

Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой тройкой

Киракосян Вазген Валерикович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
vazgen.kirakosyan@gmail.com

УДК 512.54+512.552

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.

Abstract

In this paper we prove that every automorphism of a Chevalley group of type G_2 over a commutative local ring without $1/3$ is standard; that is, it is a composition of a ring automorphism, a graph automorphism, and an inner automorphism.

Введение

Цель данной работы — доказать, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. Отметим, что в работе мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь статьям [3, 6, 7], в которых доказан аналогичный результат для других групп Шевалле.

Заметим, что для системы корней типа \mathbf{G}_2 существует лишь одна решётка весов, которая является одновременно универсальной и присоединённой, поэтому для каждого кольца R существует единственная группа Шевалле типа \mathbf{G}_2 — это $G(R) = G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Более того, над локальными кольцами универсальные группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (то есть нам известны образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [35] для конечного случая и Дж. Хамфри [30] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [15], Р. Картера и Ю Чена [21], Ю Чена [22–26], Э. Абе [14], А. Клячко [32].

Аналог теоремы 2 для систем корней типов \mathbf{A}_ℓ , \mathbf{D}_ℓ и \mathbf{E}_ℓ был получен Е. И. Буниной в [5], в работе [4] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобная теорема для локальных колец без $1/2$ была доказана в [3]. Для систем корней типов \mathbf{B}_2 и \mathbf{G}_2 она получена в [1], однако в этой работе для системы корней типа \mathbf{G}_2 предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В статьях [6, 7] данный результат доказывается для системы корней типа \mathbf{G}_2 уже без требования обратимости двойки. В [17] Е. И. Буниной была доказана аналогичная теорема для системы корней типа \mathbf{F}_4 при условии обратимости двойки. В [18] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединённых групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Для системы корней типа \mathbf{G}_2 в случае локального кольца от требования обратимости тройки также удаётся отказаться, этому и посвящена данная работа.

1. Определения и формулировки основных теорем

Определение 1. Подмножество Φ евклидова пространства \mathbb{E} называется *системой корней* в \mathbb{E} , если выполнены следующие условия:

- 1) множество Φ конечно, порождает \mathbb{E} и не содержит 0;
- 2) если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корней α в Φ содержатся только $\pm\alpha$;
- 3) если $\alpha \in \Phi$, то *отражение* w_α относительно гиперплоскости, ортогональной α , выражаемое формулой

$$w_\alpha\beta = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

сохраняет множество Φ инвариантным; коэффициенты, участвующие в формуле, обозначаются через

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

и называются *числами Картана*;

- 4) если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Подмножество Δ в Φ называется *базисом* (а входящие в него корни *простыми*), если

- 1) Δ является базисом в \mathbb{E} ;
- 2) каждый корень $\beta \in \Phi$ представляется в виде

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha,$$

где коэффициенты k_α целые и все одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все коэффициенты k_α неотрицательны (соответственно все k_α неположительны), то корень β называется *положительным* (соответственно *отрицательным*).

Определение 3. Подгруппа (конечная) W в $GL(\mathbb{E})$, порождённая всеми отражениями w_α , $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ .

Группа Вейля играет исключительно важную роль в изучении систем корней. Среди свойств группы Вейля выделим два важных свойства, которые в дальнейшем будем использовать: группа Вейля в действительности порождается лишь простыми отражениями w_α , $\alpha \in \Delta$, и она транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Подробные сведения о системах корней, их типах и свойствах можно найти, например, в [16, 31].

