УДК 517.518.85

ФОРМУЛЫ КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ[1]

Ю. С. Волков, Т. Жанлав, Р.-О. Мижиддорж

Аннотация

Рассматривается задача приближения функции по известным интегрально усреднённым по промежуткам сетки значениям интегральными квадратическими сплайнами. Показано, что если решается задача интерполяции в среднем, то интегральный квадратический сплайн можно определять через интерполяционный кубический сплайн. Поскольку интерполяционный кубический сплайн достаточно хорошо изучен, то некоторые его свойства можно перенести на интегральный квадратический сплайн. Предложены формулы квазиинтерполяции интегральными квадратическими сплайнами. Задача локальной аппроксимации интегральными сплайнами впервые рассмотрена на произвольной неравномерной сетке. На равномерной сетке найдены все точки суперсходимости при интерполяции и квазиинтерполяции в среднем, т.е. точки, в которых повышается порядок приближения. Показано, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной обоих сплайнов приближает третью производную с четвёртым порядком.

Ключевые слова: интегральный квадратический сплайн, интерполяция в среднем, кубический сплайн, оценки погрешности приближения, точки суперсходимости, локальная аппроксимация.

Введение

В прикладных задачах, связанных с приближением функций, иногда вместо значений функции в узлах сетки известны лишь интегрально усреднённые по промежутку значения или интегралы приближаемой функции (см., например, [1, 2]). В настоящее время для решения таких задач активно применяются сплайны. Первое применение сплайнов для подобных задач, по-видимому, было в 1972 году для приближения гистограмм. И.Шёнберг [3] для восстановления исходной функции по известным гистограммам вместо условий интерполяции использовал условия совпадения гистограмм сплайна и приближаемой функции, что объясняет предложенный им термин *гистосплайны* для получившихся сплайнов. Позднее Ю.Н.Субботин рассмотрел задачу интерполяции интегрально усреднённых значений и назвал эту задачу *интерполяцией в среднем* [4]. Последнее время сплайны, применяемые для приближения функций по заданным интегралам или интегрально усреднённым значениям, стали называть *интегральными*. Такое название было предложено в работе [5], которая послужила толчком для изучения интегральных сплайнов, так как в этой работе было замечено, что на равномерной сетке кубический сплайн можно построить довольно просто путём решения трёхдиагональной системы уравнений. Но про

[1]Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0005)

общий случай известно, что уже для кубических сплайнов задача интерполяции в среднем довольно сложна [6].

На произвольной неравномерной сетке достаточно подробно изучались из интегральных сплайнов лишь квадратические. В работе [7] установлены порядки приближения такими сплайнами в задаче интерполяции в среднем, в [8] найдены условия, обеспечивающие наследование свойств неотрицательности, монотонности и выпуклости при интерполяции в среднем. Вопрос выбора краевых условий рассмотрен в работе [9]. Отметим, что в работах [10,11] для случая равномерной сетки исследованы точки суперсходимости и найдены точные оценки погрешности интерполяции в среднем.

В классических задачах приближении функций наряду с интерполяцией широко используются и показали свою эффективность методы локальной аппроксимации и квазиинтерполяции. Для построения сплайнов, решающих задачу аппроксимации функций, уже не требуется решать системы линейных уравнений. Получаемые локальные сплайны могут приближать требуемую функцию с теми же порядками, что и интерполяционные, поэтому в этом случае их и называют *квазиинтерполяционными.* Локальные методы приближения стали применяться и для интегральных сплайнов: для кубических сплайнов такие методы начали изучаться в работах [12–14], для сплайнов более высоких степеней — в работах [15, 16]. Монография [17] посвящена задачам аппроксимации интегральными сплайнами. Однако, все такие работы по локальным интегральным сплайнам рассматривались только на равномерных сетках.

В данной работе мы показываем, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволяет перенести некоторые известные результаты о свойствах интерполяционных кубических сплайнов на интегральные квадратические сплайны. В частности, мы выписываем оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами для произвольной неравномерной сетки. Ранее были известны только результаты о порядках приближения [7]. Впервые рассмотрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. С помощью формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] мы выводим формулы локальной аппроксимации для интегральных квадратических сплайнов. Установлены оценки погрешности приближения полученным локальным интегральным квадратическим сплайном. Эти формулы являются формулами квазиинтерполяции и имеют наивысший третий порядок приближения, как и при интерполяции в среднем.

