4936_p

УДК 517.957

ПОНЯТИЕ t–БАЗИСА И ПРИМЕНЕНИЕ К НЁТЕРОВОСТИ ОДНОЙ БАНАХОВОЗНАЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б. Т. Билалов, С. Р. Садыгова, Й. Сезер

Аннотация. Рассматривается понятие t-базиса, порожденного тензорным произведением банаховых пространств. Вводится понятие *-гармонической банаховозначной (X-значной) функции, где рассматриваемое пространство X обладает инволюцией (*). Используя тот факт, что классическая система экспонент образует t-базис в бохнеровом пространстве X-значных функций, обладающем UMD-свойством, определяется класс Харди *-гармонических в единичном круге функций. Рассматривается краевая задача с косой производной в этом классе и устанавливается критерий нётеровости и, в частности, однозначной разрешимости этой задачи. Приведены конкретные примеры.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: пространство Бохнера, X-значные гармонические функции, задача с косой производной, нётеровость.

1. Введение

В связи с приложениями в теории дифференциальных уравнений (в особенности в теории эволюционных уравнений) интерес к анализу в пространствах банаховозначных функций очень большой. В этом направлении сделаны большие успехи после того, как обобщены многие результаты гармонического анализа на банаховозначный случай, когда рассматриваемое пространство обладает так называемым UMD-свойством. Эти направления освещены в монографиях различных математиков (см. например, [1–4]). Отметим, что теория банаховозначных (в основном гильбертовозначных) дифференциальных уравнений от одной переменной с операторными коэффициентами по сравнению со случаем многих переменных достаточно хорошо развита (см., например, монографии [5–8] и др.). В последнее время число работ, посвященных банаховозначным эллиптическим уравнениям, возрос (см., например, [9–16] и библиографию в них).

В данной работе результаты, полученные в работах [16, 17], применяются к одной банаховозначной граничной задаче. А именно, рассматриваются понятие t-базиса в банаховом тензорном произведении и вопрос о t-базисности системы экспонент $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ в пространстве Бохнера $L_p(J;X)$, $1<p<+\infty$, на промежутке $J=[-\pi,\pi)$ в случае, когда X обладает UMD-свойством. Вводится $*$-условие Коши — Римана, порожденное инволюцией $(*)$ в X. Определяется

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки Азербайджана, грант No AEF-MGC-2024-2(50)-16/02/1-M-02.

класс X-значных гармонических в единичном круге на комплексной плоскости функций $h_p^{+;R}(X)$. В этом классе рассматривается одна краевая задача с косой производной для уравнения Лапласа и дан критерий разрешимости этой задачи. Также устанавливается критерий нётеровости этой задачи. Скалярный случай полученных результатов ранее был рассмотрен в работе [18].

Следует отметить, что ранее обобщения условий Коши — Римана на банаховозначный случай были даны в монографиях [5, 6]. А именно, в монографии Дьедонне [5] (см. утверждение (9.10.2)) в случае одной комплексной переменной эти условия приобретают следующий вид. Пусть $A \subset C$ — открытое множество, $f(x;y) : A \to X$ — непрерывно дифференцируемое отображение на комплексное банахово пространство X. Тогда для того чтобы функция $g(x+iy) = f(x;y)$ была аналитической в A, необходимо и достаточно, чтобы в A выполнялось соотношение $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Аналогичное обобщение на случай комплексного аффинного пространства дано в монографии Л. Шварца [6] (см. с. 327). Обобщение на случай многих комплексных переменных (относительно скалярнозначных функций) дано в монографии [19].

Представленное в данной работе условие Коши — Римана носит иной характер, оно является непосредственным обобщением классического условия Коши — Римана. А именно, если в качестве B-пространства X взять $X = C$ и в C инволюцию определить как $\lambda^* = \overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение, то $*$-условия Коши — Римана превращаются в обычные условия Коши — Римана.

Рассмотренная задача продемонстрирует применения понятия t-базиса, введенного в работах [16, 17, 20]. Более того, при получении основных результатов используются современные средства анализа в банаховых пространствах, а также предложен абстрактный подход к определению гармонических функций.

