

Ю.А.Аминов

**Аннотация**

В евклидовых пространствах рассматриваются поверхности переноса, получаемые как сумма двух кривых. Внутренняя геометрия таких поверхностей представлена одной функцией - углом между координатными линиями. Это облегчает рассмотрение изгибаний, т.е. деформацией с сохранением внутренней геометрии. Библиография: 24 названий.

**1. Введение** Радиус- вектор  $r(\xi, \eta)$  поверхности переноса  $F^2$  записывается в виде  $r(\xi, \eta) = X(\xi) + Y(\eta)$ , т.е. в виде суммы радиус- векторов двух кривых. Координаты на заданных кривых автоматически переносятся на поверхность  $F^2$ . Заданные кривые, вообще говоря, не лежат на этой поверхности. Но семейство кривых  $\xi = const$  на поверхности составлено из кривых параллельных и конгруэнтных второй заданной кривой (параллельно перенесенных), и аналогичное свойство имеет место для семейства:  $\eta = const$ . Эти семейства образуют сеть переноса на  $F^2$  одной кривой  $\eta = 0$  вдоль кривой  $\xi = 0$ . Естественно назвать их образующими кривыми. Заметим, что используется и другое определение поверхностей переноса. Приведем определение из книги [1]. Рассмотрим две кривые  $R_1 = U(u), R_2 = V(v)$ , пересекающиеся в некоторой точке  $M_0$  с радиус - вектором  $U(u_0) = V(v_0)$ . Если одну из них переносить параллельно так, чтобы ее точка  $M_0$  скользила по другой, то получим поверхность переноса

$$r = U(u) + V(v) - U(u_0).$$

При таком определении заданные кривые лежат на поверхности переноса. Но определение недостаточно конструктивное, так как не ясно в каком именно направлении надо переносить вторую кривую, чтобы она скользила по первой. Поэтому записывается выражение радиус-вектора поверхности в явном виде и с ним работают...

Исследованию поверхностей переноса были посвящены работы С.Ли, А.Пуанкаре, Г.Дарбу и др. в связи с отысканием поверхностей, несущих две и больше сетей переноса. Существуют поверхности, которые несут бесконечное число сетей переноса. Некоторые вопросы по поверхностям

переноса описываются в книге В.И.Шуликовского [1]. Интересный результат по поверхностям переноса получен Я.П.Бланком в [2]: *поверхностями переноса с постоянной гауссовой кривизной могут быть только цилиндрические поверхности или плоскость*. Будем считать, что координаты  $\xi, \eta$  являются длинами дуг на координатных кривых. В этом случае метрика поверхности записывается в чебышевском виде

$$ds^2 = (d\xi)^2 + 2 \cos \omega d\xi d\eta + (d\eta)^2, \quad \cos \omega = (\tau_1, \tau_2), \quad (1)$$

где  $\tau_i$ - единичные касательные векторы к координатным линиям. Заметим, что для поверхности переноса в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$  вид метрики тот же самый. Отметим сразу, что гауссова кривизна  $K$ , если воспользоваться формулой Фробениуса, запишется так

$$K = \frac{-1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (2)$$

Такой вид позволяет сразу доказать просто некоторые утверждения о непогружаемости некоторых полных метрик в виде поверхностей переноса в  $E^n$ . Затем мы рассматриваем изгибания сначала в классе поверхностей переноса, затем в классе общих поверхностей. При этом используются результаты Э.Г.Позняка. Особый интерес представляют изгибания замкнутых регулярных поверхностей, так как несмотря на значительный прогресс в развитии геометрии, до сих пор не известно существуют ли замкнутые регулярные поверхности класса регулярности  $C^2$ , допускающие непрерывные изгибания. Эта проблема неоднократно возникала в работах известных авторов, например, в работах А.Д.Александрова [3] еще в 1947 г, Н.Х.Кейпера [4] в 1978 г., И.Х.Сабитова [7], [8], [9], и др. Заметим, что для выпуклых замкнутых поверхностей доказана однозначная определенность своей метрикой: теорема Кон Фоссена. Красивое доказательство ее было получено Герглотцем с помощью интегральной формулы. Для общих выпуклых поверхностей однозначная определенность была установлена А.В.Погореловым. Как показал Н.В.Ефимов еще в 1940 г., существуют поверхности не изгибаемые в малом [5]. А.Д.Александров доказал неизгибаемость замкнутых (даже невыпуклых) аналитических поверхностей типа  $T$ , см.: [6]. Вопросам изгибания поверхностей были посвящены многие работы, например, [10], [11] [12],[20],[21-23]. Интерес

представляют изгибания замкнутых поверхностей переноса. Мы доказываем сначала существование замкнутых регулярных поверхностей переноса и затем даем некоторые подходы к указанной проблеме.

## 2. О полных метриках неположительной кривизны

Рассмотрим изометрические погружения метрик в евклидовы пространства в виде поверхностей переноса. Имеет место

**Лемма 1.** *Модуль интегральной гауссовой кривизны по координатному прямоугольнику определяющих кривых на поверхности переноса класса регулярности  $C^3$  меньше  $2\pi$ .*

Для доказательства используем формулу (2). Элемент площади поверхности  $dS$  в рассматриваемых координатах равен  $\sin \omega d\xi d\eta$ . Поэтому интегрируя по координатному прямоугольнику, получим

$$\left| \int \int K dS \right| = \left| \int \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \right| = |\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4|, \quad (3)$$

где  $\omega_i = \omega(P_i)$  - значение угла  $\omega$  в вершинах  $P_i$  прямоугольника, которые занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. На регулярной поверхности угол  $\omega$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \omega < \pi$ . Поэтому выражение в правой стороне (3) меньше  $2\pi$ , что и доказывает утверждение леммы 1.

**Теорема 1.** *Полная метрика с гауссовой кривизной, отделенной от нуля:  $K \leq -a^2 < 0$ ,  $a = \text{const}$ , не погружается изометрически в виде поверхности переноса класса регулярности  $C^3$  гомеоморфной плоскости ни в какое конечномерное евклидово пространство.*

Допустим такое погружение существует. Рассмотрим интеграл от гауссовой кривизны по координатному прямоугольнику. Площадь полной поверхности отрицательной кривизны гомеоморфной плоскости бесконечна. Это легко доказывается если выбрать на поверхности отрицательной кривизны полярные координаты. Поэтому левая часть (3) при условии отделенности гауссовой кривизны от нуля неограничена, если взять интеграл по последовательности геодезических кругов. В тоже время каждая ограниченная область на поверхности накрывается координатным прямоугольником с координатами  $\xi, \eta$ . Поэтому по лемме 1 площадь каждой ограниченной области равномерно ограничена сверху. Приходим к противоречию.