§1. Интерполяция в среднем

Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ известны усреднённые по интервалам сетки Δ значения некоторой функции $y(x)$:

$$Y_i = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Требуется приблизить функцию $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегральным квадратическим сплайном. Интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн $S(x)$ является сплайном второй степени с узлами на сетке Δ гладкости $C^1[a,b]$ и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\,dx = Y_i, \quad i=0,1,\dots,n-1. \tag{1}$$

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуются дополнительные условия, которые мы возьмём в виде обычных условий интерполяции на концах отрезка

$$S(a)=y(a), \quad S(b)=y(b). \tag{2}$$

Если краевые значения приближаемой функции не известны, то можно получить приближение этих значений с требуемым порядком точности путём комбинации нескольких крайних значений. Например, если Y_0 приближает значение $y(a)$ с первым порядком, то, как не трудно установить, выражение

$$\frac{2h_0+h_1}{h_0+h_1}Y_0-\frac{h_0}{h_0+h_1}Y_1$$

приближает $y(a)$ уже со вторым порядком. В работе [10] получено выражение

$$\frac{1}{12}(25Y_0-23Y_1+13Y_2-3Y_3),$$

которое на равномерной сетке приближает $y(a)$ с четвёртым порядком.

Рассмотрим кубический сплайн $s(x)$ с узлами на этой же сетке Δ, производная которого будет совпадать с интегральным квадратическим сплайном $S(x)$, т.е. $s'(x)=S(x)$. Ясно, что такой сплайн $s(x)$ определяется по $S(x)$ с точностью до константы. Если кубический сплайн $s(x)$ интерполирует некоторую функцию $f(x)$, т.е.

$$s(x_i)=f_i, \quad i=0,\dots,n,$$

где $f_i=f(x_i)$, с краевыми условиями $s'(a)=f'(a)$, $s'(b)=f'(b)$, то, в соответствии с (1), имеем

$$\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\,dx = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x)\,dx = \frac{s(x_{i+1})-s(x_i)}{h_i} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} = Y_i,$$

при $i=0,\dots,n-1$. Более того, можно считать, что выполняется условие $f'(x)=y(x)$.

Установленная связь между интерполяционным в среднем интегральным квадратическим сплайном и интерполяционным кубическим сплайном позволяет многие известные результаты для кубических сплайнов перенести на интегральные квадратические сплайны. Например, для интерполяционных кубических сплайнов разработаны эффективные методы построения (см. [19–23]).

В этом случае погрешность приближения функции $y(x)$ интегральным квадратическим сплайном $S(x)$ можно выразить через погрешность интерполяции функции $f(x)$ кубическим сплайном $s(x)$, а именно

$$S^{(r)}(x)-y^{(r)}(x)=s^{(r+1)}(x)-f^{(r+1)}(x), \quad r=0,1,2. \tag{3}$$

Поскольку оценки погрешности приближения интерполяционным кубическим сплайном хорошо известны, то сразу можно выписать оценки интерполяции в среднем интегральным квадратическим сплайном.

Теорема 1. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^3[a,b]$, то*

$$\|S^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \le K_r \bar{h}^{3-r} \|y^{(3-r)}\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$K_0 = \frac{1}{24}, \quad K_1 = \frac{1}{6}, \quad K_2 = \frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{B}\right),$$

причём константа K_0 неулучшаема. Здесь

$$\bar{h} = \max_{0 \le i \le n-1} h_i, \quad B = \max_{0 \le i \le n-1} \frac{\bar{h}}{h_i}.$$

Доказательство следует из оценок для кубических сплайнов с учётом равенства (3). Для $r = 0$ доказательство можно найти в [24], там же установлена неулучшаемость константы K_0. Оценка с константой K_1 установлена в [25], и, наконец, оценка для $r = 2$ приведена в [21]. Константа K_1, по-видимому, не является точной, для случая равномерной сетки имеются точные константы K_1 и K_2 (см. [11, 26]).

Заметим, что ранее оценки погрешности интерполяции в среднем для интегральных квадратических сплайнов в случае произвольной неравномерной сетки установлены были лишь по порядку [7] только для $r = 0$. Точные константы в оценках известны лишь для равномерной сетки [11]. Также в работе [7] найдено, что на равномерной сетке интегральный квадратический сплайн в узлах приближает значения исходной функции с более высоким порядком. А в работе [10] найдены ещё точки суперсходимости (середины интервалов) для сплайнов и вторых производных. Для равномерной сетки и периодических краевых условий продемонстрировано [11], что эти и ряд дополнительных результатов для интегральных квадратических сплайнов могут непосредственно быть получены из известных свойств кубических сплайнов. Конечно же теорема 2 из [11] справедлива и для случая краевых условий (2). Сформулируем теорему, которая следует из [21, теорема 3.8] с учётом равенства (3).

Теорема 2. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями* (2) *функцию $y(x) \in C^4[a,b]$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$*

$$S^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \varphi^{(r+1)}(t) h^{3-r} y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{24} t^2 (1-t)^2, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 2 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a,b]$. Действительно, так как

$$\varphi'(t) = \frac{1}{12} t(1-t)(1-2t), \quad \varphi''(t) = \frac{1}{12}(1 - 6t + 6t^2), \quad \varphi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$S(x) = y(x) + O(h^4), \qquad \text{если } x = x_i,\ \ x = x_i + \frac{h}{2}, \tag{4}$$

$$S'(x) = y'(x) + O(h^3), \qquad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \tag{5}$$

$$S''(x) = y''(x) + O(h^2), \qquad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \tag{6}$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (4) и (6), найденым в [10], как и в [11], есть ещё по две точки суперсходимости (5) на каждом интервале для производной интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна.

Для периодического случая в [11] приведён ещё один неожиданный результат (теорема 3), который также справедлив и для случая краевых условий (2), он следует из равенства (3) и из свойств интерполяционного кубического сплайна (см. [27]).

Теорема 3. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями* (2) *функцию $y(x) \in C^7[a,b]$, то*

$$\frac{S''(x_i+0) - S''(x_i-0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Отметим, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной приближает третью производную интерполируемой в среднем функции и на некоторых неравномерных сетках (см. [28]).

§2. Методы локальной аппроксимации

В некоторых задачах наиболее удобным оказывается представление сплайнов в базисе B-сплайнов. Расширим сетку Δ кратными дополнительными узлами x_{-1}, x_{-2}, x_{-3} и x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} так, что

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}.$$

Тогда

$$h_{-3} = h_{-2} = h_{-1} = 0, \quad h_n = h_{n+1} = h_{n+2} = 0.$$

Представим квадратический сплайн $S(x)$ в виде разложения

$$S(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \beta_k N_{k,3}(x) \tag{7}$$

по базису из B-сплайнов второй степени $N_{i,3}(x)$, $i = -2, \ldots, n-1$. Здесь и ниже $N_{i,r}(x)$ — нормализованные B-сплайны степени $r-1$ (или порядка r) с носителями $[x_i, x_{i+r}]$ (см. [20, 21, 29]).

Как мы уже отмечали, что если $S(x)$ — интерполирующий в среднем функцию $y(x)$ интегральный квадратический сплайн, то он является производной кубического сплайна $s(x)$, интерполирующего некоторую функцию $f(x)$, производная которой совпадает с $y(x)$. Если кубический сплайн $s(x)$ также представлен в виде разложения

$$s(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \alpha_k N_{k,4}(x) \tag{8}$$

по базису из B-сплайнов, но уже третьей степени $N_{i,4}(x)$, $i = -3, \ldots, n-1$, то имеют место равенства

$$\beta_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i}(\alpha_i - \alpha_{i-1}), \quad i = -2, \ldots, n-1.$$

Методы построения интерполяционных кубических сплайнов, т.е. нахождения коэффициентов разложения $\alpha_{-3}, \ldots, \alpha_{n-1}$, хорошо известны. Эти коэффициенты находятся из трёхдиагональной системы линейных уравнений (см. [30, 31]). Система уравнений для определяемых параметров $\beta_{-2}, \ldots, \beta_{n-1}$ приведена в [8, 9] и имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{-2} = y(a), \\ \lambda_i \beta_{i-2} + (1 + \mu_i + \lambda_{i+1}) \beta_{i-1} + \mu_{i+1} \beta_i = 3Y_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1, \\ \beta_{n-1} = y(b), \end{cases} \tag{9}$$

здесь используется обозначение $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, причём $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$, $\mu_n = 1$.

Распространён подход и в некоторых задачах приближения функций очень эффективен, состоящий в том, что кубический сплайн, приближающий функцию, находится не из условий интерполяции, а задаётся явно. Т.е. коэффициенты разложения (8) находятся не в результате решения системы линейных уравнений, а задаются явными формулами так, чтобы получить приемлемое качество приближения по точности или другим характеристикам. Это так называемые *методы локальной аппроксимации*, а если получается приближение с тем порядком, что и при интерполяции, то используется термин *квазиинтерполяция*.

