22] относительно функции $f \in H_p(X)$ имеет место также представление в виде интеграла Пуассона- Бохнера

$$f(re^{it}) = (Pf^+)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s) f^+(s) ds, \quad \forall re^{it} \in \omega, \quad (2.2)$$

где $P_r(t)$ есть ядро Пуассона для единичного круга

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2},$$

$f^+ = \theta f$ есть некасательные граничные значения функции f на γ и θ соответствующий оператор следа. Норма в $H_p(X)$ определяется выражением

$$\|f\|_{H_p(X)} = \|\theta f\|_{L_p(X)},$$

и оператор $\theta \in [H_p(X); H_p^+(X)]$ есть изометрический изоморфизм.

Из формулы (2.2) непосредственно получаем

$$u(re^{it}) = Re^* f(re^{it}) = (P(Re^* f^+))(re^{it}) = (Pu^+)(re^{it}),$$

где $u^+ = \theta u$. Как установлено в работе [22], оператор $\theta \in [h_p^R(X); L_p^R(X)]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, где $L_p^R(X) = Re^* L_p(X)$. Положим

$$h_p(X) = h_p^R(X) + ih_p^R(X).$$

Очевидно, что $\theta \in [h_p(X); L_p(X)]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, если принять

$$\|u\|_{h_p(X)} = \|\theta u\|_{L_p(X)}.$$

Тогда из Теоремы 2.3 непосредственно получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.2. Пусть $X \in UMD$ & $p \in (1, \infty)$. Тогда система

$$\{1; r^n \cos nt; r^n \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (2.3)$$

образует t -базис в $h_p^R(X)$ (также в $h_p(X)$). Более того, если для $u \in h_p^R(X)$ имеет место

$$u(re^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt) r^n, \quad (2.4)$$

то

$$u^+(e^{it}) = (\theta u)(e^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt).$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Постановка задачи. Нетеровость. Прежде чем перейти к постановке задачи введем в рассмотрение также класс гармонических функций $h_p^{(1)}(X)$:

$$h_p^{(1)}(X) = \{ u \in h_p(X) : \partial_r u; \partial_\varphi u \in h_p(X) \},$$

с нормой

$$\|u\|_{h_p^{(1)}(X)} = \|u\|_{h_p(X)} + \|\partial_r u\|_{h_p(X)} + \|\partial_\varphi u\|_{h_p(X)}.$$

В классе $h_p^{(1)}(X)$ рассмотрим следующую задачу с косою производной

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{r;\varphi} u &= \partial_{rr} u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \varphi u = 0, \text{ в } \omega, \\ \cos \varphi \theta(\partial_r u) + \sin \varphi \theta(\partial_\varphi u) &= f(\varphi), \varphi \in J, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где $f \in L_p(X)$ – заданная функция и $\theta : [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$ – оператор следа.

Рассмотрим оператор $T \in [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$, определенный выражением

$$(Tu)(\varphi) = \cos \varphi \theta(\partial_r u) + \sin \varphi \theta(\partial_\varphi u).$$

Найдем $Ker T$ (ядро) и R_T (область значений) этого оператора.

Итак, пусть $u \in h_p^{(1)}(X)$ и (2.4) есть разложение u по базису (2.3). Для удобства последующих вычислений представим это разложение в виде

$$u(r; \varphi) = u(re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\varphi},$$

где

$$a_n = \begin{cases} u_0^+, & n = 0, \\ \frac{1}{2}(u_n^+ - iu_n^-), & n > 0, \\ \frac{1}{2}(u_{|n|}^+ + iu_{|n|}^-), & n < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\partial_r u = \sum_{n \neq 0} |n| a_n r^{|n|-1} e^{in\varphi}; \partial_\varphi u = \sum_{n \neq 0} i n a_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Тогда из Леммы 2.2 непосредственно следует

$$\theta(\partial_r u) = \sum_{n \neq 0} |n| a_n e^{in\varphi}; \theta(\partial_\varphi u) = \sum_{n \neq 0} i n a_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Разложим функцию $f \in L_p(X)$ по t -базису \mathcal{E} :

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Учитывая граничные условия (3.1) получаем

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \sum_{n \neq 0} |n| a_n e^{in\varphi} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \sum_{n \neq 0} i n a_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Совершив соответствующие преобразования, имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} e^{in\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) a_{n+1} e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}. \quad (3.2)$$

Из этого соотношения следует, что для разрешимости задачи (3.1) выполнение следующих условий

$$t_{-1}(f) = t_0(f) = t_1(f) = 0, \quad (3.3)$$

является необходимым.

