УДК 517.955 **MSC 2010**: 35G16

Вырождающиеся псевдопараболические уравнения третьего порядка

А. И. Кожанов[1], Б. В. Жигжитжапов[2]
[1]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
[2]Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия
kozhanov@math.nsc.ru; zhbat120401@gmail.com

Abstract

Аннотация. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Характер вырождения в изучаемых уравнениях определяется тем, что старший операторный коэффициент может быть необратимым оператором.

Ключевые слова: Псевдопараболические уравнения, начально-краевые задачи, регулярные решения, вырождение, существование, единственность.

В честь Геннадия Владимировича Демиденко и в связи с его 70-летием.

1 Введение

В работе исследуется следующий класс уравнений составного типа:

$$L_1 u_t(x,t) + L_2 u(x,t) = f(x,t), \tag{$*$}$$

где операторы L_1 и L_2 — дифференциальные операторы второго порядка.

Уравнения данного класса в литературе часто называют уравнениями соболевского типа или псевдопараболическими уравнениями [1], [2], они применяются в гидродинамике, задачах фильтрации, массо-, влаго- и теплопереноса [3]–[8]. Уравнения типа ($*$) исследовались в работах многих авторов, в частности стоит отметить работы С.Л. Соболева, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова и др. [9]–[15]. Кроме названных, также выделим работы, изучающие задачи для уравнений соболевского типа более высокого порядка, как близкие к данной [16], [17]. В этих двух статьях изучался случай, когда оператор L_1 при старшей производной по времени имел вид $L_1 = \lambda - \Delta$, причем при некоторых определенных значениях постоянного коэффициента λ оператор L_1 становился необратимым. Особенностью данной работы является то, что старший оператор L_1 имеет переменные коэффициенты и может вырождаться на произвольных множествах при различных значениях временной переменной. Такого рода случаи вырождения еще не изучались в литературе для уравнений рассматриваемого типа.

В настоящей работе используется математический аппарат, описанный в монографиях [18]–[19].

2 Необходимые определения и построения

Пусть ограниченная область определения пространственных переменных $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую (для удобства бесконечно-гладкую) границу $\partial\Omega = \Gamma$. Область определения переменных (x,t) обозначим как $Q = \Omega \times (0,T)$. Функции $f(x,t)$, $a_1(t)$ и $a_2(t)$ считаем известными, определенными на соответственно замыкании Q и отрезке $[0,T]$ функциями. Оператор Лапласа Δ действует по пространственным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Операторы L_1, L_2 и L определяются следующим образом:

$$L_1 v = (a_1(t) - \Delta)v,$$
$$L_2 v = (a_2(t) - \Delta)v,$$
$$Lv = L_1 v_t + L_2 v.$$

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$Lu(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$
$$u(x,0) = 0, \tag{2}$$
$$u(x,t)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{3}$$

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейство нормированных в $L_2(\Omega)$ функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ играют ключевую роль в данном исследовании. Они определяются из задачи

$$\Delta\omega(x) = \lambda\omega(x),$$
$$\omega(x)|_{x\in\Gamma} = 0.$$

Известны свойства (см., например, [19], [20]) последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейства функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. В частности, известно, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из отрицательных действительных чисел и имеет единственную предельную точку $-\infty$. Также известно, что функции $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать так, чтобы они образовывали полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$, что и считается выполненным.

В тех случаях, когда коэффициент $a_1(t)$ становится равным каким-либо собственным значениям λ_k в каких-либо точках или подмножествах отрезка $[0,T]$, оператор L_1 становится необратимым, и требуется задать некоторые дополнительные условия, чтобы задача (1)–(3) была поставлена корректно.

Вследствие непрерывности $a_1(t)$ и свойств чисел λ_k, найдется такое минимальное положительное целое число k_0, что для $k > k_0$ будет выполняться $a_1(t) > \lambda_k$ на всем отрезке $[0,T]$.