Зафиксируем неприводимую систему корней Φ , имеющую тип \mathbf{G}_2 . Данная система корней имеет ранг 2, состоит из 6 положительных и 6 отрицательных корней, и в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — стандартный ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^3 . Пронумеруем положительные корни системы \mathbf{G}_2 следующим образом (первые два корня являются простыми):

$$\alpha_1 = -2e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\alpha_2 = e_1 - e_2;$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = -e_1 + e_3,$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = -e_2 + e_3,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2 = e_1 - 2e_2 + e_3,$$

$$\alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли \mathcal{L} типа \mathbf{G}_2 с картановской подалгеброй \mathcal{H} (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [31]). В алгебре Ли \mathcal{L} можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi; h_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$$

таким образом, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов этого

же базиса, а именно:

- 1) $[h_i, h_j] = 0, 1 \leq i, j \leq 2$;
- 2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha, 1 \leq i \leq 2, \alpha \in \Phi$;
- 3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ является целочисленной линейной комбинацией векторов h_1, h_2 ;
- 4) если α, β — линейно независимые корни и $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0$;
- 5) если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, причём $N_{\alpha\beta} = \pm(r+1)$, где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$ (подробнее см. в приложении).

Определение 4. Если $x \in \mathcal{L}$, то отображение

$$\text{ad } x: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad \text{ad } x(y) = [x, y]$$

является эндоморфизмом пространства \mathcal{L} и, более того, (внутренним) дифференцированием алгебры Ли \mathcal{L} . Отображение

$$\text{ad}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}), \quad \text{ad}(x) = \text{ad } x$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединённым представлением* алгебры Ли \mathcal{L} .

Замечание 1. Присоединённое представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который, разумеется, является абелевым идеалом и поэтому тривиален.

Введём обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединённом представлении:

$$X_\alpha = \text{ad } x_\alpha; \quad H_i = \text{ad } h_i.$$

Определение 5. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

Замечание 2. Мы будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа \mathbf{G}_2 над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой и будем активно пользоваться тем фактом, что в этом случае двойка обратима, так как иначе в силу локальности кольца и равенства $3 - 2 = 1$ единица была бы необратима, что неверно.

Возьмём произвольное коммутативное локальное кольцо и построим элементарную присоединённую группу Шевалле типа \mathbf{G}_2 над этим кольцом (см. [36]). Для удобства кратко воспроизведём построение здесь (см. также приложение).

В базисе Шевалле алгебры Ли \mathcal{L} все операторы $X_\alpha^k/k!$ для $\alpha \in \Phi$ и $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом R с единицей. То есть рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R (в нашем случае $n = \dim \mathcal{L} = 14$), и указанные матрицы $X_\alpha^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $M_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2 X_\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{t^k X_\alpha^k}{k!} + \dots, \quad \alpha \in \Phi, t \in R.$$

Так как все матрицы X_α нильпотентны, такой ряд всегда конечен.

Очевидно, что для таких экспонент выполнено следующее простое, но важное соотношение:

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t + u). \tag{1}$$

Определение 6. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*.

Определение 7. Подгруппа в $\text{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной присоединённой группой Шевалле* и обозначается $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

Определение 8. В элементарной группе Шевалле определим также следующие важные элементы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$; $\omega_\alpha = w_\alpha(1)$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

Как уже было отмечено во введении, над локальными кольцами для системы корней типа \mathbf{G}_2 группа Шевалле $G(R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ совпадает со своей элементарной подгруппой $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле в общем смысле.

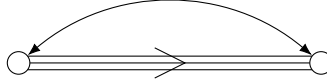
Определим стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле $G(R)$ и ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 9. Пусть $\rho: R \rightarrow R$ — автоморфизм кольца R . Отображение $(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij}))$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G(R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 10. Предположим, что R — совершенное кольцо характеристики 3, то есть $3 = 0$ и эндоморфизм Фробениуса $F(t) = t^3$ является автоморфизмом R . Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ положим $\lambda(\alpha) = 1$, если α — длинный корень, и $\lambda(\alpha) = 3$, если α — короткий корень. Пусть $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — перестановка системы корней типа \mathbf{G}_2 , которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней; такая δ определена однозначно, при этом $\delta^2 = 1$ и δ действует на множестве простых корней следующим образом: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$. Тогда знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$ могут быть выбраны таким образом, что отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi, \quad t \in R$$

однозначно определяет автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается той же буквой δ и называется *диаграммным (графовым) автоморфизмом* группы $G(R)$ (см. [20, 36]).