Коэффициент a_0 не входит в левую часть соотношения (3.2) и значит он остается произвольной постоянной из X . Для остальных коэффициентов $\{a_n\}$ получаем

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} t_{n+1}(f), & n \geq 1, \\ -\frac{1}{n} t_{n-1}(f), & n \leq -1. \end{cases}$$

В результате для решения $u \in h_p^{(1)}(X)$ задачи (3.1) имеем формальное представление

$$u(r; \varphi) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{t_{n-1}(f)}{|n|} r^{|n|} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_{n+1}(f)}{n} r^n e^{in\varphi}. \quad (3.4)$$

Покажем, что (3.4) на самом деле является решением задачи (3.1). Совершенно очевидно, что $\Delta_{r;\varphi} u(r; \varphi) = 0, \forall r e^{i\varphi} \in \omega$. Покажем, что $u \in h_p^{(1)}(X)$.

Ясно, что $u(0; \varphi) = a_0 = \text{const}$. Следовательно, для $u(r; \varphi)$ имеем

$$u(r; \varphi) = \int_0^r \partial_\rho u(\rho; \varphi) d\rho + a_0.$$

Из этого представления следует, что если $\partial_\rho u \in h_p(X)$, то $u \in h_p(X)$. На самом деле, достаточно это доказать для случая $\partial_\rho u \in h_p^R(X)$. Это условие означает, что $\exists F : \partial_\rho F \in H_p(X) \ \& \ u = Re^*F$ (так как $u = Re^*F \Leftrightarrow \partial_\rho u = Re^*F_\rho$). Нетрудно заметить, что $\partial_\rho F \in H_p(X) \Rightarrow F \in H_p(X)$, и следовательно, $u \in h_p^R(X)$.

Итак, покажем, что $\partial_\rho u \in h_p(X)$. Снова, не ограничивая общности будем считать, что $\partial_\rho u \in h_p^R(X)$ и пусть $F \in A(X) : u = Re^*F$. Продифференцировав из (3.4) получаем

$$\partial_r u = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Положим

$$u_1(r; \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi},$$

$$u_2(r; \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Покажем, что $u_k \in H_p(X)$, $k = 1, 2$. Достаточно доказать, что $u_2 \in H_p(X)$ (для u_1 оно доказывается совершенно аналогично). Совершенно очевидно, что $\Delta u_2 = 0$. Примем

$$u_2(r; \varphi) = e^{-i\varphi} r^{-2} \tilde{u}(r; \varphi),$$

где

$$\tilde{u}(r; \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Нетрудно заметить, что функция $u_2(r; \varphi)$ при $r \rightarrow +0$, стремится равномерно на γ к функции $c_2(f) e^{i\varphi}$. Поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{0 < r < 1} \|u_2(r; \cdot)\|_{L_p(J; X)} < +\infty \Leftrightarrow \sup_{0 < r < 1} \|\tilde{u}(r; \cdot)\|_{L_p(J; X)}. \quad (3.5)$$

Совершенно очевидно, что $\tilde{u} \in A(X)$. С другой стороны, так как $f \in L_p(J; X)$, то из Теоремы 2.3 следует, что $\tilde{u} \in H_p(X)$. Тогда из (3.5) непосредственно следует $u_2 \in H_p(X)$. Следовательно

$$\partial_r u = R\epsilon^* u_1 + R\epsilon^* u_2 \in h_p^R(X).$$

Также имеем

$$\partial_\varphi u = -i \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|} e^{in\varphi} + i \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Из аналогичных соображений получаем $\partial_\varphi u \in h_p^R(X)$. В результате установлено, что $u \in h_p^{(1)}(X)$. Итак, справедлива следующая основная

Теорема 3.1. Пусть $X \in UMD$ & $1 < p < +\infty$. Тогда задача (3.1) разрешима в классе $h_p^{(1)}(X)$ для заданной функции $f \in L_p(X)$, тогда и только тогда, когда выполнены условия t -ортогональности (3.3).

А теперь, рассмотрим вопрос о нетеровости оператора $T \in [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$. Подпространство $h_p^{(1)}(X)$, состоящее из X -значных постоянных функций, отождествим с X . Из соотношения (3.2) непосредственно следует, что $\text{Ker} T = X$. Следовательно, ясно, что если $\dim X = \infty$, то оператор T не является нетеровым (в классическом смысле). Пусть $\dim X = r < +\infty$, и значить $\aleph^+ = \dim \text{Ker} T = r$. С другой стороны, из условий t -ортогональностей (3.3) и из Теоремы 3.1 следует, что факторпространство $L_p(X)/R_T$ и пространство $X^3 = X \times X \times X$ изоморфны (так как, коэффициенты $a_k \in X$, $k = -1; 0; 1$; могут быть произвольными). Следовательно, $\dim(L_p(X)/R_T) = 3r$, и в результате индекс $\aleph(T)$ оператора T равен $\aleph(T) = \dim \text{Ker} T - \dim(L_p(X)/R_T) = -2r$. Подытожив выше высказанные приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $X \in UMD$ & $1 < p < +\infty$. Тогда задача (3.1) нетерова (т.е. оператор T нетеров) тогда и только тогда, когда $\dim X = r < +\infty$. При этом, если $r < +\infty$, то индекс $\aleph(T)$ оператора T равен $\aleph(T) = -2r$.

3.2. Примеры. Рассмотрим некоторые конкретные случаи относительно пространства X с инволюцией (*).

I. $X \equiv C$. В этом случае в качестве инволюции (*) возьмем комплексное сопряжение ($\bar{\cdot}$). Задача (3.1) относительно этого случая изучена в работе [23]. Так как $\dim C = 1$, то по Теореме 3.2 имеем, что задача (3.1) в $h_p^{(1)}(C)$ нетерова и ее индекс равен $\aleph(T) = -2$.

II. $X \equiv L_p(S; d\mu)$, $1 < p < +\infty$. Здесь $L_p(S; d\mu)$ есть лебегово пространство функций $f: S \rightarrow C$ на измеримом пространстве $(S; \mathcal{A}; \mu)$ с σ -конечной мерой μ с нормой

$$\|f\|_{L_p(S; d\mu)} = \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $(f^*)(x) = \overline{f(x)}$, $x \in S$. Очевидно, что f^* является инволюцией в $L_p(S; d\mu)$. По Утверждению 4.2.15 (Фубини) монографии [1, см., стр. 291] $L_p(S; d\mu)$, $1 < p < +\infty$, обладает UMD свойством. Следовательно, относительно таких пространств результаты Теоремы 3.2 верны.

III. $X \equiv \sigma_p$ -классы Шаттена. $\sigma_p \subset [H]$ есть класс компактных операторов, где H некоторые сепарабельное H -пространство. Для полноты изложения определим этот класс. Пусть $\sigma_\infty \subset [H]$ есть класс вполне непрерывных операторов. Собственные числа оператора $(T * T)^{\frac{1}{2}}$, где $T \in \sigma_\infty$, называются s -числами оператора T и их обозначим как $\{s_i(T)\}$. Будем считать, что $\dots s_i \geq s_{i+1} \geq \dots \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Итак

$$\sigma_p = \left\{ T \in \sigma_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(T) < +\infty \right\}.$$

Относительно нормы

$$\|T\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(T))^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty, \\ s_1(T), & p = +\infty, \end{cases}$$

σ_p есть B -пространство. Относительно классов σ_p и их свойств более подробно можно познакомиться напр., из монографий [21, 24, 25].

Определим в σ_p инволюцию $*(T) = T^*$. Из соотношения $s_i(T) = s_i(T^*)$ (см. напр., [24]) непосредственно следует справедливость всех условий (i)-(iv) инволюции. Более того, из результатов монографии [1, см. стр. 297, Example 4.2.21] следует, что σ_p , $1 < p < +\infty$, обладает UMD свойством. Таким образом, результаты Теоремы 3.2 верны и относительно пространства Шаттена $X \equiv \sigma_p$, $1 < p < +\infty$.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки Азербайджана - Грант No AEF-MGC-2024-2(50)-16/02/1- M-02

Авторы выражают благодарность Рецензенту, чьи замечания способствовали улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L. Analysis in Banach Spaces, V.I, Springer, 2016.
- [2] Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L. Analysis in Banach Spaces, V.II, Springer, 2016.
- [3] Arendt C., Batty M., Hieber F. Neubrander: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Second edition. Birkhauser Basel (2011)
- [4] Kreuter M. Vector-valued elliptic boundary value problems on rough domains. Open Access Repostorium der Universitet Ulm, Dissertation (2019).
- [5] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
- [6] Шварц Л. Анализю т. II, М.: Мир, 1972.
- [7] Треногин В. А. Функциональный анализю М.: ФИЗМАТЛИТ, 1980ю
- [8] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962
- [9] Arendt W. Vector-valued holomorphic and harmonic functions// Concrete operators. 2016. v. 3. pp. 68-76.
- [10] Amann H. Elliptic operators with infinite dimensional state space// J. Evol. Equ. 2001. v. 1. pp. 143-188.
- [11] Arendt W., Nikolski N. Vector-valued holomorphic functions revisited// Math. Z. 2000. v. 234, no. 4. pp. 777-805.
- [12] Arendt W., Nikolski N. Addendum: Vector-valued holomorphic functions revisited// Math. Z. 2006. v. 252. pp. 687-689.

- [13] Bonet J., Frerick L., Jorda E. Extension of vector-valued holomorphic and harmonic functions// *Studia Math.* 2007. v. 183. pp. 225–248
- [14] Kreuter M. The Perron solution for vector-valued equations// *Positivity.* 2020, v. 24. pp. 729–752.
- [15] Katzourakis N. On a vector-valued generalisation of viscosity solutions for general PDE systems// *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.* 2022. v. 41, no. (1/2). pp. 93-132.
- [16] Bilalov B.T., Sadigova S.R., Gasymov T.B., Feyzullayev I.Q. On strong solvability of one boundary value problem for X-valued Laplace equation on half disc. (submitted)
- [17] Bilalov B. T., Sadigova S. R. The concept of t-basis and vector-valued Hardy classes// *Turkish Journal of Mathematics.* 2025. v. 49, no 3. pp. 261-286.
- [18] Bilalov B.T., Sadigova S.R., Nasibova N.P., Buyukarslan A. X-valued Smirnov classes and t-basiscity of Faber polynomials. (submitted)
- [19] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974
- [20] Билалов Б.Т. Некоторые вопросы аппроксимации. Баку: Элм, 2016
- [21] Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МИЦНМО, 2014.
- [22] Bilalov B.T., Sadigova S.R., Sezer Y. $h_p(X)$ Class of X-Valued Harmonic Functions and Applications. (submitted)
- [23] Sadigova S. R., Mamedov E. M., Nasibova N. P. On the index of a problem with an oblique derivative in weighted Sobolev space// *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics.* 2024. v. 44, no. 4. pp. 122-138.
- [24] Гохберг И.Ц, Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов. М.: Наука, 1965.
- [25] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Билалов Билал Тельман оглы

Научные учреждения:

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, отдел "Негармонический анализ"

Адрес переписки: AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вахабзаде 9, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, отдел "Негармонический анализ"

Телефон: (+99450) 367 52 19

E-mail: b_bilalov@mail.ru

Садыгова Сабина Рагиб кызы

Научные учреждения: Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, "Лаборатория математических проблем обработки сигналов"

Адрес переписки: AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вахабзаде 9, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, "Лаборатория математических проблем обработки сигналов"

Телефон: (+99450) 454 22 65

E-mail: s_sadigova@mail.ru

Йонджа Сезер

Научные учреждения: Технический университет Йылдыз, Стамбул, Турция

Адрес переписки: Технический университет Йылдыз, махалле Давутпаша, Эсенлер, Стамбул, Турция.

Телефон: (+90) 533 350 50 23

E-mail: ysezer@yildiz.edu.tr