

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ КВАНТОВАНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МЕР

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН)

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований Карельского
научного центра РАН,
185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

alvlivanov@krsc.karelia.ru

Аннотация

На пространстве $I(X)$ идемпотентных мер (мер Маслова), заданных на метрическом компакте X , вводится метрика ρ_I , определяющая метризацию функтора идемпотентных мер I . Для каждой меры $\mu \in I(X)$ по метрике ρ_I можно определить верхнюю и нижнюю размерность квантования этой меры, которые не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ . Доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер: на любом метрическом компакте емкостной размерности $a < \infty$ для любых двух чисел b, c , связанных неравенствами $0 \leq b \leq c \leq a$, существует идемпотентная мера, нижняя и верхняя размерности квантования которой равны b и c соответственно.

Ранее аналогичная теорема о промежуточных значениях была доказана автором для размерностей квантования вероятностных мер, идемпотентным аналогом которых являются меры Маслова.

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования идемпотентных мер.

On the space $I(X)$ of idempotent measures (Maslov measures) defined on a metric compactum X , we introduce the metric ρ_I , which defines a metrization of the functor of idempotent measures I . For each measure $\mu \in I(X)$, using the metric ρ_I , we can define an upper and lower quantization dimension of this measure that does not exceed the corresponding box dimensions of the support of μ . The following theorem on intermediate values of the quantization dimensions of idempotent measures is proved: on any metric compactum of box dimension $a < \infty$, for any two numbers b, c such that $0 \leq b \leq c \leq a$, there exists an idempotent measure whose lower and upper quantization dimensions are b and c , respectively.

Previously, a similar theorem on intermediate values was proved by the author for the quantization dimensions of probability measures, the idempotent analogue of which are Maslov measures.

Keywords: metric compactum, box dimension, quantization dimension of idempotent measures.

1. Введение

В работе речь пойдет о мерах (вероятностных и идемпотентных), заданных на метрическом компакте (X, ρ) . Квантованием вероятностной (борелевской) меры называется ее приближение мерами с конечными носителями. В рамках теории квантования введено понятие размерности квантования $D(\mu)$ вероятностной меры μ (см. [1]). Величина $D(\mu)$ характеризует скорость возрастания числа точек в носителе ε -аппроксимации меры μ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта скорость бывает «неустойчивой» и тогда рассматривают верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$ размерности квантования меры μ , связанные неравенством $\underline{D}(\mu) \leq \overline{D}(\mu)$. Известно (см. [1]), что размерности квантования вероятностной меры (верхняя и нижняя) не превосходят соответствующих емкостных размерностей ее носителя. В работе [2] была доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования вероятностных мер:

Теорема 1.1.[2] Пусть (X, ρ) — метрический компакт, емкостная размерность которого равна $a \leq \infty$. Тогда для любых двух чисел b, c , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq b \leq c \leq a$, на X существует вероятностная мера μ_{bc} , для которой

$$\underline{D}(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}(\mu_{bc}) = c.$$

Постановка вопроса о приближении предполагает наличие подходящей метрики на пространстве вероятностных мер, заданных на метрическом компакте (X, ρ) . В качестве такой метрики в сформулированных выше утверждениях рассматривается расстояние Канторовича — Рубинштейна ρ_P , которое определяется по формуле

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \text{Lip}_1(X)\}, \quad (1)$$

где $\text{Lip}_1(X)$ — множество вещественных функций на X , удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, и $\mu(f) = \int f d\mu$.

Главным результатом данной статьи является доказательство аналога теоремы 1.1 для идемпотентных мер. Основные понятия идемпотентного анализа кратко изложены в обзоре [3]. В идемпотентной математике аналогом вероятностных мер являются идемпотентные меры или меры Маслова (см. М.М.Заричный [4]), которые можно определить как нормированные функционалы $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, линейные относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X , наделенное слабой* топологией, всегда является компактом. Непрерывное отображение компактов $f : X \rightarrow Y$ естественно порождает отображение $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$. Таким образом, конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений. Топологические свойства этого функтора исследованы в [4], где было доказано, что функтор I является нормальным в смысле Е.В.Щепина [5].

