УДК 512.554

Алгебры дифференцирований простых конечномерных алгебр Новикова и прелиевых дублей Витта

В. А. Логачев, А. П. Пожидаев[1]

Аннотация. *Описание дифференцирований простых конечномерных алгебр Новикова и прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем простой характеристики сводится к описанию специальных дифференцирований исходных ассоциативных коммутативных дифференциально простых алгебр.*

Ключевые слова: *алгебра Новикова, дифференцирование, левосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, полином Дарбу, дубль Витта.*

Введение

Алгебра $\mathcal{A}$ называется левосимметрической, если ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ левосимметричен, то есть $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр. Другим хорошо известным примером левосимметрических алгебр являются алгебры Новикова, в которых коммутируют все операторы правого умножения.

В работе [1] была введена конструкция расширения левосимметрической алгебры, позволяющая строить новые левосимметрические алгебры на основе существующих. В основе этой конструкции лежит согласованная пара дифференцирования и гессиана исходной алгебры. В [2] эта конструкция была названа конструкцией Мицухары, где также были предложены обобщения этой конструкции, частными случаями которых являются дубли Витта. В [3] введено понятие эндоморфа произвольной неассоциативной алгебры, и, в частности, показано, что эндоморфы левосимметрических алгебр образуют значительный класс простых таких алгебр. В [4] построена конструкция Мицухары для эндоморфов произвольных левосимметрических алгебр, а также описаны дифференцирования эндоморфов произвольных алгебр. В [5] описаны автоморфизмы конечномерных прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Пусть d — некоторое ненулевое дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *d-простой*, если $\mathcal{A}^2 \neq 0$ и $\mathcal{A}$ не содержит собственных d-инвариантных идеалов; при этом дифференцирование d называется *простым*.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Определим на $\mathcal{A}$ новое умножение правилом $x \circ y = xd(y)$. Обозначим

[1]Работа второго автора поддержана Российским научным фондом (грант 25-41-00005).

полученную алгебру через $\mathcal{A}(d)$. Хорошо известно, что $\mathcal{A}(d)$ является алгеброй Новикова и $\mathcal{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d-простой (в случае характеристики не 2). Более общей является конструкция с умножением $x \circ y = xd(y) + axy$, где $a \in \mathcal{A}$ — некоторый фиксированный элемент (см. [6] и [7]); данная алгебра в [8] обозначается через $(\mathcal{A}, d, a)$ (а мы далее обозначаем ее $\mathcal{A}(d, a)$ в случае $a \neq 0$). Классификация конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 была получена в [9]. В работе [8] дана изящная классификация неассоциативных конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 0$ (полная классификация таких алгебр над полями характеристики $p > 2$ была получена ранее в [10]). В [11] снято ограничение на алгебраическую замкнутость поля, а именно, доказано, что любая такая алгебра над полем характеристики $p > 0$ изоморфна некоторой алгебре $(\mathcal{A}, d, a)$. Также в [11] описаны автоморфизмы конечномерных алгебр $(\mathcal{A}, d, a)$ над алгебраически замкнутым полем.

В настоящей работе мы описываем дифференцирования простых конечномерных алгебр Новикова (§ 1) и прелиевых дублей Витта (§ 2) над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Напомним необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Всюду далее F означает основное поле, а F^* — мультипликативную группу поля F; через $\mathcal{A}$ мы обозначаем некоторую алгебру над F. В дальнейшем, $\langle \Upsilon \rangle = \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где мы опускаем символ F, если поле ясно из контекста. Если $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра (векторное пространство) над F, то через $\operatorname{End} \mathcal{A}$ будем обозначать алгебру всех F-линейных операторов на $\mathcal{A}$, а через $\operatorname{Der} \mathcal{A}$ — алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$. Образ $\phi(x)$ элемента x под действием отображения ϕ часто обозначается также через ϕ_x. Операторы $R_a, L_a \in \operatorname{End} \mathcal{A}$, действующие по правилам $R_a(x) = xa$ и $L_a(x) = ax$ для любого $x \in \mathcal{A}$, называются операторами *правого* и *левого* умножения на элемент $a \in \mathcal{A}$.

