

УДК 512.54+512.552

## Аutomорфизмы групп Шевалле типа $G_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой

В. В. Киракосян

Киракосян Вазген Валерикович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Ленинские горы, 1, Москва 119991

vazgen.kirakosyan@gmail.com

### Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа  $G_2$  над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.

**Ключевые слова:** группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

### Abstract

In this paper we prove that every automorphism of a Chevalley group of type  $G_2$  over a commutative local ring without  $1/3$  is standard; that is, it is a composition of a ring automorphism, a graph automorphism, and an inner automorphism.

**Keywords:** Chevalley group, automorphism, local ring.

## Введение

Цель данной работы — доказать, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа  $G_2$  над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. Отметим, что в работе

мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь статьям [1–3], в которых доказан аналогичный результат для других групп Шевалле.

Заметим, что для системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  существует лишь одна решётка весов, которая является одновременно универсальной и присоединённой, поэтому для каждого кольца  $R$  существует единственная группа Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  — это  $G(R) = G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ . Более того, над локальными кольцами универсальные группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (то есть нам известны образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [4] для конечного случая и Дж. Хамфри [5] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [6], Р. Картера и Ю Чена [7], Ю Чена [8–12], Э. Абе [13], А. Клячко [14].

Аналог теоремы 2 для систем корней типов  $\mathbf{A}_\ell$ ,  $\mathbf{D}_\ell$  и  $\mathbf{E}_\ell$  был получен Е. И. Буниной в [15], в работе [16] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с  $1/2$ . Подобная теорема для локальных колец без  $1/2$  была доказана в [1]. Для систем корней типов  $\mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{G}_2$  она получена в [17], однако в этой работе для системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В статьях [2, 3] данный результат доказывается для системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  уже без требования обратимости двойки. В [18] Е. И. Буниной была доказана аналогичная теорема для системы корней типа  $\mathbf{F}_4$  при условии обратимости двойки. В [19] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединённых групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Для системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  в случае локального кольца от требования обратимости тройки также удаётся отказаться, этому и посвящена данная работа.

# 1. Определения и формулировки основных теорем

**Определение 1.** Подмножество  $\Phi$  евклидова пространства  $\mathbb{E}$  называется *системой корней* в  $\mathbb{E}$ , если выполнены следующие условия:

- 1) множество  $\Phi$  конечно, порождает  $\mathbb{E}$  и не содержит  $0$ ;
- 2) если  $\alpha \in \Phi$ , то из кратных корня  $\alpha$  в  $\Phi$  содержатся только  $\pm\alpha$ ;
- 3) если  $\alpha \in \Phi$ , то *отражение*  $w_\alpha$  относительно гиперплоскости, ортогональной  $\alpha$ , выражаемое формулой

$$w_\alpha\beta = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

сохраняет множество  $\Phi$  инвариантным; коэффициенты, участвующие в формуле, обозначаются через

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

и называются *числами Картана*;

- 4) если  $\alpha, \beta \in \Phi$ , то  $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 2.** Подмножество  $\Delta$  в  $\Phi$  называется *базисом* (а входящие в него корни *простыми*), если

- 1)  $\Delta$  является базисом в  $\mathbb{E}$ ;
- 2) каждый корень  $\beta \in \Phi$  представляется в виде

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha,$$

где коэффициенты  $k_\alpha$  целые и все одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все коэффициенты  $k_\alpha$  неотрицательны (соответственно все  $k_\alpha$  неположительны), то корень  $\beta$  называется *положительным* (соответственно *отрицательным*).

**Определение 3.** Подгруппа (конечная)  $W$  в  $GL(\mathbb{E})$ , порождённая всеми отражениями  $w_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ , называется *группой Вейля* системы корней  $\Phi$ .

Группа Вейля играет исключительно важную роль в изучении систем корней. Среди свойств группы Вейля выделим два важных свойства, которые в дальнейшем будем использовать: группа Вейля в действительности порождается лишь простыми отражениями  $w_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , и она транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Подробные сведения о системах корней, их типах и свойствах можно найти, например, в [20, 21].

Зафиксируем неприводимую систему корней  $\Phi$ , имеющую тип  $\mathbf{G}_2$ . Данная система корней имеет ранг 2, состоит из 6 положительных и 6 отрицательных корней, и в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — стандартный ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^3$ . Пронумеруем положительные корни системы  $\mathbf{G}_2$  следующим образом (первые два корня являются простыми):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -2e_1 + e_2 + e_3, \\ \alpha_2 &= e_1 - e_2; \\ \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 = -e_1 + e_3, \\ \alpha_4 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 = -e_2 + e_3, \\ \alpha_5 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 = e_1 - 2e_2 + e_3, \\ \alpha_6 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли  $\mathcal{L}$  типа  $\mathbf{G}_2$  с картановской подалгеброй  $\mathcal{H}$  (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [21]). В алгебре Ли  $\mathcal{L}$  можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi; h_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$$

таким образом, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов этого же базиса, а именно:

- 1)  $[h_i, h_j] = 0, 1 \leq i, j \leq 2$ ;
- 2)  $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha, 1 \leq i \leq 2, \alpha \in \Phi$ ;
- 3)  $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$  является целочисленной линейной комбинацией векторов  $h_1, h_2$ ;
- 4) если  $\alpha, \beta$  — линейно независимые корни и  $\alpha + \beta \notin \Phi$ , то  $[x_\alpha, x_\beta] = 0$ ;
- 5) если  $\alpha + \beta \in \Phi$ , то  $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$ , причём  $N_{\alpha\beta} = \pm(r + 1)$ , где  $r$  — максимальное целое число, для которого  $\beta - r\alpha \in \Phi$ . Существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант  $N_{\alpha\beta}$  (подробнее см. в приложении).

**Определение 4.** Если  $x \in \mathcal{L}$ , то отображение

$$\text{ad } x: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad \text{ad } x(y) = [x, y]$$

является эндоморфизмом пространства  $\mathcal{L}$  и, более того, (внутренним) дифференцированием алгебры Ли  $\mathcal{L}$ . Отображение

$$\text{ad}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}), \quad \text{ad}(x) = \text{ad } x$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединённым представлением* алгебры Ли  $\mathcal{L}$ .

**Замечание 1.** Присоединённое представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который, разумеется, является абелевым идеалом и поэтому тривиален.

Введём обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединённом представлении:

$$X_\alpha = \text{ad } x_\alpha; \quad H_i = \text{ad } h_i.$$

**Определение 5.** Ассоциативное кольцо  $R$  с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца  $R$  образуют идеал.

