

σ -Проблема Кегеля–Виландта и TI -подгруппы конечных групп

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 12371021). Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф26РНФ-101).

С. Йи

Йи Сяолан (Yi Xiaolan) (ORCID 0000-0001-8603-5893)
Чжэцзянский политехнический университет (Zhejiang Sci-Tech University)
Ханчжоу 310018, Китай

yixiaolan2005@126.com

С. Ф. Каморников

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь

sfkamornikov@mail.ru

В. Н. Тютянов

Гомельский филиал Международного университета "МИТСО"
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь

vtutanov@gmail.com

Аннотация

Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел предлагается решение σ -проблемы Кегеля–Виландта в классе всех групп, у которых специальные множества подгрупп являются нижними полурешетками.

Ключевые слова: конечная группа, σ -субнормальная подгруппа, TI -подгруппа, нижняя полурешетка, σ -проблема Кегеля–Виландта.

For the arbitrary partition σ of the set of all primes, a solution of the Kegel-Wielandt problem is proposed in the class of all groups in which special sets of subgroups are lower semilattices.

Keywords: finite group, σ -subnormal subgroup, TI -subgroup, lower semilattice, Kegel-Wielandt σ -problem.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение σ множества \mathbb{P} всех простых чисел на попарно непересекающиеся непустые подмножества σ_i , индексированные элементами некоторого множества индексов I , т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Элементы σ_i ($i \in I$) разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является σ -*примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется σ -субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной. Далее множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для минимального разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется σ -полной, если $G \in \bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$, т.е. G обладает по крайней мере одной σ_i -холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить E_σ . Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и группы $G \in E_\pi$ мы пишем $H \leq_\pi G$ и называем подгруппу H π -субнормальной, если $H \cap S$ — π -холлова подгруппа из H для любой π -холловой подгруппы S группы G (в этом случае мы говорим, что π -холлова подгруппа S редуцируется в H).

Если подгруппа H является σ -субнормальной в σ -полной группе G , то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в "Коуровской тетради" [2] под номером 19.86 сформулирован следующий аналог известной гипотезы Кегеля–Виландта, который называется сегодня σ -проблемой Кегеля–Виландта.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ -субнормальной в G , если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любой компоненты $\sigma_i \in \sigma$?

Отметим, что для минимального разбиения σ в силу теоремы Силова любая группа является σ -полной. Поэтому в этом случае σ -проблема Кегеля–Виландта превращается в проблему Кегеля–Виландта, сформулированную в работах [3,4]. Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [5].

В настоящее время сложилось несколько подходов к решению σ -проблемы Кегеля–Виландта. Основной из них редуцирует проблему к рассмотрению σ -полных простых неабелевых групп. Подход базируется на теореме 1 из [6]: σ -проблема Кегеля–Виландта имеет положительное тогда и только тогда, когда она верна в классе всех простых неабелевых групп из E_σ . Такое направление инициировано работой [7].

Другой подход к исследованию σ -проблемы Кегеля–Виландта связан с изучением групп, обладающих специальными решеточными свойствами. Он отталкивается от того, что в любой группе G множество $sn_\sigma(G)$ всех ее σ -субнормальных подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G (см., например, [8]). В связи с этим, естественно, возникает задача исследования σ -проблемы Кегеля–Виландта в группе G при дополнительном предположении, что некоторые классы ее подгрупп обладают определенными решеточными свойствами.

Следуя [9], для E_π -группы G через $SN_\pi(G)$ обозначим множество всех ее подгрупп, в которые редуцируются все π -холловы подгруппы группы G . Понятно, что подгруппа H σ -полной группы G удовлетворяет условиям σ -проблемы Кегеля–Виландта тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SN_{\sigma_i}(G)$.

Напомним, что множество \mathcal{L} подгрупп группы G является (по вложению):

- нижней полурешеткой, если из $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$ всегда следует, что $A \cap B \in \mathcal{L}$;
- верхней полурешеткой, если из $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$ всегда следует, что $\langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$;
- решеткой, если \mathcal{L} является одновременно верхней и нижней полурешетками.

Первые результаты, относящиеся к решеточной постановке задачи, опубликованы в работе [10].

Теорема 1 ([10, теорема 1]). *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — σ -полная группа и $SN_{\sigma_i}(G)$ является верхней полурешеткой (по вложению) для любого $i \in I$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) группа G является σ -разрешимой;

2) подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SN_{\sigma_i}(G)$.

В данной работе исследуется случай, когда для любого $i \in I$ множество $SN_{\sigma_i}(G)$ всех σ_i -субнормальных подгрупп группы G является нижней полурешеткой (по вложению). При этом рассматривается даже более общая ситуация в контексте следующего определения.

Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $S \in Hall_{\pi}(G)$ мы пишем $H \leq_{\pi, S} G$ и называем подгруппу H (π, S) -субнормальной, если $H \cap S$ — π -холлова подгруппа из H . Пусть $SN_{\pi, S}(G)$ — множество всех (π, S) -субнормальных подгрупп группы G .

Одно из возможных направлений развития решеточного подхода к σ -проблеме Кегеля–Виландта связано со следующей гипотезой, которая интересна сама по себе.

Гипотеза 1. Любая простая неабелева группа не содержит собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Напомним, что подгруппа H группы G называется TI -подгруппой, если $H \cap H^x \in \{1, H\}$ для любого $x \in G$.

Прикладные возможности гипотезы 1 для анализа σ -проблемы Кегеля–Виландта отражает следующая теорема, доказательство которой — наша главная цель.

Теорема 2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$.

В последнем разделе работы обсуждается связь гипотезы 1 со строением групп с плотно вложенными подгруппами и приводятся две серии простых неабелевых групп, для которых гипотеза 1 справедлива.

2. Определения и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения. Терминологию и основные свойства σ -субнормальных подгрупп можно найти в [1].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π .

Подгруппа H называется π -холловой подгруппой группы G , если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π -холловых подгрупп группы G обозначается $Hall_{\pi}(G)$.

Будем использовать также следующие обозначения:

- если $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — разбиение множества всех простых чисел и n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) | i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$;
- $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ σ -примарных холловых подгрупп группы G называется полным холловым множеством типа σ группы G [1], если выполняются следующие два условия:

- 1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Лемма 1. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, H , K и N — подгруппы группы G , причем $K \subseteq H$ и $N \trianglelefteq G$. Если $S \in Hall_{\pi}(G)$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \leq_{\pi, S} G$, то $H \cap N \leq_{\pi, S} G$ и $HN \leq_{\pi, S} G$;
- 2) если $H \leq_{\pi, S} G$, то $HN/N \leq_{\pi, SN/N} G/N$;
- 3) если $SN_{\pi, S}(G)$ — нижняя полурешетка и $H \leq_{\pi, S} G$, то $SN_{\pi, S \cap H}(H)$ — нижняя полурешетка; в частности, $SN_{\pi, S \cap H}(HN)$ — нижняя полурешетка;

4) если $SN_{\pi,S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $SN_{\pi,SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.

Доказательство. 1) Так как $H \cap N \trianglelefteq H$ и $H \leq_{\pi,S} G$, то по лемме 1 из [11] имеем $H \cap N \leq_{\pi,S} G$.

Так как $N \trianglelefteq G$, то $S \cap N \trianglelefteq S$ и $(S \cap H)(S \cap N)$ — подгруппа в $S \cap HN$. Кроме того, из равенства

$$|HN : (S \cap H)(S \cap N)| = ((|H|/|S \cap H|)(|N|/|S \cap N|))/(|H \cap N|/|S \cap (H \cap N)|)$$

следует, что индекс $|HN : (S \cap H)(S \cap N)|$ является π' -числом. Значит, индекс $|HN : (S \cap HN)|$ также является π' -числом. А так как $|S \cap HN|$ — π -число, то $HN \leq_{\pi,S} G$.

2) Ввиду утверждения 1) $S \cap HN$ — π -холлова подгруппа в HN . Кроме того, по лемме 1 из [11] SN/N — π -холлова подгруппа в G/N . Теперь из равенства

$$SN/N \cap HN/N = (S \cap HN)N/N$$

следует, что $SN/N \cap HN/N$ — π -холлова подгруппа в HN/N .

3) Пусть $H_1, H_2 \in SN_{\pi,S \cap H}(H)$. Тогда из $H \leq_{\pi,S} G$ следует, что $H_1 \cap (S \cap H) = H_1 \cap S$ — π -холлова подгруппа в H_1 . Аналогично показывается, что $H_2 \cap (S \cap H) = H_2 \cap S$ — π -холлова подгруппа в H_2 . По условию $(H_1 \cap H_2) \cap S$ — π -холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Отсюда следует, что и $(H_1 \cap H_2) \cap (S \cap H)$ — π -холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Следовательно, $H_1 \cap H_2 \in SN_{\pi,S \cap H}(H)$ и $SN_{\pi,S \cap H}(H)$ — нижняя полурешетка.

4) Пусть $K/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N)$. Тогда $K/N \cap SN/N$ — π -холлова подгруппа в K/N . Ввиду тождества Дедекинда имеем $K \cap SN = (K \cap S)N$. Поэтому индекс $|K : (K \cap S)N|$ является π' -числом. С другой стороны, из $N \trianglelefteq G$ имеем $N \cap S \in Hall_{\pi}(N)$, а потому

$$|K : (K \cap S)| = |K : (K \cap S)N| \cdot |N : (N \cap S)|.$$

Таким образом, $|K : (K \cap S)|$ является π' -числом. А так как $K \cap S$ — π -группа, то $K \in SN_{\pi,S}(G)$.

Если $K_1/N, K_2/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N)$, то по доказанному выше $K_1, K_2 \in SN_{\pi,S}(G)$. Так как $SN_{\pi,S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $K_1 \cap K_2 \in SN_{\pi,S}(G)$. Но тогда в силу утверждения 2) имеем

$$(K_1 \cap K_2)/N = K_1/N \cap K_2/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N).$$

Следовательно, $SN_{\pi,SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — группа, являющаяся прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Если $K \in sn_{\sigma}(G)$, то либо группа G является σ -примарной, либо подгруппа K субнормальна в G .

Доказательство. Так как $K \in sn_{\sigma}(G)$, то существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i , либо группа $K_i/Core_{K_i}(K_{i-1})$ является σ -примарной.

Применим индукцию по n . Понятно, что при $n = 1$ это утверждение верно. Пусть $G = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где $t \geq 1$ и N_1, N_2, \dots, N_t — изоморфные простые неабелевы группы.

Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в G , то $G/Core_G(K_{n-1})$ — σ_i -группа для некоторого $i \in I$. Но тогда из строения группы G следует, что она является σ_i -группой. Значит, подгруппа K_{n-1} нормальна в G . Тогда по индукции либо подгруппа K_{n-1} является σ_i -группой для некоторого $i \in I$, либо подгруппа K субнормальна в K_{n-1} . Если K_{n-1} является

σ_i -группой для некоторого $i \in I$, то тогда из строения G следует, что G также является σ_i -группой. Если же подгруппа K субнормальна в K_{n-1} , то из $K_{n-1} \trianglelefteq N$ следует, что K субнормальна в G .

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Кроме того, пусть $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна.

Если подгруппа H является σ -субнормальной в группе G , то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что это не так, и пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая такими подгруппами, которые для любого $g \in G$ принадлежат множеству $\bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$, но не являются σ -субнормальными в G . Среди всех таких подгрупп группы G выберем подгруппу H , для которой сумма $|G| + |H|$ минимальна. Очевидно, группа G не является σ -примарной.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Ввиду утверждения 4) леммы 1 множество $SN_{\sigma_i, S_i^g N/N}(G/N)$ является нижней полурешеткой для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Отсюда в силу выбора группы G подгруппа HN/N является σ -субнормальной в G/N . Но тогда ввиду леммы 2.6 из [1] HN является σ -субнормальной подгруппой группы G . Кроме того, подгруппа N не содержится в подгруппе H , в частности, $Core_G(H) = 1$.

Так как подгруппа HN является σ -субнормальной в G , то в силу леммы 2.6 из [1] имеем $HN \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Отметим также, что по утверждению 3) леммы 1 $SN_{\sigma_i, S_i^g \cap HN}(HN)$ — нижняя полурешетка для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. В частности, для любого $y \in HN$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$ множество $SN_{\sigma_i, (S_i \cap HN)^y}(HN)$ является нижней полурешеткой. Если $|HN| < |G|$, то в силу выбора группы G подгруппа H является σ -субнормальной в HN . Тогда ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа H является σ -субнормальной подгруппой группы G , что противоречит ее выбору.

Таким образом, полагаем далее, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p -подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p . Так как группа G не является σ -примарной, то для некоторого $i \in I$ найдется такое множество σ_i , что $\sigma_i \cap \pi(G) = \emptyset$ и $p \notin \sigma_i$. Тогда для каждого $g \in G$ подгруппа H содержит σ_i -холлову подгруппу S_i^g группы G , причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\langle S_i^g | g \in G \rangle \subseteq H$. Так как $1 \neq \langle S_i^g | g \in G \rangle \trianglelefteq G$, то $Core_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть H не содержится в N . Тогда из $Core_G(H) = 1$ следует, что K — собственная подгруппа в N . В силу утверждения 1) леммы 1 $K \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Так как $|G| + |K| < |G| + |H|$, то $K \in sn_\sigma(G)$, а значит, $K \in sn_\sigma(N)$. По лемме 2 имеем, что либо подгруппа N является σ -примарной, либо подгруппа K субнормальна в N .

Если N является σ_i -группой для некоторого $i = 1, 2, \dots, k$, то из $G = HN$ и σ -примарности подгруппы N следует, что для всех $g \in G$ и любого $j \neq i$ из $\{1, 2, \dots, k\}$ подгруппа H содержит все сопряженные с S_j σ_j -холловы подгруппы группы G . Но тогда $Core_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Если K субнормальна в N , то из строения N следует, что K нормальна в N . Кроме того, $K = H \cap N \trianglelefteq H$. Поэтому $K \trianglelefteq \langle N, H \rangle = HN = G$. Если $K \neq 1$, то отсюда имеем,

что $Core_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, k$ имеет место равенство $S_i = (N \cap S_i)(H \cap S_i)$, где $N \cap S_i$ — σ_i -холлова подгруппа из N , а $H \cap S_i$ — σ_i -холлова подгруппа из H . Отсюда $S_i N = (H \cap S_i)N$.

Так как $H \cap S_i^n \subseteq S_i^n \subseteq S_i N$ для любого $n \in N$, то

$$H \cap S_i^n \subseteq (H \cap S_i)N \cap H = (H \cap S_i)(N \cap H) = H \cap S_i.$$

По условию для любого $n \in N$ пересечение $H \cap S_i^n$ является σ_i -холловой подгруппой в H . Отсюда и из $H \cap S_i^n \subseteq H \cap S_i$ следует, что $H \cap S_i^n = H \cap S_i$.

Таким образом, $H \cap S_i \subseteq S_i^n$ для всех $n \in N$. Значит,

$$H \cap S_i \subseteq O_{\sigma_i}(N(H \cap S_i)) = O_{\sigma_i}(S_i N).$$

Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i -группой. Последнее, как показано выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и σ_i -холлова подгруппа $H \cap S_i$ группы H централизует N . Так как это верно для всякого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $G = N \times H$ и $H \trianglelefteq G$, что противоречит предположению.

Случай 2. Пусть теперь H содержится в N . Тогда G является простой неабелевой группой.

Покажем, что подгруппа H простая. Предположим, что она содержит собственную нормальную подгруппу $L \neq 1$. Так как $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, то $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, подгруппа L удовлетворяет условию теоремы. Так как $|G| + |L| < |G| + |H|$, то подгруппа L σ -субнормальна в G . Это означает, что существует цепь подгрупп

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа L_{i-1} нормальна в L_i , либо группа $L_i/Core_{L_i}(L_{i-1})$ σ -примарна. Отсюда и из простоты группы G следует, что G является σ_i -группой для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$. Имеем противоречие с выбором группы G . Следовательно, H — простая неабелева группа.

Покажем, что H — TI -подгруппа. Пусть x — элемент из G , не принадлежащий $N_G(H)$. Рассмотрим подгруппу $H \cap H^x$. Из условия теоремы следует, что $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому $H \cap H^x$ принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Кроме того, $|G| + |H \cap H^x| < |G| + |H|$. Ввиду выбора группы G отсюда имеем, что подгруппа $H \cap H^x$ σ -субнормальна в G . Тогда по лемме 2 либо G является σ -примарной группой, либо подгруппа $H \cap H^x$ субнормальна в G . Так как по условию группа G не является σ -примарной, то из простоты группы G имеем, что $H \cap H^x = 1$, т.е. H — TI -подгруппа. Таким образом, простая неабелева группа G содержит собственную простую неабелеву TI -подгруппу, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

3. Следствия теоремы 2 и замечания к гипотезе 1

Так как теорема 1 справедлива для фиксированного полного холлова множества типа σ группы G , то имеет место

Следствие 1. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если для любого $i \in I$ и любой σ_i -холловой подгруппы S_i группы $G \in E_\sigma$ множество $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ является нижней полурешеткой, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$.

В работе [12] отмечено, что если $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G , то подгруппа H группы G принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$ тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i=1}^k |HS_i| = |G| \cdot |H|^{k-1}.$$

С учетом этого имеем

Следствие 2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i=1}^k |HS_i^g| = |G| \cdot |H|^{k-1}$$

для любого $g \in G$.

Подгруппа H конечной группы G называется *плотно вложенной*, если ее порядок четен, а порядок подгруппы $H \cap H^x$ нечетен для любого $x \in G \setminus N_G(H)$. Очевидно, TI -подгруппа H группы G является плотно вложенной. Поэтому из теоремы 1 работы [13], в частности, следует, что если G — простая неабелева группа и H — ее простая неабелева TI -подгруппа, то силовская 2-подгруппа из H является абелевой. Следовательно (см., например, 4.126 из [14]), справедливо одно из следующих утверждений:

- $H \cong PSL_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$;
- $H \cong PSL_2(2^n)$, где $n \geq 2$;
- $H \cong J_1$;
- $H \cong {}^2G_2(3^n)$, где n нечетно и $n > 1$.

Кроме того, простая проверка показывает, что H — собственная подгруппа в $N_G(H)$ и для каждой подгруппы T из H имеет место включение $N_G(T) \subseteq N_G(H)$.

Из отмеченного следует, что группы Судзуки и группы Ри не содержат собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Действительно, если $G \cong {}^2B_2(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$, то, как следует из [15], любая собственная простая неабелева подгруппа группы ${}^2B_2(q)$ изоморфна ${}^2B_2(q_0)$, где $q = q_0^t$, $q_0 > 2$ и t делит $2n+1$. Кроме того, силовские 2-подгруппы в группах Судзуки неабелевы. Поэтому группа ${}^2B_2(q)$ не содержит собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Пусть теперь $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $n \geq 1$. Информация о строении групп Ри можно найти, например, в [16]. В группе ${}^2G_2(q)$ все инволюции сопряжены и централизатор инволюции, максимальный в ${}^2G_2(q)$, изоморфен $2 \times PSL_2(q)$. Как отмечено выше, нормализатор всякой простой неабелевой TI -подгруппы совпадает с $2 \times PSL_2(q)$. Ясно, что $H \cong PSL_2(q)$. С другой стороны, нормализатор силовской 3-подгруппы из H не содержится в $2 \times PSL_2(q)$. Следовательно, группа ${}^2B_2(q)$ не содержит собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
2. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018.

3. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.
4. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Pure Math. 1980. V. 37. P. 161–173.
5. Kleidman P.B. A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. V. 133. P. 369–428.
6. Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. σ -Проблема Кегеля-Виландта: редукция к простым группам // Сиб. матем. ж. 2025. Т. 66, № 1. С. 36–45.
7. Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. О σ -субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. матем. ж. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.
8. Васильев А.Ф. Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп / Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
9. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. On join properties of Hall π -subgroups of finite π -soluble groups // J. Algebra. 1998. V. 204, № 2. P. 532–548.
10. Xu Zh., Yi X., Kamornikov S.F. On some aspects of the Kegel-Wielandt σ -problem // Ricerche di Matematica. 2024. V. 73, № 5. P. 2771–2778.
11. Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6. P. 286–304.
12. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Perez-Calabuig V., Shemetkova O.L. An arithmetic criterion for σ -subnormality in finite groups // Monatsh. Math. 2025. V. 207. P. 231–239.
13. Махнев А.А. О плотно вложенных подгруппах конечных групп // Матем. сб. 1983. Т. 163, № 4. С. 523–532.
14. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
15. Suzuki M. On a class double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, № 1. P. 105–145.
16. Левчук В.М., Нужин Я.Н. О строении групп $P\Omega$ // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.