2. Необходимые сведения

2.1. Обозначения. N — натуральные числа; $Z_+ = \{0\} \cup N$; Z — целые числа; R — действительные числа; C — комплексные числа; $\omega = \{z \in C : |z| < 1\}$; $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$; $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma; \omega^c = C \backslash \overline{\omega}$; H-пространство — гильбертово пространство; $\overline{(\cdot)}$ — комплексное сопряжение; B-пространство — банахово пространство; $\mathscr{B}$ — множество всех банаховых пространств; $\|\cdot\|_X$ — норма в X; $[X;Y]$ — B-пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y; $[X] = [X;X]$; X^* — сопряженное к X пространство; R_T — область значений оператора T; $\operatorname{Ker} T$ — ядро оператора T; $\overline{M}$ — замыкание множества M; $J \equiv [-\pi;\pi)$; δ_{ij} — символ Кронекера; p' — сопряженное к p число: $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Через c будем обозначать постоянные (может быть, различные в разных местах). Будем считать, что все рассматриваемые B-пространства определены над полем C.

2.2. Понятие t-базиса. Пусть $X, Y, Z \in \mathscr{B}$ и $t : X \times Y \to Z$ — билинейное отображение, которое удовлетворяет условию

$$\exists \delta > 0 : \delta \|x\|_X \|y\|_Y \leq \|t(x;y)\|_Z \leq \delta^{-1} \|x\|_X \|y\|_Y \quad \forall (x;y) \in X \times Y.$$

Для простоты обозначений в дальнейшем примем $xy = t(x;y)$. Для множества $M \subset Y$ через $L_t[M]$ будем обозначать его t-оболочку, определенную соотношением

$$L_t[M] = \left\{ z \in Z : \exists \{(x_k;y_k)\}_1^{n_0} \subset X \times M \to z = \sum_{k=1}^{n_0} x_k y_k \right\}.$$

Систему $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ будем называть *t-полной* в Y, если $\overline{L_t[\{y_k\}_{k\in N}]} = Z$ (замыкание берется в Z).

Систему операторов $\{t_n\}_{n\in N} \subset [Z;X]$ будем называть *t-биортогональной к системе* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$, если $t_n(xy_k) = \delta_{nk}x$ $\forall x \in X$ для любых $n, k \in N$.

Систему $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ назовем *t-базисом* в Z, если произвольное $z \in Z$ имеет единственное разложение вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $\{x_k\}_{k\in N} \subset X$.

Тройку $(X;Y;Z)$ будем называть *t_Y-инвариантной*, если из

$$\{(x_k;\widetilde{y}_k)\} \subset X \times Y : \sum_k x_k \widetilde{y}_k = 0$$

следует

$$\sum_k v(\widetilde{y}_k)x_k = 0 \quad \forall v \in Y^*.$$

Тройку $(X;Y;Z)$ назовем *t-плотной*, если $\overline{L[X\times Y]} = Z$ (замыкание берется в Z).

Справедлив следующий критерий t-базисности.

Теорема 2.1. *Пусть тройка $(X;Y;Z)$ является t_Y-инвариантной и t-плотной. Система $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ образует t-базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены следующие утверждения:*

(i) *$\vec{y}$ t-полна в Z;*

(ii) *$\vec{y}$ имеет t-биортогональную систему $\{t_n\}_{n\in N} \subset [Z;X]$;*

(iii) *проекторы*

$$\{P_m\}_{m\in N} \subset [Z] : P_m(z) = \sum_{n=1}^{m} t_n(z)y_n, \quad z \in Z,\ m \in N,$$

равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_m \|P_m\|_{[Z]} < +\infty.$$

Более подробно с этими понятиями можно познакомится в [16, 17, 20].

Рассмотрим случай, когда $X;Y \in \mathscr{B}$ и $X\overline{\otimes}Y = Z$ — банахово тензорное произведение. Билинейное отображение $t : X\times Y \to Z$ определим выражением $t(x;y) = x\otimes y$, где $x\otimes y$ — элементарное тензорное произведение элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Ясно, что тройка $(X;Y;Z)$ в этом случае является t_Y-инвариантной и t-плотной (см., например, [21]). Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $X;Y \in \mathscr{B}$ и $Z = X\overline{\otimes}Y$. Система $\vec{y} \subset Y$ образует t-базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены условия* (i)–(iii) *теоремы* 2.1.