Если I является d-инвариантным идеалом в $\mathcal{A}$, то это обозначается следующим образом: $I \trianglelefteq_d \mathcal{A}$. В дальнейшем, говоря про d-простые алгебры, мы считаем, что $d \neq 0$. Далее через $F_p[x_1, \ldots, x_n]$ мы обозначаем алгебру усеченных многочленов над полем F характеристики p, т. е. $x_i^p = 0, x_i^0 = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$ (единица 1 отождествляется с единицей поля F).

1. Дифференцирования алгебр Новикова

Всюду далее мы работаем с конечномерными ассоциативными коммутативными d-простыми алгебрами и часто применяем следующий хорошо известный результат (см., например, [2] и [12]).

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F. Тогда $\mathcal{A}$ содержит единицу 1, характеристика поля F равна $p > 0$, $\mathcal{A} \cong F_p[x_1, \ldots, x_n]$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \cdot d(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, и $\operatorname{Ker} d = F$. В частности, $d(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы.*

Заметим, что линейное отображение $D = d + R_a$ является *обобщенным* дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$, то есть

$$D(xy) = D(x)y + xd(y) \tag{1}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Скажем, что $H \in \mathrm{Der}\ \mathcal{A}$ является *α-перестановочным* с $D = d+R_a$, если для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$HD = D(H + \alpha)$$

(здесь и далее $H + \alpha$ означает $H + R_\alpha$). Заметим, что $D(1) = a$, а потому $H(a) = D(\alpha)$; если при этом $a = 0$, то $D = d,\ d(\alpha) = 0,\ dR_\alpha = R_\alpha d$, а потому

$$(H - \alpha)d = dH,$$

что мы и возьмем за определение *α-перестановочного* дифференцирования с дифференцированием d. Обозначим данный $\alpha \in \mathcal{A}$ через $\omega(H)$. Положим

$$\mathrm{Der}_D\, \mathcal{A} = \{H \in \mathrm{Der}\ \mathcal{A} : HD = D(H + \omega(H))\}.$$

Заметим, что $\omega(H)$ определяется с точностью до элемента β из $\mathrm{Ker}\ D$ такого, что $\beta\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ker}\ D$. Действительно, если $HD = D(H + \gamma)$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{A}$, то $D\beta = 0$ при $\beta = \alpha - \gamma$. Если алгебра $\mathcal{A}$ является d-простой, то $\beta\mathcal{A} \trianglelefteq_d \mathcal{A}$, откуда либо $\beta = 0$, либо β обратим. Во втором случае получаем $D = 0$, т. е. $d = -R_a \in \mathrm{Der}\ \mathcal{A}$, откуда $a = 0$ и $d = 0$. Таким образом, в случае d-простой алгебры $\mathcal{A}$ элемент $\omega(H)$ определен однозначно.

Пусть $H, F \in \mathrm{Der}_D\, \mathcal{A}$, $\omega(H) = \alpha, \omega(F) = \beta$. Тогда

$$\begin{aligned}[H, F]D = (HF - FH)D &= HD(F + \beta) - FD(H + \alpha) \\ &= D(H + \alpha)(F + \beta) - D(F + \beta)(H + \alpha) \\ &= D[H + \alpha, F + \beta] = D([H, F] + H(\beta) - F(\alpha)).\end{aligned}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Лемма 1.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над полем F, $a \in \mathcal{A}$, $D = d+a$. Тогда $\mathrm{Der}_D\, \mathcal{A}$ является подалгеброй Ли в $\mathrm{Der}\ \mathcal{A}$; при этом $\omega(H)$ определяется по H однозначно и $\omega([H, F]) = H(\omega(F)) - F(\omega(H))$ для любых $H, F \in \mathrm{Der}_D\, \mathcal{A}$.*

Для дальнейшего нам понадобятся явные условия простоты рассматриваемых алгебр Новикова в случае $\mathcal{A} \cong F_2[x]$. Далее ∂ обозначает частную производную по x.