**Замечание 2.** Мы будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой и будем активно пользоваться тем фактом, что в этом случае двойка обратима, так как иначе в силу локальности кольца и равенства  $3 - 2 = 1$  единица была бы необратима, что неверно.

Возьмём произвольное коммутативное локальное кольцо и построим элементарную присоединённую группу Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  над этим кольцом (см. [22]). Для удобства кратко воспроизведём построение здесь (см. также приложение).

В базисе Шевалле алгебры Ли  $\mathcal{L}$  все операторы  $X_\alpha^k/k!$  для  $\alpha \in \Phi$  и  $k \in \mathbb{N}$  записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом  $R$  с единицей. То есть рассмотрим матрицы размера  $n \times n$  над  $R$  (в нашем случае  $n = \dim \mathcal{L} = 14$ ), и указанные матрицы  $X_\alpha^k/k!$  при  $\alpha \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  вложим в  $M_n(R)$ .

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля  $R^n$  вида

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2 X_\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{t^k X_\alpha^k}{k!} + \dots, \quad \alpha \in \Phi, t \in R.$$

Так как все матрицы  $X_\alpha$  nilпотентны, такой ряд всегда конечен.

Очевидно, что для таких экспонент выполнено следующее простое, но важное соотношение:

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t + u). \tag{1}$$

**Определение 6.** Автоморфизмы  $x_\alpha(t)$  называются *элементарными корневыми элементами*.

**Определение 7.** Подгруппа в  $\text{Aut}(R^n)$ , порождённая всеми автоморфизмами  $x_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $t \in R$ , называется *элементарной присоединённой группой Шевалле* и обозначается  $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ .

**Определение 8.** В элементарной группе Шевалле определим также следующие важные элементы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $t \in R^*$ ;  $\omega_\alpha = w_\alpha(1)$ ;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $t \in R^*$ .

Как уже было отмечено во введении, над локальными кольцами для системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  группа Шевалле  $G(R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R)$  совпадает со своей элементарной подгруппой  $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ , поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле в общем смысле.

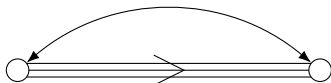
Определим стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле  $G(R)$  и ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

**Определение 9.** Пусть  $\rho: R \rightarrow R$  — автоморфизм кольца  $R$ . Отображение  $(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij}))$  является автоморфизмом группы  $G(R)$ , который обозначается той же буквой  $\rho$  и называется *кольцевым автоморфизмом* группы  $G(R)$ . Заметим, что для всех  $\alpha \in \Phi$ ,  $t \in R$  элемент  $x_\alpha(t)$  отображается в  $x_\alpha(\rho(t))$ .

**Определение 10.** Предположим, что  $R$  — совершенное кольцо характеристики 3, то есть  $3 = 0$  и эндоморфизм Фробениуса  $F(t) = t^3$  является автоморфизмом  $R$ . Для каждого корня  $\alpha \in \Phi$  положим  $\lambda(\alpha) = 1$ , если  $\alpha$  — длинный корень, и  $\lambda(\alpha) = 3$ , если  $\alpha$  — короткий корень. Пусть  $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$  — перестановка системы корней типа  $\mathbf{G}_2$ , которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение  $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$  является изоморфизмом систем корней; такая  $\delta$  определена однозначно, при этом  $\delta^2 = 1$  и  $\delta$  действует на множестве простых корней следующим образом:  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ . Тогда знаки структурных констант  $N_{\alpha\beta}$  могут быть выбраны таким образом, что отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi, \quad t \in R$$

однозначно определяет автоморфизм группы  $G(R)$ , который обозначается той же буквой  $\delta$  и называется *диаграммным (графовым) автоморфизмом* группы  $G(R)$  (см. [22, 23]).



**Замечание 3.** Очевидно, кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

**Определение 11.** Пусть  $g \in G(R)$ . Сопряжение группы  $G(R)$  с помощью элемента  $g$  является автоморфизмом группы  $G(R)$ , который обозначается  $i_g$  и называется *внутренним автоморфизмом* группы  $G(R)$ .

Эти три типа автоморфизмов называются *стандартными*. К стандартным также относятся *центральные* автоморфизмы, однако в рассматриваемом нами случае системы корней типа  $\mathbf{G}_2$  таких нетривиальных нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы  $G(R)$  *стандартен*, если он является композицией трёх введённых типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

**Определение 12.** Пусть  $V$  — пространство представления группы  $G(R)$ ,  $C \in \text{GL}(V)$  — матрица, нормализующая группу  $G(R)$ :

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение  $x \mapsto Cx C^{-1}$  является автоморфизмом группы  $G(R)$ , который обозначается  $i_C$  и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы  $G(R)$ , *индуцированным элементом*  $C$ .

Главная наша цель — доказательство следующей основной теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $G(R) = E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$  — группа Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$ ,  $R$  — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы  $G(R)$  стандартен.

Основная теорема будет сразу следовать из двух теорем.

**Теорема 2.** Каждый автоморфизм  $\varphi$  группы Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  над локальным кольцом с необратимой тройкой является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.

**Теорема 3.** Каждый автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  над локальным кольцом с необратимой тройкой является внутренним (то есть сопряжением с помощью элемента данной группы Шевалле).

Разделы 2–6 посвящены доказательству теоремы 2. Раздел 7 посвящён доказательству теоремы 3.

## 2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В данном разделе мы используем некоторые соображения, взятые из работы [24] и используемые также в предыдущих подобных работах, упоминавшихся выше (в частности, [1, 2]).

Пусть  $J$  — максимальный идеал (радикал) кольца  $R$ ,  $\mathfrak{z} \in J$ ,  $k$  — поле вычетов  $R/J$  характеристики  $\mathfrak{z}$ ,  $E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$  — нормальная подгруппа в группе Шевалле  $G(R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ , порождённая всеми элементами  $x_\alpha(t)$  для  $\alpha \in \Phi$ ,  $t \in J$ . Тогда  $E_J$  — наибольшая нормальная собственная подгруппа в  $G(R)$  (см. [25–27]). Следовательно, подгруппа  $E_J$  инвариантна относительно действия автоморфизма  $\varphi$ .

Таким образом, автоморфизм

$$\varphi: E_{\text{ad}}(\Phi, R) \rightarrow E_{\text{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}: E_{\text{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, k) \rightarrow E_{\text{ad}}(\Phi, k).$$

Группа  $E_{\text{ad}}(\Phi, k)$  является присоединённой группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм  $\bar{\varphi}$  стандартен (см. [22]), то есть имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}} \bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho},$$

где  $\bar{g} \in N(E_{\text{ad}}(\Phi, k))$ ,  $\bar{\delta}$  — диаграммный автоморфизм и  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\bar{\rho}$  — полевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля  $k$ .

Ясно, что существует матрица  $g \in \text{GL}_n(R)$ , образ которой при факторизации  $R$  по  $J$  совпадает с  $\bar{g}$ . При этом отметим, что мы не можем быть уверены в том, что  $g \in N(E_{\text{ad}}(\Phi, R))$ .

Рассмотрим отображение

$$\varphi' = i_{g^{-1}} \varphi.$$

Это изоморфизм группы  $E_{\text{ad}}(\Phi, R) \subset \text{GL}_n(R)$  на некоторую подгруппу  $\text{GL}_n(R)$ , причём при факторизации  $R$  по  $J$  он переходит в точности в автоморфизм  $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$ .

До конца этого раздела временно предположим, что диаграммного автоморфизма  $\bar{\delta}$  нет в композиции, то есть  $\varepsilon = 0$  и изоморфизм  $\varphi'$  при факторизации по  $J$  переходит в автоморфизм  $\bar{\rho}$ . Тогда проведённые рассуждения доказывают следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Любая матрица  $A \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$  с элементами из подкольца  $R_1$  в  $R$ , порождённого единицей, отображается при изоморфизме  $\varphi'$  в матрицу из множества*

$$A \cdot \text{GL}_n(R, J) = \{B \in \text{GL}_n(R) \mid A - B \in \text{M}_n(J)\}$$

(иными словами, её образ является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала  $J$ ).

Пусть  $a \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ ,  $a^2 = 1$ . Тогда элемент

$$e = \frac{1}{2}(1 + a)$$

является идемпотентом в кольце  $M_n(R)$ :

$$e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2a + a^2) = \frac{1}{4}(2 + 2a) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного  $R$ -модуля  $V \cong R^n$ :

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули  $V_0, V_1$  свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [28]). Пусть  $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$  — соответствующее разложение  $k$ -модуля (линейного пространства)  $\bar{V} \cong k^n$  относительно  $\bar{a}$  и

$$\bar{e} = \frac{1}{2}(1 + \bar{a}).$$

**Предложение 2.** *Модули (подпространства)  $\bar{V}_0, \bar{V}_1$  являются образами модулей  $V_0, V_1$  при факторизации по  $J$ .*

*Доказательство.* Обозначим образы модулей  $V_0, V_1$  при факторизации по  $J$  через  $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1$  соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a})(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a}(\bar{x})) = \frac{1}{2}(1 + \overline{a(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда  $\tilde{V}_0 \subset \bar{V}_0, \tilde{V}_1 \subset \bar{V}_1$ .

Пусть  $x = x_0 + x_1, x_0 \in V_0, x_1 \in V_1$ . Тогда  $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0$ . Если  $\bar{x} \in \tilde{V}_0$ , то  $\bar{x} = \bar{x}_0$ .  $\square$

Пусть теперь для матрицы  $a$  с целыми элементами  $b = \varphi'(a)$ . Тогда  $b^2 = 1$  и, согласно предложению 1,  $b$  сравнима с  $a$  по модулю радикала  $J$ .

**Предложение 3.** *Предположим, что  $a, b \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ ,  $a^2 = b^2 = 1$ ,  $a$  — матрица с элементами из подкольца  $R_1$  в  $R$ , порождённого единицей,  $b$  и  $a$  сравнимы по модулю радикала  $J$ ,  $V = V_0 \oplus V_1$  — разложение  $V$  относительно  $a$ ,  $V = V'_0 \oplus V'_1$  — разложение  $V$  относительно  $b$ . Тогда  $\dim V'_0 = \dim V_0$ ,  $\dim V'_1 = \dim V_1$ .*

*Доказательство.* Мы имеем  $R$ -базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  модуля  $V$ , такой что  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset V_0$ ,  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset V_1$ . Ясно, что

$$\bar{a}\bar{e}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ji}\bar{e}_j.$$

Пусть  $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ ,  $\bar{V} = \bar{V}'_0 \oplus \bar{V}'_1$  — разложения  $k$ -модуля (пространства)  $\bar{V}$  относительно  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Ясно, что  $\bar{V}_0 = \bar{V}'_0$ ,  $\bar{V}_1 = \bar{V}'_1$ . Таким образом, по предложению 2 образы модулей  $V_0$  и  $V'_0$ ,  $V_1$  и  $V'_1$  при факторизации по радикалу  $J$  совпадают. Возьмём такие  $\{f_1, \dots, f_k\} \subset V'_0$ ,  $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset V'_1$ , что  $\bar{f}_i = \bar{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Так как матрица перехода от  $\{e_1, \dots, e_n\}$  к  $\{f_1, \dots, f_n\}$  обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала  $J$ ), то  $\{f_1, \dots, f_n\}$  — это  $R$ -базис в  $V$ . Ясно, что тогда  $\{f_1, \dots, f_k\}$  является  $R$ -базисом в  $V'_0$ , а  $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$  —  $R$ -базисом в  $V'_1$ .  $\square$

**Следствие 1.** *В условиях предыдущего предложения для матрицы  $b$  существует некоторый базис модуля  $V$ , в котором  $b$  имеет тот же вид, что и матрица  $a$  в исходном базисе. Таким образом, матрицы  $a$  и  $b$  сопряжены.*

### 3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец, которым далее будем активно пользоваться. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце  $R$  имеет лишь нулевое решение в радикале кольца. Он был описан и использовался во многих аналогичных работах, перечисленных

выше; здесь мы для удобства приведём теорему и один простой пример, иллюстрирующий применение метода (см., например, [2]).

**Теорема 4.** Пусть  $R$  — локальное кольцо, и дана система полиномиальных уравнений вида  $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ , где все входящие полиномы  $P_i \in R[x_1, \dots, x_n]$  с коэффициентами в кольце  $R$  и, кроме того, для каждого  $i$  выполнено  $P_i(0, \dots, 0) = 0$  (то есть это полиномы без свободного члена). Пусть  $\bar{P}_i$  — приведённые по модулю радикала  $J = \text{Rad}(R)$  линеаризации  $P_i$ , то есть  $\bar{P}_i$  содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведённые по модулю радикала. Тогда если система  $\bar{P}_i = 0$  имеет единственное нулевое решение  $x_j = 0$ , то исходная система в радикале  $J$  имеет единственное решение  $x_j = 0$  ( $x_j \in J$ ).

*Доказательство.* Система уравнений  $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  может быть представлена в виде  $A(x_1, \dots, x_n)x = 0$ , где  $A$  — матрица, зависящая от переменных  $x_j$ . Тогда если определитель матрицы  $A$  сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца  $R$  (который не зависит от переменных  $x_j$ , так как они лежат в радикале), то можно явно выразить решение  $x = (A(x))^{-1}0 = 0$  и получить, что  $x = 0$  (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала, обратим). Но определитель матрицы  $A(x)$  сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения исходной полиномиальной системы в радикале является обратимость матрицы линеаризованной системы, то есть единственность нулевого решения для линеаризованной системы.  $\square$

**Замечание 4.** Отметим, что способ получения указанной матрицы  $A(x)$  неоднозначен, однако её линеаризация однозначна.

**Пример 1.** Пусть  $R$  — локальное кольцо с необратимой тройкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 3y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0. \end{cases}$$

Её приведённая по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

определитель матрицы равен  $-1$  и обратим, поэтому нулевое решение единственно. Следовательно, по теореме исходная система тоже имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

С другой стороны, для исходной системы можно убедиться в единственности нулевого решения в радикале непосредственно. Перепишем её в следующем виде:

$$\begin{cases} x + (3 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем  $x = (1 + y)^{-1}y$ , подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$((1 + y)^{-1} + (3 - x))y = 0.$$

Так как коэффициент при  $y$  обратим (как сумма обратимого и необратимого элементов локального кольца), получаем, что  $y = 0$ , значит, и  $x = 0$ .

## 4. Образы элементов $w_\alpha(1)$ , $x_\alpha(1)$

Напомним, что мы перешли к изоморфизму  $\varphi'$ , который при факторизации  $R$  по  $J$  переходит в автоморфизм  $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$ .

Рассмотрим матрицы

$$h_\alpha(-1) = \omega_\alpha^{-2} = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \Phi$$

(вид некоторых из этих матриц в выбранном базисе можно найти в приложении). Это диагональные матрицы порядка 2 с элементами  $\pm 1$  на диагонали, причём все они содержат одинаковое количество элементов  $-1$ . Значит, по следствию 1 образ  $h_\alpha(-1)$  при изоморфизме сопряжён  $h_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(-1)$ .

**Лемма 1.** *Образы  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  можно сопряжением одновременно привести к  $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$  и  $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$ .*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай  $\varepsilon = 0$ . Поскольку образы коммутирующих матриц  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  также коммутируют, их можно привести к диагональному виду. При изоморфизме у матриц  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  не меняются собственные значения и их кратности, значит, диагональный вид останется таким же с точностью до перестановки элементов на диагонали. Следовательно, можно произвести сопряжение (заменой базиса) и привести образы матриц  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  к диагональному виду, а затем выполнить сопряжение матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$ .

В случае  $\varepsilon = 1$  аналогичное рассуждение даёт нужный результат.  $\square$

Теперь будем считать, что мы заменили исходный изоморфизм новым, переводящим  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  в  $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$  и  $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$ .

Рассмотрим матрицы  $x_\alpha(1)$ ,  $w_\alpha(1) = \omega_\alpha$  для всех  $\alpha \in \Phi$ .

**Лемма 2.** *Все матрицы  $x_\alpha(1)$  и  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ , выражаются через следующий набор матриц:*

$$x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}.$$

*Доказательство.* В элементарной группе Шевалле для всех  $\alpha, \beta \in \Phi$  выполнено, в числе прочих, следующее соотношение (см. [22]):

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha \beta}(\pm t), \quad (2)$$

где знак зависит только от корней  $\alpha, \beta$  (и не зависит ни от  $t$ , ни от выбора базиса), причём этот знак совпадает для пар корней  $\alpha, \beta$  и  $\alpha, -\beta$ . В частности, отсюда легко получить такое же соотношение для  $w_\beta(t)$ ,  $t \in R^*$ :

$$\begin{aligned} \omega_\alpha w_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} &= \omega_\alpha (x_\beta(t) x_{-\beta}(-t^{-1}) x_\beta(t)) \omega_\alpha^{-1} = \\ &= x_{w_\alpha \beta}(\pm t) x_{-w_\alpha \beta}(\mp t^{-1}) x_{w_\alpha \beta}(\pm t) = w_{w_\alpha \beta}(\pm t). \end{aligned} \quad (3)$$

Если в каком-то соотношении должен быть выбран знак минус, то достаточно потом обратить полученную матрицу, поскольку в силу (1)  $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$  и  $w_\alpha(-t) = (w_\alpha(t))^{-1}$ .

Группа Вейля системы корней порождается простыми отражениями, а также действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы  $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$  и используя соотношения (3) (при  $t = 1$ ), можно выразить все матрицы  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ .

Аналогично, так как  $\alpha_1, \alpha_2$  — корни двух возможных различных длин, снова благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины можно из соотношений (2) (при  $t = 1$ ) выразить все матрицы  $x_\alpha(1)$ ,  $\alpha \in \Phi$ .  $\square$

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из  $\text{GL}_n(R, J)$  (то есть сравнимой с единичной по модулю радикала  $J$ ), которое переведёт образы матриц  $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$  в матрицы  $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1), x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1), \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}$  соответственно, то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все  $x_\alpha(1)$  и  $\omega_\alpha$  соответственно в  $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$  и  $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \Phi$ , причём по-прежнему при факторизации  $R$  по  $J$  она будет переходить в автоморфизм  $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$ .

**Лемма 3.** *Указанное сопряжение существует.*

*Доказательство.* Пользуясь предложением 1, обозначим образы матриц  $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$  через  $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1) + A, x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1) + B, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)} + C, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)} + D$ , где  $A, B, C, D \in M_n(J)$  — неизвестные матрицы.

В элементарной группе Шевалле для всех  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $\alpha + \beta \neq 0$  выполнено следующее соотношение на коммутатор соответствующих корневых элементов (см. [22]):

$$(x_\alpha(t), x_\beta(u)) = \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi, \\ i, j \in \mathbb{N}}} x_{i\alpha + j\beta}(c_{ij} t^i u^j), \quad (4)$$

где  $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$  — групповой коммутатор (обозначаемый для удобства круглыми скобками, чтобы не путать с коммутатором в алгебре Ли), произведение в правой части берётся по всем корням  $i\alpha + j\beta$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , расположенным в некотором фиксированном порядке, а  $c_{ij}$  —

целые числа, зависящие только от  $\alpha, \beta$  и от выбранного порядка корней (и не зависящие от  $t, u$ ), причём если  $\alpha + \beta \in \Phi$ , то  $c_{11} = N_{\alpha\beta}$ . В случае нашей системы корней  $\Phi$  типа  $\mathbf{G}_2$  произведение в правой части всегда состоит не более чем из четырёх элементов, и все коэффициенты  $c_{ij}$  принимают значения  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Ещё раз подчеркнём, что благодаря целочисленности  $c_{ij}$  все участвующие в соотношении корневые элементы легко выражаются через соответствующие корневые элементы без коэффициентов  $c_{ij}$  — достаточно воспользоваться свойством (1).

Итак, рассмотрим набор образов всех соотношений вида (2), (3), (4) при  $t = u = 1$ , а также соотношений  $h_{\alpha_i}(-1) = \omega_{\alpha_i}^2$ ,  $i = 1, 2$ . Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц  $A, B, C, D$ , то есть относительно  $4n^2 = 4 \cdot 14^2 = 784$  переменных из радикала. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что  $A = B = C = D = 0$ . Однако компьютерное вычисление показывает, что это не так, линеаризованная система, приведённая по модулю радикала  $J$  (отметим, что в результате все коэффициенты такой системы будут равны 0 или  $\pm 1$ ), может иметь ненулевое решение, а именно, её ранг равен 732 (как при  $\varepsilon = 0$ , так и при  $\varepsilon = 1$ ). Это означает, что действительно требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует такое сопряжение, которое сохраняет  $h_{\alpha_1}(-1)$  и  $h_{\alpha_2}(-1)$  и при этом позволяет занулить ровно 52 переменные (то есть после этого сопряжения соответствующие элементы матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц). Таким образом, получаем систему относительно  $784 - 52 = 732$  переменных, приведённая по модулю радикала линеаризация которой оказывается системой полного ранга, равного 732, и поэтому имеет только нулевое решение, откуда по теореме о линеаризации заключаем, что  $A = B = C = D = 0$  и найденное сопряжение является искомым.  $\square$

## 5. Образы элементов $x_\alpha(t)$

Итак, на данном этапе изоморфизм переводит все  $x_\alpha(1)$  и  $\omega_\alpha$  соответственно в  $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$  и  $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \Phi$ .

**Следствие 2.** Если  $\varepsilon = 1$ , то кольцо  $R$  имеет характеристику 3.

*Доказательство.* Рассмотрим корни  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$  и следующие соотношения вида (4):

$$(x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_6}(1)) = 1,$$

$$(x_{\alpha_2}(1), x_{\alpha_4}(1)) = x_{\alpha_5}(\pm 3).$$

Поскольку  $\delta(\alpha_1) = \alpha_2, \delta(\alpha_6) = \alpha_4$ , отсюда сразу следует  $\pm 3 = 0$  в  $R$ .  $\square$

Изучим образы  $x_\alpha(t)$ , а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые  $x_\alpha(t')$  в случае  $\varepsilon = 0$  или в некоторые  $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$  в случае  $\varepsilon = 1$ , где  $t \mapsto t'$  — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [22]). Значит, в нашем случае они переходят в  $x_\alpha(t') + T$  ( $\varepsilon = 0$ ) или  $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)}) + T$  ( $\varepsilon = 1$ ), где  $T \in M_n(J)$ . Нужно доказать, что во всех случаях  $T = 0$ . Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать  $t'$  и, соответственно,  $T$ . Правильный выбор будет описан ниже.

**Замечание 5.** На этом этапе мы ничего не говорим об отображении  $t \mapsto t'$ . Утверждается лишь, что существует такой элемент  $t'$ , что матрицы отображаются указанным образом.

**Лемма 4.** Все матрицы  $x_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in \Phi$ , выражаются через следующий набор матриц:

$$\omega_\alpha, \alpha \in \Phi; \quad x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(t).$$

*Доказательство.* По аналогии с леммой 2, данное утверждение сразу следует из соотношений (2), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что  $\alpha_1, \alpha_2$  — это корни двух возможных различных длин.  $\square$

Рассмотрим матрицы  $x_{\alpha_1}(t)$  и  $x_{\alpha_2}(t)$ . Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через  $x_{\alpha_1}(t') + S$  и  $x_{\alpha_2}(t') + T$  соответственно ( $\varepsilon = 0$ ) или через  $x_{\alpha_2}(t') + S$  и  $x_{\alpha_1}((t')^3) + T$  соответственно ( $\varepsilon = 1$ ), где  $S, T \in M_n(J)$  — неизвестные матрицы с элементами из

радикала  $J$ . Выберем  $S$  и  $T$  так, чтобы выполнялось  $T_{7,11} = 0$ . Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 4 достаточно доказать, что  $S = T = 0$ .

Возьмём набор образов тех соотношений вида (2) и (4), в которые входят только элементы (и их степени) вида  $x_\alpha(t)$ ,  $x_\alpha(1)$  и  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ . Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц  $S$  и  $T$ , то есть (с учётом условия  $T_{7,11} = 0$ ) относительно  $2n^2 - 1 = 2 \cdot 14^2 - 1 = 391$  переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала  $J$  линеаризация системы является системой полного ранга, равного 391 (как при  $\varepsilon = 0$ , так и при  $\varepsilon = 1$ ), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что  $S = T = 0$ .

## 6. Доказательство теоремы 2

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы  $x_\alpha(t)$  в некоторые  $x_\alpha(t')$  ( $\varepsilon = 0$ ) или в некоторые  $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$  ( $\varepsilon = 1$ ). Обозначим отображение  $t \mapsto t'$  через  $\rho: R \rightarrow R$ .

**Лемма 5.** *Отображение  $\rho$  инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае  $\varepsilon = 1$  эндоморфизм Фробениуса  $F$  также инъективен.*

*Доказательство.* Инъективность отображения  $\rho$ , а также эндоморфизма  $F$  при  $\varepsilon = 1$ , очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом  $x_\alpha(0) = 1$ .

Аддитивность  $\rho$  сразу следует из соотношения (1).

Мультипликативность  $\rho$  следует, например, из соотношения (4) для корней  $\alpha_1$  и  $\alpha_5$ :

$$(x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_5}(u)) = x_{\alpha_1 + \alpha_5}(tu) = x_{\alpha_6}(tu)$$

(это рассуждение остаётся в силе и при  $\varepsilon = 1$ , так как участвующие в соотношении корни длинные).  $\square$

**Следствие 3.** *Отображение  $\rho$  является изоморфизмом из кольца  $R$  на некоторое его подкольцо  $R'$ ; в случае  $\varepsilon = 1$  то же верно и для эндоморфизма Фробениуса  $F$ .*

Теперь докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца  $R$ . Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы  $C \in \text{GL}(V)$  выполнено

$${}_i C \varphi(E_{\text{ad}}(\Phi, R)) = C E_{\text{ad}}(\Phi, R) C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$$

(причём при  $\varepsilon = 0$  имеет место равенство). Покажем, что  $R' = R$ .

**Лемма 6.** *Если для некоторого  $C \in \text{GL}(V)$  имеет место включение  $C E_{\text{ad}}(\Phi, R) C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$ , где  $R'$  — подкольцо в  $R$ , то  $R' = R$ .*

*Доказательство.* Обозначим матричные единицы через  $E_{ij}$ . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} ((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 &= E_{6,12}, \\ \omega_{\alpha_6}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 \omega_{\alpha_6}^{-1} &= E_{12,6}. \end{aligned}$$

Произведение этих матричных единиц даёт матричную единицу  $E_{6,6}$ . В матрице  $h_{\alpha_1}(t)$  элемент на позиции (6, 6) равен  $t$ . Таким образом, с помощью нашей группы  $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$  сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида  $tE_{6,6}$ , где  $t \in R^*$ .

Предположим теперь, что  $R'$  — собственное подкольцо в  $R$ . Так как  $C E_{\text{ad}}(\Phi, R) C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$ , то подкольцо кольца  $M_n(R)$ , порождённое всеми элементами группы  $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ , должно переходить в подкольцо кольца  $M_n(R')$ , порождённое элементами группы  $E_{\text{ad}}(\Phi, R')$ . Следовательно, все элементы матриц  $C(tE_{6,6})C^{-1}$  при  $t \in R^*$  должны лежать в подкольце  $R'$ .

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов  $i, j$ , что элементы  $C_{i,6}$

и  $(C^{-1})_{6,j}$  обратимы. Отсюда заключаем, что при  $t \in R^*$

$$C_{i,6}t(C^{-1})_{6,j} = (C(tE_{6,6})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

то есть

$$C_{i,6}R^*(C^{-1})_{6,j} = R^* \subset R'.$$

Но локальное кольцо  $R$  аддитивно порождается множеством  $R^*$ , поэтому в действительности  $R \subset R'$ , что даёт требуемое равенство  $R' = R$ .  $\square$

**Следствие 4.** *Отображение  $\rho$  является автоморфизмом кольца  $R$ ; в случае  $\varepsilon = 1$  эндоморфизм Фробениуса  $F$  также является автоморфизмом кольца  $R$ , то есть в этом случае  $R$  — совершенное кольцо характеристики 3. При этом выполнено  $CE_{\text{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ .*

Таким образом, показано, что композиция  $i_C\varphi$  исходного автоморфизма  $\varphi$  группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы  $C \in \text{GL}_n(R)$ , нормализующей данную группу, является композицией  $\delta^\varepsilon\rho$ , где  $\delta$  — диаграммный автоморфизм и  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\rho$  — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.

## 7. Доказательство теоремы 3

Пусть  $C \in \text{GL}_n(R)$  — матрица из нормализатора группы  $G(R)$ :

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Наша цель — показать, что  $C \in R^* \cdot G(R)$ .

Если  $J$  — максимальный идеал (радикал) кольца  $R$ , то матрицы из  $M_n(J)$  образуют радикал в кольце матриц  $M_n(R)$ , поэтому

$$C \cdot M_n(J) \cdot C^{-1} = M_n(J),$$

следовательно,

$$C \cdot (1 + M_n(J)) \cdot C^{-1} = 1 + M_n(J),$$

то есть

$$C \cdot E_{\text{ad}}(\Phi, R, J) \cdot C^{-1} = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J),$$

так как  $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J) = E_{\text{ad}}(\Phi, R) \cap (1 + M_n(J))$ . Значит, образ  $\bar{C}$  матрицы  $C$  при факторизации кольца  $R$  по радикалу  $J$  индуцирует автоморфизм-сопряжение группы Шевалле  $G(k) = E_{\text{ad}}(\Phi, k)$ , где  $k$  — поле вычетов  $R/J$  характеристики 3.

**Лемма 7.** *Любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа  $\mathbf{G}_2$  над полем  $k$  характеристики 3 является внутренним.*

*Доказательство.* Предположим, что некоторая матрица  $C \in \text{GL}_n(k)$  лежит в нормализаторе группы  $G(k)$ . Тогда автоморфизм-сопряжение  $i_C$  стандартен (см. [22]), то есть  $i_C = i_g \circ \delta^\varepsilon \circ \rho$ , где  $g \in G(k)$ ,  $\delta$  — диаграммный автоморфизм и  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\rho$  — полевой автоморфизм. Следовательно,  $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \delta^\varepsilon\rho$ ,  $C' \in \text{GL}_n(k)$ . Заметим, что для любого  $\alpha \in \Phi$  выполнено  $\delta^\varepsilon\rho(x_\alpha(1)) = \delta^\varepsilon(x_\alpha(1)) = x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ .

Допустим, что  $\varepsilon = 1$ . Тогда имеем  $C'x_\alpha(1) = x_{\delta(\alpha)}(1)C'$  для всех  $\alpha \in \Phi$ . Достаточно записать эти соотношения, рассматриваемые как уравнения относительно неизвестной матрицы  $C' \in M_n(k)$ , для корней, положительно порождающих всю систему, а именно  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ . Вычисление показывает, что пространство решений полученной системы линейных уравнений над полем  $k$  одномерно и не содержит решений, соответствующих обратимым матрицам. Это приводит к противоречию с предположением  $\varepsilon = 1$ .

Таким образом,  $\varepsilon = 0$  и  $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \rho$ , то есть сопряжение матрицей  $C'$  задаёт полевой автоморфизм  $\rho$ . Значит,  $C'x_\alpha(1) = x_\alpha(1)C'$  для всех  $\alpha \in \Phi$ . Следовательно, матрица  $C'$  скалярна и автоморфизм  $i_C$  — внутренний.  $\square$

Из леммы 7 следует, что  $i_{\bar{C}} = i_{g'}$ ,  $g' \in G(k)$ . Возьмём произвольный элемент  $g \in G(R)$ , для которого выполнено  $\bar{g} = g'$ , и рассмотрим матрицу  $C' = g^{-1} \cdot C$ . Очевидно, эта матрица также нормализует группу  $G(R)$ , при этом  $\bar{C}' = 1$ . Таким образом, описание матриц из нормализатора группы  $G(R)$  сведено к описанию матриц из нормализатора данной группы, сравнимых с единичной по модулю радикала  $J$ .

Далее будем считать, что изначальная матрица  $C$  сравнима с единичной по модулю радикала:  $C = 1 + Y$ ,  $Y \in M_n(J)$ .

Для каждого  $\alpha \in \Phi$  имеет место равенство

$$Cx_\alpha(1)C^{-1} = x_\alpha(1) \cdot g_\alpha, \quad g_\alpha \in E_{\text{ad}}(\Phi, R, J),$$

или, эквивалентно,

$$Cx_\alpha(1) = x_\alpha(1)g_\alpha C. \quad (5)$$

Любой элемент  $g_\alpha \in E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$  можно разложить в произведение вида

$$t_{\alpha_1}(1 + a_{\alpha,1})t_{\alpha_2}(1 + a_{\alpha,2})x_{\alpha_1}(b_{\alpha,1}) \cdots x_{\alpha_6}(b_{\alpha,6})x_{-\alpha_1}(c_{\alpha,1}) \cdots x_{-\alpha_6}(c_{\alpha,6}),$$

где  $a_{\alpha,1}, a_{\alpha,2}, b_{\alpha,1}, \dots, b_{\alpha,6}, c_{\alpha,1}, \dots, c_{\alpha,6} \in J$  (см., например, [25]).

Рассматривая набор соотношений вида (5) для корней  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ , положительно порождающих всю систему, мы получаем систему полиномиальных уравнений относительно неизвестных  $Y_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$ , лежащих в радикале. Однако чтобы иметь возможность применить к ней метод линеаризации, необходимо произвести некоторые дополнительные преобразования.

Заметим, что при умножении матрицы  $C$  на матрицы из  $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$  и на скаляры, сравнимые с 1 по модулю радикала  $J$ , по-прежнему получается матрица из нормализатора группы  $G(R)$ , сравнимая с единичной по модулю  $J$ .

**Лемма 8.** *Существует такой набор элементов  $d, a_1, a_2 \in 1 + J$ ,  $b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6 \in J$ , что для матрицы*

$$\begin{aligned} C' = & d \cdot t_{\alpha_1}(a_1)t_{\alpha_2}(a_2) \\ & \cdot x_{-\alpha_2}(b_2)x_{-\alpha_6}(b_6)x_{-\alpha_5}(b_5)x_{-\alpha_4}(b_4)x_{-\alpha_3}(b_3)x_{-\alpha_1}(b_1) \\ & \cdot C \\ & \cdot x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_3}(c_3)x_{\alpha_4}(c_4)x_{\alpha_5}(c_5)x_{\alpha_6}(c_6)x_{\alpha_2}(c_2) \end{aligned}$$

выполнено  $C' = 1 + Y'$ , где  $Y' \in M_n(J)$  содержит нули на конкретных  $n + 1 = 15$  позициях (явно указанных в доказательстве).

*Доказательство.* Положим  $C^{(0)} = C$ .

Рассмотрим позицию  $(\alpha_5, \alpha_6)$  и умножим  $C^{(0)}$  слева на  $x_{-\alpha_1}(-C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(0)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(0)})$ . В результате получим матрицу  $C^{(1)}$ , у которой  $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(1)} = 0$ .

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, \alpha_6)$  и умножим  $C^{(1)}$  слева на  $x_{-\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(1)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(1)})$ . Получим матрицу  $C^{(2)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(2)} = 0$  и при этом также сохраняется  $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(2)} = 0$ , так как в матрице  $x_{-\alpha_3}(t)$  строка, соответствующая  $\alpha_5$ , содержит лишь диагональную единицу и все остальные нули.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_3, \alpha_6)$  и умножим  $C^{(2)}$  слева на  $x_{-\alpha_4}(C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(2)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(2)})$ . Получим матрицу  $C^{(3)}$ , у которой  $C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(3)} = 0$  и при этом все предыдущие нулевые позиции также остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_1, \alpha_6)$  и умножим  $C^{(3)}$  слева на  $x_{-\alpha_5}(C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(3)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(3)})$ . Получим матрицу  $C^{(4)}$ , у которой  $C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(4)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(h_1, \alpha_6)$  и умножим  $C^{(4)}$  слева на  $x_{-\alpha_6}(C_{h_1, \alpha_6}^{(4)}/(2C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(4)}))$ . Получим матрицу  $C^{(5)}$ , у которой  $C_{h_1, \alpha_6}^{(5)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, \alpha_5)$  и умножим  $C^{(5)}$  слева на  $x_{-\alpha_2}(-C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(5)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(5)})$ . Получим матрицу  $C^{(6)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(6)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Далее рассмотрим позицию  $(\alpha_6, \alpha_5)$  и умножим  $C^{(6)}$  уже справа на  $x_{\alpha_1}(-C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(6)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(6)})$ . Получим матрицу  $C^{(7)}$ , у которой  $C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(7)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, \alpha_2)$  и умножим  $C^{(7)}$  справа на  $x_{\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(7)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(7)}))$ . Получим матрицу  $C^{(8)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(8)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, h_2)$  и умножим  $C^{(8)}$  справа на  $x_{\alpha_4}(C_{\alpha_4, h_2}^{(8)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(8)})$ . Получим матрицу  $C^{(9)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, h_2}^{(9)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, -\alpha_2)$  и умножим  $C^{(9)}$  справа на  $x_{\alpha_5}(C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(9)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(9)})$ . Получим матрицу  $C^{(10)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(10)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_5, -\alpha_1)$  и умножим  $C^{(10)}$  справа на  $x_{\alpha_6}(C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(10)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(10)})$ . Получим матрицу  $C^{(11)}$ , у которой  $C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(11)} = 0$  и все предыдущие нуле-

вые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию  $(\alpha_4, \alpha_3)$  и умножим  $C^{(11)}$  справа на  $x_{\alpha_2}(C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(11)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(11)}))$ . Получим матрицу  $C^{(12)}$ , у которой  $C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(12)} = 0$  и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Таким образом, матрица  $C^{(12)}$  содержит ровно 12 (недиагональных) нулевых позиций.

Положим  $C^{(13)} = (C_{h_1, h_1}^{(12)})^{-1} \cdot C^{(12)}$ . Тогда  $C_{h_1, h_1}^{(13)} = 1$ , то есть  $Y_{h_1, h_1}^{(13)} = 0$ , при этом, очевидно, все предыдущие нулевые позиции сохраняются.

Осталось применить умножения на диагональные матрицы  $t_{\alpha_1}$  и  $t_{\alpha_2}$ . Заметим, что у  $t_{\alpha_1}(a)$  на позиции  $(\alpha_6, \alpha_6)$  стоит  $a$  и на позиции  $(\alpha_4, \alpha_4)$  стоит 1, а у  $t_{\alpha_2}(a)$  на позиции  $(\alpha_4, \alpha_4)$  стоит  $a$  и на позиции  $(\alpha_6, \alpha_6)$  стоит 1, при этом у обеих матриц на позиции  $(h_1, h_1)$  стоит 1. Следовательно, если положить  $C' = C^{(15)} = t_{\alpha_1}((C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(13)})^{-1}) \cdot t_{\alpha_2}((C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(13)})^{-1}) \cdot C^{(13)}$ , то получим  $C'_{\alpha_4, \alpha_4} = C'_{\alpha_6, \alpha_6} = 1$ , то есть  $Y'_{\alpha_4, \alpha_4} = Y'_{\alpha_6, \alpha_6} = 0$ , при этом все предыдущие нулевые позиции также сохраняются.  $\square$

Итак, рассмотрим матрицу  $C' = 1 + Y'$  из леммы 8. Как уже отмечалось,  $C'$  по-прежнему нормализует группу  $G(R)$  и сравнима с единичной по модулю  $J$ .

Теперь вернёмся к системе уравнений вида (5). Аналогичные уравнения справедливы для матрицы  $C'$ . Имеем систему уравнений относительно  $n^2 - (n + 1) + 4n = 237$  неизвестных  $Y'_{ij}, a_{\alpha, i}, b_{\alpha, i}, c_{\alpha, i}$ , лежащих в радикале. Как показывает вычисление, линеаризация данной системы является системой полного ранга, равного 237, поэтому имеет единственное нулевое решение. По теореме о линеаризации отсюда, в частности, следует, что  $Y' = 0$ , то есть  $C' = 1$ . Это завершает доказательство теоремы 3.

Основная теорема 1 теперь немедленно следует из доказанных теорем 2 и 3.

Автор выражает благодарность Елене Игоревне Буниной за внимание к работе, ценные замечания и консультации.

## 8. Приложение

### 8.1. Знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$

Напомним, что при  $\alpha + \beta \in \Phi$  структурные константы  $N_{\alpha\beta}$  базиса Шевалле выражаются формулой

$$N_{\alpha\beta} = \pm(r + 1),$$

где  $r$  — максимальное целое число, для которого  $\beta - r\alpha \in \Phi$ . Как уже упоминалось в работе, существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант  $N_{\alpha\beta}$ . Более подробные сведения об этом можно найти, например, в [29, 30]. Готовые таблицы структурных констант для систем корней некоторых типов можно также найти, например, в [23, 31].

### 8.2. Построение представления, некоторые элементы группы Шевалле

В пространстве представления возьмём следующий базис:

$$v_1 = x_{\alpha_1}, \dots, v_6 = x_{\alpha_6},$$

$$v_7 = x_{-\alpha_1}, \dots, v_{12} = x_{-\alpha_6},$$

$$v_{13} = h_1, v_{14} = h_2.$$

Выпишем, к примеру, образы элементов  $x_\alpha$  базиса, соответствующих простым корням, а также некоторые элементы группы Шевалле:





## Список литературы

- [1] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов  $A_\ell$ ,  $D_\ell$ ,  $E_\ell$  над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47–80.
- [2] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа  $G_2$  над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49–66.
- [3] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа  $G_2$  над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 57–62.
- [4] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // *Can. J. Math.* — 1960. — Vol. 12. — P. 606–615.
- [5] Humphreys J. E. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // *Can. J. Math.* — 1969. — Vol. 21. — P. 908–911.
- [6] Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraites» de groupes algébriques simples // *Ann. Math.* — 1973. — Vol. 97, no. 3. — P. 499–571.
- [7] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // *J. Algebra.* — 1993. — Vol. 155, no. 1. — P. 44–94.
- [8] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* — 1994. — Vol. 92. — P. 231–237.
- [9] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over  $\mathbb{Q}$ -algebras // *Tôhoku Math. J.* — 1995. — Vol. 47, no. 1. — P. 81–97.
- [10] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357–2361.

- [11] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 521–541.
- [12] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226, no. 2. — P. 719–741.
- [13] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Analysis. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74–90.
- [14] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. — 2010. — Vol. 324, no. 10. — P. 2608–2619.
- [15] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов  $\mathbf{A}_\ell$ ,  $\mathbf{D}_\ell$ ,  $\mathbf{E}_\ell$  над локальными кольцами с  $1/2$  // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, вып. 4. — С. 443–470.
- [16] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов  $\mathbf{A}_\ell$ ,  $\mathbf{D}_\ell$ ,  $\mathbf{E}_\ell$  над локальными кольцами с  $1/2$  // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35–59.
- [17] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов  $\mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{G}_2$  над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3–29.
- [18] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type  $\mathbf{F}_4$  over local rings with  $1/2$  // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323, no. 8. — P. 2270–2289.
- [19] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154–170.
- [20] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie. — Hermann, 1968.
- [21] Humphreys J. E. Introduction to Lie algebras and representation theory. — New York: Springer, 1978.
- [22] Steinberg R. Lectures on Chevalley groups. — Yale Univ., 1967.

- [23] Carter R. W. Simple groups of Lie type. — London: Wiley, 1989.
- [24] Петечук В. М. Автоморфизмы групп  $SL_n$ ,  $GL_n$  над некоторыми локальными кольцами // *Мат. заметки*. — 1980. — Т. 28, вып. 2. — С. 187–204.
- [25] Abe E. Chevalley groups over local rings // *Tôhoku Math. J.* — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474–494.
- [26] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Contemp. Math.* — 1989. — Vol. 83. — P. 1–17.
- [27] Costa D. L., Keller G. E. On the normal subgroups of  $\mathbf{G}_2(A)$  // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1999. — Vol. 351, no. 12. — P. 5051–5088.
- [28] McDonald B. R. Automorphisms of  $GL_n(R)$  // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 215. — P. 145–159.
- [29] Samelson H. Notes on Lie algebras. — New York: Springer, 1990.
- [30] Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E. Computing in groups of Lie type // *Math. Comp.* — 2004. — Vol. 73, no. 247. — P. 1477–1498.
- [31] Gilkey P. B., Seitz G. M. Some representations of exceptional Lie algebras // *Geom. Dedicata*. — 1988. — Vol. 25. — P. 407–416.