Коэффициенты α_j интерполяционного сплайна (8) близки интерполируемым значениям, поэтому простейшим локальным методом приближения является такой, когда коэффициенты разложения α_j не находятся из системы уравнений (9), задаются в явном виде $\alpha_{i-2} = f_i$, $i = 0, \ldots, n$ (два крайних коэффициента задаются из каких-либо дополнительных условий). В этом случае получаемый сплайн уже будет проходить не через заданные значения функции, а вблизи их. Такой кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с первым порядком, а на равномерной сетке — со вторым.

Аналогичные простейшие формулы можно получить и для интегральных сплайнов. Если положим

$$\begin{aligned} \beta_{-2} &= y(a), \\ \beta_{i-1} &= Y_i, \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ \beta_{n-1} &= y(b), \end{aligned}$$

то интегральный сплайн (7) приближает искомую функцию $y(x)$ также с первым порядком. Здесь мы так же считаем, что известны значения $y(a)$ и $y(b)$

и используем их для задания крайних коэффициентов. Первый порядок приближения следует из того, что интегрально усреднённые значения Y_j с первым порядком приближают значения $y(x_j)$. Можно показать, что на равномерной сетке с шагом h такой локальный интегральный сплайн будет приближать с порядком $O(h^2)$.

Формулы локальной аппроксимации кубическим сплайном (или квазиинтерполяции), точные на многочленах третьей степени, приведены в [21, с.250]. В работе [18] установлены оценки погрешности приближения таким локальным кубическим сплайном, этот кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с порядком $O(\bar{h}^4)$, т.е. является квазиинтерполяционным. Для интегрального квадратического сплайна формулы локальной аппроксимации максимального третьего порядка точности известны лишь для случая равномерной сетки [32, 33]. Наша задача получить формулы квазиинтерполяции для интегрального квадратического сплайна в случае произвольной неравномерной сетки.

В работе [18] рассмотрен локальный кубический сплайн

$$\widehat{s}(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \widehat{\alpha}_k N_{k,4}(x), \tag{10}$$

где коэффициенты $\widehat{\alpha}_i$ определяются формулами

$$\widehat{\alpha}_{-3} = f_0, \tag{11}$$

$$\widehat{\alpha}_{-2} = f_0 + \frac{h_0}{3} f_0', \tag{12}$$

$$\widehat{\alpha}_{i-2} = f_i + \frac{\lambda_i h_i}{3} \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{\mu_i h_{i-1}}{3} \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

$$\widehat{\alpha}_{n-2} = f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f_n', \tag{14}$$

$$\widehat{\alpha}_{n-1} = f_n, \tag{15}$$

В формулах (11) – (15) коэффициенты у концов промежутка содержат значения f_0' и f_n' производных приближаемой функции, как отмечается в [18] вместо этих значений можно использовать их приближённые значения, вычисляемые путём дифференцирования интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих соответственно значения f_0, f_1, f_2, f_3 и f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n.

Рассмотрим интегральный квадратический сплайн

$$\widehat{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \widehat{\beta}_k N_{k,3}(x), \tag{16}$$

связанный с кубическим сплайном (10), а именно $\widehat{S}(x) = \widehat{s}'(x)$, и приближающий интегрально усреднённые значения функции $y(x) = f'(x)$. Тогда коэффициенты в представлении (16) мы будем определять по формулам

$$\widehat{\beta}_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i} (\widehat{\alpha}_i - \widehat{\alpha}_{i-1}), \quad i = -2, \ldots, n-1,$$

подставив в которые выражения (11) – (15), получим

$$\widehat{\beta}_{-2} = y(a), \tag{17}$$

$$\widehat{\beta}_{-1} = (1 + \mu_1 + \mu_1^2)Y_0 - \mu_1^2 Y_1 - \mu_1 y(a), \tag{18}$$

$$\widehat{\beta}_{i-1} = \frac{-\lambda_i h_i Y_{i-1} + (\mu_i h_{i-1} + 3h_i + \lambda_{i+1} h_{i+1})Y_i - \mu_{i+1} h_i Y_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}},$$
$$i = 1, \ldots, n-2, \tag{19}$$

$$\widehat{\beta}_{n-2} = (1 + \lambda_{n-1} + \lambda_{n-1}^2)Y_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 Y_{n-2} - \lambda_{n-1} y(b), \tag{20}$$

$$\widehat{\beta}_{n-1} = y(b). \tag{21}$$

Ясно, что для сплайнов $\widehat{s}(x)$ и $\widehat{S}(x)$ выполняются равенства

$$\widehat{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \widehat{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2. \tag{22}$$

Тогда результаты об оценках погрешности приближения для кубического сплайна $\widehat{s}(x)$, установленные в [18, теорема 2], мы можем переформулировать для интегрального квадратического сплайна $\widehat{S}(x)$.

Теорема 4. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (16) *определяются формулами* (17) – (21) *и* $y(x) \in C^3[a, b]$, *то*

$$\|\widehat{S}^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \le \widehat{K}_r \bar{h}^{3-r} \|y^{(3-r)}\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\widehat{K}_0 = \frac{13}{48}, \quad \widehat{K}_1 = \frac{1}{3}, \quad \widehat{K}_2 = \frac{1}{12} \max\left(11{,}5B + \frac{6}{B}\right).$$

Теорема 4 показывает, что интегральный квадратический сплайн (16), коэффициеты которого задаются формулами (17) – (21), является квазиинтерполяционным, он приближает исходную функцию с тем же порядком, что и интерполяционный в среднем. Если значения приближаемой функции не известны, то, как уже отмечалось выше, их можно задать приближённо через заданные интегрально усреднённые значения. Например, выражение

$$\frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 \tag{23}$$

на равномерной сетке приближает значение $y(a)$ с третьим порядком. Подставим это выражение в (17), (18) вместо $y(a)$ и аналогичное выражение

$$\frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1}. \tag{24}$$

в (20), (21) вместо $y(b)$, тогда коэффициенты разложения по B-сплайнам

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \widetilde{\beta}_k N_{k,3}(x), \tag{25}$$

будут иметь вид

$$\widetilde{\beta}_{-2} = \frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2, \tag{26}$$

$$\widetilde{\beta}_{-1} = \frac{5}{6}Y_0 + \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{6}Y_2, \tag{27}$$

$$\widetilde{\beta}_{i-1} = -\frac{1}{6}Y_{i-1} + \frac{4}{3}Y_i - \frac{1}{6}Y_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-2, \tag{28}$$

$$\widetilde{\beta}_{n-2} = -\frac{1}{6}Y_{n-3} + \frac{1}{3}Y_{n-2} + \frac{5}{6}Y_{n-1}, \tag{29}$$

$$\widetilde{\beta}_{n-1} = \frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1}. \tag{30}$$

Для равномерной сетки интегральный сплайн (25) отличается от (16) только тем, что на левом конце отрезка $[a, b]$ изменяются коэффициенты $\widetilde{\beta}_{-2}$, $\widetilde{\beta}_{-1}$, так как значение $y(a)$ заменено выражением (23), а на правом конце — изменяются коэффициеты $\widetilde{\beta}_{n-2}$, $\widetilde{\beta}_{n-1}$, так как значение $y(b)$ заменено соответствующим аналогичным выражением (24).

Отметим, что для равномерной сетки эти формулы (26) – (30) выписаны в работах [32, 33] и там же установлен третий порядок приближения интегральным квадратическим сплайном, исследований же на произвольной неравномерной сетке ранее не проводилось. Также в этих работах указано, что в узлах и серединах интервалов (точки суперсходимости) порядок приближения чевёртый. Но опять же эти результаты и ряд дополнительных непосредственно следуют из известных свойств кубических сплайнов. Сформулируем теорему, которая с учётом равенства

$$\widetilde{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \widetilde{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2,$$

следует из [34, теорема 5].

Теорема 5. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (25) *на равномерной сетке с шагом h определяются формулами* (26) – (30) *и $y(x) \in C^4[a, b]$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 2, \ldots, n-3$,*

$$\widetilde{S}^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \psi^{(r+1)}(t)h^{3-r}y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{24}t^2(1-t)^2 + \frac{1}{36}, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 5 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a, b]$. Действительно, так как

$$\psi'(t) = \frac{1}{12}t(1-t)(1-2t), \quad \psi''(t) = \frac{1}{12}(1 - 6t + 6t^2), \quad \psi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$\widetilde{S}(x) = y(x) + O(h^4), \qquad \text{если } x = x_i,\ \ x = x_i + \frac{h}{2}, \tag{31}$$

$$\widetilde{S}'(x) = y'(x) + O(h^3), \qquad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \tag{32}$$

$$\widetilde{S}''(x) = y''(x) + O(h^2), \qquad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \tag{33}$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (31), найденым в [32, 33], есть ещё точки суперсходимости (32) и (33) для первой и второй производных локального интегрального квадратического сплайна $\widetilde{S}(x)$. Заметим, что точки суперсходимости для интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна $S(x)$ и для квазиинтерполяционного интегрального квадратического сплайна $\widetilde{S}(x)$ одинаковы.

Обратим внимание, что в отличие от теоремы 2 теорема 5 указывает точки суперсходимости только во внутренних интервалах не охватывая по два крайних. Это связано с тем, что мы отказались от задания точных значений производных приближаемой функции на концах, заменили их приближёнными значениями, что изменило представление сплайна на указанных крайних интервалах, не позволяя здесь указать точки повышения порядка приближения.

В заключение отметим, что в работе [35] установлено, что кубический локально аппроксимационный сплайн $\widehat{s}(x)$ сохраняет свойство приближения скачком четвёртой производной приближаемой функции. Тогда справедлива теорема.

Теорема 6. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (25) *на равномерной сетке с шагом h определяются формулами* (26) – (30) *и* $y(x) \in C^7[a, b]$, *то*

$$\frac{\widetilde{S}''(x_i + 0) - \widetilde{S}''(x_i - 0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 3, \ldots, n - 4.$$

Здесь также надо сделать оговорку. Как и в теореме 5 промежуток действия формул теоремы 6 уменьшается по сравнению с теоремой 3 за счёт исключения по два крайних интервала у каждого конца отрезка по тем же причинам, что и выше.

§3. Численные эксперименты

Проведём численные эксперименты, демонстрирующие подтверждение теоретических результатов предыдущих параграфов, на примерах приближения тестовых функций, заданных интегрально усреднёнными значениями. В качестве тестовых выбраны функции

$$y_1(x) = \sin(3\pi x), \quad x \in [0, 1],$$

$$y_2(x) = x^4 + \log(x) + 5, \quad x \in [0.6, 1].$$

Мы вычисляем погрешности приближения функций и их производных двумя рассматриваемыми интегральными сплайнами $S(x)$ и $\widetilde{S}(x)$ в точках, являющимися точками суперсходимости для первой производной. Для первой функции это будут точки

$$x_i^1 = x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h,$$

а для второй —

$$x_i^2 = x_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h.$$

В соответствии с условиями теоремы 2 погрешность вычисляется во всех точках x_i^1, x_i^2 на интервалах $i = 0, \ldots, n-1$ и берётся наибольшая погрешность. При проведении численных экспериментов, демонстрирующих результаты теоремы 5, погрешность в выбранных точках вычисляется только на интервалах $i = 2, \ldots, n-3$.

Для вычисления значений интегральных квадратических сплайнов используем представление через коэффициенты B-сплайн разложения (см. [9])

$$S(x) = \lambda_i(1-t)^2\beta_{i-2} + [(\lambda_i t + \mu_i)(1-t) + t(\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}(1-t))]\beta_{i-1} + \mu_{i+1}t^2\beta_i,$$

получаемое из (7). Коэффициенты находятся из системы уравнений (9). Вычисление значений квазиинтерполяционного сплайна $\widetilde{S}(x)$ производится по аналогичной формуле, в которой коэффициенты $\{\beta_i\}$ заменены на $\{\widetilde{\beta}_i\}$, задаваемые формулами (26) – (30).

В Таблицах 1 – 4 приведены результаты численных экспериментов и содержат значения максимальных погрешностей аппроксимации в выбранных точках суперсходимости

$$E_j^{(r)} = E_j^{(r)}(n) = \max_{0 \le i \le n-1} \left|S^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j)\right|, \quad r = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$
$$\widetilde{E}_j^{(r)} = \widetilde{E}_j^{(r)}(n) = \max_{2 \le i \le n-3} \left|\widetilde{S}^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j)\right|, \quad r = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

и вычисленные порядки сходимости

$$\mathrm{CO} = \log_2\left|\frac{E_j^{(r)}(n)}{E_j^{(r)}(2n)}\right|, \quad \widetilde{\mathrm{CO}} = \log_2\left|\frac{\widetilde{E}_j^{(r)}(n)}{\widetilde{E}_j^{(r)}(2n)}\right|.$$

Заметим, что найденые в теоремах 2 и 5 точки симметрично расположены на каждам интервале, численные эксперименты при выборе симметричной серии точек в сравнении с рассмотренными приводят к тому же результату.

Заключение

В данной работе мы показали, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволило сразу сформулировать результаты о точности приближения функций, заданных интегралами или интегрально усреднёнными значениями, интегральным квадратическим сплайном. Мы приводим оценки погрешности интерполяции в среднем с указанием констант, в том числе точных, что обобщает результаты работ [7, 10] с установленными

Таблица 1: Результаты расчётов по теореме 2 для функции $y_1(x)$.

n	$E_1^{(0)}$	CO	$E_1^{(1)}$	CO	$E_1^{(2)}$	CO
10	1.74E-3		1.31E-1		3.21E+0	
20	1.11E-4	3.9	1.59E-2	3.0	8.18E-1	1.9
40	6.95E-6	4.0	1.98E-3	3.0	2.05E-1	2.0

Таблица 2: Результаты расчётов по теореме 2 для функции $y_2(x)$.

n	$E_2^{(0)}$	CO	$E_2^{(1)}$	CO	$E_2^{(2)}$	CO
10	1.07E-7		2.15E-5		1.28E-3	
20	7.00E-9	3.9	2.78E-6	2.9	3.34E-4	1.9
40	4.66E-10	3.9	3.52E-7	2.9	8.93E-5	1.9

Таблица 3: Результаты расчётов по теореме 5 для функции $y_1(x)$.

n	$\widetilde{E}_1^{(0)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(1)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(2)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$
10	1.53E-2		2.22E-1		1.35E+0	
20	1.21E-3	3.6	2.04E-2	3.4	7.00E-1	0.9
40	7.78E-5	3.9	2.14E-3	3.2	1.98E-1	1.8

Таблица 4: Результаты расчётов по теореме 5 для функции $y_2(x)$.

n	$\widetilde{E}_2^{(0)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(1)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(2)}$	$\widetilde{\mathrm{CO}}$
10	8.46E-7		1.75E-5		8.47E-4	
20	6.52E-8	3.7	2.23E-6	2.9	2.65E-4	1.7
40	4.36E-9	3.9	2.83E-7	2.9	7.11E-5	1.9

порядками приближения. Впервые рассматрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. На основе формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] выведены квазиинтерполяционные формулы для интегральных квадратических сплайнов. Также получены оценки погрешности приближения полученными квазиинтерполянтами. Найдены все точки суперсходимости как для интерполяции в среднем, так и при квазиинтерполяции в среднем, отметим совпадение множеств таких точек. В случае квазиинтерполяции точки суперсходимости найдены только во внутренних интервалах сетки, исключая по два крайних интервала с обоих концов отрезка. Кроме того, установлено, что для обоих типов рассмотренных интегральных сплайнов скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной сплайна приближает третью производную аппроксимируемой функции на равномерных сетках с четвёртым порядком.

Список литературы

[1] *Epstein E. S.* On obtaining daily climatological values from monthly means // J. Climate. 1991. V. 4, N 3. P. 365–368.

[2] *Ruiz-Arias J.A.* Mean-preserving interpolation with splines for solar radiation modeling // Solar Energy. 2022. V. 248. P. 121–127.

[3] *Schoenberg I. J.* Splines and histograms // Spline functions and approximation theory: Proc. Symp., Edmonton, 1972 / Eds. A. Meir, A. Sharma. Basel: Birkhäuser, 1973. P. 277–327. (Internat. Ser. Numer. Math.; V. 21.).

[4] *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 118–173.
Перевод: *Subbotin Yu. N.* Extremal problems of functional interpolation and interpolation-in-the-mean splines // Proc. Steklov Inst. Math. 1977. V. 138. P. 127–185.

[5] *Behforooz H.* Approximation by integro cubic splines // Appl. Math. Comput. 2006. V. 175, N 1. P. 8-15.

[6] *Kirsiaed E., Oja P., Shah G.W.* Cubic spline histopolation // Math. Model. Anal. 2017. V. 22, N 4. P. 514–527.

[7] *Wu J., Zhang X.* Integro quadratic spline interpolation // Appl. Math. Modelling. 2015. V. 39, N 10-11. P. 2973–2980.

[8] *Волков Ю. С.* Условия формосохранения при интерполяции в среднем квадратическими интегральными сплайнами // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 71–77.
Перевод: *Volkov Yu. S.* Shape preserving conditions for integro quadratic spline interpolation in the mean // Proc. Steklov Inst. Math. 2022. V. 319, N suppl.1. P. S291–S297.

[9] *Волков Ю. С., Жанлав Т., Мижиддорж Р.-О.* О краевых условиях для квадратических интегральных сплайнов при интерполяции в среднем // Тр. ИММ УрО РАН. 2025. Т. 31, № 4. С. 95–105.
Перевод: *Volkov Yu. S., Zhanlav T., Mijiddorj R.-O.* On end conditions for integro quadratic spline interpolation in the mean // Proc. Steklov Inst. Math. 2025. V. 331, N suppl.1.

[10] *Lang F.-G., Xu X.-P.* On the superconvergence of some quadratic integro-splines at the mid-knots of a uniform partition // Appl. Math. Comput. 2018. V. 338. P. 507–514.

[11] *Волков Ю. С.* Оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами и точки суперсходимости // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2025. Т. 523. С. 31–34.
Перевод: *Volkov Yu. S.* Error bounds for interpolation in the mean integro quadratic splines and super convergence points // Doklady Math.. 2025. V. 111, N 3. P. 172–174.

[12] *Zhanlav T., Mijiddorj R.* The local integro cubic splines and their approximation properties // Appl. Math. Comput. 2010. V. 216, N 7. P. 2215–2219.

[13] *Zhanlav T., Mijiddorj R.* Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline // Appl. Math. Comput. 2017. V. 293. P. 131–137.

[14] *Zhanlav T., Mijiddorj R.* A comparative analysis of local cubic splines // Comput. Appl. Math. 2018. V. 37, N 5. P. 5576–5586.

[15] *Zhanlav T., Mijiddorj R.* On local integro quartic splines // Appl. Math. Comput. 2015. V. 269. P. 301–307.

[16] *Zhanlav T., Mijiddorj R., Behforooz H.* Construction of local integro quintic splines // Commun. Numer. Anal. 2016. N 2. P. 167–179.

[17] *Zhanlav T., Mijiddorj R.* Approximation by integro splines. Ulaanbaatar: Bit press, 2018. 90 p.

[18] *Жанлав Т.* О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны // Вычислительные системы. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1981. Вып. 87: Методы сплайн-функций. С. 3–10.

[19] *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и её приложения. М: Мир, 1972. 316 с.
Переведено из: *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press, New York and London, 1967. 284 p.

[20] *Бор К. де* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985, 304 с.
Переведено из: *de Boor C.* A Practical Guide to Splines. Spinger, New York, 1978. 392 p.

[21] *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

[22] *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
Перевод: *Volkov Yu. S.* A new method for constructing cubic interpolating splines. Doklady Math. 2002. V. 65, N 2. P. 13–15.

[23] *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
Перевод: *Volkov Yu. S.* A new method for constructing cubic interpolating splines. Comput. Math. Math. Phys.. 2004. V. 44, N 2. P. 215–224.

[24] *Hall C. A., Meyer W. W.* Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approx. Theory. 1976. V. 16, N 2. P. 105–122.

[25] *Мирошниченко В. Л.* О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I // Вычислительные системы. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1982. Вып. 93: Методы сплайн-функций. С. 3–29.

[26] *Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
Перевод: *Volkov Yu. S., Subbotin Yu. N.* Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 288, N suppl.1. P. S222–S237.

[27] *Lucas T. R.* Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions // SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11, N 3. P. 569–584.

[28] *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 127–130.
Перевод: *Volkov Yu. S., Miroshnichenko V. L.* Approximation of derivatives by jumps of interpolating splines // Math. Notes. 2011. V. 89, N 1. P. 138–141.

[29] *Schumaker L.L.* Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981. 553 p.

[30] *Волков Ю. С.* О нахождении полного интерполяционного сплайна через B-сплайны // Сиб. электрон. матем. изв. 2008. Т. 5. С. 334–338.

[31] *Volkov Yu. S.* Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10, N 1. P. 352–356.

[32] *Wu J., Shan T., Zhu C.* Integro quadratic spline quasi-interpolants // J. Syst. Sci. Math. Scis. 2018. V. 38, N 12. P. 1407–1416. (in Chinese).

[33] *Wu J., Ge W., Zhang X.* Integro spline quasi-interpolants and their super convergence // Comput. Appl. Math. 2020. V. 39, N 3. Art. 239.

[34] *Жёлудев В. А.* Локальная сплайн-аппроксимация на равномерной сетке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 9. С. 1296–1310.
Перевод: *Zheludev V. A.* Local spline approximation on a uniform mesh // URSS Comp. Math. Math. Phys. 1987. V. 27, N 5. P. 8–19.

[35] *Волков Ю. С., Богданов В. В.* О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1000–1008.
Перевод: *Volkov Yu. S., Bogdanov V. V.* On error estimates of local approximation by splines // Sib. Math. J. 2020. V. 61, N 5. P. 795–802.

Волков Юрий Степанович (ORCID 0000-0002-7298-8578)
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`volkov@math.nsc.ru`

Жанлав Тугал (ORCID 0000-0003-0743-5587)
Институт математики и цифровых технологий,
Монгольская академия наук, пр. Мир 54, Улан-Батор, 13330 Монголия
`tzhanlav@yahoo.com`

Мижиддорж Ренчин-Очир (ORCID 0000-0002-4845-9019)
Могольский государственный университет образования,
Бага Тойруу 54, Улан-Батор, 14191 Монголия
`mijiddorj@msue.edu.mn`