Лемма 1.3. [11] *Пусть $\mathcal{A} = F_2[x]$. Алгебра Новикова $\mathcal{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $d = (\beta + \gamma x)\partial$ при $\beta, \gamma \in F^*$. Алгебра $\mathcal{A}(d, a)$ проста $\Leftrightarrow$ $d = (\beta + \gamma x)\partial$ при $\beta \in F^*$; при этом если $\gamma \in F^*$, то $\gamma \neq a$.*

Лемма 1.4. *Пусть $\mathcal{A} = F_2[x]$, $\mathcal{A}(d, a)$ проста, $D = d + R_a$ и $1 \in \mathrm{Im}\ D$. Тогда* $\mathrm{Ker}\ D = 0$.

Доказательство. Пусть $0 \neq c \in \operatorname{Ker} D$. Если $c \in F$, то $D(c) = ca = 0$, что противоречит условию $a \neq 0$. Так как $\langle 1, c\rangle = \mathcal{A}$, то $\operatorname{Im} D = \langle D(1)\rangle = \langle a\rangle$. Таким образом, $\dim \operatorname{Im} D = 1$, а так как по условию $1 \in \operatorname{Im} D$, то $a \in F$. Возьмем d как в лемме 1.3. Тогда $D(x) = \beta + \gamma x + ax$, откуда $\gamma = a$, противоречие. □

Напомним, что ненулевой многочлен f называется *полиномом Дарбу* относительно дифференцирования d, если $d(f) = \lambda f$ для некоторого *собственного многочлена* λ. Также нам понадобится следующая

Теорема 1.1. [11] *Пусть $\mathcal{A} = F_p[x_1, \ldots, x_n]$, d — простое дифференцирование $\mathcal{A}$. Если f является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ, то f обратим, и f по λ определяется однозначно, с точностью до ненулевого скаляра. Обратно, любой обратимый $f \in \mathcal{A}$ является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ.*

Теорема 1.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p > 0$ и алгебра $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, d, a)$ проста. Тогда $G \in \operatorname{Der} \mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда $G = H + \omega(H)$ для некоторого $H \in \operatorname{Der}_D \mathcal{A}$; при этом $\omega(H) \in F$ в случае $a = 0$.*

Доказательство. Пусть $G \in \operatorname{Der} \mathbb{A}$. Тогда $G(x \circ y) = G(x) \circ y + x \circ G(y)$, т. е.

$$G(xD_y) = G(x)D(y) + xD(G_y) \tag{2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{A}$ (напомним, что мы используем также обозначение $D_x := D(x)$, что позволяет избежать нагромождения скобок). Пусть $\alpha = G(1)$. Заметим, что $D(1) = 0$ при $a = 0$, поэтому, полагая $y = 1$ в (2) получаем $d(\alpha) = 0$, т. е. $\alpha \in F$ при $a = 0$. Полагая $x = 1$ в (2), выводим

$$G(D_y) = \alpha D(y) + D(G_y). \tag{3}$$

Пусть $H = G - \alpha$. Тогда из (3) следует $HD = D(H + \alpha)$, откуда H является α-перестановочным с D.

Покажем, что H является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$. Из (2) выводим

$$H(xD_y) = G(xD_y) - \alpha xD_y = G_xD_y + xD(G_y) - \alpha xD_y. \tag{4}$$

С другой стороны, по (3) имеем

$$H(x)D_y + xH(D_y) = G_xD_y - \alpha xD_y + xG(D_y) - \alpha xD_y =$$

$$G_xD_y - \alpha xD_y + x(\alpha D_y + D(G_y)) - \alpha xD_y = G_xD_y + xD(G_y) - \alpha xD_y. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), получаем

$$H(xy) = H(x)y + xH(y), \tag{6}$$

если хотя бы один из x, y лежит в $\operatorname{Im} D$.