В частности, плоскость Лобачевского не погружается изометрически в виде поверхности переноса ни в какое конечномерное евклидово пространство. Здесь уместно указать на аналогию (3) с формулой Хаццидакиса, относящейся к асимптотической сети на поверхности постоянной отрицательной кривизны, из которой следует теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны, и указать на отличие в ситуации. Теорема Гильберта и ее обобщение - знаменитая теорема Н.В.Ефимова касаются только поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве, так как по теореме Э.Р.Розендорна плоскость Лобачевского допускает регулярное изометрическое погружение в 5-мерное евклидово пространство. Но заключение нашей теоремы 1 относится к поверхностям в любом  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Заметим, что существуют в  $E^3$  полные поверхности переноса с  $K < 0$ . Поэтому условие в теореме 1 на отделенность кривизны от нуля существенно. Примером такой поверхности является поверхность

$$r(\xi, \eta) = \left( \xi, \frac{\xi^2}{2}, 0 \right) - \left( 0, \frac{\eta^2}{2}, \eta \right),$$

гауссова кривизна которой  $K = -\frac{1}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}$ .

### **3.К вопросу однозначной определенности поверхности переноса своей метрикой.**

Далее рассматриваем поверхности в  $E^3$ . В условиях следующей теоремы 2 имеются исключительные случаи. Их можно сформулировать в развернутой форме с помощью функции  $\omega$  и в краткой более геометрической форме. Исключительным будем называть случай, когда существуют такие функции  $A(\eta)$  и  $B(\xi)$ , а также постоянная  $C_0$  и выполняются одновременно уравнения

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Так как здесь фигурируют неизвестные функции, то сформулируем исключительные случаи так

Исключительный случай I. На образующих кривых есть точки, в которых кривизна кривой или кручение равны нулю. Это случай  $C_0 = 0$ . Если хотя бы одна образующая кривая плоская, то поверхность относится к исключительному случаю.

Исключительный случай II. Следующее выражение постоянно на поверхности

$$\left(\frac{\beta_1, \beta_2}{\sin \omega}\right)_3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = C_0 = const, \quad (5)$$

где  $\beta_i$ - бинормали кривых,  $k_i$ - кривизны и  $\kappa_i$  - кручение.

**Теорема 2.** *Область на поверхности переноса класса регулярности  $C^5$ , не принадлежащая исключительным случаям и с  $K \neq 0$ , однозначно определяется своей метрикой в классе поверхностей переноса.*

Заметим, что условиям теоремы удовлетворяет основная масса поверхностей переноса. Коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности переноса имеют вид

$$L(\xi, \eta) = (X_{\xi\xi}, n), \quad M = 0, \quad N(\xi, \eta) = (Y_{\eta\eta}, n),$$

где  $n$ - единичный вектор нормали поверхности. Уравнения Петерсона-Кодацци имеют простой вид

$$L_\eta = \frac{N\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad N_\xi = \frac{L\omega_\eta}{\sin \omega}. \quad (6)$$

Уравнение Гаусса имеет вид  $LN = K \sin^2 \omega$ . В дальнейшем используем обозначение  $K \sin^2 \omega = \Phi$ . С помощью формулы (2) и уравнений (6) найдем два первых интеграла. Существуют две функции одной переменной  $C(\xi)$  и  $D(\eta)$  такие, что

$$L^2 + (\omega_\xi)^2 = C(\xi), \quad N^2 + (\omega_\eta)^2 = D(\eta). \quad (7)$$

Заметим, что равенства (7) имеют простой геометрический смысл.  $L^2$ -квадрат нормальной кривизны  $\xi$ -линии. Ниже мы покажем, что  $(-\omega_\xi)$  является геодезической кривизной этой координатной линии. Поэтому функция  $C(\xi)$  - квадрат кривизны  $k_1(\xi)$  первой образующей кривой. Аналогично  $D(\eta) = k_2^2(\eta)$ . Обозначим  $N^2 = V$ . Составим систему уравнений для  $V$ . Сначала запишем следующую систему уравнений

$$N_\xi = \frac{\Phi\omega_\eta}{N \sin \omega}, \quad L_\eta N + LN_\eta = \Phi_\eta.$$

Заменим  $L_\eta$  с помощью уравнений Петерсона-Кодацци. Далее используем обозначения:  $\omega_\xi = p, \omega_\eta = q$ . После некоторых преобразований получим

$$V_\xi = \frac{2\Phi q}{\sin \omega},$$

$$V_\eta = -2V^2 \frac{p}{\Phi \sin \omega} + 2V \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta}.$$

Записывая условие совместности этой системы, получим квадратичное уравнение для определения  $V$

$$V^2 P + VQ + R\Phi^2 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты этого уравнения имеют вид

$$P = \left(\frac{p}{\Phi \sin \omega}\right)_\xi, \quad Q = -\left[\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - 4\frac{pq}{\sin^2 \omega}\right], \quad R = \left(\frac{q}{\Phi \sin \omega}\right)_\eta. \quad (9)$$

Мы видим, что все коэффициенты выражены с помощью метрики поверхности переноса и можем определить  $V$ , исключая тот случай когда все коэффициенты нулевые. Предполагая  $P \neq 0$ , получим

$$V = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR\Phi^2}}{2P}.$$

Числитель дроби, стоящей в правой части, симметричен относительно координат  $\xi, \eta$ . В приведенной формуле для  $V$  два значения. Но второе значение участвует в выражении для  $U = L^2$ . При этом знаки перед корнем в этих выражениях должны быть противоположны. Для  $U$  получим уравнение

$$U^2 R + UQ + P\Phi^2 = 0, \quad U = \frac{-Q \mp \sqrt{Q^2 - 4PR\Phi^2}}{2R}.$$

В этом случае выполняется соотношение  $L^2 N^2 = \Phi^2$ . Так как мы предполагаем, что поверхность существует, то должно выполняться неравенство  $Q^2 - 4PR\Phi^2 \geq 0$ . Если  $P = 0, QR \neq 0$ , то имеем линейное уравнение для  $V$ . Остается рассмотреть исключительный случай  $P = 0, Q = 0, R = 0$  одновременно. Так как  $K \neq 0$ , то  $V \neq 0$ , и достаточно рассмотреть случай  $P = R = 0$ . Из этих условий находим, что найдутся функции  $A(\eta), B(\xi)$  такие, что

$$\omega_\xi = -A(\eta)\Phi \sin \omega, \quad \omega_\eta = -B(\xi)\Phi \sin \omega. \quad (10)$$

Подставив выражение  $\Phi$  и используя формулу (2), находим

$$\omega_\xi = A(\eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \sin^2 \omega = \sin^2 \omega \frac{\partial}{\partial \xi} (A(\eta) \omega_\eta).$$

Отсюда следует, что найдутся функции  $C(\eta)$ ,  $D(\xi)$  такие, что

$$\operatorname{ctg} \omega = -A(\eta)\omega_\eta + C(\eta), \quad \operatorname{ctg} \omega = -B(\xi)\omega_\xi + D(\xi). \quad (11).$$

Заменяя здесь производные угла  $\omega$  с помощью (10) получим

$$\operatorname{ctg} \omega = AB\Phi \sin \omega + C(\eta) = AB\Phi \sin \omega + D(\xi)$$

. Поэтому  $C(\eta) = D(\xi) = -C_0 = \text{const}$ . Поэтому (11) переписываются в виде

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (12)$$

. Мы пришли к формулировке исключительных случаев, указанных выше. Теорема 2 доказана.

Замечание. Для замкнутой регулярной поверхности переноса исключительный случай II не может выполняться на всей поверхности. Действительно, если поверхность регулярна, то  $0 < \sin \omega$  и функция  $\omega$  принимает максимальные и минимальные значения в некоторых точках. В этих точках  $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$ . Из уравнений (12) тогда следует, что  $\operatorname{ctg} \omega = -C_0$ , т.е. максимальное и минимальное значение функции  $\omega$  совпадают и эта функция постоянна на поверхности. Следовательно, гауссова кривизна поверхности  $K = 0$  и по теореме Я.П.Бланка эта поверхность цилиндрическая или плоскость, что противоречит условию ее замкнутости.

Однако, исключительные случаи I и II могут иметь место в отдельных точках, интервалах и двумерных областях.

Выясним геометрический смысл производных угла  $\omega$ . Используем формулу Бонне для геодезической кривизны  $\frac{1}{\rho_g}$  кривой, заданной уравнением  $\phi(\xi, \eta) = \text{const}$

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{W} \left[ \left( \frac{F\phi_\eta - G\phi_\xi}{\Lambda} \right)_\xi + \left( \frac{F\phi_\xi - E\phi_\eta}{\Lambda} \right)_\eta \right],$$

где в классических обозначениях первой квадратичной формы  $W = \sqrt{EG - F^2}$ ,  $\Lambda = \sqrt{E\phi_\eta^2 - 2F\phi_\xi\phi_\eta + G\phi_\xi^2}$ . Кривая с параметром  $\xi$  задается уравнением  $\eta = \text{const}$ . Поэтому  $\phi_\xi = 0$ ,  $\phi_\eta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $W = \sin \omega$ . Геодезическая кривизна этой линии  $\frac{1}{\rho_{g1}} = -\omega_\xi$ . Для кривой с параметром  $\eta$  аналогично имеем для геодезической кривизны  $\frac{1}{\rho_{g2}} = -\omega_\eta$ .

#### 4 Исключительные случаи.

Определяющие кривые поверхности переноса обозначим  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и их натуральные реперы  $\tau_i, \nu_i, \beta_i$ .

**Лемма 2.** *Имеет место следующее выражение для гауссовой кривизны поверхности переноса*

$$K = -\frac{k_1 k_2 (\tau_1, \beta_2) (\tau_2, \beta_1)}{\sin^4 \omega}.$$

Действительно, для поверхности переноса имеем

$$K = \frac{LN}{\sin^2 \omega}.$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы и единичной нормали  $n$  можем записать

$$L = (r_{\xi\xi}, n), N = (r_{\eta\eta}, n), n = \frac{[\tau_1, \tau_2]}{\sin \omega}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{k_1(\nu_1, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\tau_1, \nu_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\beta_1, \tau_2)}{\sin \omega},$$
$$N = \frac{k_2(\nu_2, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = \frac{k_2(\tau_1, \beta_2)}{\sin \omega}.$$

Из этих соотношений следует Лемма 2.

Если в некоторой области поверхности  $K \neq 0$ , то  $k_i \neq 0$ ,  $(\tau_1, \beta_2) \neq 0$ ,  $(\tau_2, \beta_1) \neq 0$ . Рассмотрим простой исключительный случай I, когда  $C_0 = 0$ . Первое уравнение из (12) перепишем в виде

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega} = \frac{(\tau_1, \tau_{2\eta})}{(\tau_1, \tau_2)}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по  $\xi$ , получим после применения формул Френе

$$k_1 k_2 [(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\tau_1, \nu_2)(\nu_1, \tau_2)] = 0.$$

Либо одна из кривизн  $k_i = 0$  и тогда имеем исключительный случай I, либо равно нулю выражение в квадратных скобках. Пусть равно нулю

выражение в квадратных скобках. С помощью формулы векторной алгебры  $([ab], [cd]) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$  равенство нулю выражения в квадратных скобках можно записать в виде  $(\beta_1, \beta_2) = 0$ . Дифференцируя это равенство по  $\xi$ , получим  $\kappa_1(\nu_1, \beta_2) = 0$ . Если кручения отличны от нуля, то после дифференцирования по  $\eta$  получим  $(\nu_1, \nu_2) = 0$ . Опять дифференцируя по  $\eta$  получим  $(\nu_1, -k_2\tau_2 + \kappa_2\beta_2) = 0$ . Но уже мы получили  $(\nu_1, \beta_2) = 0$ . Поэтому  $(\nu_1, \tau_2) = 0$ . Это означает, что кривая  $\gamma_2$  лежит в постоянной плоскости, ортогональной  $\nu_1(\xi)$ . Опять имеем исключительный случай I, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай  $C_0 \neq 0$ .

**Лемма 3.** *Постоянная  $C_0$  имеет выражение*

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}, \quad (13)$$

Опять используем первое уравнение из (12)

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega + C_0 \sin \omega}.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по  $\xi$ , получим

$$(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta})(\cos \omega + C_0 \sin \omega) - (\tau_1, \tau_{2\eta})[(\tau_{1\xi}, \tau_2) + C_0 \omega_\xi \cos \omega] = 0. \quad (14)$$

Заменим  $\omega_\xi$  с помощью соотношения  $\sin \omega \omega_\xi = -(\tau_{1\xi}, \tau_2)$ . Сумма слагаемых без  $C_0$  записывается в виде

$$([\tau_{1\xi}\tau_1], [\tau_{2\eta}\tau_2]) = k_1 k_2 ([\nu_1\tau_1], [\nu_2\tau_2]) = k_1 k_2 (\beta_1, \beta_2).$$

Слагаемое, содержащее  $C_0$ , приобретает вид

$$C_0 \left[ \frac{(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta}) \sin^2 \omega + (\tau_1, \tau_2)(\tau_{1\xi}, \tau_2)(\tau_1, \tau_{2\eta})}{\sin \omega} \right].$$

Используем соотношение  $\sin^2 \omega = 1 - (\tau_1, \tau_2)^2$ . Уравнение (14) переписывается в виде

$$k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)[(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \nu_2)]}{\sin \omega} \right\} =$$

$$k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right\} = 0.$$

По нашему предположению  $k_1 k_2 \neq 0$ . Из равенства нулю выражения в фигурных скобках получим выражение  $C_0$ . Заметим, что имеет место равенство  $(\nu_1, \nu_2) = ([\tau_1 \beta_1], [\tau_2 \beta_2]) = (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2) - (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)$ . Поэтому получаем выражение

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}. \quad (15)$$

Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *В рассматриваемом исключительном случае имеют место выражения для отношения кривизны и кручений определяющих кривых*

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\beta_1, \tau_2)^2}, \quad \frac{k_2}{\kappa_2} = -\frac{(\tau_2, \beta_1) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)((\tau_1, \beta_2))^2}. \quad (16)$$

Получим выражение для этого отношения кривой на  $\gamma_1$ . Дифференцируем выражение  $C_0$  по  $\xi$ , но для упрощения выкладок возьмем логарифм от этого выражения. Получим

$$\begin{aligned} & [\ln(\beta_1, \beta_2) + \ln \sin \omega - \ln(\tau_1, \beta_2) - \ln(\tau_2, \beta_1)]_\xi = \\ & = -\kappa_1 \frac{(\nu_1, \beta_2)}{(\beta_1, \beta_2)} - k_1 \frac{(\nu_1, \tau_2) \cos \omega}{\sin^2 \omega} - k_1 \frac{(\nu_1, \beta_2)}{(\tau_1, \beta_2)} + \kappa_1 \frac{(\nu_1, \tau_2)}{(\beta_1, \tau_2)} = 0. \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при  $k_1$  и  $\kappa_1$  отдельно, получим уравнение

$$k_1 \left[ \frac{(\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \beta_2) \cos \omega + (\nu_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega} \right] + \kappa_1 \left[ \frac{(\nu_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) - (\nu_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2)}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)} \right] = 0.$$

Преобразуем числитель дроби при  $k_1$ . Используя выражение  $\sin^2 \omega = 1 - (\tau_1 \tau_2)^2$ , получим для этого числителя

$$\begin{aligned} & (\tau_1, \tau_2)[(\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \beta_2) - (\tau_1, \tau_2)(\nu_1, \beta_2)] + (\nu_1, \beta_2) = -(\tau_1, \tau_2)([\tau_1 \nu_1], [\tau_2 \beta_2]) + (\nu_1, \beta_2) = \\ & = (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \nu_2) + (\nu_1, \beta_2) = (\tau_1, \nu_2)(\beta_1, \tau_2). \end{aligned}$$

Числитель дроби при  $\kappa_1$  записывается в виде  $-([\nu_1, \beta_1], [\tau_2, \beta_2]) = (\tau_1, \nu_2)$ . Заметим, что множитель  $(\tau_1, \nu_2)$  входит в оба числителя. Может считать, что он отличен от нуля. Так как в противном случае кривая  $\gamma_1$  - плоская. Можем на него сократить. В результате получим

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)^2}.$$

Лемма 4 доказана.

Для произведения таких отношений для двух образующих кривых получим

$$\frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{\sin^4 \omega}{(\beta_1, \beta_2)^2 (\tau_1, \beta_2) (\tau_2, \beta_1)}.$$

Сравнивая с выражением  $C_0$  в (13) получаем

$$C_0 = \left( \frac{(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right)_3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Это выражение фигурирует в определении исключительного случая II.

Для иллюстрации выражения  $C_0$  возьмем в качестве образующих кривые откоса. У кривой откоса отношение кручения  $\kappa$  к кривизне  $k$  есть постоянное число:  $\frac{\kappa}{k} = const$ . Натуральный репер записывается в простом виде

$$\tau = \cos \phi (a \sin \sigma - b \cos \sigma) + e \sin \phi,$$

$$\nu = a \cos \sigma + b \sin \sigma,$$

$$\beta = -\sin \phi (a \sin \sigma - b \cos \sigma) + e \cos \phi,$$

где  $a, b, e$ - ортонормированный базис пространства,  $\phi = \arctg \frac{\kappa}{k}$ ,  $\sigma(s)$  произвольная достаточно гладкая функция длины дуги  $s$ . Для каждой определяющей кривой эти выражения записываются свои В этом случае надо только вычислить отношение

$$\frac{(\beta_1, \beta_2)^2}{1 - (\tau_1, \tau_2)^2},$$

которое обозначим через  $D_0$ . Предположим, что  $D_0$  постоянное число. Рассмотрим поверхность переноса двух винтовых линий с общей осью. Выражение единичных касательных векторов

$$\tau_i = \lambda_i (-a_i \omega_i \sin \omega_i t_i, a_i \omega_i \cos \omega_i t_i, b_i), \quad i = 1, 2.$$

где  $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{(a_i \omega_i)^2 + b_i^2}}$ ,  $a_i, b_i, \omega_i = const$ . Легко найти главные нормали и бинормали

$$\nu_i = -(\cos \omega_i t_i, \sin \omega_i t_i, 0), \quad \beta_i = \lambda_i (b_i \sin \omega_i t_i, -b_i \cos \omega_i t_i, a_i \omega_i)$$

Введем обозначения

$$\lambda_1\lambda_2 = \lambda, \quad a_1a_2\omega_1\omega_2 = a, \quad b_1b_2 = b, \quad \omega_1t_1 - \omega_2t_2 = \theta.$$

Получим уравнение

$$(\beta_1\beta_2)^2 + D_0^2(\tau_1\tau_2)^2 = D_0^2,$$

Которое переписывается в виде

$$\lambda^2[b^2 + D_0^2a^2] \cos^2 \theta + 2ab(1 + D_0^2) \cos \theta + a^2 + D_0^2b^2 = D_0^2.$$

Так как  $\theta$  переменная величина, то это равенство невозможно. Поэтому поверхность переноса указанных винтовых линий к исключительным случаям не относится. Следовательно, Теорема 2 к ней применима.

### 5.Образующие кривые плоские.

Рассмотрим поверхность переноса, когда образующие кривые лежат в перпендикулярных плоскостях. Не трудно установить, что поверхность относится к исключительному случаю I. Ниже мы рассмотрим конкретный простейший пример такой поверхности. Но сейчас укажем пример изгибаемости таких поверхностей в классе поверхностей переноса, предложенный рецензентом после прочтения первого варианта работы. Пусть производные непрерывно дифференцируемых функций  $a(\xi)$ ,  $b(\eta)$  удовлетворяют неравенства  $0 < |a'(\xi)| < 1$ ,  $0 < |b'(\eta)| < 1$ . Следующая поверхность, заданная радиус- вектором  $r(u, v, t)$ , дает пример непрерывного семейства изгибаний по параметру  $t$  в окрестности числа  $t = 1$  в классе поверхностей переноса

$$r(u, v, t) = \left( \int_0^u \sqrt{1 - t^2(a'(\xi))^2} d\xi, ta(u) + t^{-1}b(v), \int_0^v \sqrt{1 - t^{-2}(b'(\eta))^2} d\eta \right).$$

Метрика каждой такой поверхности из семейства  $t = const$  имеет вид  $ds^2 = (d\xi)^2 + 2a'(\xi)b'(\eta)d\xi d\eta + (d\eta)^2$  - не зависит от  $t$ . В то же время такие поверхности являются поверхностями переноса. Поверхность относится к исключительному случаю. Коэффициенты уравнения (8)  $P = Q = R = 0$ . Действительно, в этом случае  $\cos \omega = a'b'$ . Гауссова кривизна имеет вид

$$K = \frac{a''b''}{(1 - (a'b')^2)^2}.$$

Имеем, например, выражение  $P = \left(\frac{(\cos \omega)_\xi}{K \sin^4 \omega}\right)_\xi = \left(\frac{b'}{b''}\right)_\xi = 0$ . Аналогично устанавливается, что  $Q = R = 0$ . Поэтому условия теоремы 2 существенны.

Рассмотрим простейший пример замкнутой поверхности переноса, в котором образующие кривые - окружности единичного радиуса, лежащие в перпендикулярных плоскостях.

$$r(\xi, \eta) = (\cos \xi, \sin \xi, 0) + (0, \cos \eta, \sin \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi.$$

Находим  $\cos \omega = -\cos \xi \sin \eta$ . Поверхность относится к выше описанному типу. Детерминант метрического тензора равен нулю в точках, где  $\cos^2 \omega = 1$ , а это значит в точках, где одновременно  $\cos^2(\xi) = 1, \sin^2(\eta) = 1$ . Поэтому на поверхности есть четыре особые точки:  $A_1(0, \pi/2), A_2(\pi, \pi/2), A_3(\pi, \frac{3}{2}\pi), A_4(0, \frac{3}{2}\pi)$ , в которых нарушается регулярность поверхности. Гауссова кривизна  $K$  поверхности в этих точках теряет непрерывность. Диапазон значений  $K$  в окрестности такой точки составляет  $(-\infty, +\infty)$ .

Выше мы нашли выражение для геодезической кривизны координатных линий:  $(-\omega_\xi)$  для  $\xi$ -линии и  $(-\omega_\eta)$  для  $\eta$ -линии. Из полученного выражения для  $\cos \omega$  находим выражения для геодезической кривизны координатных линий и затем геодезические, которые являются координатными линиями

$$\omega_\xi = -\frac{\sin \xi \sin \eta}{\sin \omega}, \quad \eta = 0, \eta = \pi,$$

$$\omega_\eta = \frac{\cos \xi \cos \eta}{\sin \omega}, \quad \xi = \pi/2, \xi = \frac{3}{2}\pi.$$

Поэтому на поверхности, если рассматривать квадрат параметров со стороной  $2\pi$  и с отождествленными противоположными сторонами, есть две вертикальные и две горизонтальные геодезические петли. Ни одна из них не проходит через особые точки  $A_i$ . Имеются также по две наклонные геодезические в правую и левую сторону, задаваемые уравнением  $\xi \pm \eta = c = const$ , где  $c = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$ . Замкнутая область на поверхности, в которой одновременно соблюдаются строгие неравенства  $0 < |\cos \xi| < 1, 0 < |\sin \eta| < 1$ , включая границу (т.е. область, не содержащая особых точек  $A_i$ ), согласно выше сказанному, допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.

Гауссова кривизна поверхности имеет вид

$$K = \frac{\sin \xi \cos \eta}{\sin^4 \omega}.$$

Поэтому на поверхности есть две связные области положительной кривизны и две связные области отрицательной кривизны, которые разделяются четырьмя параболическими линиями. См. Рис. 1. Эти параболические линии являются координатными линиями и они проходят ровно посередине между геодезическими петлями. Они так же проходят через все 4 особые точки  $A_i$ . Поверхность имеет самопересечения по отрезкам прямых, соединяющих точки  $A_1$  с  $A_3$  и  $A_2$  с  $A_4$ . Эти отрезки пересекаются в начале координат. Пространственное поведение поверхности довольно сложное. См. Рис.2. Имеется 4 воронки по осям  $x_1$  и  $x_3$  и две выпуклые области в положительном и отрицательном направлениях оси  $x_2$ . Здесь  $x_1, x_2, x_3$  - обычные декартовы координаты в 3-мерном евклидовом пространстве. Вершины квадрата параметров  $P, Q, R, S$  отображаются в току  $(1, 1, 0)$ , Точка  $\xi = \pi, \eta = \pi$  отображается в диаметрально противоположную точку  $(-1, -1, 0)$ .

Все четыре особые точки лежат в плоскости  $x_2 = 0$ . Две точки в областях  $K < 0$   $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = \pi$  и  $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = 0$  отображаются в начало координат  $(0, 0, 0)$ . В то же время в областях  $K > 0$  точка  $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = 0$  имеет образом точку  $(0, 2, 0)$ , а точка  $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = \pi$  имеет образ  $(0, -2, 0)$ . Заметим, что поведение поверхности не меняется, если брать базовые окружности различных радиусов и с различными центрами.

Для сравнения рассмотрим обычный тор, который образуется тоже с помощью двух окружностей в перпендикулярных плоскостях, но не является поверхностью переноса. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  - ортонормированный базис в  $E^3$ . Радиус-вектор тора можно записать в виде

$$r(\xi, \eta) = \rho a + a \cos \eta + e_3 \sin \eta,$$

где  $a = e_1 \cos \xi + e_2 \sin \xi$ ,  $\rho = const$ - радиус окружности в плоскости  $x_1, x_2$ . Координаты  $\xi, \eta$  изменяются на интервале  $[0, 2\pi]$ . Метрика имеет вид  $ds^2 = (\rho + \cos \eta)^2 d\xi^2 + d\eta^2$ . Если  $\rho > 1$ , то особых точек на поверхности тора нет. Если  $\rho = 1$ , то имеется одна особая точка в начале координат. При  $0 < \rho < 1$  на поверхности тора имеются две особые точки, расположенные симметрично на оси  $x_3$ , соответствующие двум решениям

уравнения  $\cos \eta = -\rho$ . См. Рис.3. На поверхности находятся две области с  $K > 0$  и две области с  $K < 0$ . Внутри этой поверхности содержится веретенообразное выпуклое тело. Имеются две параболические линии  $\eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

### 6. Изгибание поверхностей переноса отрицательной кривизны в общем классе поверхностей.

*Теорема 3. Пусть в области в виде координатного прямоугольника на поверхности переноса класса регулярности  $C^3$  выполнено  $K < 0$ . Тогда эта область допускает изгибания в классе общих поверхностей.*

Не трудно доказать: если тождественно  $M = 0$  и метрика имеет вид (1), то поверхность является поверхностью переноса. Запишем уравнения Петерсона - Кодацци для метрики поверхности переноса не предполагая, что  $M = 0$ , т.е. для общих поверхностей. Используем приведенные коэффициенты второй квадратичной формы:  $l, m, n$ , положив  $L = l \sin \omega, M = m \sin \omega, N = n \sin \omega$ . Тогда основные уравнения теории поверхностей в этом случае приобретают вид

$$m_\xi = l_\eta + l \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega} - n \frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (17)$$

$$m_\eta = n_\xi - l \frac{\omega_\eta}{\sin \omega} + n \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (18)$$

$$ln - m^2 = K. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega}, \quad a_2 = -\frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (20)$$

$$b_1 = -\frac{\omega_\eta}{\sin \omega}, \quad b_2 = \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}. \quad (21)$$

Если мы найдем семейство решений этой системы, непрерывно зависящее от некоторого параметра  $t$  такое, что при  $t = 0$  имеем  $m = 0$ , а при  $t > 0$  и  $t < 0$  имеем  $m \neq 0$  и коэффициенты  $l, m, n$  непрерывно зависят от параметра  $t$ , то следовательно, получим непрерывное изгибание поверхности переноса. Чтобы выполнить уравнение Гаусса в случае  $K < 0$  используем преобразование Б.Л. Рождественского [13] и получим

систему уравнений для двух переменных  $r, s$ , положив

$$l = \frac{2krs}{s-r}, \quad m = -\frac{k(r+s)}{s-r}, \quad n = \frac{2k}{s-r}, \quad k = \sqrt{-K}. \quad (22)$$

Полученная система уравнений имеет симметричный вид. Она использовалась в работах Э.Г.Позняка [15] и [16] для построения изометрических погружений в целом метрик отрицательной кривизны, записанных в полугеодезической системе координат. Но такую же систему уравнений можно вывести и в рассматриваемом случае для метрики (1)

$$r_\xi + sr_\eta = A_0 + A_1r + A_2s + A_3r^2 + A_4rs + A_5r^2s, \quad (23)$$

$$s_\xi + rs_\eta = A_0 + A_2r + A_1s + A_3s^2 + A_4rs + A_5rs^2. \quad (24)$$

Коэффициенты  $A_i$  определяются метрикой поверхности и имеют вид

$$A_0 = -a_2, \quad A_1 = b_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi}, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi},$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_4 = -a_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_5 = b_1.$$

Предполагаем, что имеется некоторая поверхность переноса  $F_0$ , которая определяет метрику и функцию  $\omega(\xi, \eta)$ . Приведенные коэффициенты этой поверхности обозначим  $l_0(\xi, \eta), m_0 = 0, n_0(\xi, \eta)$ . Будем рассматривать построение семейства поверхностей  $F(\xi, \eta, t)$  при  $t = 0$ , включающее  $F_0$ , с помощью системы уравнений на  $r, s$ , в которой коэффициенты  $A_i$  не меняются (т.е не зависят от  $t$ ), а меняются только начальные условия для этой системы с изменением параметра  $t$ . Рассмотрим полосу на плоскости параметров  $T_h = \{0 \leq \xi \leq h, -\infty < \eta < +\infty\}$ . Заметим, что для поверхности переноса  $m = 0$  и следовательно,  $r = -s$ . Начальные условия зададим на линии  $\xi = 0$  так, что при  $t = 0$  эти условия совпадали с начальными условиями для поверхности  $F_0$ , а для  $t > 0$  отличались от них и коэффициент  $m \neq 0$ . Например, можем положить

$$r(0, \eta, t) = r_0(0, \eta) + tk_0(0, \eta), \quad s = -r_0(0, \eta) + tk_0(0, \eta). \quad (25)$$

В работе Э.Г.Позняка [15] доказана теорема существования решения системы уравнений при условии принадлежности коэффициентов и начальных условий классу регулярности  $C^{1,1}$  в некоторой полосе  $T_h$ , ширина которой  $h$  оценивается снизу. При этом дается оценка близости решения к заданной поверхности переноса. По соответствующим теоремам

теории дифференциальных уравнений семейство поверхностей непрерывно зависит от параметра  $t$ . В работе [15] рассматриваются два уравнения системы на  $r, s$ , коэффициенты правых частей которой отличаются в  $T_a$  в метрике  $C^{1,1}$  от соответствующих коэффициентов правых частей заданной системы заданной поверхности переноса менее, чем на  $\delta$ . В нашей работе эти коэффициенты совпадают. Кроме того, предполагается, что начальные данные для каждой из этих двух систем отличаются от начальных данных  $r_0, s_0$  менее, чем на  $\delta$ . Доказана в [16]

**Лемма 5** *Если коэффициенты правых частей указанных двух систем отличаются в полосе  $T_a$  в метрике  $C^{1,1}$  менее, чем на  $\epsilon$ , и начальные данные отличаются на оси  $\eta$  в метрике  $C^{1,1}$  также менее, чем на  $\epsilon$ , то решения этих систем, определяемые указанными начальными данными, отличаются менее, чем на  $P\epsilon$ . Константа  $P$  зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и ее решения  $\{r, s\}$ .*

В работе [17] рассматривается реализация аналитической метрики, но с помощью другого вида системы дифференциальных уравнений. Мы эту работу рассмотрим ниже. Заметим, что области поверхностей с  $K > 0$  с краем тоже допускают изгибания. Этому вопросу посвящены многочисленные работы, например, А.Д.Александрова, Н.В.Ефимова, А.С.Лейбина [12], И.Н.Векуа [20], К.М.Белова [21 -23].-

## **7.Существование замкнутых регулярных поверхностей переноса**

Рассмотрим замкнутые поверхности переноса. Если хотя бы одна образующая кривая с радиус-вектором  $\Gamma_i$  плоская, то на поверхности обязательно есть особая точка. Особая точка возникает из-за коллинеарности касательных в соответствующих точках образующих кривых, т.е. в тех точках, где векторное произведение касательных векторов к этим кривым  $[\Gamma'_1(\xi), \Gamma'_2(\eta)] = 0$ . Если рассмотреть индикатрису касательных плоской замкнутой кривой, то она тоже плоская и описывает большую окружность единичной сферы. Но индикатриса касательных второй замкнутой кривой должна пересекать все большие окружности сферы. Точка пересечения индикатрис соответствует особенности поверхности. Нужно при этом учитывать и диаметрально противоположные точки. Кривую на единичной сфере будем называть симметричной, если для каждой ее точки на этой кривой лежит и диаметрально противополож-

ная точка. Пример такой кривой  $\gamma_1(\xi)$ , который используем в дальнейшем:

$$\gamma_1(\xi) = \lambda(\cos \xi, \sin \xi, \sin 3\xi), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 3\xi}}.$$

Легко видеть, что существует замкнутая пространственная кривая  $\Gamma_1(\xi)$ , для которой кривая  $\gamma_1$  является индикатрисой касательных. Поэтому она пересекает все большие окружности единичной сферы. Экваториальную окружность она разбивает точками пересечения  $\sin 3\xi = 0$  на 6 секторов по  $60^\circ$ . Эти секторы занумеруем в порядке следования по окружности против часовой стрелки. Тогда сектор с номером 1 будет диаметрально противоположен сектору с номером 4 и т.д. Поэтому построенная кривая симметричная. Она без самопересечений. Возьмем в качестве второй индикатрисы близкую к  $\gamma_1$  замкнутую кривую, но не пересекающую ее. Например, добавлением к третьей пространственной компоненте малого числа  $h$  и последующего нормирования (или кривую, параллельную ей на единичной сфере). Достаточно, чтобы только одна индикатриса касательных была симметричной. В силу малого отклонения вторая кривая  $\gamma_2(\eta)$  тоже будет пересекать все большие окружности единичной сферы. По теореме М.Я.Выгодского [19] существует замкнутая кривая  $\Gamma_2(\eta)$  в пространстве  $E^3$ , для которой эта кривая является индикатрисой. По двум замкнутым пространственным кривым строится в  $E^3$  поверхность переноса без особых точек. Поверхность аналитическая.

В работе Э.Г.Позняка [17] доказаны теоремы об изометрических погружениях метрик в  $E^3$  даже знакопеременной кривизны, но с условием аналитичности метрики и с условием отсутствия сопряженных точек. Предполагается, что в погружаемой области можно ввести полугеодезическую систему координат. Это обстоятельство затрудняет приложение этих результатов к поверхностям переноса. если рассматривать изгибания в классе общих поверхностей. Имеет место

**Теорема 4.** *Замкнутая аналитическая поверхность переноса с кривизнами  $k_i \neq 0$  образующих кривых не допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.* На замкнутой поверхности переноса обязательно существует параболическая кривая. Так как кривизны определяющих кривых отличны от нуля, то на параболической кривой выполняется, например, уравнение  $(\beta_1, \tau_2) = 0$ . Возможны два случая:

1) параболическая кривая имеет окрестность некоторой ее точки, проектирующуюся на координатную  $\xi$ -линию в некоторую окрестность некоторой точки  $\xi_0$ , 2) Параболическая кривая полностью совпадает с координатной  $\eta$ -линией. Рассмотрим первый случай. В некоторой окрестности точки  $\xi_0$  параболическая кривая задается в виде  $\eta = \phi(\xi)$ . Очевидно, что функция  $\phi(\xi)$  имеет внутренне-геометрический смысл. Выше мы установили первый интеграл для системы уравнений Петерсона-Кодацци

$$L^2(\xi, \eta) + \omega_\xi^2(\xi, \eta) = C(\xi).$$

Найдем выражение функции  $C(\xi)$ . В некоторой окрестности точки  $\xi_0$  будет выполняться  $\omega_\xi^2 = C(\xi)$ . Поэтому квадрат коэффициента второй квадратичной формы  $L^2$  выражается через величины, относящиеся к внутренней геометрии

$$L^2(\xi, \eta) = \omega_\xi^2(\xi, \phi(\xi)) - \omega_\xi^2(\xi, \eta).$$

Тогда выражение второго коэффициента второй квадратичной формы  $N(\xi, \eta)$  находится из выражения гауссовой кривизны. Заметим, что эти коэффициенты определяются с точностью до знака, что соответствует выбору поверхности с точностью до зеркального отражения. Так как поверхность аналитическая, то связь второй квадратичной формы с внутренней геометрией распространяется на всю поверхность. Во втором случае, когда параболическая кривая совпадает со второй координатной линией, покажем, что эта линия плоская и лежит на касательной плоскости к поверхности. Дифференцируя уравнения  $(\beta_1, \tau_2(\eta)) = 0$ , по  $\eta$  и принимая во внимание, что  $k_2 \neq 0$ , получим  $(\beta_1, \nu_2) = 0$ . Дифференцируя еще раз по  $\eta$ , получим  $\kappa_2(\beta_1, \beta_2) = 0$ . Второй сомножитель в этом равенстве отличен от нуля. Действительно, имеем три равенства

$$(\beta_1, \tau_2) = 0, (\beta_1, \nu_2) = 0, (\beta_1, \tau_2)^2 + (\beta_1, \nu_2)^2 + (\beta_1, \beta_2)^2 = 1.$$

Следовательно,  $(\beta_1, \beta_2)^2 = 1$ . Поэтому  $\kappa_2 = 0$  на всей координатной  $\eta$ -кривой. Кроме того,  $\beta_1 = \pm\beta_2$ . Касательные векторы к поверхности вдоль этой кривой  $\tau_1, \tau_2$  ортогональны  $\beta_2$ , причем, этот вектор постоянен вдоль этой кривой. Итак, в этом случае параболическая кривая плоская и эта плоскость, в которой она лежит, касательная к поверхности. В

этом случае можем, рассматривая изгибание в классе поверхностей переноса и учитывая условие аналитичности поверхности, применить метод А.Д.Александрова, когда он рассматривал аналитические замкнутые поверхности типа (Т) в работе [6]. В доказательстве А.Д.Александрова используется условие: геодезическая кривизна рассматриваемой параболической кривой в некоторой точке отлична от нуля. Это условие у нас выполнено так как главная нормаль этой параболической линии лежит в касательной плоскости, и следовательно, ее геодезическая кривизна совпадает с  $k_2 \neq 0$ . Доказывается в [6], что вторые квадратичные формы рассматриваемых изометричных аналитических поверхностей совпадают. Здесь мы существенно использовали тот факт, что рассматривали поверхность переноса и изгибание в классе поверхностей переноса. При общем изгибании (если оно существует) могло бы оказаться, что плоская параболическая кривая переходит в неплоскую кривую. В этом случае мы не можем использовать метод А.Д.Александрова.

Другой способ завершения доказательства: так как  $\eta$ -кривая плоская, то ее индикатриса касательных - большая окружность единичной сферы. Она должна пересекаться с индикатрисой касательных второй образующей  $\xi$ -кривой. Точка пересечения этих индикатрис соответствует особенности на поверхности, что противоречит условию теоремы. Теорема 4 доказана.

Заметим, что в рассматриваемых случаях плоская параболическая кривая выполняет роль шпангоута из карабельного дела. Но там используют их несколько штук на определенном расстоянии друг от друга.

Я благодарен моей дочери Татьяне Аминовой за создание pdf-файла, моей внучке Ирине Монтян за подготовку рисунков, Анатолию и Наталье Стакун за компьютер и постоянную моральную поддержку и рецензенту за полезные замечания.

### Список литературы

[1] В.И.Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Москва, ГИФМЛ, 1963.

[2] Я.П.Бланк. О поверхностях переноса постоянной кривизны ДАН СССР, 139: 5, 1961,с 1037-1039.

[3] А.,Д.Александров. О работах Кон-Фоссена Успехи математических наук т.2. 1947.с. 105-141.

[4] Н.Х.Кейпер. Изгибаемые полиэдральные сферы в  $E^3$ , по Роберту Коннели. Сборник переводов "Математика" vol 1, 1980 transl. Nicolaas H. Kuiper, Spheres Polyedriques Flexibles dans  $E^3$ , d'apres Robert Connely Lecture Notes in Mathematics, vol 677, Springer-Verlag, 1978.

[5] Н.В.Ефимов. Доказательство существования поверхности, не изгибаемой в малом. ДАН СССР, т.27, в. 4, 1940, 314-317.

[6] А.,Д.Александров. Об одном классе замкнутых поверхностей. Матем. сб. т. 4, в. 1, 1938, 69-77.

[7] И.Х.Сабитов. О метриках, допускающих дисконтинуум неконгруэнтных погружений в  $R^3$ . СЭМИ, т. 182, в. 2, 2020, 1023-1026.

[8] И.Х.Сабитов. Жесткость и неизгибаемость в "малом" и в "целом". Матем.сб., т. 204, в. 10, 2013, 127-160.

[9] И.Иванова- Каратопраклиева, И.Х.Сабитов. Изгибания поверхностей. Итоги науки и техники, Сер.Проблемы геометрии, т. 23, 1991, 131-184.

[10] Са Эрп, Э. Тубиана. Дискретные и недискретные изометрические деформации поверхностей в  $R^3$ . Сибирск. матем.журн. т.43, в. 4, 2002, 887-893.

[11] Ю.А.Аминов. О неизгибаемости замкнутых поверхностей тригонометрического типа. Матем.сб.т.181, в. 12, 1990, 1710-1720.

[12] А.С.Лейбин. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем. Успехи математических наук. т. 5, в. 5, 1950, 149-159.

[13] Н.В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей, Успехи математических наук, т3, в. 2, 1948, 47- 158.

[14] Б.Л.Рождественский. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей. ДАН СССР, т. 143, в. 1, 1962 50-52.

[15] Э.Г.Позняк. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны, Украин. геом. сб. т. 3, 1966, 78-92.

[16] Э.Г.Позняк. Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства. Успехи математических наук. т. 28, в. 4, 1973, 47-76.

[17] Э.Г.Позняк. Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны. Украин. геом. сб, т. 7, 1969, 89- 97.

[18] Э.Г.Позняк. О замкнутых кривых с параллельными касательными. Матем. сб. т. 17, в. 1, 1945, 59-63.

[19] М.Я.Выгодский. О замкнутых линиях с заданной индикатрисой касательных. Матем. сб., т. 16, в. 1, 1945, 73-80.

[20] И.Н.Векуа. Обобщенные аналитические функции. Москва, Физматгиз, 1959.

[21] К.М.Белов. Об однозначной определенности поверхностей. ДАН СССР, т. 127, в. 2, 1959, 239-241.

[22] К.М.Белов. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей. ДАН СССР, т. 131, в. 3, 1960, 475-477.

[23] К.М.Белов. К вопросу об изгибании поверхностей. Украин. геом. сб., т. 7, 1969, 13-19.

[24] В.Бляшке. Дифференциальная геометрия. Москва-Ленинград. ОНТИ, 1935.