4975_p

УДК 515.12

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ КВАНТОВАНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МЕР

А. В. Иванов

Аннотация. На пространстве $I(X)$ идемпотентных мер (мер Маслова), заданных на метрическом компакте X, вводится метрика ρ_I, определяющая метризацию функтора идемпотентных мер I. Для каждой меры $\mu \in I(X)$ по метрике ρ_I можно определить верхнюю и нижнюю размерности квантования этой меры, которые не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. Доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер: на любом метрическом компакте емкостной размерности $a < \infty$ для любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \le b \le c \le a$, существует идемпотентная мера, нижняя и верхняя размерности квантования которой равны b и c соответственно.

Ранее аналогичная теорема о промежуточных значениях была доказана автором для размерностей квантования вероятностных мер, идемпотентным аналогом которых являются меры Маслова.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования идемпотентных мер.

1. Введение

В работе речь пойдет о мерах (вероятностных и идемпотентных), заданных на метрическом компакте (X, ρ). *Квантованием* вероятностной (борелевской) меры называется ее приближение мерами с конечными носителями. В рамках теории квантования введено понятие размерности квантования $D(\mu)$ вероятностной меры μ (см. [1]). Величина $D(\mu)$ характеризует скорость возрастания числа точек в носителе ε-аппроксимации меры μ при $\varepsilon \to 0$. Эта скорость бывает «неустойчивой» и тогда рассматривают верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$ размерности квантования меры μ, связанные неравенством $\underline{D}(\mu) \le \overline{D}(\mu)$. Известно (см. [1]), что размерности квантования вероятностной меры (верхняя и нижняя) не превосходят соответствующих емкостных размерностей ее носителя. В работе [2] была доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования вероятностных мер.

Теорема 1.1 [2]. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт, емкостная размерность которого равна $a \le \infty$. Тогда для любых двух чисел b, c, удовлетворяющих неравенствам $0 \le b \le c \le a$, на X существует вероятностная мера μ_{bc}, для которой*

$$\underline{D}(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}(\mu_{bc}) = c.$$

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

© 1960 Иванов А. В.

Постановка вопроса о приближении предполагает наличие подходящей метрики на пространстве вероятностных мер, заданных на метрическом компакте (X, ρ). В качестве такой метрики в сформулированных выше утверждениях рассматривается расстояние Канторовича — Рубинштейна ρ_P, которое определяется по формуле

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \mathrm{Lip}_1(X)\}, \tag{1}$$

где $\mathrm{Lip}_1(X)$ — множество вещественных функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, и $\mu(f) = \int f \, d\mu$.

Главным результатом данной статьи является доказательство аналога теоремы 1.1 для идемпотентных мер. Основные понятия идемпотентного анализа кратко изложены в обзоре [3]. В идемпотентной математике аналогом вероятностных мер являются идемпотентные меры или меры Маслова (см. [4]), которые можно определить как нормированные функционалы $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, линейные относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X, наделенное слабой* топологией, всегда является компактом. Непрерывное отображение компактов $f : X \to Y$ естественно порождает отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$. Таким образом, конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений. Топологические свойства этого функтора исследованы в [4], где было доказано, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [5].

В работе [6] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определены непрерывные псевдометрики ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, по формуле (1) с заменой Lip_1 на Lip_n. С помощью этих псевдометрик мы вводим расстояние ρ_I на $I(X)$, отличное от метрик, рассмотренных в [6–8]. При этом метрики ρ_I задают метризацию функтора I по В. В. Федорчуку [9]. В метрическом пространстве $(I(X), \rho_I)$ определены размерности квантования идемпотентной меры μ (верхняя $\overline{D}_I(\mu)$ и нижняя $\underline{D}_I(\mu)$), которые (как и в случае вероятностных мер) не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. В работе доказано, что для размерностей квантования идемпотентных мер справедлива следующая теорема о промежуточных размерностях, аналогичная теореме 1.1. *Для любого метрического компакта (X, ρ) емкостной размерности $\dim_B X = a < \infty$ и любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \le b \le c \le a$, существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что*

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{b,c}) = c.$$

При доказательстве этой теоремы используется техника работы [10], где теорема о промежуточных размерностях была доказана при ограничении $b < a/2$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта) X через $C(X)$, как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на X; c_X — постоянная функция на X со значением $c \in \mathbb{R}$.

Определение 2.1 [4]. Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется *идемпотентной мерой* или *мерой Маслова*, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

1) $\mu(c_X) = c$;

2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;
3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

(Условие (1) является условием нормировки функционала μ, (2) и (3) — условия линейности относительно идемпотентных арифметических операций.)