Если D невырождено, то (6) справедливо для любых $x, y \in \mathbb{A}$. Поэтому по теореме 1.1 можем считать, что $\dim \operatorname{Ker} D = 1$, т. е. $\mathbb{A} = \operatorname{Im} D \oplus \langle e\rangle$ для некоторого $e \in \mathbb{A}$.

Таким образом, чтобы установить справедливость (6) для любых $x, y \in \mathbb{A}$, достаточно проверить истинность (6) для $x = y = e$.

Если $1 \notin \mathrm{Im}\, D$, то можно считать $e = 1$ и тогда (6) для $x = y = 1$ очевидно. Далее можно предполагать, что $1 \in \mathrm{Im}\, D$ и $\mathcal{A} \ncong F_2[x]$ по леммам 1.3 и 1.4.

Заметим, что можно считать $S := \mathrm{Im}\, D := D(\mathcal{A})$ подалгеброй в $\mathcal{A}$. Действительно, если это не так, то существуют $x, y \in S$ такие, что $z = xy \notin S$. Тогда $H \in \mathrm{Der}\, \mathcal{A}$, поскольку

$$H(z^2) = H(zxy) = H(zx)y + zxH(y) = H(z)xy + zH(x)y + zxH(y) = 2zH(z).$$

Далее, покажем, что $d(S)$ содержит обратимые элементы. Действительно, пусть $J = d(S)\mathcal{A}$ и $t = d(D_x)y$ для некоторых $x, y \in \mathcal{A}$. Тогда $J \trianglelefteq \mathcal{A}$, а так как $d = D - R_a$, то, применяя (1), получаем

$$d(t) \equiv d(d(D_x))y \equiv -d(aD_x)y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ J),$$

поскольку $a \in S$ и S — подалгебра в $\mathcal{A}$. При этом $J \neq 0$, так как $\mathcal{A} \ncong F_2[x]$, откуда $J = \mathbb{A}$.

Окончательно, $D_{ex} = D_e x + ed_x$, откуда $ed_x \in S$ для любого $x \in S$. Выбирая $x \in S$ так, что d_x обратим (при этом $d_x = D_x - ax \in S$ и $d_x^{-1} \in S$, так как $a, 1 \in S$), получаем $e \in S$. Пришли к противоречию.

Обратно, если $H \in \mathrm{Der}_D\, \mathcal{A}$, то, полагая $G = H + \omega(H)$, получаем дифференцирование G алгебры Новикова $\mathbb{A}$. $\square$

2. Дифференцирования дублей Витта

Дубль Витта. Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием d над полем F и $\overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ (как векторного пространства). Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ над F, на котором произведение определено правилами

$$a \circ b = ab + \overline{ab}, \quad \overline{a} \circ b = \overline{ad(b)}, \quad a \circ \overline{b} = 0, \quad \overline{a} \circ \overline{b} = \overline{ad(b)}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ с заданным умножением является левосимметрической, обозначается через $\mathcal{A}_d$ и называется *дублем Витта* алгебры $\mathcal{A}$ [2]. При этом $\mathcal{A}_d$ проста тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d-простой [2].

Опишем все дифференцирования дубля Витта простой алгебры $\mathcal{A}_d$. Скажем, что дифференцирование D алгебры $\mathcal{A}_d$ *индуцируется* дифференцированием $\tau \in \mathrm{Der}\, \mathcal{A}$, если

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\bar{a}) = \overline{\tau(a)}$$

для любого $a \in \mathcal{A}$. Подпространство дифференцирований в $\mathrm{Der}\, \mathcal{A}$ перестановочных с d обозначим через $\mathrm{Der}_d\, \mathcal{A}$.

Теорема 2.1. *Линейное отображение D является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}_d$ тогда и только тогда, когда D индуцируется дифференцированием $\tau \in \mathrm{Der}_d\, \mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть D — дифференцирование алгебры $\mathcal{A}_d$. Тогда

$$D(a) = \theta(a) + \overline{\phi(a)}, \quad D(\overline{a}) = \chi(a) + \overline{\psi(a)}$$

для любого $a \in \mathcal{A}$ и некоторых однозначно определенных $\theta, \phi, \chi, \psi \in \operatorname{End} \mathcal{A}$. Далее будем использовать запись $D = D(\theta, \phi, \chi, \psi)$.

Из определений получаем следующие равенства:

$$D(a \circ b) = D(ab + \overline{ab}) = \theta(ab) + \overline{\phi(ab)} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)},$$

$$\begin{aligned} D(a) \circ b + a \circ D(b) &= (\theta(a) + \overline{\phi(a)}) \circ b + a \circ (\theta(b) + \overline{\phi(b)}) \\ &= \theta(a)b + \overline{\theta(a)b} + \phi(a)d(b) + \overline{a\theta(b)} + a\theta(b). \end{aligned}$$

Значит, для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено

$$\theta(ab) + \chi(ab) = \theta(a)b + \phi(a)d(b) + a\theta(b), \tag{7}$$

$$\phi(ab) + \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b). \tag{8}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств

$$0 = D(a \circ \overline{b}) = D(a) \circ \overline{b} + a \circ D(\overline{b}) =$$

$$= (\theta(a) + \overline{\phi(a)}) \circ \overline{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)}) = \overline{\phi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\chi(b)},$$

из которой следует, что $\chi(a) = 0$ и $\phi(a)d(b) = 0$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим левый аннулятор множества $d(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$:

$$B = \operatorname{Ann}_l d(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xd(\mathcal{A}) = 0\}.$$

Так как $d^2(\mathcal{A}) \subset d(\mathcal{A})$, то $0 = d(bd(a)) = d(b)d(a) + bd^2(a) = d(b)d(a)$ для всех $b \in B$ и $a \in \mathcal{A}$, откуда $d(B) \subset B$. Поскольку B — d-инвариантный идеал, то $B = 0$ или $B = \mathcal{A}$. Если $B = \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}d(\mathcal{A}) = 0$, а так как $1 \in \mathcal{A}$, то $d = 0$. Значит, $B = 0$ и $\phi = 0$. Используя равенства $\chi = \phi = 0$, (7) и (8) можно переписать следующим образом:

$$\theta(ab) = a\theta(b) + \theta(a)b, \quad \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b),$$

откуда следует, что $\theta \in \operatorname{Der} \mathcal{A}$, и $\theta = \psi$, так как $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

Далее, из свойств дифференцирования получаем следующие равенства:

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{a}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ D(\overline{b}) = \overline{\psi(a)} \circ \overline{b} + \overline{a} \circ \overline{\psi(b)} = \overline{\psi(a)d(b)} + \overline{ad(\psi(b))};$$

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{ad(b)}) = \overline{\psi(ad(b))},$$

сравнивая которые, выводим

$$ad(\psi(b)) + \psi(a)d(b) = \psi(ad(b)).$$

Так как $\psi \in \operatorname{Der} \mathcal{A}$, то $ad(\psi(b)) = a\psi(d(b))$ и $d\psi = \psi d$. Далее, имеем

$$D(\overline{b} \circ a) = D(\overline{b}) \circ a + \overline{b} \circ D(a) = \psi(b)d(a) + bd(\theta(a));$$

$$D(\overline{b}\circ a)=D(bd(a))=\psi(bd(a))=\psi(b)d(a)+b\psi(d(a)),$$

откуда $bd(\theta(a))=b\psi(d(a))$, что эквивалентно предыдущему соотношению $d\psi=\psi d$. В итоге, для некоторого $\tau=\theta\in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ имеем

$$D(a)=\tau(a),\quad D(\overline{a})=\overline{\tau(a)},\quad \tau d=d\tau.$$

Обратно, легко проверить, что любое дифференцирование τ алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условию $d\tau=\tau d$, задает дифференцирование D дубля Витта $\mathcal{A}_d$ по правилу

$$D(a)=\tau(a),\ D(\overline{a})=\overline{\tau(a)}.\qquad\square$$

Обобщенный дубль Витта. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру $\mathcal{A}$ с ненулевым дифференцированием d над полем F. Наделим $\mathcal{A}\oplus\overline{\mathcal{A}}$ умножением:

$$\overline{b}\circ a=bd(a)+\overline{ba},\quad a\circ\overline{b}=\overline{ab},\quad a\circ b=ab,\quad \overline{a}\circ\overline{b}=\overline{ad(b)}$$

для любых $a,b\in\mathcal{A}$. Построенная алгебра является левосимметрической, обозначается $W_d(\mathcal{A})$ и называется *обобщенным дублем Витта* алгебры $\mathcal{A}$ [2]. Алгебра $W_d(\mathcal{A})$ проста тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d-простой [2].

Опишем все дифференцирования конечномерной простой алгебры $W_d(\mathcal{A})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$.

Пусть $\alpha\in\mathcal{A}$ и $D\in\mathrm{Der}\,W_d(\mathcal{A})$. Как и ранее, будем использовать запись $D(\theta,\phi,\chi,\psi)$ для дифференцирования D и γ для оператора R_γ.

Лемма 2.1. *Пусть D — произвольное дифференцирование алгебры $W_d(\mathcal{A})$. Тогда $D=D(\psi-\alpha,\phi,\gamma,\psi)$ для некоторых $\psi\in\mathrm{End}\,\mathcal{A}$, $\gamma,\alpha=\psi(1)\in\mathcal{A}$ и $\phi\in\mathrm{Der}_d\,\mathcal{A}$; при этом $d(\gamma)=0$, $2\gamma+d(\alpha)=0$, $2\phi(a)d(b)=0$ для любых $a,b\in\mathcal{A}$ и выполнены соотношения:*

$$\psi(a)d(b)+ad(\psi(b))\ =\ \psi(ad(b))+abd(\alpha),\tag{9}$$

$$\psi(ab)+\alpha ab\ =\ \psi(a)b+\phi(a)d(b)+a\psi(b).\tag{10}$$

Более того, если $\phi=0$ и $\tau=\psi-\alpha$, то данные соотношения эквивалентны тому, что $\tau d=d\tau+\alpha d$ и $\tau\in\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$.

Доказательство. Из определений имеем равенства

$$D(a\circ b)=D(a)\circ b+a\circ D(b)=(\theta(a)+\overline{\phi(a)})\circ b+a\circ(\theta(b)+\overline{\phi(b)})$$

$$=\theta(a)b+\phi(a)d(b)+\overline{\phi(a)b}+a\theta(b)+\overline{a\phi(b)};$$

$$D(a\circ b)=D(ab)=\theta(ab)+\overline{\phi(ab)},$$

что эквивалентно

$$\theta(ab)=a\theta(b)+\phi(a)d(b)+\theta(a)b,\tag{11}$$

$$\phi(ab)=\phi(a)b+a\phi(b)$$

для любых $a,b\in\mathcal{A}$. Аналогично получаем

$$D(\overline{a}\circ b)=D(\overline{a})\circ b+\overline{a}\circ D(b)=(\chi(a)+\overline{\psi(a)})\circ b+\overline{a}\circ(\theta(b)+\overline{\phi(b)})$$

$$= \chi(a)b + \psi(a)d(b) + \overline{\psi(a)b} + ad(\theta(b)) + \overline{a\theta(b)} + \overline{ad(\phi(b))};$$
$$D(\overline{a} \circ b) = D(ad(b) + \overline{ab}) = \theta(ad(b)) + \overline{\phi(ad(b))} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)},$$

откуда

$$\chi(a)b + \psi(a)d(b) + ad(\theta(b)) = \theta(ad(b)) + \chi(ab),$$
$$\psi(a)b + a\theta(b) + ad(\phi(b)) = \psi(ab) + \phi(ad(b)) \tag{12}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Далее рассмотрим следующие равенства

$$D(a \circ \overline{b}) = D(a) \circ \overline{b} + a \circ D(\overline{b}) = (\theta(a) + \overline{\phi(a)}) \circ \overline{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)})$$
$$= \overline{\theta(a)b} + \overline{\phi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\psi(b)};$$
$$D(a \circ \overline{b}) = D(\overline{ab}) = \chi(ab) + \overline{\psi(ab)}.$$

Таким образом,

$$\psi(ab) = \theta(a)b + \phi(a)d(b) + a\psi(b), \tag{13}$$
$$\chi(ab) = a\chi(b)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Полагая $b = 1,\ \psi(1) = \alpha \in \mathcal{A},\ \chi(1) = \gamma \in \mathcal{A}$, получаем

$$\psi(a) = \theta(a) + \alpha a, \chi(a) = \gamma a.$$

Теперь из (13) следует (10). Используя (13) и (11), перепишем (12):

$$ad(\phi(b)) = 2\phi(a)d(b) + a\phi d(b),$$

откуда при $a = 1$ получаем $d\phi = \phi d$, а потому $2\phi(a)d(b) = 0$. Далее, имеем

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{a}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ D(\overline{b}) = (\chi(a) + \overline{\psi(a)}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)})$$
$$= \overline{\chi(a)b} + \overline{\psi(a)d(b)} + ad(\chi(b)) + \overline{a\chi(b)} + \overline{ad(\psi(b))};$$
$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{ad(b)}) = \chi(ad(b)) + \overline{\psi(ad(b))},$$

откуда

$$\chi(ad(b)) = ad(\chi(b)),$$
$$\psi(ad(b)) = \chi(a)b + \psi(a)d(b) + a\chi(b) + ad(\psi(b)) \tag{14}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. При $a = b = 1$ получаем $d(\gamma) = 0$ и $2\gamma + d(\alpha) = 0$. Теперь (14) можно переписать в виде $\psi(ad(b)) = 2\gamma ab + \psi(a)d(b) + ad(\psi(b))$, и мы приходим к (9).

Если $\phi = 0$, то указанная в лемме эквивалентность легко проверяется. $\square$

Будем говорить, что дифференцирование D алгебры $W_d(\mathcal{A})$ *индуцируется* α-перестановочным с d дифференцированием τ алгебры $\mathcal{A}$, если для произвольного $a \in \mathcal{A}$ выполняются следующие равенства:

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\overline{a}) = \gamma a + \overline{(\tau + \alpha)(a)}$$

для некоторых $\alpha, \gamma \in \mathcal{A}$ таких, что $d(\gamma) = 0,\ 2\gamma + d(\alpha) = 0$.

Теорема 2.2. *Если F — алгебраически замкнутое поле, то всякое дифференцирование конечномерной простой алгебры $W_d(\mathcal{A})$ индуцируется α-перестановочным с d дифференцированием τ алгебры $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть D — дифференцирование алгебры $W_d(\mathcal{A})$. Сначала рассмотрим случай, когда характеристика поля F не равна 2. В этом случае из леммы 2.1 следует равенство $\phi(a)d(b) = 0$. Рассмотрим $\mathrm{Ann}_l\, d(\mathcal{A})$. Как и в теореме 2.1, $\mathrm{Ann}_l\, d(\mathcal{A}) \trianglelefteq_d \mathcal{A}$, откуда $\phi = 0$. По лемме 2.1 $\tau = \psi - \alpha \in \mathrm{Der}\ \mathcal{A}$, $\tau d = d\tau + \alpha d$, $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha)$.

Теперь рассмотрим случай, когда характеристика поля F равна 2. В этом случае $D = D(\tau, \phi, \gamma, \tau + \alpha)$ по лемме 2.1. Из (10) и коммутативности $\mathcal{A}$ следует, что $\phi(a)d(b) = \phi(b)d(a)$. Так как в $\mathrm{Im}\, d$ лежат обратимые элементы, то найдется такой b, что $d(b)$ обратим, откуда

$$\phi(a) = d(b)^{-1}\phi(b)d(a),$$

и $\phi = cd$ для некоторого $c \in \mathcal{A}$. Поскольку $\phi \in \mathrm{Der}_d(\mathcal{A})$ по лемме 2.1, то $c = \beta \in F$. Так как характеристика поля равна 2, то (9) можно переписать в виде

$$\psi(ad(b)) = \psi(a)d(b) + ad(\psi(b)).$$

Рассматривая (10), заменяя b на $d(b)$ и используя равенство $\phi = \beta d$, последовательно получаем:

$$\psi(ad(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \phi(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$\psi(a)d(b) + ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \beta d(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) + a\psi(d(b)) = \beta d(a)d^2(b).$$

Полагая $a = 1$ в (9) и подставляя полученное выражение в последнее равенство, выводим $\beta d(a)d^2(b) = 0$. Так как $d(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы, то $\beta d^2(\mathcal{A}) = 0$.

Если $d^2(\mathcal{A}) \neq 0$, то $\beta = 0$ и $\phi = 0$. Если $d^2(\mathcal{A}) = 0$, то $\mathcal{A} = F_2[x]$ и $d = \xi\partial$ для некоторого $\xi \in F^*$. В этом случае, полагая $a = b = x$ в (10), выводим $\phi = 0$.

Таким образом, по лемме 2.1 получаем

$$\tau = \psi - \alpha \in \mathrm{Der}\ \mathcal{A},\ \tau d = d\tau + \alpha d,\ \alpha \in F,\ D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha).$$

Обратно, легко проверяется, что $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha) \in \mathrm{Der}\ W_d(\mathcal{A})$ при $d(\gamma) = 0,\ 2\gamma + d(\alpha) = 0$. □

Литература

[1] Mizuhara A., On simple left-symmetric algebras over a solvable Lie algebra, Sci. Math. Jpn. 57, 2 (2003), 325–337.

[2] Пожидаев А. П., Об обобщенной конструкции Мицухары, Сиб. мат. журн. 65, 3 (2024), 545–559.

[3] Пожидаев А. П., Об эндоморфах правосимметрических алгебр, Сиб. мат. журн. 61, 5 (2020), 1077–1086.

[4] Пожидаев А. П., О конструкции Мицухары для эндоморфов, СЭМИ 21, 1 (2024), 41–54.

[5] Пожидаев А. П., Группы автоморфизмов прелиевых дублей Витта, Сиб. мат. журн. 65, 6 (2024), 1214–1226.

[6] Gelfand I. M., Dorfman I. Ya., Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Funct. Anal. Appl. 13, 4 (1979), 248–262.

[7] Xu X., Novikov-Poisson algebras, J. Algebra 190, (2) (1997), 253–279.

[8] Zhelyabin V. N., Zakharov A. S., On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p, Sib. Math. J. 65, (3) (2024), 680–687.

[9] Zelmanov E., On a class of local translation invariant Lie algebras, Soviet Math. Dokl. 35 (1987), 216–218.

[10] Xu X., Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0, J. Algebra 246, (2) (2001), 673–707.

[11] Pozhidaev A. P., Zhelyabin V. N., Simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms, сдана в J. Algebra.

[12] Harper L. R. Jr., On differentiably simple algebras, Trans. AMS 100, 1 (1961), 63–72.

Логачев Вадим Анатольевич,
Новосибирский госуниверситет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск, 630090.
v.logachev@g.nsu.ru

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X),
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090.
app@math.nsc.ru