4996_p

УДК 517.518.85

ФОРМУЛЫ КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Ю. С. Волков, Т. Жанлав, Р.-О. Мижиддорж

Аннотация. Рассматривается задача приближения функции по известным интегрально усредненным по промежуткам сетки значениям интегральными квадратическими сплайнами. Показано, что если решается задача интерполяции в среднем, то интегральный квадратический сплайн можно определять через интерполяционный кубический сплайн. Поскольку интерполяционный кубический сплайн достаточно хорошо изучен, то некоторые его свойства можно перенести на интегральный квадратический сплайн. Предложены формулы квазиинтерполяции интегральными квадратическими сплайнами. Задача локальной аппроксимации интегральными сплайнами впервые рассмотрена на произвольной неравномерной сетке. На равномерной сетке найдены все точки суперсходимости при интерполяции и квазиинтерполяции в среднем, т. е. точки, в которых повышается порядок приближения. Показано, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной обоих сплайнов приближает третью производную с четвертым порядком.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: интегральный квадратический сплайн, интерполяция в среднем, кубический сплайн, оценки погрешности приближения, точки суперсходимости, локальная аппроксимация.

Введение

В прикладных задачах, связанных с приближением функций, иногда вместо значений функции в узлах сетки известны лишь интегрально усредненные по промежутку значения или интегралы приближаемой функции (см., например, [1, 2]). В настоящее время для решения таких задач активно применяются сплайны. Первое применение сплайнов для подобных задач, по-видимому, было в 1972 г. для приближения гистограмм. Шёнберг [3] для восстановления исходной функции по известным гистограммам вместо условий интерполяции использовал условия совпадения гистограмм сплайна и приближаемой функции, что объясняет предложенный им термин *гистосплайны* для получившихся сплайнов. Позднее Ю. Н. Субботин рассмотрел задачу интерполяции интегрально усредненных значений и назвал эту задачу *интерполяцией в среднем* [4]. В последнее время сплайны, применяемые для приближения функций по заданным интегралам или интегрально усредненным значениям, стали называть *интегральными*. Такое название было предложено в работе [5], которая

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0005).

послужила толчком для изучения интегральных сплайнов, так как в этой работе было замечено, что на равномерной сетке кубический сплайн можно построить довольно просто путем решения трехдиагональной системы уравнений. Но про общий случай известно, что уже для кубических сплайнов задача интерполяции в среднем довольно сложна [6].

На произвольной неравномерной сетке достаточно подробно изучались из интегральных сплайнов лишь квадратические. В работе [7] установлены порядки приближения такими сплайнами в задаче интерполяции в среднем, в [8] найдены условия, обеспечивающие наследование свойств неотрицательности, монотонности и выпуклости при интерполяции в среднем. Вопрос выбора краевых условий рассмотрен в работе [9]. Отметим, что в работах [10, 11] для случая равномерной сетки исследованы точки суперсходимости и найдены точные оценки погрешности интерполяции в среднем.

В классических задачах приближения функций наряду с интерполяцией широко используются и показали свою эффективность методы локальной аппроксимации и квазиинтерполяции. Для построения сплайнов, решающих задачу аппроксимации функций, уже не требуется решать системы линейных уравнений. Получаемые локальные сплайны могут приближать требуемую функцию с теми же порядками, что и интерполяционные, поэтому в этом случае их и называют *квазиинтерполяционными*. Локальные методы приближения стали применяться и для интегральных сплайнов: для кубических сплайнов такие методы начали изучаться в работах [12–14], для сплайнов более высоких степеней — в [15, 16]. Монография [17] посвящена задачам аппроксимации интегральными сплайнами. Однако все такие работы по локальным интегральным сплайнам рассматривались только на равномерных сетках.

В данной работе мы показываем, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволяет перенести некоторые известные результаты о свойствах интерполяционных кубических сплайнов на интегральные квадратические сплайны. В частности, мы выписываем оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами для произвольной неравномерной сетки. Ранее были известны только результаты о порядках приближения [7]. Впервые рассмотрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. С помощью формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] мы выводим формулы локальной аппроксимации для интегральных квадратических сплайнов. Установлены оценки погрешности приближения полученным локальным интегральным квадратическим сплайном. Эти формулы являются формулами квазиинтерполяции и имеют наивысший третий порядок приближения, как и при интерполяции в среднем.