Множество идемпотентных мер обозначается через $I(X)$. Любой функционал $\mu \in I(X)$ непрерывен на $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости и сохраняет порядок. Последнее означает, что если $f \leq g$ (т. е. $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in X$), то $\mu(f) \leq \mu(g)$. Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \to \mathbb{R}_{\max}$ по формуле $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leq 0_X,\ f(x) = 0\}$, где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную меру μ:

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

где $f \in C(X)$. (Формула (2) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X.) И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \to \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (2) определяет идемпотентную меру μ_g:

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [11]). Носителем меры μ называется множество

$$\operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

Множество $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ с тихоновской топологией. Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. В [12] показано, что для любого компакта X пространство $I(X)$ является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \to Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \to I(Y)$ по формуле: $I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$ для каждого $f \in C(Y)$. Таким образом, конструкция I является ковариантным функтором в категории Comp компактов и непрерывных отображений, который (как показано в [4]) является нормальным в смысле Е. В. Щепина (см. [5]).

В работе [6] для каждого $n \in \mathbb{N}$ на $I(X)$ определена непрерывная псевдометрика ρ_n по формуле

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \operatorname{Lip}_n(X)\}, \tag{3}$$

где $\operatorname{Lip}_n(X)$ — множество функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой n. В силу условия 2 определения 2.1 в формуле (3) достаточно рассматривать функции из $\operatorname{Lip}_n(X)$, принимающие нулевое значение в некоторой фиксированной точке x_0. Множество таких функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи это множество компактно. Таким образом, в формуле (3) sup можно заменить на max. Заметим, что $f \in \operatorname{Lip}_n(X)$ тогда и только тогда, когда $f/n \in \operatorname{Lip}_1(X)$.

В [8] для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел $\alpha = (n_i : i \in \mathbb{N})$ определена совместимая с топологией метрика $\rho_{I\alpha}$ на $I(X)$ по формуле

$$\rho_{I\alpha}(\mu, \nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{n_i}(\mu, \nu)}{n_i 2^i}. \tag{4}$$

Модифицируем формулу (4), заменив в ней ряд коэффициентов $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^i}$ рядом $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}$ (напомним, что его сумма равна $\pi^2/6$). В качестве α возьмем последовательность $(2^i : i\in\mathbb{N})$ и положим

$$\rho_I(\mu,\nu)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\rho_{2^i}(\mu,\nu)}{2^i\cdot i^2}. \tag{5}$$

Почти дословно повторив рассуждения, приведенные при доказательстве предложений 3.2 и 3.4 из [8], можно утверждать, что формула (5) определяет совместимую с топологией метрику ρ_I на $I(X)$ и метрики ρ_I задают метризацию функтора I в терминологии В. В. Федорчука.

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ множество $I_n(X)=\{\mu\in I(X) : |\operatorname{supp}(\mu)|\le n\}$ замкнуто в $I(X)$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(X)$ всюду плотно в $I(X)$ (см. [4]). Поэтому для любой меры $\mu\in I(X)$ и любого $\varepsilon>0$ определено натуральное число $N(\mu,\varepsilon)$, равное наименьшей мощности носителя ε-приближения меры μ по метрике ρ_I:

$$N(\mu,\varepsilon)=\min\{n : \rho_I(\mu, I_n(X))\le\varepsilon\}.$$

Если μ имеет бесконечный носитель, то $N(\mu,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon\to 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность квантования $D_I(\mu)$ меры μ:

$$D_I(\mu)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\mu,\varepsilon)}{-\log\varepsilon},$$

(если указанного предела не существует, то рассматриваются верхний и нижний пределы, и мы получаем верхнюю $\overline{D}_I(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}_I(\mu)$ размерности квантования μ).

Нам понадобится также понятие емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$) замкнутого подмножества F метрического компакта (X,ρ) (см. [12]). Для множества F и $\varepsilon>0$ через $N(F,\varepsilon)$ обозначим наименьшее число точек в ε-сети для F. Тогда

$$\overline{\dim}_B F=\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(F,\varepsilon)}{-\log\varepsilon},\quad \underline{\dim}_B F=\varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(F,\varepsilon)}{-\log\varepsilon}.$$

В случае совпадения этих пределов используют обозначение $\dim_B F$ и говорят о *емкостной размерности* F.

Предложение 2.2. *Для любой идемпотентной меры $\mu\in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\overline{D}_I(\mu)\le\overline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)),\quad \underline{D}_I(\mu)\le\underline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)).$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичных неравенств в [7, предложение 4.3 и следствие 4.4.].