Замечание 3. Очевидно, кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

Определение 11. Пусть $g \in G(R)$. Сопряжение группы $G(R)$ с помощью элемента g является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается i_g и называется *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$.

Эти три типа автоморфизмов называются *стандартными*. К стандартным также относятся *центральные* автоморфизмы, однако в рассматриваемом нами случае системы корней типа \mathbf{G}_2 таких нетривиальных нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ *стандартен*, если он является композицией трёх введённых типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится ещё один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 12. Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \text{GL}(V)$ — матрица, нормализующая группу $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto Cx C^{-1}$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, *индуцированным элементом* C .

Главная наша цель — доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. Пусть $G(R) = E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ — группа Шевалле типа \mathbf{G}_2 , R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы $G(R)$ стандартен.

Основная теорема будет сразу следовать из двух теорем.

Теорема 2. Каждый автоморфизм φ группы Шевалле типа \mathbf{G}_2 над локальным кольцом с необратимой тройкой является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.

Теорема 3. Каждый автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа \mathbf{G}_2 над локальным кольцом с необратимой тройкой является внутренним (то есть сопряжением с помощью элемента данной группы Шевалле).

Разделы 2–6 посвящены доказательству теоремы 2. Раздел 7 посвящён доказательству теоремы 3.

2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В данном разделе мы используем некоторые соображения, взятые из работы [8] и используемые также в предыдущих подобных работах, упоминавшихся выше (в частности, [3, 6]).

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R , $\mathbb{3} \in J$, k — поле вычетов R/J характеристики $\mathbb{3}$, $E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ — нормальная подгруппа в группе Шевалле $G(R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, порождённая всеми элементами $x_\alpha(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in J$. Тогда E_J — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $G(R)$ (см. [12, 13, 28]). Следовательно, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ .

Таким образом, автоморфизм

$$\varphi: E_{\text{ad}}(\Phi, R) \rightarrow E_{\text{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}: E_{\text{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, k) \rightarrow E_{\text{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\text{ad}}(\Phi, k)$ является присоединённой группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\bar{\varphi}$ стандартен (см. [36]), то есть имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}} \bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho},$$

где $\bar{g} \in N(E_{\text{ad}}(\Phi, k))$, $\bar{\delta}$ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\bar{\rho}$ — полевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k .

Ясно, что существует матрица $g \in \text{GL}_n(R)$, образ которой при факторизации R по J совпадает с \bar{g} . При этом отметим, что мы не можем быть уверены в том, что $g \in N(E_{\text{ad}}(\Phi, R))$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi' = i_{g^{-1}} \varphi.$$

Это изоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R) \subset \text{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\text{GL}_n(R)$, причём при факторизации R по J он переходит в точности в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

До конца этого раздела временно предположим, что диаграммного автоморфизма $\bar{\delta}$ нет в композиции, то есть $\varepsilon = 0$ и изоморфизм φ' при факторизации по J переходит в автоморфизм $\bar{\rho}$. Тогда проведённые рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая матрица $A \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R_1 в R , порождённого единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества*

$$A \cdot \text{GL}_n(R, J) = \{B \in \text{GL}_n(R) \mid A - B \in \text{M}_n(J)\}$$

(иными словами, её образ является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала J).