§ 1. Интерполяция в среднем

Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой на сетке

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

известны усредненные по интервалам сетки Δ значения некоторой функции $y(x)$:

$$Y_i = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Требуется приблизить функцию $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегральным квадратическим сплайном. Интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн $S(x)$ является сплайном второй степени с узлами на сетке Δ гладкости $C^1[a, b]$ и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\,dx = Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1}$$

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуются дополнительные условия, которые мы возьмем в виде обычных условий интерполяции на концах отрезка:

$$S(a) = y(a), \quad S(b) = y(b). \tag{2}$$

Если краевые значения приближаемой функции неизвестны, то можно получить приближение этих значений с требуемым порядком точности путем комбинации нескольких крайних значений. Например, если Y_0 приближает значение $y(a)$ с первым порядком, то, как нетрудно установить, выражение

$$\frac{2h_0 + h_1}{h_0 + h_1} Y_0 - \frac{h_0}{h_0 + h_1} Y_1$$

приближает $y(a)$ уже со вторым порядком. В работе [10] получено выражение

$$\frac{1}{12}(25Y_0 - 23Y_1 + 13Y_2 - 3Y_3),$$

которое на равномерной сетке приближает $y(a)$ с четвертым порядком.

Рассмотрим кубический сплайн $s(x)$ с узлами на этой же сетке Δ, производная которого будет совпадать с интегральным квадратическим сплайном $S(x)$, т. е. $s'(x) = S(x)$. Ясно, что такой сплайн $s(x)$ определяется по $S(x)$ с точностью до константы. Если кубический сплайн $s(x)$ интерполирует некоторую функцию $f(x)$, т. е.

$$s(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

где $f_i = f(x_i)$, с краевыми условиями $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, то в соответствии с (1) имеем

$$\frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\,dx = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x)\,dx = \frac{s(x_{i+1}) - s(x_i)}{h_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} = Y_i,$$

при $i = 0, \dots, n-1$. Более того, можно считать, что выполняется условие $f'(x) = y(x)$.

Установленная связь между интерполяционным в среднем интегральным квадратическим сплайном и интерполяционным кубическим сплайном позволяет многие известные результаты для кубических сплайнов перенести на интегральные квадратические сплайны. Например, для интерполяционных кубических сплайнов разработаны эффективные методы построения (см. [19–23]).

В этом случае погрешность приближения функции $y(x)$ интегральным квадратическим сплайном $S(x)$ можно выразить через погрешность интерполяции функции $f(x)$ кубическим сплайном $s(x)$, а именно

$$S^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = s^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2. \tag{3}$$

Поскольку оценки погрешности приближения интерполяционным кубическим сплайном хорошо известны, то сразу можно выписать оценки интерполяции в среднем интегральным квадратическим сплайном.

Теорема 1. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^3[a,b]$, то*

$$\|S^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \le K_r \overline{h}^{3-r} \|y^{(3-r)}\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$K_0 = \frac{1}{24}, \quad K_1 = \frac{1}{6}, \quad K_2 = \frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{B}\right),$$

причем константа K_0 неулучшаема. Здесь

$$\overline{h} = \max_{0\le i\le n-1} h_i, \quad B = \max_{0\le i\le n-1} \frac{\overline{h}}{h_i}.$$

Доказательство следует из оценок для кубических сплайнов с учетом равенства (3). Для $r = 0$ доказательство можно найти в [24], там же установлена неулучшаемость константы K_0. Оценка с константой K_1 установлена в [25], и, наконец, оценка для $r = 2$ приведена в [21]. Константа K_1, по-видимому, не является точной, для случая равномерной сетки имеются точные константы K_1 и K_2 (см. [11, 26]).