Подмножество A метрического компакта (X,ρ) называется *ε-разделенным* ($\varepsilon>0$), если $\rho(x,y)>\varepsilon$ для любых двух различных точек $x,y\in A$.

Следующее предложение доказано в [10].

Предложение 2.3 [10, предложение 2.5]. *Пусть последовательность положительных чисел ε_n монотонно ($\varepsilon_n\ge\varepsilon_{n+1}$) сходится к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log\varepsilon_n}{\log\varepsilon_{n+1}}=1$, и пусть T_n — последовательность ε_n-разделенных ε_n-сетей в X. Тогда*

$$\overline{\dim}_B X=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|T_n|}{-\log\varepsilon_n},\quad \underline{\dim}_B X=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\log|T_n|}{-\log\varepsilon_n}.$$

Из доказанного в [10] предложения 2.1 следует

Предложение 2.4. *Если последовательность ε_n удовлетворяет условиям предложения* 2.3*, то*

$$\underline{D}_I(\mu) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log N(\mu,\varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{D}_I(\mu) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mu,\varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Пусть $\mu \in I(X)$ и d_μ — функция плотности меры μ. Положим

$$K(\mu) = \{x : d_\mu(x) = 0\}.$$

Предложение 2.5. *Для любой меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\underline{D}_I(\mu) \geq \underline{\dim}_B K(\mu), \quad \overline{D}_I(\mu) \geq \overline{\dim}_B K(\mu).$$

Доказательство. Опираясь на результаты [7, леммы 3.3, 4.5], легко проверить, что имеет место неравенство

$$N(\mu,\varepsilon) \geq N(K(\mu),\varepsilon),$$

из которого следует утверждение предложения. □

Для замкнутого подмножества F метрического компакта X определим идемпотентную меру λ_F по формуле

$$\lambda_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что мера λ_F имеет функцию плотности d_{λ_F}, которая тождественно равна нулю на F и принимает значение $-\infty$ во всех остальных точках X. Из предложений 2.2 и 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *Для любого замкнутого подмножества $F \subset X$*

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = \underline{\dim}_B F, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = \overline{\dim}_B F.$$

В пространстве $I(X)$ определено идемпотентное сложение $\oplus$. Для $\mu,\nu \in I(X)$ мера $\mu \oplus \nu \in I(X)$ определяется по формуле

$$(\mu \oplus \nu)(f) = \max\{\mu(f), \nu(f)\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что

$$d_{\mu\oplus\nu}(x) = \max\{d_\mu(x), d_\nu(x)\}.$$

Имеют место следующие утверждения, доказательства которых почти тождественны доказательствам соответствующих предложений из [7].

Предложение 2.7 [7, предложение 4.10]. *Для любых $\mu,\nu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$N(\mu \oplus \nu, 2\varepsilon) \leq N(\mu,\varepsilon) + N(\nu,\varepsilon).$$

Следствие 2.8 [7, следствие 4.11]. *Для любых мер $\mu,\nu \in I(X)$*

$$\overline{D}_I(\mu \oplus \nu) \leq \max\{\overline{D}_I(\mu), \overline{D}_I(\nu)\}.$$

3. Теорема о промежуточных значениях размерностей квантования

Пусть (X,ρ) — метрический компакт, $x\in X$ и $\varepsilon>0$. Замкнутый ε-шар точки x будем обозначать через $B(x,\varepsilon)=\{y:\rho(x,y)\le\varepsilon\}$.

Теорема 3.1. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт и $\dim_B X=a<\infty$. Тогда для любых чисел b,c, удовлетворяющих неравенствам $0\le b\le c\le a$, существует мера $\mu_{bc}\in I(X)$ такая, что $\underline{D}_I(\mu_{bc})=b$, $\overline{D}_I(\mu_{bc})=c$.*

Доказательство. Покажем вначале, что на X существует идемпотентная мера μ, для которой $D_I(\mu)=b$. Для $b=0$ в качестве μ можно взять любую меру с конечным носителем. При $b=a$ искомой мерой μ является мера λ_X в силу следствия 2.6.

В дальнейшем $b\in(0,a)$. Положим $\varepsilon_n=1/2^n$, $n\in\mathbb{N}$. Зафиксируем в X возрастающую (по включению) последовательность подмножеств $T_0,T_1,\dots,T_n,\dots$, где $|T_0|=1$ и каждое T_n при $n\in\mathbb{N}$ является ε_n-разделенной ε_n-сетью в X. Такую последовательность легко построить по индукции, дополняя на шаге $n+1$ уже построенное T_n до максимального ε_{n+1}-разделенного подмножества T_{n+1}, которое (в силу максимальности) будет ε_{n+1}-сетью.