Множество функций $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ определяется равенствами

$$f_k(t) = \int\limits_{\Omega} f(x,t) w_k(x)\,dx.$$

Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве V

$$V = \left\{v(x,t) : v(x,t) \in L_2(0,\,T;\, W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega)),\; v_t(x,t) \in L_2(0,\,T;\, W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega))\right\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{L_2(Q,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega))} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L_2(Q,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3 Теоремы существования и единственности

Теорема 3.1. *Пусть для коэффициентов* $a_1(t)$, $a_2(t)$ *и* $f(x,t)$ *выполняются следующие условия:*

$$a_1(t) \in C^1([0,T]),\ a_2(t) \in C^1([0,T]),\ f(x,t) \in L_2(Q); \tag{4}$$

$$a_2(t) - \lambda_1 - \frac{1}{2}a_1'(t) > 0,\ a_2(t) - \lambda_1 + \frac{1}{2}a_1'(t) > 0,\ \ t \in [0,T]; \tag{5}$$

$$a_1(0) > \lambda_1,\ a_1(T) \geq \lambda_1; \tag{6}$$

$$f_k'(t) \in L_2([0,T]),\ k = 1,2,\dots,k_0. \tag{7}$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) *имеет в пространстве* V *решение, причем только одно.*

Proof. Решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{k_0} y_k(t) w_k(x) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} y_k(t) w_k(x). \tag{8}$$

Функции $y_k(t)$ определяются как решения следующих задач:

$$(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \tag{9}$$

$$y_k(0) = 0. \tag{10}$$

Для $k > k_0$, существование и единственность решений $y_k(t)$ задач (9)–(10) в пространстве $W_2^1([0,T])$ следует из невырожденности уравнений.

Покажем, что задачи (9)–(10) при $k = 1,2,\dots,k_0$ (то есть при наличии вырождения) имеют решения, принадлежащие $W_2^1([0,T])$. Рассмотрим следующую задачу для $\varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon y_k''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \tag{9_ε}$$

$$y_k(0) = y_k'(T) = 0. \tag{11}$$

Из общей теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка следует, что при $\varepsilon > 0$ задача (9_ε), (11) имеет решение $y_{k,\varepsilon}(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$. Покажем, что для этих решений имеют место равномерные по ε априорные оценки. Индекс «ε» при получении оценок указывать не будем.

Умножим уравнение (9_ε) на $y_k(t)$ и проинтегрируем, используя условия теоремы, условия задачи (9_ε), (11). Так мы получаем следующее равенство:

$$\int_0^T \left(\varepsilon y_k'^2(t) + \left[(a_2(t) - \lambda_k - \frac{1}{2}a_1'(t) \right] y_k^2(t) \right) dt + \frac{1}{2}[a_1(T) - \lambda_k] y_k^2(T) = \int_0^T f_k(t) y_k(t)\, dt.$$

Используя неравенство Юнга, получаем следующую априорную оценку:

$$\int_0^T \left(\varepsilon y_k'^2(t) + y_k^2(t) \right) dt \leq N \int_0^T f_k^2(t)\, dt, \quad N > 0. \tag{12}$$

Умножив уравнение (9_ε) на $-y_k''(t)$ и проинтегрировав, учитывая условия задачи и теоремы, получим равенство:

$$\int_0^T \Big[\varepsilon y_k''^2(t) + \Big(a_2(t) - \lambda_k + \frac{a_1'(t)}{2}\Big) y_k'^2(t)\Big]\,dt \\ + \frac{1}{2}[a_1(0) - \lambda_k] y_k'^2(0) = \int_0^T \big(f_k'(t) y_k'(t) - a_2'(t) y_k(t) y_k'(t)\big)\,dt + f_k(0) y_k'(0). \tag{13}$$

Используя формулу интегрирования по частям и неравенство (12), а также неравенство Юнга, получаем, что следствием (13) будет оценка

$$\int_0^T \big(\varepsilon y_k''^2(t) + y_k'^2(t)\big)\,dt \le M \int_0^T \big(f_k'^2(t) + f_k^2(t)\big)\,dt, \tag{14}$$

постоянная M в которой зависит только от функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Оценок (12) и (14) достаточно, чтобы получить существование подпоследовательности решений $y_{k,\varepsilon_m}(t)$ задачи (9_ε), для которой при $m \to \infty$

$$\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_m \to 0, \\ &\varepsilon_m y_{k,\varepsilon_m}''(t) \to 0 \text{ слабо в } L_2([0,T]), \\ &y_{k,\varepsilon_m}(t) \to y_k(t) \text{ слабо в } W_2^1([0,T]). \end{aligned}$$

Это следует из свойств рефлексивности гильбертова пространства.

Указанные сходимости означают, что для любой функции $\eta(t)$ из пространства $L_2([0,T])$ имеет место сходимость при $m \to \infty$

$$\int_0^T \big[-\varepsilon_m y_{k,m}''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_{k,m}'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_{k,m}(t)\big]\eta(t)\,dt \\ \to \int_0^T \big[(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t)\big]\eta(t)\,dt.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\int_0^T \big[(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) - f_k(t)\big]\eta(t)\,dt = 0.$$

В силу произвольности функции $\eta(t)$ из этого равенства и следует выполнение уравнения (9).

Далее, имеют место равенства

$$|y_k(0)| = |y_k(0) - y_{k,m}(0)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)]\,dt - \frac{1}{T} \int_0^T (T-t)[y_k'(t) - y_{k,m}'(t)]\,dt \right|.$$

Отсюда

$$|y_k(0)| \le \frac{1}{T}\left|\int\limits_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)]\,dt\right| + \frac{1}{T}\left|\int\limits_0^T (T-t)[y_k'(t) - y_{k,m}'(t)]\,dt\right|.$$

Вследствие указанных выше сходимостей каждое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к 0 при $m \to \infty$. А это и означает выполнение равенства $y_k(0) = 0$.

Поскольку для функции $y_k(t)$ выполняется уравнение (9), то после умножения этого уравнения на функцию $y_k(t)$ получим оценку

$$\int\limits_0^T y_k^2(t)\,dt \le N \int\limits_0^T f_k^2(t)\,dt.$$

Из этой оценки вытекает единственность решений задачи (9), (10) в пространстве $W_2^1([0,T])$.

Докажем теперь принадлежность функции $u(x,t)$, определенной равенством (8), пространству V.

Для натуральных чисел k из промежутка $[k_0+1,\infty)$ уравнение для функций $y_k(t)$ можно записать в виде

$$y_k'(t) + \frac{a_2(t)-\lambda_k}{a_1(t)-\lambda_k} y_k(t) = \frac{f_k(t)}{a_1(t)-\lambda_k}. \tag{9$'$}$$

Пусть $k_{0,1}$ есть такое натуральное число, что при $k \ge k_{0,1}$ выполняются неравенства $a_1(t) - \lambda_k > 0$, $a_2(t) - \lambda_k > 0$ при $t \in [0,T]$. Умножая уравнение (9$'$) вначале на функцию $\lambda_k^2 y_k(t)$ и интегрируя по отрезку $[0,T]$, затем на функцию $\lambda_k^2 y_k'(t)$ и вновь интегрируя по отрезку $[0,T]$, получим, что при $k \ge k_{0,1}$ выполняется неравенство

$$\lambda_k^2 \int\limits_0^T y_k^2(t)\,dt + \lambda_k^2 \int\limits_0^T y_k'^2(t)\,dt \le N_1 \int\limits_0^T f_k^2(t)\,dt$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Определим функцию $u_{k_{0,1},m}(x,t)$:

$$u_{k_{0,1},m}(x,t) = \sum_{k=k_{0,1}}^{m} y_k(t) w_k(x).$$

Имеем

$$\int\limits_Q [\Delta u_{k_{0,1},m}(x,t)]^2\,dxdt = \sum_{k=k_{0,1}}^{m} \lambda_k^2 \int\limits_0^T y_k^2(t)\,dt \le N_1 \sum_{k=k_{0,1}}^{m} \int\limits_0^T f_k^2(t)\,dt \le N_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2$$

(последнее неравенство есть следствие неравенства Бесселя). Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим, что функция

$$\Delta\left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k(t) w_k(x)\right)$$

принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Аналогичные выкладки дают принадлежность функции

$$\Delta\left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k'(t) w_k(x)\right)$$

также пространству $L_2(Q)$. Но тогда и функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V.

Из доказанного выше и следует, что краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем ровно одно.

Теорема доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия* (4) *и* (5), *а также условия*

$$a_i(t) \in C^2([0,T]),\ i=1,2,\ a_2(t) + \frac{3}{2}a_1'(t) - \lambda_1 > 0 \quad \text{при } t \in [0,T],$$

$$a_1(0) = a_1(T) = \lambda_1, \quad a_2'(0) = a_2'(T) = 0, \quad a_2(0) - \lambda_1 \neq 0; \tag{15}$$

$$f_1(t) \in W_2^2([0,T]), \quad f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(T) = 0. \tag{16}$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) *имеет в пространстве V решение, причем ровно одно.*

Proof. Для $k=1$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon y_1^{(4)} + [a_1(t) - \lambda_1]y_1' + [a_2(t) - \lambda_1]y_1 = f_1(t), \quad y_1'(0) = y_1'(T) = y_1'''(0) = y_1'''(T) = 0. \tag{17}$$

Разрешимость при фиксированном ε краевой задачи (17) в пространстве $W_2^4([0,T])$ известна; для решений этой задачи будут выполняться равномерные по ε оценки (12) и (14). Дополнительно умножая уравнение (17) на функцию $y_1^{(4)}(t)$, интегрируя полученное равенство по отрезку $[0,T]$, используя условия (15) и (16), краевые условия (17), а также имеющиеся оценки (12) и (14), придем к априорной оценке

$$\varepsilon \int_0^T [y_1^{(4)}(t)]^2\, dt + \int_0^T [y_1''(t)]^2\, dt \leq M_1 \int_0^T \{f_1^2(t) + [f_1'(t)]^2 + [f_1''(t)]^2\}\, dt$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Из этой оценки и из оценок (12) и (14) следует, что существует функция $y_1(t)$, принадлежащая пространству $W_2^2([0,T])$ (см. доказательство теоремы 3.1), являющаяся решением уравнения

$$[a_1(t) - \lambda_1]y_1'(t) + [a_2(t) - \lambda_1]y_1(t) = f_1(t).$$

В этом уравнении функция $y_1'(t)$ ограничена; поскольку же $a_1(0) - \lambda_1 = 0$, то будут выполняться равенства

$$[a_1(0) - \lambda_1]y_1'(0) = 0, \quad [a_2(0) - \lambda_1]y_1(0) = 0.$$

Вследствие условия $a_2(0) - \lambda_1 \neq 0$ получим, что необходимо выполняется равенство $y_1(0) = 0$.

Существование остальных функций $y_k(t)$ очевидно. Функция $u(x,t)$, определенная суммой ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) w_k(x),$$

будет искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана. □

Пусть выполняется условие $a_1(T) < \lambda_1$. Обозначим через k_1 натуральное число такое, что выполняется $\lambda_{k_1} \leq a_1(T) < \lambda_{k_1 - 1}$.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия (4), (5), (7), а также условия*

$$a_1(0) > \lambda_1, \quad a_1(T) < \lambda_1. \tag{18}$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V бесконечно много решений. Если же дополнительно к условиям (2), (3) выполняются условия

$$\int\limits_{\Omega} u(x,T)w_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1,\dots,k_1-1, \tag{19}$$

то задача (1)–(3) будет иметь в пространстве V ровно одно решение.

Proof. Пусть A_k, $k = 1,\dots,k_1-1$, есть произвольные действительные числа. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $y_k(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0,T)$ уравнению (9) и такую, что для неё выполняются условия

$$y_k(0) = 0, y_k(T) = A_k. \tag{20}$$

Положим $z_k(t) = y_k(t) - \frac{A_k t}{T}$. Для функции $z_k(t)$ должно выполняться уравнение

$$(a_1(t)-\lambda_k)z_k'(t) + (a_2(t)-\lambda_k)z_k(t) = f_k(t) - (a_1(t)-\lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t)-\lambda_k)\frac{A_k t}{T}, \tag{21}$$

а также условия

$$z_k(0) = z_k(T) = 0. \tag{22}$$

Используя регуляризацию уравнения (21) уравнением

$$-\varepsilon z_k''(t) + (a_1(t)-\lambda_k)z_k'(t) + (a_2(t)-\lambda_k)z_k(t) = \widehat{f}_k(t) = f_k(t) - (a_1(t)-\lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t)-\lambda_k)\frac{A_k t}{T}$$

$(\varepsilon > 0)$, далее получая априорные оценки (12) и (14) (с помощью анализа равенств, полученных после умножения регуляризованного уравнения соответственно на функции $z_k(t)$ и $z_k''(t)$ с последующим интегрированием по отрезку $[0,T]$) и осуществляя стандартную процедуру перехода к пределу, нетрудно показать, что краевая задача (21), (22) имеет решение $z_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^1([0,T])$. Но тогда функция $y_k(t)$, определенная равенством $y_k(t) = z_k(t) + \frac{A_k t}{T}$, будет решением из пространства $W_2^1([0,T])$ краевой задачи (9), (20).

Функции $y_k(t)$ при $k = k_1,\dots,k_0$ строим как решения задач (9), (10). Далее, функции $y_k(t)$ при $k > k_0$ строим как решения обычной (невырожденной) задачи Коши. Наконец, функция $u(x,t)$, представленная суммой (8), даст искомое решение краевой задачи (1)–(3). Но поскольку функции $y_k(t)$ при $k = 1,\dots,k_1-1$ определяются произвольным действительным числом A_k, то таких функций будет бесконечно много. Следовательно, и решений $u(x,t)$ краевой задачи (1)–(3) будет бесконечно много.

Пусть в задаче (1)–(3) дополнительно выполняется условие (19). Тогда для решения $u(x,t)$ имеем

$$u(x,T) = \sum_{k=1}^{k_1-1} A_k w_k(x) + \sum_{k=k_1}^{\infty} y_k(T)w_k(x).$$

Умножая это равенство последовательно на функции $w_1(x),\dots,w_{k_1-1}(x)$ и интегрируя по области Ω, получим $A_k = 0$, $k = 1,\dots,k_1-1$. Другими словами, функция $u(x,t)$, заданная равенством

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)w_k(x),$$

в котором функции $y_k(t)$ при $k = 1,\dots,k_1-1$ определяются как решения задачи (9), (20) в случае $A_k = 0$, функции $y_k(t)$ при $k \geq k_1$ определяются как решения задачи (9), (10), будет искомым решением краевой задачи (1)–(3), (19), причем других решений нет.

□

4 Заключение

В работе представлены новые результаты о разрешимости в соболевских пространствах первой начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Особенностью изучаемых уравнений является то, что операторный коэффициент при первой производной по временной переменной может быть необратимым в произвольном числе точек из интервала $(0, T)$ (в том числе и на множестве ненулевой меры), причем может менять и направление эволюции.

Замечание 4.1. Наряду с первой начально-краевой задачей для уравнения (1) можно аналогичным образом изучить разрешимость и других задач — например, третьей начально-краевой задачи.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Список литературы

[1] Kozhanov A. I., *Composite-type equations and inverse problems*, Netherlands, 1999.

[2] Демиденко Г. В., Успенский С. В., *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Новосибирск, 1998.

[3] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н., "Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах", *Прикл. матем. и мех.*, **24**:5 (1960), 58–73.

[4] Hallaire M., "On a theory of moisture-transfer", *Inst. Rech. Agronom.*, 1964, № 3, 60–72.

[5] Грачев С. И., Коротенко В. А., Кушакова Н. П., "Исследование влияния трансформации двухфазной фильтрации на формирование зон невыработанных запасов нефти", *Записки Горного ин-та*, **241** (2020), 68–82.

[6] Лобковский Л. И., Рамазанов М. М., "Обобщенная модель фильтрации в трещиновато-пористой среде с низкопроницаемыми включениями и ее возможные приложения", *Физика Земли*, 2022, № 2, 144–154.

[7] Ходос О. А., "Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2010, № 3, 54–57.

[8] Chen P. J., Gurtin M. E., "On a theory of heat conduction involving two temperatures", *Z. Angew. Math. Phys.*, **19** (1968), 614–627.

[9] Guseinov F. B., Iskenderov B. A., "On a mixed problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a domain cylindrical with respect to the space variables", *Russian Math. Surveys*, **61**:2 (2006), 351–352.

[10] Moskvicheva P. O., "A numerical experiment for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a bounded domain", *J. Comput. Eng. Math.*, **4**:2 (2017), 41–48.

[11] Сагадеева М. А., Бадоян А. Д., "Задача оптимального управления решениями нестационарной модели Баренблатта – Желтова – Кочиной", *Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютер. технологии, управление, радиоэлектрон.*, **14**:2 (2014), 5–11.

[12] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E., *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Boston, 2003.

[13] Соболев С. Л., "Об одной новой задаче математической физики", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1954), 3–50.

[14] Солдатова Е. А., Келлер А. В., "Алгоритмы и обработка информации в численном исследовании стохастической модели Баренблатта-Желтова-Кочиной", *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, **13**:4 (2021), 29–36.

[15] Шипилов А. С., "Об устойчивости решений уравнений Баренблатта-Желтова-Кочиной на геометрическом графе", *Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2008, № 15, 106–110.

[16] Замышляева А. А., Бычков Е. В., "Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска", *Дифференциальные уравнения*, **60**:8 (2024), 1076–1085.

[17] Замышляева А. А., Юзеева А. В., “Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска–Лява”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2010, № 5, 23–31.

[18] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

[19] Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.

[20] Михлин С. Г., *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.