УДК 512.54

СТРУКТУРА И АВТОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП

Е. А. Шапорина

Аннотация. Рассматриваются группы торических узлов, которые задаются двумя образующими и соотношением между ними. Для любой пары взаимно простых чисел показано, как представить такую группу в виде циклического расширения некоторой свободной группы. Это достигается путем поиска порождающего множества для свободной группы и поиска нужного автоморфизма. Полученный результат позволяет изучать автоморфизмы таких циклических расширений через изучение автоморфизмов групп торических узлов.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: свободная группа, расщепляемое циклическое расширение, группа внешних автоморфизмов, группа торического узла.

§ 1. Введение

Всюду в работе будем считать, что $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$.

Циклическим расширением свободной группы ранга n с помощью автоморфизма φ называется группа $F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z} \cong \langle F_n, t \mid tgt^{-1}=\varphi(g)\rangle$, где $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ — автоморфизм свободной группы, задающий это расширение.

Рассмотрим далее два циклических расширения с помощью автоморфизмов φ, ψ. Обозначим через $\widehat{a}$ сопряжение с помощью a; $\widehat{a}$ действует по правилу $g^a=aga^{-1}$.

Если

$$\varphi=\widehat{a}\circ\psi, \quad a\in F_n,$$

то соответствующие им циклические расширения

$$M_\varphi=\langle F_n,t \mid tgt^{-1}=\varphi(g)\rangle, \quad M_\psi=\langle F_n,s \mid sgs^{-1}=\psi(g)\rangle$$

связаны следующим образом:

$$M_\varphi=\langle F_n,t \mid tgt^{-1}=\varphi(g)\rangle=\langle F_n,t \mid tgt^{-1}=(\widehat{a}\circ\psi)(g)\rangle = \langle F_n,t \mid a^{-1}tgt^{-1}a=\psi(g)\rangle.$$

Значит, отображение $\theta: M_\varphi \to M_\psi$, тождественное на F_n и отправляющее t в as, продолжается до изоморфизма групп.

Поэтому можно рассматривать циклическое расширение свободной группы с помощью внешнего автоморфизма, определение которого, дано, например, в работе [1]:

Работа выполнена за счет гранта РНФ 24-11-00119.

Определение 1. Пусть F_n — свободная группа ранга n, $\Phi \in \mathrm{Out}(F_n)$. *Циклическим расширением* свободной группы ранга n с помощью внешнего автоморфизма Φ называется группа

$$M_\Phi = F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \xi(g)\rangle,$$

где $\xi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ — произвольный представитель Φ.

Циклические расширения свободных групп, также известные как *mapping tori*, представляют собой классический объект в геометрической и комбинаторной теории групп. Эти группы имеют вид $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ и используются для построения и изучения новых групп из заданной свободной.

Исследования mapping tori развиваются в нескольких основных направлениях.

С геометрической точки зрения важнейшие результаты получили Бествина и Фейн [2]. Они изучали циклические расширения свободных групп с точки зрения кривизны. В работе Бринкман [3] доказано, что автоморфизм φ свободной группы F_n является гиперболическим в смысле Громова, если он не имеет нетривиальных периодических классов сопряженности.

Алгебраические свойства mapping tori исследовались в целой серии работ. Например, Бринкман [4] изучил необходимые и достаточные условия существования расщепления над $\mathbb{Z}$ для циклического расширения $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ автоморфизмом φ свободной группы.

Пусть φ имеет полиномиальный рост. В работе [5] определяется, какие эпиморфизмы из циклического расширения на $\mathbb{Z}$ имеют конечно порожденное ядро, и вычисляется ранг ядра. Таким образом, авторы решают существенную задачу по описанию всех возможных способов представления M_φ в виде циклического расширения с помощью произвольного автоморфизма свободной группы. Это аналогично случаю групп трехмерных многообразий и отличается от случая циклического расширения с помощью автоморфизма экспоненциального роста.

Обзор современных результатов, касающихся mapping tori, можно найти в работе И. Каповича [6], где для широкого класса эндоморфизмов конечно порожденных свободных групп доказывается, что их циклические расширения являются гиперболическими тогда и только тогда, когда они не содержат подгрупп Баумслага — Солитера.

Изучение групп автоморфизмов циклических расширений является сложной и актуальной задачей. Одним из первых шагов в этом направлении стала работа [7], в которой было начато систематическое исследование группы внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(M_\varphi)$. В частности, в теореме 1.1 из [7] получено описание групп $\mathrm{Out}(M_\varphi)$ для всех циклических расширений свободной группы ранга 2 в зависимости от вида матрицы $\varphi^{ab} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Методы, разработанные в [7], оказались применимы и для групп более высокого ранга. Так, в 2021 г. [8] они были частично адаптированы для поиска копредставления группы внешних автоморфизмов группы Герстена

$$H = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba, c^t = ca^2\rangle,$$

и было показано, что $\mathrm{Out}(H) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

В 2024 г. [9] была изучена серия циклических расширений свободной группы ранга три

$$G_k = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba^k, c^t = c\rangle, \quad k \neq 0,$$

и получено описание группы $\mathrm{Out}(G_k)$.

В настоящей работе для изучения группы внешних автоморфизмов циклического расширения свободной группы задействован новый подход.

Определение 2. *Обобщенной группой Баумслага — Солитера* (или *GBS-группой*) называется конечно порожденная группа, которая действует на дереве так, что все стабилизаторы вершин и ребер — бесконечные циклические группы.

По теореме Басса — Серра (см., например, [10, 11]) такая группа представляется в виде фундаментальной группы графа групп.

Вместо изучения автоморфизмов M_Φ напрямую мы пользуемся результатом Левитта [1] о том, что всякому циклическому расширению свободной группы с помощью внешнего автоморфизма конечного порядка можно поставить в соответствие GBS-группу с нетривиальным центром (автоморфизмы которой изучались, например, в работе [12]).

В статье рассмотрена конкретная бесконечная серия GBS-групп — серия групп торических узлов для взаимно простых p и q (рис. 1)

$$T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle, \quad p > q > 1.$$

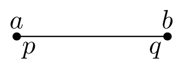

Рис. 1. Граф групп для $T_{p,q}$.

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$, *где* p *и* q *взаимно просты,* $p > q > 1$ *— группа торического узла. Тогда*

$$T_{p,q} \cong \mathbb{F}_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} \cong \langle \mathbb{F}_n, t \mid tgt^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $n = (p-1)(q-1)$, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(k_{ij})$ *при* $0 < i < q$, $0 < j < p$, *а* $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_n)$ *определяет* $\Phi \in \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ *и может быть задан на порождающих следующим образом.*

Случай 1. *При* $1 \le i < p-1$, $1 \le j < q-1$

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1} k_{(i+1)(j+1)} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

Случай 2. *При* $i = p-1$, $1 \le j < q-1$

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

Случай 3. *При* $j = q-1$, $1 \le i < p-1$

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1}.$$

Случай 4. *При* $i = p-1$, $j = q-1$

$$\xi : k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

В работе [12] (теорема C) доказано, что группа внешних автоморфизмов группы торического узла изоморфна циклической группе порядка 2. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* n, Φ *заданы, как в теореме* 1. *Тогда*

$$\mathrm{Out}(F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

§ 2 Основной результат

В 2015 г. Левитт [1] доказал следующий результат.

Утверждение 1 [4, утверждение 4.1]. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *G — GBS-группа с нетривиальным центром.*
2. *Существуют $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \mathrm{Out}(F_n)$ конечного порядка такие, что $G \cong M_\Phi$.*

Для дальнейших рассуждений отметим следующий факт (лемма 2.4 в [13]): $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$.

Ввиду того, что $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$, утверждение 1 применимо к $T_{p,q}$. Но из текста работы [1] неясно, как именно искать n и Φ для данной GBS группы с центром. Проделаем это для $T_{p,q}$.

Рассмотрим фактор-группу $T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Известно (см. утверждение 3.28 в [14]), что

$$T_{p,q}/Z(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q.$$

Далее построим эпиморфизм $\delta : \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \longrightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Подробнее о таком эпиморфизме можно посмотреть в [15, гл. 4, разд. 4.1]. Если $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p$, $\langle b \rangle = \mathbb{Z}_q$, то известен следующий факт (подробнее можно посмотреть, например, в [15, гл. 4, окончание разд. 4.1]:

$$\ker(\delta) \cong [\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q] \cong \langle [a^i, b^j],\ 0 < i < p,\ 0 < j < q \rangle \cong F(k_{ij}),$$

где $k_{ij} = [a^i, b^j]$.

Построим каноническую проекцию $\pi_1 : T_{p,q} \to T_{p,q}/Z(T_{p,q})$; прообраз относительно π_1 подгруппы $\ker(\delta) \cong F(k_{ij})$ также будет являться свободной подгруппой $F(k_{ij}),\ k_{ij} = [a^i, b^j],\ 0 < i < p,\ 0 < j < q$. но уже в $T_{p,q}$.

Доказательство теоремы 1. Выберем $ab \in T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Сопряжение с помощью элемента ab действует как автоморфизм порядка pq на подгруппе $\ker(\delta)$, а значит, и на соответствующей ей свободной подгруппе $T_{p,q}$. Обозначим такой автоморфизм через ξ и рассмотрим его действие на подгруппе $\ker(\delta)$ подробнее.

Случай 1. $1 \le i < p-1$, $1 \le j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{ij}^{ab} &= [a^i, b^j]^{ab} = (ab)[a^i, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^i b^j a^{-i} b^{-j} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{i+1}b^{-1}a^{-(i+1)})(a^{i+1}b^{j+1}a^{-(i+1)}b^{-(j+1)})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) \\ &= [a,b][a^{i+1},b][a^{i+1},b^{j+1}][a,b^{j+1}] = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}.$$

Остальные случаи рассматриваем аналогично.

Случай 2. $i = p-1$, $1 \le j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{(p-1)j}^{ab} &= [a^{(p-1)}, b^j]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^{(p-1)}b^j a^{-(p-1)} b^{-j} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) = [a,b][a,b^{j+1}]^{-1} = k_{11}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11}k_{1(j+1)}^{-1},$$

Случай 3. $j = q-1$, $1 \le i < p-1$. Имеем

$$k_{i(q-1)}^{ab} = [a^i, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^i, b^{(q-1)}](ab)^{-1} = (ab)a^i b^{(q-1)} a^{-i} b^{-(q-1)} (ab)^{-1}$$
$$= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{(i+1)}b^{-1}a^{-(i+1)}) = [a,b][a^{i+1},b]^{-1} = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}.$$

Поэтому

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}.$$

Случай 4. $i = p-1$, $j = q-1$. Имеем

$$k_{(p-1)(q-1)}^{ab} = [a^{(p-1)}, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^{(q-1)}](ab)^{-1}$$
$$= (aba^{-1}b^{-1}) = [a,b] = k_{11}.$$

Поэтому

$$\xi : \ k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

Теорема 1 доказана.

Пример. Рассмотрим группу узла трилистника $T_{3,2} = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ (рис. 2). Тогда

$$T_{3,2} \cong M_\Phi = \langle F_n, t \mid t^{-1}gt = \xi(g) \rangle,$$

где $n = 2$. Вычислим ξ.

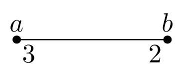

Рис. 2. Граф групп для $T_{3,2}$.

В обозначениях теоремы 1 порождающие свободной группы имеют такой вид: $k_{11} = [a,b]$, $k_{21} = [a^2, b]$. Заметим, что автоморфизм $\xi : x \mapsto x^{ab}$ действительно является автоморфизмом порядка 6, $k_{11} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1}$, $k_{21} \mapsto k_{11}$.

Применяя ξ шесть раз, получаем

$$k_{11} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1}k_{11}^{-1} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1}k_{11}^{-1}k_{21}k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{11}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]},$$

$$k_{21} \mapsto k_{11} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1} \mapsto k_{11}k_{21}^{-1}k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{21}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]}.$$

Значит, ξ^6 действует как сопряжение на порождающих, тем самым ξ представляет $\Phi \in \mathrm{Out}(\mathbb{F}_2)$, $|\Phi| = 6$.

Замечание 1. В работе [16] показано, что по заданным $\Phi \in \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, $|\Phi| < \infty$, $\Psi \in \mathrm{Out}(\mathbb{F}_m)$, $|\Psi| < \infty$ можно вычислить, когда $M_\Phi \cong M_\Psi$.

Тем самым можно установить, когда построенное циклическое расширение изоморфно данному (и когда это не так), и расширить изучаемый класс групп внешних автоморфизмов на классы изоморфных циклических расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Levitt G.* Generalized Baumslag–Solitar groups: rank and finite index subgroups // Ann. Inst. Fourier. 2015. V. 65, N 2. P. 725–762.

2. *Bestvina M., Feighn M.* A combination theorem for negatively curved groups // J. Differ. Geom. 1992. V. 35, N 1. P. 85–101.

3. *Brinkmann P.* Hyperbolic automorphisms of free groups // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 35, N 1. P. 1071–1089.

4. *Brinkmann P.* Splittings of mapping tori of free group automorphisms // Geom. Dedicata. 2002. V. 93, N 191–203. P. 1071–1089.

5. *Cashen C. H., Levitt G.* Mapping tori of free group automorphisms, and the Bieri–Neumann–Strebel invariant of graphs of groups // J. Group Theory. 2016. V. 19, N . P. 191–216.
6. *Kapovich I.* Mapping tori of endomorphisms of free groups of groups // Commun. Algebra. 2000. V. 28, N 6. P. 2895–2917.
7. *Bogopolski O. V., Martino A., Ventura E.* The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2 // Commun. Algebra. 2007. V. 35, N 5. P. 1675–1690.
8. *Дудкин Ф. А., Шапорина Е. А.* Автоморфизмы группы Герстена // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 514–524.
9. *Shaporina E. A.* Automorphisms of some cyclic extensions of free groups of rank three // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 2. P. 1400–1413.
10. *Bogopolski O. V.* Introduction to group theory. Zurich: EMS, 2008.
11. *Serre J.-P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
12. *Gilbert N. D., Howie J., Metaftsis V., Raptis E.* Tree actions of automorphism groups // J. Group Theory. 1999. V. 2, N 4. P. 375–389.
13. *Jones O.* Fixed points of automorphisms of torus Knot groups. arXiv:2309.10648. 2023.
14. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin; New York: de Gruyter, 2002.
15. *Magnus W., Karrass A., Solitar D.* Combinatorial group theory. New York: Dover Publications, 1976.
16. *Forester M.* Splittings of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 121. P. 43–59.

Поступила в редакцию 3 июня 2025 г.
После доработки 24 января 2026 г.
Принята к публикации 14 февраля 2026 г.

Шапорина Елизавета Алексеевна (ORCID 0009-0003-3039-2842)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
grambergea@gmail.com