Положим

$$b_n=2^{2^{np}},$$

где $n\in\mathbb{N}$ и $p>0$ — числовой параметр. Определим функцию $d:X\to\mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d(x)=0$ при $x\in T_0$; $d(x)=-b_n$ при $x\in T_n\setminus T_{n-1}$; $d(x)=-\infty$ при $x\notin\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}T_n$. Легко проверить, что функция d полунепрерывна сверху и $\max d=0$. Следовательно, d есть функция плотности некоторой идемпотентной меры μ. Покажем, что при изменении параметра p размерность квантования меры μ принимает все значения в диапазоне $(0,a)$.

Оценка снизу. Пусть мера ν имеет конечный носитель $\operatorname{supp}(\nu)=B$ и $|B|<|T_n|$. Множество T_n является ε_n-разделенным, следовательно, шары $B(x,\varepsilon_n/2)$, $x\in T_n$, попарно не пересекаются. Таким образом, существует точка $t\in T_n$, для которой $B(t,\varepsilon_n/2)\cap B=\varnothing$, и, значит, $\rho(t,B)>\varepsilon_n/2$. Поскольку функция $\rho(x,B)$ принадлежит $\operatorname{Lip}_1(X)$, для любого $i\in\overset{\circ}{N}$ получаем

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu)\ge|\mu(2^i\rho(x,B))-\nu(2^i\rho(x,B))|.$$

Множество B является носителем меры ν и $\rho(x,B))=0$ при $x\in B$. Следовательно, $\nu(2^i\rho(x,B))=0$. При этом $\mu(2^i\rho(x,B))\ge2^i\rho(t,B)+d(t)>2^i\varepsilon_n/2-b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu)\ge2^i\varepsilon_n/2-b_n.$$

Положим

$$i(n)=[2^{np}]+n+2.$$

Легко проверить, что для всех $i>i(n)$ выполняется неравенство

$$2^i\varepsilon_n/4>b_n.$$

Таким образом, при $i>i(n)$

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu)>2^i\varepsilon_n/4.$$

Следовательно,

$$\rho_I(\mu,\nu) \geq \frac{6}{\pi^2}\sum_{i>i(n)}\frac{\rho_{2^i}(\mu,\nu)}{2^i\cdot i^2} > \frac{6}{\pi^2}\frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Введем обозначение

$$\delta_n = \frac{6}{\pi^2}\frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Нетрудно показать, что последовательность δ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\varepsilon_n}{\log\delta_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Итак, доказано, что если носитель меры ν имеет мощность меньше $|T_n|$, то $\rho_I(\mu,\nu) > \delta_n$. Следовательно,

$$N(\mu,\delta_n) \geq |T_n|. \tag{6}$$

Из неравенства (6) и предложений 2.3, 2.4 получаем

$$\underline{D}_I(\mu) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{\log N(\mu,\delta_n)}{-\log\delta_n} \geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\log|T_n|}{-\log\varepsilon_n}\frac{\log\varepsilon_n}{\log\delta_n}\right) = \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Оценка сверху. Для каждого n определим функцию $d_n : X \to \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d_n(x) = d(x)$ при $x \in T_n$; $d_n(x) = -\infty$ при $x \notin T_n$. Очевидно, что d_n является функцией плотности некоторой меры ν_n с носителем $\operatorname{supp}(\nu_n) = T_n$. Для $i \in \mathbb{N}$ оценим величину

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu_n) = \max\{|\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)| : f \in \operatorname{Lip}_1(X)\}. \tag{7}.$$

Пусть g — функция из $\operatorname{Lip}_1(X)$, на которой достигается максимум правой части формулы (7), т. е.

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu_n) = |\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)|.$$

В силу формулы (2) для некоторой точки $y \in X$ имеет место равенство $\mu(2^i g) = 2^i g(y) + d(y)$. Если $y \in T_n$, то легко проверить, что $\mu(2^i g) = \nu_n(2^i g)$ и тогда $\rho_{2^i}(\mu,\nu_n) = 0$. Если $y \notin T_n$, то существует точка $t \in T_n$ такая, что $\rho(t,y) \leq \varepsilon_n$, поскольку T_n является ε_n-сетью. Имеем

$$2^i g(t) + d(t) \leq \nu_n(2^i g) < 2^i g(y) + d(y) = \mu(2^i g).$$

Следовательно,

$$|\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)| \leq 2^i|g(y) - g(t)| + d(y) - d(t).$$

При этом $|g(y) - g(t)| \leq \varepsilon_n$, $d(y) \leq -b_{n+1}$, $-d(t) \leq b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu,\nu_n) \leq 2^i\varepsilon_n - (b_{n+1} - b_n). \tag{8}$$

Пусть $i = j(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого правая часть формулы (8) больше нуля. Легко проверить, что

$$j(n) = [\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n + 1$$

(здесь мы считаем, что n достаточно велико, так, что $\log_2(b_{n+1} - b_n) > 0$).

Поскольку $\rho_{2^i}(\mu,\nu_n) \geq 0$, правая часть формулы (8) не может быть отрицательной. Отсюда следует, что при $i < j(n)$ случай $y \notin T_n$ заведомо исключен.

Таким образом, $\rho_{2^i}(\mu,\nu_n)=0$ при $i<j(n)$ и $\rho_{2^i}(\mu,\nu_n)\le 2^i\varepsilon_n$ при $i\ge j(n)$. Следовательно,

$$\rho_I(\mu,\nu_n)\le\frac{6}{\pi^2}\sum_{i=j(n)}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{i^2}\le\frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1}-b_n)]+n)}. \tag{9}$$

Положим

$$\xi_n=\frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1}-b_n)]+n)}.$$

Нетрудно доказать, что последовательность ξ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\varepsilon_n}{\log\xi_n}=\frac{1}{p+1}.$$

Из неравенства (9) следует, что

$$N(\mu,\xi_n)\le|T_n|,$$

откуда по аналогии с полученной выше нижней оценкой для $\underline{D}_I(\mu)$ получаем

$$\overline{D}_I(\mu)\le\frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Теперь для данного $b\in(0,\dim_B X)$ достаточно взять значение p, для которого $\dim_B X/(p+1)=b$, и мы получим меру μ с размерностью квантования $D_I(\mu)=b$.

Переходим к построению искомой меры μ_{bc} для $c\in[b,a]$. В работе [13] доказано, что в компакте X существует замкнутое подмножество F, для которого $\underline{\dim}_B F=0$, $\overline{\dim}_B F=c$. Рассмотрим идемпотентную меру λ_F. В силу следствия 2.6

$$\underline{D}_I(\lambda_F)=0,\quad \overline{D}_I(\lambda_F)=c. \tag{10}$$

Таким образом, при $b=0$ мера λ_F является искомой мерой μ_{bc}. Если $b=c=a$, то $\mu_{bc}=\lambda_X$.

При $b\in(0,a)$ положим

$$\mu_{bc}=\mu\oplus\lambda_F,$$

где μ — идемпотентная мера размерности $D_I(\mu)=b$, построенная выше. В силу следствия 2.8 и равенств (10) $\overline{D}_I(\mu_{bc})\le c$. При этом $K(\mu_{bc})\supset F$. Следовательно, $\overline{D}_I(\mu_{bc})\ge\overline{\dim}_B F=c$ в силу предложения 2.5. Итак, $\overline{D}_I(\mu_{bc})=c$.

Согласно предложению 2.7

$$N(\mu_{bc},2\varepsilon)\le N(\mu,\varepsilon)+N(\lambda_F,\varepsilon).$$

Поскольку $\underline{D}_I(\lambda_F)=0$, существует последовательность $\varepsilon_i\to 0$, для которой

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log N(\lambda_F,\varepsilon_i)}{-\log\varepsilon_i}=\underline{D}_I(\lambda_F)=0.$$

При этом при малых ε_i выполняется неравенство $N(\mu,\varepsilon_i)>N(\lambda_F,\varepsilon_i)$, так как $D_I(\mu)=b>0$. Следовательно,

$$\underline{D}_I(\mu_{bc})=\varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\mu_{bc},2\varepsilon)}{-\log\varepsilon}\le\varliminf_{i\to\infty}\frac{\log 2N(\mu,\varepsilon_i)}{-\log\varepsilon_i}=b.$$

Для доказательства обратного неравенства $\underline{D}_I(\mu_{bc})\ge b$ достаточно дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве неравенства $\underline{D}_I(\mu)\ge\dim_B X/(p+1)$ для меры μ, с заменой μ на μ_{bc}. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2000.

2. *Иванов А. В.* О размерности квантования вероятностных мер // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 8. С. 41–51.

3. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 758–797.

4. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 3. С. 45–64.

5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.

6. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology Appl. 2010. V. 157, N 1. P. 136–144.

7. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology Appl. 2022. V. 306. 107931.

8. *Ivanov A. V.* On metrization of the idempotent measures functor and quantization dimensions // Topology Appl. 2023. V. 329. 108362.

9. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.

10. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 139–148.

11. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Am. Math. Soc. 1999. V. 351, N 11. P. 4515–4543.

12. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2013.

13. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545.

Поступила в редакцию 1 декабря 2025 г.
После доработки 1 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru