4979_p

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

И. И. Матвеева, А. В. Хмиль

Аннотация. Рассматривается класс систем нелинейных разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Исследована асимптотическая устойчивость нулевого решения, получена оценка на множество притяжения нулевого решения и установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений систем на бесконечности. При получении результатов используется функционал Ляпунова — Красовского специального вида.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, периодические коэффициенты, функционал Ляпунова – Красовского, оценки решений, скорость стабилизации.

Посвящается нашему Учителю
профессору Демиденко Геннадию Владимировичу

§ 1. Введение

В работе рассматриваются системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах следующего вида:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \qquad (0.1)$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, т. е.

$$A(n+N) = A(n), \quad B(n+N) = B(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$\tau(n) \in \mathbb{N}$ — запаздывание, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$, $F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)$ — вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)\| \le q\|u_0\|^{1+\omega}, \quad u_j \in \mathbb{C}^m,\ j = 0, 1, \dots, \tau,\ n = 0, 1, \dots, \qquad (0.2)$$

$\omega, q > 0$. Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1) и получение оценок решений $\{x_n\}$, характеризующих скорость стабилизации при $n \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение є 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Хорошо известно, что разностные уравнения с запаздыванием используются при моделировании различных процессов в биологии, химии, экономике, социологии и др. Одной из важных является проблема устойчивости решений возникающих уравнений и систем. Последние 30 лет проводятся активные исследования этой проблемы для различных классов разностных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–14] и ссылки в этих работах). При изучении устойчивости применяются аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений (спектральные методы, метод неравенств типа Халаная, метод функций Ляпунова и функционалов Ляпунова — Красовского, построение решения в операторном виде, установление связей между обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с запаздыванием и т. д.). В настоящее время крайне мало работ, в которых рассматриваются нелинейные разностные уравнения с переменным запаздыванием.

Системы вида (0.1) с постоянными коэффициентами ($A(n) \equiv A$, $B(n) \equiv B$) рассматривались в [15, 16]. С использованием функционала Ляпунова — Красовского специального вида в [15] исследовалась устойчивость нулевого решения в линейном случае ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$), в [16] — в нелинейном случае. Системы вида (0.1) с N-периодическими коэффициентами в линейных членах рассматривались в [17, 18]. В [17] изучалась асимптотическая устойчивость нулевого решения линейных систем ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$), в [18] — квазилинейных систем ($\omega = 0$). В данной работе изучается более сложный нелинейный случай ($\omega > 0$). При проведении исследований мы будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$v(n, x) = \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{0.3}$$

где $H(n) = H(n+N)$, $K_0, K_1, \dots, K_{\tau-1}$ — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был предложен в [17] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad s \in [0, \tau],$$

введенного в [19] для исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах [20]

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с T-периодическими коэффициентами.

Используя функционал (0.3), мы установим оценку на множество притяжения нулевого решения нелинейных систем вида (0.1) и получим оценку на скорость стабилизации решений этих систем на бесконечности. В первом параграфе содержатся вспомогательные результаты, которые будут использоваться во втором параграфе при получении основных результатов.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{1.1}$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$ — запаздывание, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$. Очевидно, эту систему можно записать в виде следующей системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.2}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при } j = \tau(n), \\ 0 & \text{при } j \ne \tau(n). \end{cases} \tag{1.3}$$

При изучении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2) в [17] использовался функционал Ляпунова — Красовского (0.3). Были установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2), а следовательно, и (1.1), при этом также получена оценка на скорость убывания решения $\{x_n\}$ системы (1.1) с заданными начальными условиями

$$x_0, \ x_{-1}, \dots , x_{-\tau} \tag{1.4}$$

при $n \to \infty$. Приведем соответствующие результаты из работы [17].

Всюду далее $S > 0$ $(S < 0)$ означает, что S — эрмитова положительно (отрицательно) определенная матрица.

Теорема 1 [17]. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы*

$$H(n), \quad K_j, \quad j = 0, 1, \dots, \tau,$$

такие, что

$$H(n) = H(n + N), \quad \Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ B_1^*(n)H(n+1)A(n) & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)H(n+1)A(n) & B_\tau^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$
$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$
$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)H(n+1)B_\tau(n) - K_\tau,$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Из условий на $A(n)$, $B(n)$, $\tau(n)$ вытекает, что количество различных матриц $C(n)$ конечно. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\langle C(n)\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix} \right\rangle \ge c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|u_i\|^2, \quad u_i \in \mathbb{C}^m. \tag{1.6}$$

Теорема 2 [17]. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* $\varkappa_j \in (0,1)$, $j = 1,2,\dots,\tau$, *такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + \varkappa_i K_{i-1} \le 0,\ i = 1,\dots,\tau-1, \quad -\Delta_\tau + \varkappa_\tau K_{\tau-1} \le 0. \tag{1.7}$$

Тогда для решения начальной задачи (1.1), (1.4) *справедлива оценка*

$$\|x_n\| \le \left[(h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{m-1} (1-\varepsilon_j)\varepsilon^k v(0,x) \right]^{1/2}, \tag{1.8}$$

$$n = kN + m, \quad m = 1,\dots,N, \quad k = 0,1,\dots,$$

где $h_1(n) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(n)$,

$$v(0,x) = \langle H(0)x_0, x_0\rangle + \sum_{j=-\tau}^{-1} \langle K_{-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_j = \min\left\{ \varkappa_1,\dots,\varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H(j)\|} \right\}, \quad 0 < \varepsilon_j < 1, \quad \varepsilon = \prod_{j=0}^{N-1} (1-\varepsilon_j). \tag{1.10}$$

В предположении, что выполнены условия теоремы 1, с использованием функционала (0.3) в следующем параграфе сформулируем и докажем основные результаты работы.

§ 2. Основные результаты

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений вида (0.1). Поскольку запаздывание ограничено, систему (0.1) можно записать в виде

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j} + F(n, x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}), \quad n = 0,1,\dots, \tag{2.1}$$

где матрицы $B_j(n)$ определены в (1.3). Рассмотрим для системы (2.1) начальную задачу с заданными начальными условиями

$$x_0,\ x_{-1},\dots,x_{-\tau}, \quad x_j \in \mathbb{C}^n. \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1. Для формулировки результатов введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = 1 - \varepsilon_0 &+ 2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ &+ q^2\|H(1)\| \left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(0))^{-1-\omega}(v(0,x))^{\omega}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j = 1 - \varepsilon_j &+ 2q\|H(j+1)\|\|A(j)\|(h_1(j))^{-1-\omega/2}M_{j-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ &+ q^2\|H(j+1)\| \left(\frac{\|H(j+1)\|\|B(j)\|^2}{c_1} + 1 \right) \\ &\times (h_1(j))^{-1-\omega}M_{j-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}, \quad j = 1,2\dots, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$M_j = \prod_{k=0}^{j} \Lambda_k, \quad M = M_{N-1} = \Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1}, \tag{2.5}$$

где $h_1(j) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(j)$, c_1, $v(0,x)$, ε_j определены в (1.6), (1.9), (1.10) соответственно. Поскольку $0 < \varepsilon_j < 1$ и $v(0,x) \ge 0$, то $\Lambda_j > 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво и множество*

$$\mathscr{E} = \{x_0, \dots, x_{-\tau} \in \mathbb{C}^m : M < 1\} \tag{2.6}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (2.1), (2.2) *с начальными условиями из* $\mathscr{E}$ *имеет место оценка*

$$\|x_n\| \le \left[(h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{m-1} \Lambda_j M^k v(0,x) \right]^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$n = kN + m, \quad m = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — решение начальной задачи (2.1), (2.2). Рассмотрим на этом решении функционал $v(n,x)$, определенный в (0.3). В силу условий на $H(n)$ и $\{K_j\}$ при $\{x_n\} \neq 0$ имеем $v(n,x) > 0$.

Рассмотрим разность $v(n+1,x) - v(n,x)$, $n = 0, 1, \dots$. Используя обозначения для матриц Δ_j, получим

$$\begin{aligned} v(n+1,x) - v(n,x) &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle \\ &\quad + \sum_{j=n+1-\tau}^{n} \langle K_{n-j}x_j, x_j\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle \\ &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \langle K_0 x_n, x_n\rangle \\ &\quad - (\langle K_0 x_{n-1}, x_{n-1}\rangle - \langle K_1 x_{n-1}, x_{n-1}\rangle) - \cdots \\ &\quad - (\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle) - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\ &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle \\ &\quad + \langle K_0 x_n, x_n\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\{x_n\}$ является решением задачи (2.1), (2.2), имеем

$$\begin{aligned} v(n+1,x) - v(n,x) &= \langle A^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_n\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \langle K_0 x_n, x_n\rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\tau}\langle A^*(n)H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_{n-j}\rangle \\ &\quad + \sum_{j,i=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)H(n+1)B_i(n)x_{n-i}, x_{n-j}\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle \\ &\quad + 2\sum_{j=1}^{\tau}\mathrm{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle \\ &\quad + \langle H(n+1)F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle. \end{aligned}$$

Используя матрицу $C(n)$, заданную в (1.5), разность $v(n+1,x) - v(n,x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v(n+1,x) - v(n,x) &= -\left\langle C(n)\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}\right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle + W(n,x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$
\begin{aligned}
W(n,x) = 2\,\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n, F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle \\
+ 2\sum_{j=1}^{\tau} \mathrm{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle \\
+ \langle H(n+1)F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}), F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle.
\end{aligned}
$$

Оценим каждое из слагаемых в (2.8). По условию теоремы все матрицы $C(n)$ являются положительно определенными, при этом выполнена оценка (1.6). Поскольку $H(n) = H^*(n) > 0$, то

$$
c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2 \geq \frac{c_1}{\|H(n)\|}\langle H(n)x_n, x_n\rangle + c_1 \sum_{i=1}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2. \tag{2.9}
$$

Из условий (1.7) вытекает неравенство

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle + \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\
\geq \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle + \varkappa_\tau \langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

В силу (0.2) имеем

$$
\begin{aligned}
|W(n,x)| \leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|^{2+\omega} \\
+ \left[2q\|H(n+1)\|\|x_n\|^{1+\omega}\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H(n+1)\|\|x_n\|^{2+2\omega}\right].
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма. *Рассмотрим квадратичную форму*

$$
U = u_0(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_\tau u_\tau), \quad u_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i \geq 0.
$$

Для любых $\beta_i > 0$, $i = 1,\dots,\tau$, имеет место неравенство

$$
U \leq \beta_0 u_0^2 + \beta_1 u_1^2 \dots + \beta_\tau u_\tau^2, \tag{2.12}
$$

где

$$
\beta_0 \geq \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} + \dots + \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau}.
$$

Введем следующие обозначения:

$$
u_0 = \|x_n\|^{1+\omega}, \quad u_i = \|x_{n-i}\|,
$$

$$
\alpha_0(n) = q^2\|H(n+1)\|, \quad \alpha_i(n) = 2q\|H(n+1)\|\|B_i(n)\|, \quad i = 1,\dots,\tau.
$$

Применим лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках в (2.11), выбирая

$$
\beta_i = c_1, \quad i = 1,\dots,\tau, \quad \beta_0(n) = \alpha_0(n) + \frac{1}{4c_1}\sum_{i=1}^{\tau}\alpha_i^2(n).
$$

Тогда

$$2q\|H(n+1)\|\|x_n\|^{1+\omega}\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\|+q^2\|H(n+1)\|\|x_n\|^{2+2\omega}$$
$$\leq q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\|x_n\|^{2+2\omega}+c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

Следовательно,

$$|W(n,x)|\leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|^{2+\omega}$$
$$+q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\|x_n\|^{2+2\omega}+c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

В силу положительной определенности матриц $H(n)$, K_j справедливы неравенства

$$v(n,x)\geq\langle H(n)x_n,x_n\rangle\geq h_1(n)\|x_n\|^2,$$

где $h_1(n)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(n)$. Следовательно,

$$|W(n,x)|\leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\left(h_1(n)\right)^{-1-\alpha}\left(v(n,x)\right)^{1+\alpha}$$
$$+q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\left(h_1(n)\right)^{-1-2\alpha}\left(v(n,x)\right)^{1+2\alpha}$$
$$+c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2, \qquad (2.13)$$

где $\alpha=\omega/2$.

Учитывая оценки (2.9), (2.10), (2.13), из (2.8) получаем

$$0\leq v(n+1,x)\leq v(n,x)-\frac{c_1}{\|H(n)\|}\langle H(n)x_n,x_n\rangle$$
$$-\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j,x_j\rangle-\varkappa_\tau\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle$$
$$+\ 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^{1+\alpha}$$
$$+q^2||H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\left(h_1(n)\right)^{-1-2\alpha}\left(v(n,x)\right)^{1+2\alpha}.$$

Используя ε_n, определенное в (1.10), имеем

$$v(n+1,x)\leq v(n,x)-\varepsilon_n\left(\langle H(n)x_n,x_n\rangle+\sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle K_{n-j-1}x_j,x_j\rangle\right)$$
$$+2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^{1+\alpha}$$
$$+q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(n))^{-1-2\alpha}(v(n,x))^{1+2\alpha}.$$

В силу определения функционала $v(n,x)$ в (0.3) получаем

$$v(n+1,x) \le \Bigg(1-\varepsilon_n+2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^\alpha \\ + q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right) \\ \times (h_1(n))^{-1-2\alpha}(v(n,x))^{2\alpha}\Bigg)v(n,x), \quad n=0,1,\dots. \tag{2.14}$$

Пусть $n=0$. Тогда

$$v(1,x) \le \Lambda_0 v(0,x),$$

где Λ_0 определено в (2.3).

Пусть $n=1$. Тогда в силу (2.14) с учетом последнего неравенства получаем

$$v(2,x) \le \Bigg(1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\alpha}(v(1,x))^\alpha \\ + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-2\alpha}(v(1,x))^{2\alpha}\Bigg)v(1,x) \\ \le \Lambda_0\Bigg(1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\alpha}\Lambda_0^\alpha(v(0,x))^\alpha \\ + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-2\alpha}\Lambda_0^{2\alpha}(v(0,x))^{2\alpha}\Bigg)v(0,x).$$

Следовательно, в силу определения Λ_1 в (2.4) имеем

$$v(2,x) \le \Lambda_0\Lambda_1 v(0,x).$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$v(n,x) \le \prod_{j=0}^{n-1}\Lambda_j v(0,x) = M_{n-1}v(0,x), \quad n=1,2,\dots, \tag{2.15}$$

где Λ_j и M_j определены в (2.4) и (2.5) соответственно.

Покажем, что

$$\Lambda_{lN+j} < \Lambda_j, \quad j=0,1,\dots,N-1,\ l=1,2,\dots. \tag{2.16}$$

Рассмотрим Λ_N. В силу периодичности матриц $A(n)$, $B(n)$, $H(n)$ получаем

$$\Lambda_N = 1-\varepsilon_0+2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}M_{N-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}M_{N-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.$$

По определению $M_{N-1}=\Lambda_0\Lambda_1\dots\Lambda_{N-1}=M$. Поскольку в силу условий теоремы $M<1$, то

$$\Lambda_N < 1-\varepsilon_0+2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}(v(0,x))^{\omega} = \Lambda_0.$$

Рассмотрим Λ_{N+1} и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{N+1} &= 1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_N^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &\quad + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_N^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$M_N=(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N=M\Lambda_0<\Lambda_0=M_0.$$

Следовательно, $\Lambda_{N+1}<\Lambda_1$. Аналогично в силу периодичности

$$\begin{aligned}\Lambda_{N+2} &= 1-\varepsilon_2+2q\|H(3)\|\|A(2)\|(h_1(2))^{-1-\omega/2}M_{N+1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &\quad + q^2\|H(3)\|\left(\frac{\|H(3)\|\|B(2)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(2))^{-1-\omega}M_{N+1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$M_{N+1}=(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1}=M\Lambda_0\Lambda_1<\Lambda_0\Lambda_1=M_1,$$

то $\Lambda_{N+2}<\Lambda_2$. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$\Lambda_{N+j}<\Lambda_j,\quad j=0,1,\dots,N-1.$$

Рассмотрим теперь Λ_{2N} и воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N} &= 1-\varepsilon_0+2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}M_{2N-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &\quad + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}M_{2N-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Учитывая предыдущие оценки, имеем

$$\begin{aligned}M_{2N-1} &= (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1}\cdots\Lambda_{2N-1}\\ &\quad <(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})=M^2<1.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda_{2N}<\Lambda_0$. Рассмотрим Λ_{2N+1} и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N+1} &= 1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_{2N}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &\quad + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_{2N}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}M_{2N} &= (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_N\Lambda_{N+1}\cdots\Lambda_{2N-1})\Lambda_{2N}\\ &\quad <(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_0=M^2\Lambda_0<\Lambda_0=M_0,\end{aligned}$$

то $\Lambda_{2N+1}<\Lambda_1$. Повторяя такие же рассуждения, получаем

$$\Lambda_{2N+j}<\Lambda_j,\quad j=0,1,\dots,N-1.$$

Аналогичным образом приходим к неравенствам

$$\Lambda_{lN+j}<\Lambda_j,\quad j=0,1,\dots,N-1,\ l=1,2,\dots,$$

что дает (2.16). Тогда при $n = kN + m$, $m = 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots$, получаем

$$M_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1} \Lambda_j < \left(\prod_{j=0}^{N-1} \Lambda_j \right)^k \Lambda_{kN} \Lambda_{kN+1} \ldots \Lambda_{kN+m-1} < M^k \Lambda_0 \Lambda_1 \ldots \Lambda_{m-1}.$$

Следовательно, из (2.15) имеем

$$v(n, x) \le \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_{m-1} M^k v(0, x), \quad n = kN + m, \ m = 1, \ldots, N, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Используя определение функционала (0.3), для решения задачи (2.1), (2.2) получаем

$$\|x_n\|^2 \le (h_1(n))^{-1} \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_{m-1} M^k v(0, x),$$

где $n = kN + m$, $m = 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots$. Поскольку по условию теоремы $M < 1$, нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво и для решения задачи (2.1), (2.2) с начальными данными из $\mathscr{E}$ справедлива оценка (2.7).

Теорема доказана.

Замечание. Если $q = 0$, то $\Lambda_j = 1 - \varepsilon_j < 1$ и, следовательно, $M < 1$. Тогда оценка (2.7) переходит в оценку (1.8) без каких-либо ограничений на начальные данные; т. е. результат теоремы 3 переходит в результат теоремы 2, полученный в [17].

Отметим, что условия асимптотической устойчивости формулируются в виде легко проверяемых неравенств, а числовые характеристики множества притяжения и скорости убывания решений вычисляются конструктивно. Это дает возможность применять полученные результаты на практике при изучении устойчивости решений конкретных систем уравнений вида (0.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gyori I., Pituk M.* Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 2. P. 376–392.

2. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. 1995. V. 1, N 2. P. 151–161.

3. *Yu J. S.* Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.

4. *Gyori I., Hartung F.* Stability in delayed perturbed differential and difference equations // Fields Institute Communications. 2001. V. 29. P. 181–194.

5. *Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K.* Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 535849.

6. *Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. 2009. Article ID 104310.

7. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Исследование абсолютной устойчивости разностных систем с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. вычисл. и прикл. математики. 2010. № 4. С. 118–126.

8. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30–41.

9. *Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., Dimitrijevic N.* Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach // Intern. J. Computers, Communications & Control. 2012. V. 7, N 4. P. 775–783.

10. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2016. № 7. С. 66–82.

11. *Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Article ID 9703919.

12. *Ngoc P. H. A., Trinh H., Hieu L. T., Huy N. D.* On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays // Math. Nachrichten. 2019. V. 292, N 4. P. 859–870.

13. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: Stability and control. Singapore: Springer, 2019.

14. *Diblik J.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals // Appl. Math. Letters. 2023. V. 142. Article ID 108654.

15. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 50–62.

16. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 31–44.

17. *Demidenko G. V., Baldanov D. Sh.* Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy — A Liber Amicorum to Professor Godunov (Editors: Demidenko G. V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.) Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 93–100.

18. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 37–48.

19. *Демиденко Г. В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

20. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

Поступила в редакцию 14 февраля 2026 г.
После доработки 14 февраля 2026 г.
Принята к публикации 10 марта 2026 г.

Матвеева Инесса Изотовна (ORCID 0000-0002-9390-2702)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`matveeva.ii@yandex.ru`

Хмиль Арсений Владимирович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`khmilarseniy@mail.ru`