2.3. Пространство Бохнера $L_p(S;X)$. UMD-свойство. Пусть $(S;\mathscr{A};\mu)$ — измеримое пространство с мерой μ. Как обычно, через $L_p(S;X)$, $1 \le p < +\infty$, обозначим пространство Бохнера X-значных на S функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(S;X)} = \left(\int_S \|f\|_X^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Напомним UMD-свойство.

Определение 2.1. Говорят, что пространство $X \in \mathscr{B}$ обладает UMD-*свойством*, если для любого $p \in (1, \infty)$ существует константа $\beta \geq 0$ (зависящая только от p и X) такая, что если $(S; \mathscr{A}; \mu)$ — σ-конечное измеримое пространство (с мерой μ), $\{F_n\}_{n=0}^m$ — σ-конечная фильтрация и $\{f_n\}_{n=0}^m$ — конечные мартингалы в $L_p(S; X)$, то для любого $\{\varepsilon_n\} : |\varepsilon_n| = 1$, $n = \overline{1, m}$, выполнено

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n df_n \right\|_{L_p(S;X)} \leq \beta \left\| \sum_{n=1}^m df_n \right\|_{L_p(S;X)},$$

где $df_n = f_n - f_{n-1}$.

Множество всех пространств, обладающих UMD-свойством, обозначим через UMD.

Более подробно с фактами, связанными с UMD-свойством, можно познакомится в [1].

Для дальнейшего изложения примем следующее соглашение. Отождествим единичную окружность γ и полуинтервал J отображением $e^{it} : J \to \gamma$. Аналогично пространству $L_p(J; X)$, порожденному мерой Лебега dx в J, сопоставляется бохнерово пространство $L_p(\gamma; X)$, порожденное мерой dl (dl — элемент длины γ) на γ. Отображение e^{it} позволяет отождествить также пространства $L_p(J; X)$ и $L_p(\gamma; X)$. Примем $L_p(X) =: L_p(J; X) \cong L_p(\gamma; X)$. Для функции $f : \omega \to X$ примем $f_r(t) = f(re^{it})$, $re^{it} \in \omega$.

Линейное пространство всех X-значных тригонометрических полиномов вида

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

с коэффициентами $\{a_k\} \subset X$ обозначим через $P(X)$.

2.4. Мультипликатор. t-Рисс свойство. На $P(X)$ определим мультипликатор $m : P(X) \to L_p(X)$, полагая

$$(mP)(t) = \widetilde{P}(t) = -i \sum_k \operatorname{sign}(k) a_k e^{ikt},$$

где

$$P(t) = \sum_k a_k e^{ikt} \in P(X), \quad \operatorname{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -1, & k < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее X-значное преобразование Гильберта:

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{f(y)}{x - y} \, dy, \quad x \in R.$$

Хорошо известна следующая

Теорема 2.2 [1]. *Пусть $X \in \mathscr{B}$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (1) $X \in$*UMD;* (2) $H \in [L_p(R; X)]$.

Также справедливо

Утверждение 2.1 [1]. *Пусть* $X \in \mathscr{B}$, $p \in (1, +\infty)$. *Если* $H \in [L_p(R; X)]$, *то* $m \in [L_p(X)]$.

Всюду в дальнейшем для $f \in L_1(X)$ примем

$$\widehat{f}_k := t_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in Z.$$

С использованием теоремы 2.2 и утверждения 2.1 в работе [7] доказана следующая

Теорема 2.3 [7]. *Пусть* $X \in \mathrm{UMD}$, $p \in (1, +\infty)$. *Тогда система экспонент* $\mathscr{E} \equiv \{e^{int}\}_{n \in Z}$ *образует t-базис в* $L_p(X)$, *т. е. любая* $f \in L_p(X)$ *имеет единственное разложение в* $L_p(X)$ *вида*

$$f(t) = \sum_{n \in Z} \widehat{f}_n e^{int}.$$

Более того, для любого $m \in Z$ *t-Рисс проекторы*

$$(R_m^+ f)(t) =: f_+(t) =: \sum_{n=m}^{+\infty} \widehat{f}_n e^{int}, \quad (R_m^- f)(t) =: f_-(t) =: \sum_{n=-\infty}^{m-1} \widehat{f}_n e^{int}$$

ограничены в $L_p(X)$, *т. е.* $R_m^{\pm} \in [L_p(X)]$.

2.5 $h_p(X)$**-класс гармонических функций.** $*$**-Сопряженные гармонические функции.** В этой части будем предполагать, что $X \in \mathrm{UMD}$, $p \in (1, +\infty)$. Пусть X снабжено инволюцией $(*)$, которая обладает следующими свойствами:

(i) $* : X \to X$ является биективным отображением X на X;

(ii) $x^{**} = x$, $x \in X$;

(iii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ $\forall \lambda \in C$, $x \in X$;

(iv) $\|x^*\|_X = \|x\|_X$, $x \in X$.

Следуя [22], примем $X^R = \{x \in X : x^* = x\}$, и пусть $X^{iR} = \{ix : x \in X^R\}$.

Таким образом, произвольное $\varpi \in X$ имеет единственное представление в виде

$$\varpi = u + i\vartheta, \quad u, \vartheta \in X^R.$$

Примем обозначения $u = \mathrm{Re}^* \varpi$, $\vartheta = \mathrm{Im}^* \varpi$ и назовем u $*$-*действительной* (ϑ — $*$-*мнимой*) частью элемента ϖ. Тогда справедлива прямая сумма

$$X = X^R \dot{+} X^{iR} = X^R \dot{+} i X^R. \tag{2.1}$$

Пространство X с инволюцией «$*$» будем обозначать через $(X; *)$. Далее нам понадобятся следующие пространства X-значных функций. Для $z \in \omega$ определим частные производные

$$\partial_x f(z) =: \lim_{R \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad \partial_y f(z) =: \lim_{R \ni h \to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h}.$$

Положим

$$C^1(\omega; X) = \{f : \omega \to X : \partial_x f, \partial_y f \in C(\omega; X)\},$$

где $C(\omega; X)$ — линейное пространство всех непрерывных функций $f : \omega \to X$. Аналогичным образом определяем

$$C^2(\omega; X) = \{f \in C(\omega; X) : \partial_{xx} f, \partial_{xy} f, \partial_{yy} f \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть

$$\Delta f(z) = \partial_{xx} f(z) + \partial_{yy} f(z),$$

где $z = x + iy$.

Введем следующий класс X-значных гармонических в ω функций:

$$H(\omega; X) = \{f \in C^2(\omega; X) : \Delta f(z) = 0,\ z \in \omega\}.$$

Прямая сумма (2.1) порождает прямую сумму

$$H(\omega; x) = H^R(\omega; X) \dot{+} i H^R(\omega; X),$$

где

$$H^R(\omega; x) = \{f \in H(\omega; X) : f(z) \in X^R,\ z \in \omega\}.$$

Для $z \in \omega$ определим комплексную производную:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

и введем в рассмотрение следующий класс X-значных аналитических в ω функций:

$$A(\omega; X) = \{f \in C(\omega; X) : f' \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть $A^R(\omega; X) = \operatorname{Re}^* A(\omega; X)$. Положим

$$A_0(\omega; X) = \{\varpi \in A(\omega; X) : (\operatorname{Im}^* \varpi)(0) = 0\}.$$

В работе [22] установлена следующая

Лемма 2.1. *Пусть $(X; *) \in \mathscr{B}$. Тогда относительно классов гармонических функций $H(\omega; X)$ и аналитических функций $A(\omega; X)$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *имеет место прямая сумма $H(\omega; X) = H^R(\omega; X) \dot{+} i H^R(\omega; X)$, а также справедливо $A(\omega; X) \subset A^R(\omega; X) \dot{+} i A^R(\omega; X)$;*

(2) *$A(\omega; X) \subset H(\omega; X)$ (собственное включение);*

(3) *пусть $\varpi \in H(\omega; X)$, тогда $\varpi \in A(\omega; X) \to u = \operatorname{Re}^* \varpi$ и $v = \operatorname{Im}^* \varpi$ удовлетворяют $*$-условию Коши — Римана*

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u;$$

(4) *$A^R(\omega; X) \equiv H^R(\omega; X)$;*

(5) *линейные пространства $H^R(\omega; X)$ и $A_0(\omega; X)$ изоморфны и оператор $T = I + iI*$ осуществляет соответствующий изоморфизм, где I — единичный в $H^R(\omega; X)$ оператор и*

$$(I * u)(x; y) = \int_0^{(x;y)} -\partial_y u dx + \partial_x u\, dy, \quad (x; y) \in \omega,\ u \in H^R(\omega; X).$$

Через K обозначим следующий X-значный интеграл типа Коши:

$$(Kf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \omega.$$

Положим $L_p^+(X) = \mathrm{R}^+(L_p(X))$, где $\mathrm{R}^+ = \mathrm{R}_0^+$ — t-Рисс проектор, и пусть

$$H_p(X) = \{F \in A(X) : \exists f \in L_p^+(X) \to F = Kf\}.$$

Исходя из класса $H_p(X)$, определим

$$h_p^R(X) = \mathrm{Re}^* H_p(X).$$

По результатам работы [22] относительно функции $f \in H_p(X)$ имеет место также представление в виде интеграла Пуассона — Бохнера

$$f(re^{it}) = (\mathrm{P}f^+)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)f^+(s)\,ds, \quad re^{it} \in \omega, \tag{2.2}$$

где $P_r(t)$ — ядро Пуассона для единичного круга

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2},$$

$f^+ = \theta f$ — некасательные граничные значения функции f на γ и θ — соответствующий оператор следа. Норма в $H_p(X)$ определяется выражением

$$\|f\|_{H_p(X)} = \|\theta f\|_{L_p(X)},$$

и оператор $\theta \in [H_p(X); H_p^+(X)]$ является изометрическим изоморфизмом.

Из формулы (2.2) непосредственно получаем

$$u(re^{it}) = \mathrm{Re}^* f(re^{it}) = (\mathrm{P}(\mathrm{Re}^* f^+))(re^{it}) = (\mathrm{P}u^+)(re^{it}),$$

где $u^+ = \theta u$. Как установлено в работе [22], оператор $\theta \in \left[h_p^R(X); L_p^R(X)\right]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, где $L_p^R(X) = \mathrm{Re}^* L_p(X)$. Положим

$$h_p(X) = h_p^R(X) \dot{+} i h_p^R(X).$$

Очевидно, что $\theta \in [h_p(X); L_p(X)]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, если принять

$$\|u\|_{h_p(X)} = \|\theta u\|_{L_p(X)}.$$

Тогда из теоремы 2.3 непосредственно получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.2. *Пусть $X \in UMD$, $p \in (1, \infty)$. Тогда система*

$$\{1; r^n \cos nt; r^n \sin nt\}_{n \in N} \tag{2.3}$$

образует t-базис в $h_p^R(X)$ (также в $h_p(X)$). Более того, если для $u \in h_p^R(X)$ имеет место

$$u(re^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt)r^n, \tag{2.4}$$

то

$$u^+(e^{it}) = (\theta u)(e^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt).$$

3. Основные результаты

3.1. Постановка задачи. Нётеровость. Прежде чем перейти к постановке задачи, введем в рассмотрение класс гармонических функций

$$h_p^{(1)}(X) = \{u \in h_p(X) : \partial_r u, \partial_\varphi u \in h_p(X)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{h_p^{(1)}(X)} = \|u\|_{h_p(X)} + \|\partial_r u\|_{h_p(X)} + \|\partial_\varphi u\|_{h_p(X)}.$$

В классе $h_p^{(1)}(X)$ рассмотрим следующую задачу с косой производной:

$$\begin{aligned} \Delta_{r;\varphi} u = \partial_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} u = 0 \text{ в } \omega, \\ \cos\varphi\theta(\partial_r u) + \sin\varphi\theta(\partial_\varphi u) = f(\varphi), \quad \varphi \in J, \end{aligned} \tag{3.1.}$$

где $f \in L_p(X)$ — заданная функция и $\theta : \left[h_p^{(1)}(X); L_p(X)\right]$ — оператор следа.

Рассмотрим оператор $T \in \left[h_p^{(1)}(X); L_p(X)\right]$, определенный выражением

$$(Tu)(\varphi) = \cos\varphi\theta(\partial_r u) + \sin\varphi\theta(\partial_\varphi u).$$

Найдем $\operatorname{Ker} T$ (ядро) и R_T (область значений) этого оператора.

Итак, пусть $u \in h_p^{(1)}(X)$ и (2.4) есть разложение u по базису (2.3). Для удобства последующих вычислений представим это разложение в виде

$$u(r;\varphi) = u(re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\varphi},$$

где

$$a_n = \begin{cases} u_0^+, & n = 0, \\ \frac{1}{2}(u_n^+ - iu_n^-), & n > 0, \\ \frac{1}{2}(u_{|n|}^+ + iu_{|n|}^-), & n < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\partial_r u = \sum_{n\neq 0} |n| a_n r^{|n|-1} e^{in\varphi}, \quad \partial_\varphi u = \sum_{n\neq 0} in a_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Из леммы 2.2 непосредственно следует

$$\theta(\partial_r u) = \sum_{n\neq 0} |n| a_n e^{in\varphi}; \theta(\partial_\varphi u) = \sum_{n\neq 0} in a_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Разложим функцию $f \in L_p(X)$ по t-базису $\mathscr{E}$:

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Учитывая граничные условия (3.1), получаем

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \sum_{n\neq 0} |n| a_n e^{in\varphi} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \sum_{n\neq 0} in a_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Совершив соответствующие преобразования, имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} e^{in\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) a_{n+1} e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}. \tag{3.2}$$

Из этого соотношения следует, что для разрешимости задачи (3.1) выполнение условий

$$t_{-1}(f) = t_0(f) = t_1(f) = 0 \tag{3.3}$$

является необходимым.

Коэффициент a_0 не входит в левую часть соотношения (3.2) и, значит, он остается произвольной постоянной из X. Для остальных коэффициентов $\{a_n\}$ получаем

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} t_{n+1}(f), & n \geq 1, \\ -\frac{1}{n} t_{n-1}(f), & n \leq -1. \end{cases}$$

В результате для решения $u \in h_p^{(1)}(X)$ задачи (3.1) имеем формальное представление

$$u(r;\varphi) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{t_{n-1}(f)}{|n|} r^{|n|} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_{n+1}(f)}{n} r^n e^{in\varphi}. \tag{3.4}$$

Покажем, что (3.4) на самом деле является решением задачи (3.1). Совершенно очевидно, что $\Delta_{r;\varphi} u(r;\varphi) = 0 \ \forall re^{i\varphi} \in \omega$. Покажем, что $u \in h_p^{(1)}(X)$.

Ясно, что $u(0;\varphi) = a_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, для $u(r;\varphi)$ имеем

$$u(r;\varphi) = \int_0^r \partial_\rho u(\rho;\varphi)\, d\rho + a_0.$$

Из этого представления следует, что если $\partial_\rho u \in h_p(X)$, то $u \in h_p(X)$. На самом деле достаточно это доказать для случая $\partial_\rho u \in h_p^R(X)$. Это условие означает, что существует F такое, что $\partial_\rho F \in H_p(X)$ и $u = \mathrm{Re}^* F$ (так как $u = \mathrm{Re}^* F \to \partial_\rho u = \mathrm{Re}^* F_\rho$). Нетрудно заметить, что $\partial_\rho F \in H_p(X) \to F \in H_p(X)$ и, следовательно, $u \in h_p^R(X)$.

Покажем, что $\partial_\rho u \in h_p(X)$. Снова не ограничивая общности, будем считать, что $\partial_\rho u \in h_p^R(X)$, и пусть $F \in A(X) : u = \mathrm{Re}^* F$. Продифференцировав, из (3.4) получаем

$$\partial_r u = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Положим

$$u_1(r;\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi}, \quad u_2(r;\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Покажем, что $u_k \in H_p(X)$, $k = 1, 2$. Достаточно доказать, что $u_2 \in H_p(X)$ (для u_1 доказательство аналогичное). Очевидно, что $\Delta u_2 = 0$. Примем

$$u_2(r;\varphi) = e^{-i\varphi} r^{-2} \widetilde{u}(r;\varphi),$$

где

$$\widetilde{u}(r;\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Нетрудно заметить, что функция $u_2(r;\varphi)$ при $r \to +0$ стремится равномерно на γ к функции $c_2(f) e^{i\varphi}$. Поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{0<r<1} \|u_2(r;\cdot)\|_{L_p(J;X)} < +\infty \to \sup_{0<r<1} \|\widetilde{u}(r;\cdot)\|_{L_p(J;X)}. \tag{3.5}$$

Очевидно, что $\widetilde{u} \in A(X)$. С другой стороны, так как $f \in L_p(J;X)$, то из теоремы 2.3 следует, что $\widetilde{u} \in H_p(X)$. Тогда из (3.5) непосредственно получаем, что $u_2 \in H_p(X)$. Тем самым

$$\partial_r u = \operatorname{Re}^* u_1 + \operatorname{Re}^* u_2 \in h_p^R(X).$$

Также имеем

$$\partial_\varphi u = -i \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n-1}(f) r^{|n|} e^{in\varphi} + i \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Из аналогичных соображений получаем $\partial_\varphi u \in h_p^R(X)$. В результате установлено, что $u \in h_p^{(1)}(X)$. Итак, справедлива следующая основная

Теорема 3.1. *Пусть* $X \in \mathrm{UMD}$, $1 < p < +\infty$. *Задача* (3.1) *разрешима в классе* $h_p^{(1)}(X)$ *для заданной функции* $f \in L_p(X)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* t*-ортогональности* (3.3).

Рассмотрим вопрос о нётеровости оператора $T \in \left[h_p^{(1)}(X); L_p(X)\right]$. Подпространство $h_p^{(1)}(X)$, состоящее из X-значных постоянных функций, отождествим с X. Из соотношения (3.2) непосредственно вытекает, что $\operatorname{Ker} T = X$. Следовательно, если $\dim X = \infty$, то оператор T не является нётеровым (в классическом смысле). Пусть $\dim X = r < +\infty$ и, значит, $\varkappa^+ = \dim KerT = r$. С другой стороны, из условий t-ортогональности (3.3) и теоремы 3.1 следует, что фактор-пространство $L_p(X)/R_T$ и пространство $X^3 = X \times X \times X$ изоморфны (так как коэффициенты $a_k \in X$, $k = -1, 0, 1$, могут быть произвольными). Следовательно, $\dim(L_p(X)/R_T) = 3r$, и в результате индекс $\varkappa(T)$ оператора T равен $\varkappa(T) = \dim \operatorname{Ker} T - \dim(L_p(X)/R_T) = -2r$. Подытожив вышеизложенное, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть* $X \in \mathrm{UMD}$ *и* $1 < p < +\infty$. *Тогда задача* (3.1) *нётерова (т. е. оператор* T *нётеров) в том и только в том случае, если* $\dim X = r < +\infty$. *При этом если* $r < +\infty$, *то индекс* $\varkappa(T)$ *оператора* T *равен* $\varkappa(T) = -2r$.

3.2. Примеры. Рассмотрим некоторые конкретные случаи относительно пространства X с инволюцией $(*)$.

I. $X \equiv C$. В этом случае в качестве инволюции $(*)$ возьмем комплексное сопряжение $(\bar{\cdot})$. Задача (3.1) относительно этого случая изучена в работе [18]. Так как $\dim C = 1$, то по теореме 3.2 задача (3.1) в $h_p^{(1)}(C)$ нётерова и ее индекс равен $\varkappa(T) = -2$.

II. $X \equiv L_p(S; d\mu), 1 < p < +\infty$. Здесь $L_p(S; d\mu)$ — лебегово пространство функций $f : S \to C$ на измеримом пространстве $(S; \mathscr{A}; \mu)$ с σ-конечной мерой μ с нормой

$$\|f\|_{L_p(S;d\mu)} = \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $(f^*)(x) = \overline{f(x)}$, $x \in S$. Очевидно, что f^* является инволюцией в $L_p(S; d\mu)$. По утверждению 4.2.15 из [1, с. 291] $L_p(S; d\mu), 1 < p < +\infty$, обладает UMD-свойством. Следовательно, относительно таких пространств результаты теоремы 3.2 верны.

III. $X \equiv \sigma_p$-классы Шаттена. $\sigma_p \subset [H]$ — класс компактных операторов, где H — некоторое сепарабельное H-пространство. Для полноты изложения определим этот класс. Пусть $\sigma_\infty \subset [H]$ — класс вполне непрерывных операторов. Собственные числа оператора $(T * T)^{\frac{1}{2}}$, где $T \in \sigma_\infty$, называются s-числами оператора T, и их обозначим через $\{s_i(T)\}$. Будем считать, что $\ldots s_i \geq s_{i+1} \geq \cdots \to 0$, $i \to \infty$. Тогда

$$\sigma_p = \left\{ T \in \sigma_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(T) < +\infty \right\}.$$

Относительно нормы

$$\|T\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i^p(T) \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty, \\ s_1(T), & p = +\infty, \end{cases}$$

σ_p — B-пространство. Относительно классов σ_p и их свойств более подробно см., например, [21, 23, 24].

Определим в σ_p инволюцию $*(T) = T^*$. Из соотношения $s_i(T) = s_i(T^*)$ (см. например, [23]) непосредственно следует справедливость всех условий (i)–(iv) инволюции. Более того, из [1, с. 297, пример 4.2.21] следует, что σ_p, $1 < p < +\infty$, обладает UMD-свойством. Таким образом, результаты теоремы 3.2 верны и относительно пространства Шаттена $X \equiv \sigma_p$, $1 < p < +\infty$.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L.* Analysis in Banach spaces. V I. Martingales and Littlewood–Paley theory. Cham: Springer, 2016.
2. *Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L.* Analysis in Banach spaces. V. II. Probabilistic methods and operator theory. Cham: Springer, 2017.
3. *Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Birkhauser, 2011.
4. *Kreuter M.* Vector-valued elliptic boundary value problems on rough domains. Open Access Repositorium der Universitet Ulm. Dissertation. 2019.
5. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
6. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. II.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 1980.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Arendt W.* Vector-valued holomorphic and harmonic functions // Concrete operators. 2016. V. 3. P. 68–76.
10. *Amann H.* Elliptic operators with infinite dimensional state space // J. Evol. Equ. 2001. V. 1. P. 143–188.
11. *Arendt W., Nikolski N.* Vector-valued holomorphic functions revisited // Math. Z. 2000. V. 234, N 4. P. 777–805.
12. *Arendt W., Nikolski N.* Addendum: Vector-valued holomorphic functions revisited // Math. Z. 2006. V. 252. P. 687–689.
13. *Bonet J., Frerick L., Jorda E.* Extension of vector-valued holomorphic and harmonic functions // Studia Math. 2007. V. 183. P. 225–248.
14. *Kreuter M.* The Perron solution for vector-valued equations // Positivity. 2020. V. 24. P. 729–752.
15. *Katzourakis N.* On a vector-valued generalisation of viscosity solutions for general PDE systems // Zeitschrift for Analysis und ihre Anwendungen. 2022. V. 41, N 1/2. P. 93–132.

16. *Bilalov B. T., Sadigova S. R.* The concept of t-basis and vector-valued Hardy classes // Turkish Math. 2025. V. 49, N 3. P. 261–286.
17. *Bilalov B. T., Buyukarslan A., Nasibova N. P., Sadigova S. R.* X-valued Smirnov classes and t-basicity of Faber polynomials // Results Math. 2025.V. 80,N 215. https://doi.org/10.1007/s00025-025-02525-z.
18. *Sadigova S. R., Mamedov E. M., Nasibova N. P.* On the index of a problem with an oblique derivative in weighted Sobolev space // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2024. V. 44, N 4. P. 122–138.
19. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
20. *Билалов Б.Т.* Некоторые вопросы аппроксимации. Баку: Элм, 2016.
21. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014.
22. *Bilalov B. T., Sadigova S. R., Sezer Y.* $h_p(X)$ Class of X-valued harmonic functions and applications // Filomat. 2025.V. 39, N 35. 12593–12609. https://doi.org/10.2298/FIL2535593B.
23. *Гохберг И. Ц. Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов. М.: Наука, 1982.
24. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 10 августа 2025 г.
После доработки 20 октября 2025 г.
Принята к публикации 7 ноября 2025 г.

Билалов Билал Тельман оглы (ORCID 0000-0003-0750-9339)
Технический университет Йылдыз,
ул. Давутпаша, Эсенлер — Стамбул 34220, Турция;
Институте Математики
Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики,
ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан;
Азербайджанский университет архитектуры и строительства,
ул. Айна Султанова, 11, Баку Az1073, Азербайджан
b_bilalov@mail.ru

Садыгова Сабина Рагиб кызы (ORCID 0000-0003-4654-0494)
Институт математики
Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики,
ул. Б. Вахабзаде 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
s_sadigovamail.ru

Сезер Йонджа Гувен Тургут кызы (ORCID 0000-0003-3072-8302)
Технический университет Йылдыз, Стамбул, Турция
ysezer@yildiz.edu.tr