В работе Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M. [6] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определены непрерывные псевдометрики ρ_n , $n \in \mathbb{N}$ по формуле (1) с заменой Lip_1 на Lip_n . С помощью этих псевдометрик мы вводим расстояние ρ_I на $I(X)$, отличное от метрик, рассмотренных в [6], [7] и [8]. При этом метрики ρ_I задают метризацию функтора I по

В.В.Федорчуку [9]. В метрическом пространстве $(I(X), \rho_I)$ определены размерности квантования идемпотентной меры μ (верхняя $\overline{D}_I(\mu)$ и нижняя $\underline{D}_I(\mu)$), которые (как и в случае вероятностных мер) не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ . В работе доказано, что для размерностей квантования идемпотентных мер справедлива следующая теорема о промежуточных размерностях, аналогичная теореме 1.1:
Для любого метрического компакта (X, ρ) емкостной размерности $\dim_B X = a < \infty$ и любых двух чисел b, c , связанных неравенствами $0 \leq b \leq c \leq a$, существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{bc}) = c.$$

При доказательстве этой теоремы используется техника работы [10], где теорема о промежуточных размерностях была доказана при ограничении $b < a/2$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта) X через $C(X)$, как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на X ; c_X — постоянная функция на X со значением $c \in \mathbb{R}$.

Определение 2.1. ([4]) Функционал $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется идемпотентной мерой или мерой Маслова, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия

- 1) $\mu(c_X) = c$;
- 2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;
- 3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

(Условие 1) является условием нормировки функционала μ , 2) и 3) — условия линейности относительно идемпотентных арифметических операций).

Множество идемпотентных мер обозначается через $I(X)$. Любой функционал $\mu \in I(X)$ непрерывен на $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости и сохраняет порядок. Последнее означает, что если $f \leq g$ (т.е. $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in X$), то $\mu(f) \leq \mu(g)$. Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ по формуле $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X), f \leq 0_X, f(x) = 0\}$, где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную меру μ :

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \quad (2)$$

где $f \in C(X)$. (Формула (2) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X). И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (2) определяет идемпотентную меру μ_g :

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [11]). Носителем меры μ называется множество

$$\text{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

Множество $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ с тихоновской топологией. Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. В [12] показано, что для любого компакта X пространство $I(X)$ является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \rightarrow Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \rightarrow I(Y)$ по формуле: $I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$ для каждого $f \in C(Y)$. Таким образом, конструкция I является ковариантным функтором в категории *Comp* компактов и непрерывных отображений, который (как показано в [4]) является нормальным в смысле Е.В.Щепина (см. [5]).

В работе [6] для каждого $n \in \mathbb{N}$ на $I(X)$ определена непрерывная псевдометрика ρ_n по формуле:

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \text{Lip}_n(X)\}, \quad (3)$$

где $\text{Lip}_n(X)$ — множество функций на X , удовлетворяющих условию Липшица с константой n . В силу условия 2) определения 2.1, в формуле (3) достаточно рассматривать функции из $\text{Lip}_n(X)$, принимающие нулевое значение в некоторой фиксированной точке x_0 . Множество таких функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи это множество компактно. Таким образом, в формуле (3) \sup можно заменить на \max . Заметим, что $f \in \text{Lip}_n(X)$ тогда и только тогда, когда $f/n \in \text{Lip}_1(X)$.

В [8] для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел $\alpha = (n_i : i \in \mathbb{N})$ определена совместимая с топологией метрика $\rho_{I\alpha}$ на $I(X)$ по формуле

$$\rho_{I\alpha}(\mu, \nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{n_i}(\mu, \nu)}{n_i 2^i}. \quad (4)$$

Мы модифицируем формулу (4), заменив в ней ряд коэффициентов $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i}$ на ряд $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i^2}$ (напомним, что его сумма равна $\pi^2/6$). В качестве α возьмем последовательность $(2^i : i \in \mathbb{N})$ и положим

$$\rho_I(\mu, \nu) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i \cdot i^2}. \quad (5)$$

Почти дословно повторив рассуждения, приведенные при доказательстве предложений 3.2 и 3.4 из [8], мы можем утверждать, что формула (5) определяет совместимую с топологией метрику ρ_I на $I(X)$ и метрики ρ_I задают метризацию функтора I в терминологии В.В.Федорчука.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\text{supp}(\mu)| \leq n\}$ замкнуто в $I(X)$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(X)$ всюду плотно в $I(X)$ (см. [4]). Поэтому для любой меры $\mu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ определено натуральное число $N(\mu, \varepsilon)$, равное наименьшей мощности носителя ε -приближения меры μ по метрике ρ_I :

$$N(\mu, \varepsilon) = \min\{n : \rho_I(\mu, I_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Если μ имеет бесконечный носитель, то $N(\mu, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность квантования $D_I(\mu)$ меры μ :

$$D_I(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\mu, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

(если указанный предел не существует, рассматриваются верхний и нижний пределы, и мы получаем верхнюю $\overline{D}_I(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}_I(\mu)$ размерности квантования μ).

Нам понадобится также понятие емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$) замкнутого подмножества F метрического компакта (X, ρ) (см. [12]). Для множества F и $\varepsilon > 0$ через $N(F, \varepsilon)$ обозначим наименьшее число точек в ε -сети для F . Тогда

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \quad \underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

В случае совпадения этих пределов используют обозначение $\dim_B F$ и говорят о емкостной размерности F .

Имеет место

Предложение 2.2. *Для любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства:*

$$\overline{D}_I(\mu) \leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)), \quad \underline{D}_I(\mu) \leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)).$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичных неравенств в [7, предложение 4.3 и следствие 4.4].

Подмножество A метрического компакта (X, ρ) называется ε -разделенным ($\varepsilon > 0$), если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$.

Следующее предложение доказано в [10]:

Предложение 2.3. [10, предложение 2.5.] *Пусть последовательность положительных чисел ε_n монотонно ($\varepsilon_n \geq \varepsilon_{n+1}$) сходится к нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \varepsilon_{n+1}} = 1$ и пусть T_n — последовательность ε_n -разделенных ε_n -сетей в X . Тогда*

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}, \quad \underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}.$$

Из доказанного в [10] предложения 2.1 следует

Предложение 2.4. *Если последовательность ε_n удовлетворяет условиям предложения 2.3, то*

$$\underline{D}_I(\mu) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{D}_I(\mu) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Пусть $\mu \in I(X)$ и d_μ — функция плотности меры μ . Положим

$$K(\mu) = \{x : d_\mu(x) = 0\}.$$

Предложение 2.5. *Для любой меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства:*

$$\underline{D}_I(\mu) \geq \underline{\dim}_B K(\mu), \quad \overline{D}_I(\mu) \geq \overline{\dim}_B K(\mu).$$

Доказательство. Опираясь на результаты работы [7, леммы 3.3 и 4.5], легко проверить, что имеет место неравенство

$$N(\mu, \varepsilon) \geq N(K(\mu), \varepsilon),$$

из которого следует утверждение предложения. \square

Для замкнутого подмножества F метрического компакта X определим идемпотентную меру λ_F по формуле

$$\lambda_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что мера λ_F имеет функцию плотности d_{λ_F} , которая тождественно равна нулю на F и принимает значение $-\infty$ во всех остальных точках X . Из предложений 2.2 и 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *Для любого замкнутого подмножества $F \subset X$*

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = \underline{\dim}_B F, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = \overline{\dim}_B F.$$

В пространстве $I(X)$ определено идемпотентное сложение \oplus . Для $\mu, \nu \in I(X)$ мера $\mu \oplus \nu \in I(X)$ определяется по формуле

$$(\mu \oplus \nu)(f) = \max\{\mu(f), \nu(f)\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что

$$d_{\mu \oplus \nu}(x) = \max\{d_\mu(x), d_\nu(x)\}.$$

Имеют место следующие утверждения, доказательства которых почти тождественны доказательствам соответствующих предложений из [7].

Предложение 2.7. [7, предложение 4.10] *Для любых $\mu, \nu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:*

$$N(\mu \oplus \nu, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\nu, \varepsilon).$$

Следствие 2.8. [7, следствие 4.11] *Для любых мер $\mu, \nu \in I(X)$*

$$\overline{D}_I(\mu \oplus \nu) \leq \max\{\overline{D}_I(\mu), \overline{D}_I(\nu)\}.$$

3. Теорема о промежуточных значениях размерностей квантования

Пусть (X, ρ) — метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Замкнутый ε -шар точки x будем обозначать через $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Теорема 3.1. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\dim_B X = a < \infty$. Тогда для любых чисел b, c , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq b \leq c \leq a$ существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что $\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b$, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.*

Доказательство. Покажем вначале, что на X существует идемпотентная мера μ , для которой $D_I(\mu) = b$. Для $b = 0$ в качестве μ можно взять любую меру с конечным носителем. При $b = a$ искомой мерой μ является мера λ_X в силу следствия 2.6.

В дальнейшем $b \in (0, a)$. Положим $\varepsilon_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем в X возрастающую (по включению) последовательность подмножеств

$T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$, где $|T_0| = 1$, и каждое T_n при $n \in \mathbb{N}$ является ε_n -разделенной ε_n -сетью в X . Такую последовательность легко построить по индукции, дополняя на шаге $n + 1$ уже построенное T_n до максимального ε_{n+1} -разделенного подмножества T_{n+1} , которое (в силу максимальности) будет ε_{n+1} -сетью.

Положим

$$b_n = 2^{2^{np}},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ — числовой параметр. Определим функцию $d : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d(x) = 0$ при $x \in T_0$; $d(x) = -b_n$ при $x \in T_n \setminus T_{n-1}$; $d(x) = -\infty$ при $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Легко проверить, что функция d полунепрерывна сверху и $\max d = 0$. Следовательно, d есть функция плотности некоторой идемпотентной меры μ . Покажем, что при изменении параметра p размерность квантования меры μ принимает все значения в диапазоне $(0, a)$.

Оценка снизу. Пусть мера ν имеет конечный носитель $\text{supp}(\nu) = B$ и $|B| < |T_n|$. Множество T_n является ε_n -разделенным, следовательно, шары $B(x, \varepsilon_n/2)$, $x \in T_n$ попарно не пересекаются. Таким образом, существует точка $t \in T_n$, для которой $B(t, \varepsilon_n/2) \cap B = \emptyset$, и значит, $\rho(t, B) \geq \varepsilon_n/2$. Поскольку функция $\rho(x, B)$ принадлежит $\text{Lip}_1(X)$, для любого $i \in \mathbb{N}$ получаем

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq |\mu(2^i \rho(x, B)) - \nu(2^i \rho(x, B))|.$$

Множество B является носителем меры ν и $\rho(x, B) = 0$ при $x \in B$. Следовательно, $\nu(2^i \rho(x, B)) = 0$. При этом $\mu(2^i \rho(x, B)) \geq 2^i \rho(t, B) + d(t) > 2^i \varepsilon_n/2 - b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq 2^i \varepsilon_n/2 - b_n.$$

Положим

$$i(n) = [2^{np}] + n + 2.$$

Легко проверить, что для всех $i > i(n)$ выполняется неравенство:

$$2^i \varepsilon_n/4 > b_n.$$

Таким образом, при $i > i(n)$

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) > 2^i \varepsilon_n/4.$$

Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu) \geq \frac{6}{\pi^2} \sum_{i > i(n)} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i \cdot i^2} > \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n) + 1)}.$$

Введем обозначение:

$$\delta_n = \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n) + 1)}.$$

Нетрудно показать, что последовательность δ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \delta_n} = \frac{1}{p + 1}.$$

Итак, доказано, что если носитель меры ν имеет мощность меньше $|T_n|$, то $\rho_I(\mu, \nu) > \delta_n$. Следовательно,

$$N(\mu, \delta_n) \geq |T_n|. \quad (6)$$

Из неравенства (6) и предложений 2.3, 2.4 получаем

$$\underline{D}_I(\mu) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mu, \delta_n)}{-\log \delta_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log |T_n| \log \varepsilon_n}{-\log \varepsilon_n \log \delta_n} \right) = \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Оценка сверху. Для каждого n определим функцию $d_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d_n(x) = d(x)$ при $x \in T_n$; $d_n(x) = -\infty$ при $x \notin T_n$. Очевидно, что d_n является функцией плотности некоторой меры ν_n с носителем $\text{supp}(\nu_n) = T_n$. Для $i \in \mathbb{N}$ оценим величину

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = \max\{|\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)| : f \in \text{Lip}_1(X)\} \quad (7)$$

Пусть g — функция из $\text{Lip}_1(X)$, на которой достигается максимум правой части формулы (7), т.е.

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = |\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)|.$$

В силу формулы (2) для некоторой точки $y \in X$ имеет место равенство $\mu(2^i g) = 2^i g(y) + d(y)$. Если $y \in T_n$, то легко проверить, что $\mu(2^i g) = \nu_n(2^i g)$ и тогда $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$. Если $y \notin T_n$, то существует точка $t \in T_n$ такая, что $\rho(t, y) \leq \varepsilon_n$, поскольку T_n является ε_n -сетью. Имеем

$$2^i g(t) + d(t) \leq \nu_n(2^i g) < 2^i g(y) + d(y) = \mu(2^i g).$$

Следовательно,

$$|\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)| \leq 2^i |g(y) - g(t)| + d(y) - d(t).$$

При этом $|g(y) - g(t)| \leq \varepsilon_n$, $d(y) \leq -b_{n+1}$, $-d(t) \leq b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \leq 2^i \varepsilon_n - (b_{n+1} - b_n). \quad (8)$$

Пусть $i = j(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого правая часть формулы (8) больше нуля. Легко проверить, что

$$j(n) = [\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n + 1$$

(здесь мы считаем, что n достаточно велико, так, что $\log_2(b_{n+1} - b_n) > 0$).

Поскольку $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \geq 0$, правая часть формулы (8) не может быть отрицательной. Откуда следует, что при $i < j(n)$ случай $y \notin T_n$ заведомо исключен. Таким образом, $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$ при $i < j(n)$ и $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \leq 2^i \varepsilon_n$ при $i \geq j(n)$. Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu_n) \leq \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=j(n)}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{i^2} \leq \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}. \quad (9)$$

Положим

$$\xi_n = \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}.$$

Нетрудно доказать, что последовательность ξ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \xi_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Из неравенства (9) следует, что

$$N(\mu, \xi_n) \leq |T_n|.$$

Откуда по аналогии с полученной выше нижней оценкой для $\underline{D}_I(\mu)$ получаем

$$\overline{D}_I(\mu) \leq \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Теперь для данного $b \in (0, \dim_B X)$ достаточно взять значение p , для которого $\dim_B X/(p+1) = b$, и мы получим меру μ с размерностью квантования $D_I(\mu) = b$.

Переходим к построению искомой меры μ_{bc} для $c \in [b, a]$. В работе [13] доказано, что в компакте X существует замкнутое подмножество F , для которого $\underline{\dim}_B F = 0$, $\overline{\dim}_B F = c$. Рассмотрим идемпотентную меру λ_F . В силу следствия 2.6

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = 0, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = c. \quad (10)$$

Таким образом, при $b = 0$ мера λ_F является искомой мерой μ_{bc} . Если $b = c = a$, то $\mu_{bc} = \lambda_X$.

При $b \in (0, a)$ положим

$$\mu_{bc} = \mu \oplus \lambda_F,$$

где μ — идемпотентная мера размерности $D_I(\mu) = b$, построенная выше. В силу следствия 2.8 и равенств (10) $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \leq c$. При этом $K(\mu_{bc}) \supset F$. Следовательно, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \geq \overline{\dim}_B F = c$ в силу предложения 2.5. Итак, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.

Согласно предложению 2.7

$$N(\mu_{bc}, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\lambda_F, \varepsilon).$$

Поскольку $\underline{D}_I(\lambda_F) = 0$, существует последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$, для которой

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N(\lambda_F, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = \underline{D}_I(\lambda_F) = 0.$$

При этом при малых ε_i выполняется неравенство $N(\mu, \varepsilon_i) > N(\lambda_F, \varepsilon_i)$, так как $D_I(\mu) = b > 0$. Следовательно,

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\mu_{bc}, 2\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2N(\mu, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = b.$$

Для доказательства обратного неравенства $\underline{D}_I(\mu_{bc}) \geq b$ достаточно дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве неравенства $\underline{D}_I(\mu) \geq \dim_B X/(p+1)$ для меры μ , с заменой μ на μ_{bc} . \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Graf S., Luschny H. Foundations of Quantization for Probability Distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p.
2. Иванов А. В. О размерности квантования вероятностных мер// Математический сборник. 2024. Т. 215. N 8. С. 41 – 51.
3. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шниз Г.Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход// Матем. заметки. 2001. Т. 69, вып. 5. С. 758 – 797.
4. Заричный М.М. Пространства и отображения идемпотентных мер// Известия РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 45 – 64.
5. Щепин Е.В. Функтормы и несчетные степени компактов// Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 3. С. 3 – 62.
6. Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces// Topology and its Applications. 2010. Vol. 157, Is.1. P. 136 – 144.
7. Ivanov A. V. On quantization dimensions of idempotent probability measures// Topology and its Applications. 2022. Vol. 306. 107931.
8. Ivanov A. V. On metrization of the idempotent measures functor and quantization dimensions// Topology and its Applications. 2023. No. 329. 108362.
9. Федорчук В.В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов// Известия АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 396 – 417.
10. Иванов А.В. О промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер// Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. No. 3. С. 139 – 148.
11. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations// Trans. of Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, No. 11. P. 4515 – 4543.
12. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
13. Иванов А.В. О промежуточных значениях емкостных размерностей// Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, No 3. С. 540 – 545.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru