4974_p

УДК 512.542

σ–ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ — ВИЛАНДТА И TI–ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел предлагается решение σ-проблемы Кегеля — Виландта в классе всех групп, у которых специальные множества подгрупп являются нижними полурешетками.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: конечная группа, σ-субнормальная подгруппа, TI-подгруппа, нижняя полурешетка, σ-проблема Кегеля — Виландта.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся непустые подмножества σ_i, индексированные элементами некоторого множества индексов I, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Элементы σ_i $(i \in I)$ разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Далее множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G обозначается через $sn_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется *σ-полной*, если $G \in \bigcap\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$, т. е. G обладает по крайней мере одной σ_i-холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить через E_σ. Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и группы $G \in E_\pi$ мы пишем $H \leq_\pi G$ и называем подгруппу H *π-субнормальной*, если $H \cap S$ — π-холлова подгруппа из H для любой π-холловой подгруппы S группы G (в этом случае будем говорить, что π-холлова подгруппа S *редуцируется* в H).

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект є 12371021). Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф26РНФ-101).

Если подгруппа H является σ-субнормальной в σ-полной группе G, то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в «Коуровской тетради» [2] под номером 19.86 сформулирован следующий аналог известной гипотезы Кегеля — Виландта, который называется сегодня *σ-проблемой Кегеля — Виландта*.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ-субнормальной в G, если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любой компоненты $\sigma_i \in \sigma$?

Отметим, что для минимального разбиения σ в силу теоремы Силова любая группа является σ-полной. Поэтому в этом случае σ-проблема Кегеля — Виландта превращается в проблему Кегеля — Виландта, сформулированную в работах [3, 4]. Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [5].

В настоящее время сложилось несколько подходов к решению σ-проблемы Кегеля — Виландта. Основной из них редуцирует проблему к рассмотрению σ-полных простых неабелевых групп. Подход базируется на теореме 1 из [6]: *σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение тогда и только тогда, когда она верна в классе всех простых неабелевых групп из E_σ.* Такое направление инициировано работой [7].

Другой подход к исследованию σ-проблемы Кегеля — Виландта связан с изучением групп, обладающих специальными решеточными свойствами. Он отталкивается от того, что в любой группе G множество $sn_\sigma(G)$ всех ее σ-субнормальных подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G (см., например, [8]). В связи с этим естественно возникает задача исследования σ-проблемы Кегеля — Виландта в группе G при дополнительном предположении, что некоторые классы ее подгрупп обладают определенными решеточными свойствами.

Следуя [9], для E_π-группы G через $SN_\pi(G)$ обозначим множество всех ее подгрупп, в которые редуцируются все π-холловы подгруппы группы G. Понятно, что подгруппа H σ-полной группы G удовлетворяет условиям σ-проблемы Кегеля — Виландта тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap\limits_{i\in I} SN_{\sigma_i}(G)$.

Напомним, что множество $\mathscr{L}$ подгрупп группы G является (по вложению):

— *нижней полурешеткой*, если из $A \in \mathscr{L}$ и $B \in \mathscr{L}$ всегда следует, что $A \cap B \in \mathscr{L}$;

— *верхней полурешеткой*, если из $A \in \mathscr{L}$ и $B \in \mathscr{L}$ всегда следует, что $\langle A, B\rangle \in \mathscr{L}$;

— *решеткой*, если $\mathscr{L}$ является одновременно верхней и нижней полурешетками.

Первые результаты, относящиеся к решеточной постановке задачи, опубликованы в работе [10].

Теорема 1 [10, теорема 1]. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — σ-полная группа и $SN_{\sigma_i}(G)$ является верхней полурешеткой (по вложению) для любого $i \in I$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G является σ-разрешимой;*

(2) *подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap\limits_{i\in I} SN_{\sigma_i}(G)$.*

В данной работе исследуется случай, когда для любого $i \in I$ множество $SN_{\sigma_i}(G)$ всех σ_i-субнормальных подгрупп группы G является нижней полурешеткой (по вложению). При этом рассматривается даже более общая ситуация в контексте следующего определения.

Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ пишем $H \leq_{\pi,S} G$ и называем подгруппу H (π, S)-*субнормальной*, если $H \cap S$ — π-холлова подгруппа из H. Пусть $SN_{\pi,S}(G)$ — множество всех (π, S)-субнормальных подгрупп группы G.

Одно из возможных направлений развития решеточного подхода к σ-проблеме Кегеля — Виландта связано со следующей гипотезой, которая интересна сама по себе.

Гипотеза 1. *Любая простая неабелева группа не содержит собственных простых неабелевых TI-подгрупп.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется *TI-подгруппой*, если $H \cap H^x \in \{1, H\}$ для любого $x \in G$.

Прикладные возможности гипотезы 1 для анализа σ-проблемы Кегеля — Виландта отражает следующая теорема, доказательство которой — наша главная цель.

Теорема 2. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза* 1 *верна, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$.*

В последнем разделе работы обсуждается связь гипотезы 1 со строением групп с плотно вложенными подгруппами и приводятся две серии простых неабелевых групп, для которых гипотеза 1 справедлива.

2. Определения и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения. Терминологию и основные свойства σ-субнормальных подгрупп можно найти в [1].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π.

Подгруппа H называется *π-холловой подгруппой* группы G, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π-холловых подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$.

Будем использовать также следующие обозначения:

— если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества всех простых чисел и n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I,\ \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

— $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G называется *полным холловым множеством типа* σ группы G [1], если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Лемма 1. *Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, H, K и N — подгруппы группы G, причем $K \subseteq H$ и $N \trianglelefteq G$. Если $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \leq_{\pi,S} G$, то $H \cap N \leq_{\pi,S} G$ и $HN \leq_{\pi,S} G$;*

(2) *если $H \leq_{\pi,S} G$, то $HN/N \leq_{\pi,SN/N} G/N$;*

(3) *если $SN_{\pi,S}(G)$ — нижняя полурешетка и $H \leq_{\pi,S} G$, то $SN_{\pi,S\cap H}(H)$ — нижняя полурешетка; в частности, $SN_{\pi,S\cap HN}(HN)$ — нижняя полурешетка;*

(4) *если $SN_{\pi,S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $SN_{\pi,SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.*

Доказательство. (1) Так как $H \cap N \trianglelefteq H$ и $H \leq_{\pi,S} G$, то по лемме 1 из [11] имеем $H \cap N \leq_{\pi,S} G$.

Так как $N \trianglelefteq G$, то $S \cap N \trianglelefteq S$ и $(S \cap H)(S \cap N)$ — подгруппа в $S \cap HN$. Кроме того, из равенства

$$|HN : (S \cap H)(S \cap N)| = ((|H|/|S \cap H|)(|N|/|S \cap N|))/(|H \cap N|/|S \cap (H \cap N)|)$$

следует, что индекс $|HN : (S \cap H)(S \cap N)|$ является π'-числом. Значит, индекс $|HN : (S \cap HN)|$ также является π'-числом. А так как $|S \cap HN|$ — π-число, то $HN \leq_{\pi,S} G$.

(2) Ввиду утверждения (1) $S \cap HN$ — π-холлова подгруппа в HN. Кроме того, по лемме 1 из [11] SN/N — π-холлова подгруппа в G/N. Теперь из равенства

$$SN/N \cap HN/N = (S \cap HN)N/N$$

следует, что $SN/N \cap HN/N$ — π-холлова подгруппа в HN/N.

(3) Пусть $H_1, H_2 \in SN_{\pi,S\cap H}(H)$. Тогда из $H \leq_{\pi,S} G$ следует, что $H_1 \cap (S \cap H) = H_1 \cap S$ — π-холлова подгруппа в H_1. Аналогично показывается, что $H_2 \cap (S \cap H) = H_2 \cap S$ — π-холлова подгруппа в H_2. По условию $(H_1 \cap H_2) \cap S$ — π-холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Отсюда следует, что и $(H_1 \cap H_2) \cap (S \cap H)$ — π-холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Следовательно, $H_1 \cap H_2 \in SN_{\pi,S\cap H}(H)$ и $SN_{\pi,S\cap H}(H)$ — нижняя полурешетка.

(4) Пусть $K/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N)$. Тогда $K/N \cap SN/N$ — π-холлова подгруппа в K/N. Ввиду тождества Дедекинда имеем $K \cap SN = (K \cap S)N$. Поэтому индекс $|K : (K \cap S)N|$ является π'-числом. С другой стороны, из $N \trianglelefteq G$ имеем $N \cap S \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$, а потому

$$|K : (K \cap S)| = |K : (K \cap S)N| \cdot |N : (N \cap S)|.$$

Таким образом, $|K : (K \cap S)|$ является π'-числом. А так как $K \cap S$ — π-группа, то $K \in SN_{\pi,S}(G)$.

Если $K_1/N, K_2/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N)$, то по доказанному выше $K_1, K_2 \in SN_{\pi,S}(G)$. Поскольку $SN_{\pi,S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $K_1 \cap K_2 \in SN_{\pi,S}(G)$. Но тогда в силу утверждения (2) имеем

$$(K_1 \cap K_2)/N = K_1/N \cap K_2/N \in SN_{\pi,SN/N}(G/N).$$

Следовательно, $SN_{\pi,SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — группа, являющаяся прямым произведением изоморфных* *простых неабелевых групп. Если $K \in sn_\sigma(G)$, то либо группа G является σ-примарной, либо подгруппа K субнормальна в G.*

Доказательство. Так как $K \in sn_\sigma(G)$, то существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i, либо группа $K_i / \operatorname{Core}_{K_i}(K_{i-1})$ является σ-примарной.

Применим индукцию по n. Понятно, что при $n = 1$ это утверждение верно. Пусть $G = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$, где $t \geq 1$ и N_1, N_2, … , N_t — изоморфные простые неабелевы группы.

Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в G, то $G / \operatorname{Core}_G(K_{n-1})$ — σ_i-группа для некоторого $i \in I$. Но тогда из строения группы G следует, что она является σ_i-группой. Значит, подгруппа K_{n-1} нормальна в G. По индукции либо подгруппа K_{n-1} является σ_i-группой для некоторого $i \in I$, либо подгруппа K субнормальна в K_{n-1}. Если K_{n-1} является σ_i-группой для некоторого $i \in I$, то из строения G следует, что G также является σ_i-группой. Если же подгруппа K субнормальна в K_{n-1}, то из $K_{n-1} \trianglelefteq N$ следует, что K субнормальна в G.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Кроме того, пусть $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, а гипотеза 1 верна.

Если подгруппа H является σ-субнормальной в группе G, то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что это не так, и пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая такими подгруппами, которые для любого $g \in G$ принадлежат множеству $\bigcap\limits_{i \in \{1,2,\ldots,k\}} SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$, но не являются σ-субнормальными в G. Среди всех таких подгрупп группы G выберем подгруппу H, для которой сумма $|G| + |H|$ минимальна. Очевидно, группа G не является σ-примарной.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду утверждения (4) леммы 1 множество $SN_{\sigma_i, S_i^g N/N}(G/N)$ является нижней полурешеткой для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Отсюда в силу выбора группы G подгруппа HN/N является σ-субнормальной в G/N. Но тогда ввиду леммы 2.6 из [1] HN является σ-субнормальной подгруппой группы G. Кроме того, подгруппа N не содержится в подгруппе H, в частности, $\operatorname{Core}_G(H) = 1$.

Так как подгруппа HN является σ-субнормальной в G, то в силу леммы 2.6 из [1] имеем $HN \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Отметим также, что по утверждению (3) леммы 1 $SN_{\sigma_i, S_i^g \cap HN}(HN)$ — нижняя полурешетка для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. В частности, для любого $y \in HN$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ множество $SN_{\sigma_i, (S_i \cap HN)^y}(HN)$ является нижней полурешеткой. Если $|HN| < |G|$, то в силу выбора группы G подгруппа H является σ-субнормальной в HN. Ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа H является σ-субнормальной подгруппой группы G, что противоречит ее выбору.

Таким образом, полагаем далее, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p. Так как группа G не является σ-примарной, то для некоторого $i \in I$ найдется такое множество σ_i, что $\sigma_i \cap \pi(G) = \varnothing$ и $p \notin \sigma_i$. Тогда для каждого $g \in G$ подгруппа H содержит σ_i-холлову подгруппу S_i^g группы G, причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\langle S_i^g \mid g \in G\rangle \subseteq H$. Поскольку $1 \neq \langle S_i^g \mid g \in G\rangle \trianglelefteq G$, то $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Рассмотрим два возможные случая.

Случай 1. Пусть H не содержится в N. Тогда из $\mathrm{Core}_G(H) = 1$ следует, что K — собственная подгруппа в N. В силу утверждения (1) леммы 1 $K \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как $|G| + |K| < |G| + |H|$, то $K \in sn_\sigma(G)$, а значит, $K \in sn_\sigma(N)$. По лемме 2 имеем, что либо подгруппа N является σ-примарной, либо подгруппа K субнормальна в N.

Если N является σ_i-группой для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, то из $G = HN$ и σ-примарности подгруппы N следует, что для всех $g \in G$ и любого $j \neq i$ из $\{1, 2, \ldots, k\}$ подгруппа H содержит все сопряженные с S_j σ_j-холловы подгруппы группы G. Но тогда $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Если K субнормальна в N, то из строения N следует, что K нормальна в N. Кроме того, $K = H \cap N \trianglelefteq H$. Поэтому $K \trianglelefteq \langle N, H\rangle = HN = G$. Если $K \neq 1$, то отсюда имеем, что $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ имеет место равенство $S_i = (N \cap S_i)(H \cap S_i)$, где $N \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из N, а $H \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из H. Отсюда $S_i N = (H \cap S_i)N$.

Так как $H \cap S_i^n \subseteq S_i^n \subseteq S_i N$ для любого $n \in N$, то

$$H \cap S_i^n \subseteq (H \cap S_i)N \cap H = (H \cap S_i)(N \cap H) = H \cap S_i.$$

По условию для любого $n \in N$ пересечение $H \cap S_i^n$ является σ_i-холловой подгруппой в H. Отсюда и из $H \cap S_i^n \subseteq H \cap S_i$ следует, что $H \cap S_i^n = H \cap S_i$.

Таким образом, $H \cap S_i \subseteq S_i^n$ для всех $n \in N$. Значит,

$$H \cap S_i \subseteq O_{\sigma_i}(N(H \cap S_i)) = O_{\sigma_i}(S_i N).$$

Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i-группой. Последнее, как показано выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и σ_i-холлова подгруппа $H \cap S_i$ группы H централизует N. Так как это верно для всякого $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $G = N \times H$ и $H \trianglelefteq G$, что противоречит предположению.

Случай 2. Пусть теперь H содержится в N. Тогда G является простой неабелевой группой.

Покажем, что подгруппа H простая. Предположим, что она содержит собственную нормальную подгруппу $L \neq 1$. Так как $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, то $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, подгруппа L удовлетворяет условию теоремы. Так как $|G| + |L| < |G| + |H|$, то подгруппа L σ-субнормальна в G. Это означает, что существует цепь подгрупп

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа L_{i-1} нормальна в L_i, либо группа $L_i / \mathrm{Core}_{L_i}(L_{i-1})$ σ-примарна. Отсюда и из простоты группы G следует, что G является σ_i-группой для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Имеем противоречие с выбором группы G. Следовательно, H — простая неабелева группа.

Покажем, что H — TI-подгруппа. Пусть x — элемент из G, не принадлежащий $N_G(H)$. Рассмотрим подгруппу $H \cap H^x$. Из условия теоремы следует, что $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому $H \cap H^x$ принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Кроме того, $|G| + |H \cap H^x| < |G| + |H|$. Ввиду выбора группы G отсюда имеем, что подгруппа $H \cap H^x$ σ-субнормальна в G. Тогда по лемме 2 либо G является σ-примарной группой, либо подгруппа $H \cap H^x$ субнормальна в G. Так как по условию группа G не является σ-примарной, то из простоты группы G имеем, что $H \cap H^x = 1$, т. е. H — TI-подгруппа. Таким образом, простая неабелева группа G содержит собственную простую неабелеву TI-подгруппу, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

3. Следствия теоремы 2 и замечания к гипотезе 1

Так как теорема 1 справедлива для фиксированного полного холлова множества типа σ группы G, то имеет место

Следствие 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если для любого $i \in I$ и любой σ_i-холловой подгруппы S_i группы $G \in E_\sigma$ множество $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ является нижней полурешеткой, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$.*

В работе [12] отмечено, что если $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G, то подгруппа H группы G принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i=1}^{k} |HS_i| = |G| \cdot |H|^{k-1}.$$

С учетом этого имеем

Следствие 2. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{i=1}^{k} |HS_i^g| = |G| \cdot |H|^{k-1}$$

для любого $g \in G$.

Подгруппа H конечной группы G называется *плотно вложенной*, если ее порядок четен, а порядок подгруппы $H \cap H^x$ нечетен для любого $x \in G \setminus N_G(H)$. Очевидно, TI-подгруппа H группы G является плотно вложенной. Поэтому из теоремы 1 работы [13], в частности, следует, что если G — простая неабелева группа и H — ее простая неабелева TI-подгруппа, то силовская 2-подгруппа из H является абелевой. Следовательно (см., например, 4.126 из [14]), справедливо одно из следующих утверждений:

— $H \cong PSL_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$;
— $H \cong PSL_2(2^n)$, где $n \geq 2$;
— $H \cong J_1$;
— $H \cong^2 G_2(3^n)$, где n нечетно и $n > 1$.

Кроме того, простая проверка показывает, что H — собственная подгруппа в $N_G(H)$ и для каждой подгруппы T из H имеет место включение $N_G(T) \subseteq N_G(H)$.

Из отмеченного следует, что группы Судзуки и группы Ри не содержат собственных простых неабелевых TI-подгрупп.

Действительно, если $G \cong^2 B_2(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$, то, как следует из [15], любая собственная простая неабелева подгруппа группы $^2B_2(q)$ изоморфна $^2B_2(q_0)$, где $q = q_0^t$, $q_0 > 2$ и t делит $2n+1$. Кроме того, силовские 2-подгруппы в группах Судзуки неабелевы. Поэтому группа $^2B_2(q)$ не содержит собственных простых неабелевых TI-подгрупп.

Пусть теперь $G \cong^2 G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $n \geq 1$. Информацию о строении групп Ри можно найти, например, в [16]. В группе $^2G_2(q)$ все инволюции сопряжены и централизатор инволюции, максимальный в $^2G_2(q)$, изоморфен $2 \times PSL_2(q)$. Как отмечено выше, нормализатор всякой простой неабелевой TI-подгруппы совпадает с $2 \times PSL_2(q)$. Ясно, что $H \cong PSL_2(q)$. С другой стороны, нормализатор силовской 3-подгруппы из H не содержится в $2 \times PSL_2(q)$. Следовательно, группа $^2B_2(q)$ не содержит собственных простых неабелевых TI-подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
2. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.
3. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–211.
4. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Pure Math. 1980. V. 37. P. 161–173.
5. *Kleidman P. B.* A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. V. 133. P. 369–428.
6. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* σ-Проблема Кегеля — Виландта: редукция к простым группам // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 36–45.
7. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О σ-субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.
8. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
9. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* On join properties of Hall π-subgroups of finite π-soluble groups // J. Algebra. 1998. V. 204, N 2. P. 532–548.
10. *Xu Zh., Yi X., Kamornikov S. F.* On some aspects of the Kegel–Wielandt σ-problem // Ricerche di Matematica. 2024. V. 73, N 5. P. 2771–2778.
11. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. N 5. P. 286–304.
12. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V., Shemetkova O. L.* An arithmetic criterion for σ-subnormality in finite groups // Monatsh. Math. 2025. V. 207. P. 231–239.
13. *Махнев А. А.* О плотно вложенных подгруппах конечных групп // Мат. сб. 1983. Т. 163, № 4. С. 523–532.
14. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
15. *Suzuki M.* On a class double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

16. *Левчук В. М., Нужин Я. Н.* О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.

Поступила в редакцию 2 октября 2925 г.
После доработки 22 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Йи Сяолан (Yi Xiaolan) (ORCID 0000-0001-8603-5893)
Чжэцзянский политехнический университет (Zhejiang Sci-Tech University)
Ханчжоу 310018, Китай
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com