Заметим, что ранее оценки погрешности интерполяции в среднем для интегральных квадратических сплайнов в случае произвольной неравномерной сетки установлены были лишь по порядку [7] только для $r = 0$. Точные константы в оценках известны лишь для равномерной сетки [11]. Также в работе [7] найдено, что на равномерной сетке интегральный квадратический сплайн в узлах приближает значения исходной функции с более высоким порядком. А в работе [10] найдены еще точки суперсходимости (середины интервалов) для сплайнов и вторых производных. Для равномерной сетки и периодических краевых условий продемонстрировано [11], что эти и ряд дополнительных результатов для интегральных квадратических сплайнов могут непосредственно быть получены из известных свойств кубических сплайнов. Конечно же теорема 2 из [11] справедлива и для случая краевых условий (2). Сформулируем теорему, которая следует из [21, теорема 3.8] с учетом равенства (3).

Теорема 2. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^4[a,b]$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$*

$$S^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \varphi^{(r+1)}(t) h^{3-r} y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{24} t^2 (1-t)^2, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 2 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a,b]$. Действительно, так как

$$\varphi'(t) = \frac{1}{12} t(1-t)(1-2t), \quad \varphi''(t) = \frac{1}{12}(1 - 6t + 6t^2), \quad \varphi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$S(x) = y(x) + O(h^4), \quad \text{если } x = x_i,\ x = x_i + \frac{h}{2}, \tag{4}$$

$$S'(x) = y'(x) + O(h^3), \quad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h, \tag{5}$$

$$S''(x) = y''(x) + O(h^2), \quad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \tag{6}$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (4) и (6), найденым в [10], как и в [11], есть еще по две точки суперсходимости (5) на каждом интервале для производной интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна.

Для периодического случая в [11] приведен еще один неожиданный результат (теорема 3), который также справедлив и для случая краевых условий (2), он следует из равенства (3) и из свойств интерполяционного кубического сплайна (см. [27]).

Теорема 3. *Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями* (2) *функцию $y(x) \in C^7[a,b]$, то*

$$\frac{S''(x_i+0) - S''(x_i-0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Отметим, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной приближает третью производную интерполируемой в среднем функции и на некоторых неравномерных сетках (см. [28]).

§ 2. Методы локальной аппроксимации

В некоторых задачах наиболее удобным оказывается представление сплайнов в базисе B-сплайнов. Расширим сетку Δ кратными дополнительными узлами x_{-1}, x_{-2}, x_{-3} и x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} так, что

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}.$$

Тогда

$$h_{-3} = h_{-2} = h_{-1} = 0, \quad h_n = h_{n+1} = h_{n+2} = 0.$$

Представим квадратический сплайн $S(x)$ в виде разложения

$$S(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \beta_k N_{k,3}(x) \tag{7}$$

по базису из B-сплайнов второй степени $N_{i,3}(x)$, $i = -2, \ldots, n-1$. Здесь и ниже $N_{i,r}(x)$ — нормализованные B-сплайны степени $r-1$ (или порядка r) с носителями $[x_i, x_{i+r}]$ (см. [20, 21, 29]).

Как мы уже отмечали, если $S(x)$ — интерполирующий в среднем функцию $y(x)$ интегральный квадратический сплайн, то он является производной кубического сплайна $s(x)$, интерполирующего некоторую функцию $f(x)$, производная которой совпадает с $y(x)$. Если кубический сплайн $s(x)$ также представлен в виде разложения

$$s(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \alpha_k N_{k,4}(x) \tag{8}$$

по базису из B-сплайнов, но уже третьей степени $N_{i,4}(x)$, $i = -3, \ldots, n-1$, то имеют место равенства

$$\beta_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i}(\alpha_i - \alpha_{i-1}), \quad i = -2, \ldots, n-1.$$

Методы построения интерполяционных кубических сплайнов, т. е. нахождения коэффициентов разложения $\alpha_{-3}, \dots, \alpha_{n-1}$, хорошо известны. Эти коэффициенты находятся из трехдиагональной системы линейных уравнений (см. [30, 31]). Система уравнений для определяемых параметров $\beta_{-2}, \dots, \beta_{n-1}$ приведена в [8, 9] и имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{-2} = y(a), \\ \lambda_i \beta_{i-2} + (1 + \mu_i + \lambda_{i+1})\beta_{i-1} + \mu_{i+1}\beta_i = 3Y_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \beta_{n-1} = y(b), \end{cases} \tag{9}$$

здесь используется обозначение $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, причем $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$, $\mu_n = 1$.

Распространен и в некоторых задачах приближения функций очень эффективен подход, состоящий в том, что кубический сплайн, приближающий функцию, находится не из условий интерполяции, а задается явно, т. е. коэффициенты разложения (8) находятся не в результате решения системы линейных уравнений, а задаются явными формулами так, чтобы получить приемлемое качество приближения по точности или другим характеристикам. Это так называемые *методы локальной аппроксимации*, а если получается приближение с тем порядком, что и при интерполяции, то используется термин *квазиинтерполяция.*

Коэффициенты α_j интерполяционного сплайна (8) близки интерполируемым значениям, поэтому простейшим локальным методом приближения является такой, когда коэффициенты разложения α_j не находятся из системы уравнений (9), задаются в явном виде $\alpha_{i-2} = f_i$, $i = 0, \dots, n$ (два крайних коэффициента задаются из каких-либо дополнительных условий). В этом случае получаемый сплайн уже будет проходить не через заданные значения функции, а вблизи их. Такой кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с первым порядком, а на равномерной сетке — со вторым.

Аналогичные простейшие формулы можно получить и для интегральных сплайнов. Если положим

$$\begin{cases} \beta_{-2} = y(a), \\ \beta_{i-1} = Y_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \beta_{n-1} = y(b), \end{cases}$$

то интегральный сплайн (7) приближает искомую функцию $y(x)$ также с первым порядком. Здесь мы также считаем, что известны значения $y(a)$ и $y(b)$ и используем их для задания крайних коэффициентов. Первый порядок приближения следует из того, что интегрально усредненные значения Y_j с первым порядком приближают значения $y(x_j)$. Можно показать, что на равномерной сетке с шагом h такой локальный интегральный сплайн будет приближать с порядком $O(h^2)$.

Формулы локальной аппроксимации кубическим сплайном (или квазиинтерполяции), точные на многочленах третьей степени, приведены в [21, с. 250]. В работе [18] установлены оценки погрешности приближения таким локальным кубическим сплайном, этот кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с порядком $O(\overline{h}^4)$, т. е. является квазиинтерполяционным. Для интегрального квадратического сплайна формулы локальной аппроксимации максимального третьего порядка точности известны лишь для случая равномерной сетки [32, 33]. Наша задача — получить формулы квазиинтерполяции для интегрального квадратического сплайна в случае произвольной неравномерной сетки.

В работе [18] рассмотрен локальный кубический сплайн

$$\widehat{s}(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \widehat{\alpha}_k N_{k,4}(x), \tag{10}$$

где коэффициенты $\widehat{\alpha}_i$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\widehat{\alpha}_{-3} = f_0,\\
&\widehat{\alpha}_{-2} = f_0 + \frac{h_0}{3} f_0',\\
&\widehat{\alpha}_{i-2} = f_i + \frac{\lambda_i h_i}{3}\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{\mu_i h_{i-1}}{3}\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
&\widehat{\alpha}_{n-2} = f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f_n',\\
&\widehat{\alpha}_{n-1} = f_n.
\end{aligned} \tag{11}$$

В формулах (11) коэффициенты у концов промежутка содержат значения f_0' и f_n' производных приближаемой функции, как отмечается в [18], вместо этих значений можно использовать их приближенные значения, вычисляемые путем дифференцирования интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих соответственно значения f_0, f_1, f_2, f_3 и f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n.

Рассмотрим интегральный квадратический сплайн

$$\widehat{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \widehat{\beta}_k N_{k,3}(x), \tag{12}$$

связанный с кубическим сплайном (10), а именно $\widehat{S}(x) = \widehat{s}'(x)$, и приближающий интегрально усредненные значения функции $y(x) = f'(x)$. Тогда коэффициенты в представлении (12) будем определять по формулам

$$\widehat{\beta}_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i}(\widehat{\alpha}_i - \widehat{\alpha}_{i-1}), \quad i = -2, \dots, n-1,$$

подставив в которые выражения (11), получим

$$\begin{aligned}
&\widehat{\beta}_{-2} = y(a),\\
&\widehat{\beta}_{-1} = \bigl(1 + \mu_1 + \mu_1^2\bigr)Y_0 - \mu_1^2 Y_1 - \mu_1 y(a),\\
&\widehat{\beta}_{i-1} = \frac{-\lambda_i h_i Y_{i-1} + (\mu_i h_{i-1} + 3h_i + \lambda_{i+1} h_{i+1})Y_i - \mu_{i+1} h_i Y_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}, \ i = 1, \dots, n-2,\\
&\widehat{\beta}_{n-2} = \bigl(1 + \lambda_{n-1} + \lambda_{n-1}^2\bigr)Y_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 Y_{n-2} - \lambda_{n-1} y(b),\\
&\widehat{\beta}_{n-1} = y(b).
\end{aligned} \tag{13}$$

Ясно, что для сплайнов $\widehat{s}(x)$ и $\widehat{S}(x)$ выполняются равенства

$$\widehat{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \widehat{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2. \tag{14}$$

Тогда результаты об оценках погрешности приближения для кубического сплайна $\widehat{s}(x)$, установленные в [18, теорема 2], мы можем переформулировать для интегрального квадратического сплайна $\widehat{S}(x)$.

Теорема 4. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (12) *определяются формулами* (13) *и* $y(x) \in C^3[a,b]$, *то*

$$\|\widehat{S}^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \le \widehat{K}_r \overline{h}^{3-r} \|y^{(3-r)}\|_\infty, \quad r = 0,1,2,$$

где

$$\widehat{K}_0 = \frac{13}{48}, \quad \widehat{K}_1 = \frac{1}{3}, \quad \widehat{K}_2 = \frac{1}{12}\max\left(11,5B + \frac{6}{B}\right).$$

Теорема 4 показывает, что интегральный квадратический сплайн (12), коэффициенты которого задаются формулами (13), является квазиинтерполяционным, он приближает исходную функцию с тем же порядком, что и интерполяционный в среднем. Если значения приближаемой функции неизвестны, то, как отмечалось выше, их можно задать приближенно через заданные интегрально усредненные значения. Например, выражение

$$\frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 \tag{15}$$

на равномерной сетке приближает значение $y(a)$ с третьим порядком. Подставим это выражение в (13) вместо $y(a)$ и аналогичное выражение

$$\frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1} \tag{16}$$

также в (13) вместо $y(b)$, тогда коэффициенты разложения по B-сплайнам

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \widetilde{\beta}_k N_{k,3}(x) \tag{17}$$

будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{-2} &= \frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2,\\
\widetilde{\beta}_{-1} &= \frac{5}{6}Y_0 + \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{6}Y_2,\\
\widetilde{\beta}_{i-1} &= -\frac{1}{6}Y_{i-1} + \frac{4}{3}Y_i - \frac{1}{6}Y_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-2,\\
\widetilde{\beta}_{n-2} &= -\frac{1}{6}Y_{n-3} + \frac{1}{3}Y_{n-2} + \frac{5}{6}Y_{n-1},\\
\widetilde{\beta}_{n-1} &= \frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Для равномерной сетки интегральный сплайн (17) отличается от (12) только тем, что на левом конце отрезка $[a,b]$ изменяются коэффициенты $\widetilde{\beta}_{-2}$, $\widetilde{\beta}_{-1}$, так как значение $y(a)$ заменено выражением (15), а на правом конце — изменяются коэффициеты $\widetilde{\beta}_{n-2}$, $\widetilde{\beta}_{n-1}$, так как значение $y(b)$ заменено соответствующим аналогичным выражением (16).

Отметим, что для равномерной сетки формулы (18) выписаны в работах [32, 33] и там же установлен третий порядок приближения интегральным квадратическим сплайном, исследований на произвольной неравномерной сетке ранее не проводилось. Также в этих работах указано, что в узлах и серединах интервалов (точки суперсходимости) порядок приближения чевертый. Но опять же эти результаты и ряд дополнительных непосредственно следуют из известных свойств кубических сплайнов. Сформулируем теорему, которая с учетом равенства

$$\widetilde{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \widetilde{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0,1,2,$$

следует из [34, теорема 5].

Теорема 5. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (17) *на равномерной сетке с шагом* h *определяются формулами* (18) *и* $y(x) \in C^4[a,b]$, *то при* $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 2, \dots, n-3$,

$$\widetilde{S}^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \psi^{(r+1)}(t) h^{3-r} y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{24} t^2 (1-t)^2 + \frac{1}{36}, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 5 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a,b]$. Действительно, так как

$$\psi'(t) = \frac{1}{12} t(1-t)(1-2t), \quad \psi''(t) = \frac{1}{12}(1 - 6t + 6t^2), \quad \psi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$\widetilde{S}(x) = y(x) + O(h^4), \quad \text{если } x = x_i, \ x = x_i + \frac{h}{2}, \tag{19}$$

$$\widetilde{S}'(x) = y'(x) + O(h^3), \quad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h, \tag{20}$$

$$\widetilde{S}''(x) = y''(x) + O(h^2), \quad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \tag{21}$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (19), найденым в [32, 33], есть еще точки суперсходимости (20) и (21) для первой и второй производных локального интегрального квадратического сплайна $\widetilde{S}(x)$. Заметим, что точки суперсходимости для интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна $S(x)$ и для квазиинтерполяционного интегрального квадратического сплайна $\widetilde{S}(x)$ одинаковы.

Обратим внимание, что в отличие от теоремы 2 теорема 5 указывает точки суперсходимости только во внутренних интервалах, не охватывая по два крайних. Это связано с тем, что мы отказались от задания точных значений производных приближаемой функции на концах, заменили их приближенными значениями, что изменило представление сплайна на указанных крайних интервалах, не позволяя здесь указать точки повышения порядка приближения.

В заключение отметим, что в работе [35] установлено, что кубический локально аппроксимационный сплайн $\widehat{s}(x)$ сохраняет свойство приближения скачком четвертой производной приближаемой функции. Тогда справедлива

Теорема 6. *Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна* (17) *на равномерной сетке с шагом* h *определяются формулами* (18) *и* $y(x) \in C^7[a,b]$, *то*

$$\frac{\widetilde{S}''(x_i + 0) - \widetilde{S}''(x_i - 0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 3, \dots, n-4.$$

Здесь также надо сделать оговорку. Как и в теореме 5, промежуток действия формул теоремы 6 уменьшается по сравнению с теоремой 3 за счет исключения по два крайних интервала у каждого конца отрезка по тем же причинам, что и выше.

§ 3. Численные эксперименты

Проведем численные эксперименты, демонстрирующие подтверждение теоретических результатов предыдущих параграфов, на примерах приближения тестовых функций, заданных интегрально усредненными значениями. В качестве тестовых выбраны функции

$$y_1(x) = \sin(3\pi x), \quad x \in [0,1],$$

$$y_2(x) = x^4 + \log(x) + 5, \quad x \in [0.6,1].$$

Мы вычисляем погрешности приближения функций и их производных двумя рассматриваемыми интегральными сплайнами $S(x)$ и $\widetilde{S}(x)$ в точках, являющихся точками суперсходимости для первой производной. Для первой функции это будут точки

$$x_i^1 = x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h,$$

а для второй —

$$x_i^2 = x_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h.$$

В соответствии с условиями теоремы 2 погрешность вычисляется во всех точках x_i^1, x_i^2 на интервалах $i = 0, \ldots, n-1$ и берется наибольшая погрешность. При проведении численных экспериментов, демонстрирующих результаты теоремы 5, погрешность в выбранных точках вычисляется только на интервалах $i = 2, \ldots, n-3$.

Для вычисления значений интегральных квадратических сплайнов используем представление через коэффициенты B-сплайн разложения (см. [9])

$$S(x) = \lambda_i(1-t)^2\beta_{i-2} + [(\lambda_i t + \mu_i)(1-t) + t(\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}(1-t))]\beta_{i-1} + \mu_{i+1}t^2\beta_i,$$

получаемое из (7). Коэффициенты находятся из системы уравнений (9). Вычисление значений квазиинтерполяционного сплайна $\widetilde{S}(x)$ производится по аналогичной формуле, в которой коэффициенты $\{\beta_i\}$ заменены на $\{\widetilde{\beta}_i\}$, задаваемые формулами (18).

В табл. 1–4 приведены результаты численных экспериментов и содержатся значения максимальных погрешностей аппроксимации в выбранных точках суперсходимости

$$E_j^{(r)} = E_j^{(r)}(n) = \max_{0 \le i \le n-1} \left| S^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j) \right|, \quad r = 0,1,2, \ j = 1,2,$$

$$\widetilde{E}_j^{(r)} = \widetilde{E}_j^{(r)}(n) = \max_{2 \le i \le n-3} \left| \widetilde{S}^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j) \right|, \quad r = 0,1,2, \ j = 1,2,$$

и вычисленные порядки сходимости

$$\mathrm{CO} = \log_2 \left| \frac{E_j^{(r)}(n)}{E_j^{(r)}(2n)} \right|, \quad \widetilde{\mathrm{CO}} = \log_2 \left| \frac{\widetilde{E}_j^{(r)}(n)}{\widetilde{E}_j^{(r)}(2n)} \right|.$$

Заметим, что найденые в теоремах 2 и 5 точки симметрично расположены на каждам интервале, численные эксперименты при выборе симметричной серии точек в сравнении с рассмотренными приводят к тому же результату.

Таблица 1. Результаты расчетов по теореме 2 для функции $y_1(x)$

n	$E_1^{(0)}$	CO	$E_1^{(1)}$	CO	$E_1^{(2)}$	CO
10	1.74E−3		1.31E−1		3.21E+0	
20	1.11E−4	3.9	1.59E−2	3.0	8.18E−1	1.9
40	6.95E−6	4.0	1.98E−3	3.0	2.05E−1	2.0

Таблица 2. Результаты расчетов по теореме 2 для функции $y_2(x)$

n	$E_2^{(0)}$	CO	$E_2^{(1)}$	CO	$E_2^{(2)}$	CO
10	1.07E−7		2.15E−5		1.28E−3	
20	7.00E−9	3.9	2.78E−6	2.9	3.34E−4	1.9
40	4.66E−10	3.9	3.52E−7	2.9	8.93E−5	1.9

Таблица 3. Результаты расчетов по теореме 5 для функции $y_1(x)$

n	$\widetilde{E}_1^{(0)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(1)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(2)}$	$\widetilde{\text{CO}}$
10	1.53E−2		2.22E−1		1.35E+0	
20	1.21E−3	3.6	2.04E−2	3.4	7.00E−1	0.9
40	7.78E−5	3.9	2.14E−3	3.2	1.98E−1	1.8

Таблица 4. Результаты расчетов по теореме 5 для функции $y_2(x)$

n	$\widetilde{E}_2^{(0)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(1)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(2)}$	$\widetilde{\text{CO}}$
10	8.46E−7		1.75E−5		8.47E−4	
20	6.52E−8	3.7	2.23E−6	2.9	2.65E−4	1.7
40	4.36E−9	3.9	2.83E−7	2.9	7.11E−5	1.9

Заключение

В данной работе мы показали, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволило сразу сформулировать результаты о точности приближения функций, заданных интегралами или интегрально усредненными значениями, интегральным квадратическим сплайном. Мы приводим оценки погрешности интерполяции в среднем с указанием констант, в том числе точных, что обобщает результаты работ [7, 10] с установленными порядками приближения. Впервые рассмотрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. На основе формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] выведены квазиинтерполяционные формулы для интегральных квадратических сплайнов. Также получены оценки погрешности приближения полученными квазиинтерполянтами. Найдены все точки суперсходимости как для интерполяции в среднем, так и при квазиинтерполяции в среднем, отметим совпадение множеств таких точек. В случае квазиинтерполяции точки суперсходимости найдены только во внутренних интервалах сетки, исключая по два крайних интервала с обоих концов отрезка. Кроме того, установлено, что для обоих типов рассмотренных интегральных сплайнов скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной сплайна приближает третью производную аппроксимируемой функции на равномерных сетках с четвертым порядком.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Epstein E. S.* On obtaining daily climatological values from monthly means // J. Climate. 1991. V. 4, N 3. P. 365–368.

2. *Ruiz-Arias J. A.* Mean-preserving interpolation with splines for solar radiation modeling // Solar Energy. 2022. V. 248. P. 121–127.

3. *Schoenberg I. J.* Splines and histograms // Spline functions and approximation theory: Proc. / Sympos., Edmonton, 1972 / Eds. A. Meir, A. Sharma. Internat. Ser. Numer. Math., **21**. Basel: Birkhäuser, 1973. P. 277–327.

4. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.

5. *Behforooz H.* Approximation by integro cubic splines // Appl. Math. Comput. 2006. V. 175, N 1. P. 8–15.

6. *Kirsiaed E., Oja P., Shah G. W.* Cubic spline histopolation // Math. Model. Anal. 2017. V. 22, N 4. P. 514–527.

7. *Wu J., Zhang X.* Integro quadratic spline interpolation // Appl. Math. Modelling. 2015. V. 39, N 10-11. P. 2973–2980.

8. *Волков Ю. С.* Условия формосохранения при интерполяции в среднем квадратическими интегральными сплайнами // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 71–77.

9. *Волков Ю. С., Жанлав Т., Мижиддорж Р.-О.* О краевых условиях для квадратических интегральных сплайнов при интерполяции в среднем // Тр. ИММ УрО РАН. 2025. Т. 31, № 4. С. 95–105.

10. *Lang F.-G., Xu X.-P.* On the superconvergence of some quadratic integro-splines at the mid-knots of a uniform partition // Appl. Math. Comput. 2018. V. 338. P. 507–514.

11. *Волков Ю. С.* Оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами и точки суперсходимости // Докл. АН. 2025. Т. 523. С. 31–34.

12. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* The local integro cubic splines and their approximation properties // Appl. Math. Comput. 2010. V. 216, N 7. P. 2215–2219.

13. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline // Appl. Math. Comput. 2017. V. 293, N 7. P. 131–137.

14. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* A comparative analysis of local cubic splines // Comput. Appl. Math. 2018. V. 37, N 5. P. 5576–5586.

15. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* On local integro quartic splines // Appl. Math. Comput. 2015. V. 269. P. 301–307.

16. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* Construction of local integro quintic splines // Commun. Numer. Anal. 2016. N 2. P. 167–179.

17. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* Approximation by integro splines. Ulaanbaatar: Bit press, 2018.

18. *Жанлав Т.* О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. Т. 87: Методы сплайн-функций. С. 3–10.

19. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

20. *де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.

21. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

22. *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.

23. *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.

24. *Hall C. A., Meyer W. W.* Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approx. Theory. 1976. V. 16, N 2. P. 105–122.
25. *Мирошниченко В. Л.* О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Т. 93: Методы сплайн-функций. С. 3–29.
26. *Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн интерполяции // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
27. *Lucas T. R.* Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions // SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11, N 3. P. 569–584.
28. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 127–130.
29. *Schumaker L. L.* Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981.
30. *Волков Ю. С.* О нахождении полного интерполяционного сплайна через B-сплайны // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 334–338.
31. *Volkov Yu. S.* Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis // Cent. Europ. J. Math. 2012. V. 10, N 1. P. 352–356.
32. *Wu J., Shan T., Zhu C.* Integro quadratic spline quasi-interpolants // J. Syst. Sci. Math. Scis. 2018. V. 38, N 12. P. 1407–1416.
33. *Wu J., Ge W., Zhang X.* Integro spline quasi-interpolants and their super convergence // Comput. Appl. Math. 2020. V. 39, N 3. P. 239.
34. *Желудев В. А.* Локальная сплайн-аппроксимация на равномерной сетке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 9. С. 1296–1310.
35. *Волков Ю. С., Богданов В. В.* О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1000–1008.

Поступила в редакцию 25 ноября 2025 г.
После доработки 1 апреля 2026 г.
Принята к публикации 5 апреля 2026 г.

Волков Юрий Степанович (ORCID 0000-0002-7298-8578)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
volkov@math.nsc.ru

Жанлав Тугал (ORCID 0000-0003-0743-5587)
Институт математики и цифровых технологий,
Монгольская академия наук,
пр. Мира, 54, Улан-Батор 13330, Монголия
tzhanlav@yahoo.com

Мижиддорж Ренчин-Очир (ORCID 0000-0002-4845-9019)
Могольский государственный университет образования,
Бага Тойруу, 54, Улан-Батор 14191, Монголия
mijiddorj@msue.edu.mn