Пусть $a \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, $a^2 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{2}(1 + a)$$

является идемпотентом в кольце $M_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2a + a^2) = \frac{1}{4}(2 + 2a) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного R -модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [33]). Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — соответствующее разложение k -модуля (линейного пространства) $\bar{V} \cong k^n$ относительно \bar{a} и

$$\bar{e} = \frac{1}{2}(1 + \bar{a}).$$

Предложение 2. *Модули (подпространства) \bar{V}_0, \bar{V}_1 являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J .*

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через \tilde{V}_0, \tilde{V}_1 соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a})(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a}(\bar{x})) = \frac{1}{2}(1 + \overline{a(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\tilde{V}_0 \subset \bar{V}_0, \tilde{V}_1 \subset \bar{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1, x_0 \in V_0, x_1 \in V_1$. Тогда $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0$. Если $\bar{x} \in \tilde{V}_0$, то $\bar{x} = \bar{x}_0$. \square

Пусть теперь для матрицы a с целыми элементами $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^2 = 1$ и, согласно предложению 1, b сравнима с a по модулю радикала J .

Предложение 3. *Предположим, что $a, b \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, $a^2 = b^2 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R_1 в R , порождённого единицей, b и a сравнимы по модулю радикала J , $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a , $V = V'_0 \oplus V'_1$ — разложение V относительно b . Тогда $\dim V'_0 = \dim V_0$, $\dim V'_1 = \dim V_1$.*

Доказательство. Мы имеем R -базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля V , такой что $\{e_1, \dots, e_k\} \subset V_0$, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset V_1$. Ясно, что

$$\bar{a}\bar{e}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ji}\bar{e}_j.$$

Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$, $\bar{V}' = \bar{V}'_0 \oplus \bar{V}'_1$ — разложения k -модуля (пространства) \bar{V} относительно \bar{a} и \bar{b} . Ясно, что $\bar{V}_0 = \bar{V}'_0$, $\bar{V}_1 = \bar{V}'_1$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V'_0 , V_1 и V'_1 при факторизации по радикалу J совпадают. Возьмём такие $\{f_1, \dots, f_k\} \subset V'_0$, $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset V'_1$, что $\bar{f}_i = \bar{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{f_1, \dots, f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала J), то $\{f_1, \dots, f_n\}$ — это R -базис в V . Ясно, что тогда $\{f_1, \dots, f_k\}$ является R -базисом в V'_0 , а $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ — R -базисом в V'_1 . \square

Следствие 1. *В условиях предыдущего предложения для матрицы b существует некоторый базис модуля V , в котором b имеет тот же вид, что и матрица a в исходном базисе. Таким образом, матрицы a и b сопряжены.*

3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец, которым далее будем активно пользоваться. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце R имеет лишь нулевое решение в радикале кольца. Он был описан и использовался во многих аналогичных работах, перечисленных

выше; здесь мы для удобства приведём теорему и один простой пример, иллюстрирующий применение метода (см., например, [6]).

Теорема 4. Пусть R — локальное кольцо, и дана система полиномиальных уравнений вида $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, где все входящие полиномы $P_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ с коэффициентами в кольце R и, кроме того, для каждого i выполнено $P_i(0, \dots, 0) = 0$ (то есть это полиномы без свободного члена). Пусть \bar{P}_i — приведённые по модулю радикала $J = \text{Rad}(R)$ линеаризации P_i , то есть \bar{P}_i содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведённые по модулю радикала. Тогда если система $\bar{P}_i = 0$ имеет единственное нулевое решение $x_j = 0$, то исходная система в радикале J имеет единственное решение $x_j = 0$ ($x_j \in J$).

Доказательство. Система уравнений $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ может быть представлена в виде $A(x_1, \dots, x_n)x = 0$, где A — матрица, зависящая от переменных x_j . Тогда если определитель матрицы A сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца R (который не зависит от переменных x_j , так как они лежат в радикале), то можно явно выразить решение $x = (A(x))^{-1}0 = 0$ и получить, что $x = 0$ (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала, обратим). Но определитель матрицы $A(x)$ сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения исходной полиномиальной системы в радикале является обратимость матрицы линеаризованной системы, то есть единственность нулевого решения для линеаризованной системы. \square

Замечание 4. Отметим, что способ получения указанной матрицы $A(x)$ неоднозначен, однако её линеаризация однозначна.

Пример 1. Пусть R — локальное кольцо с необратимой тройкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 3y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0. \end{cases}$$

Её приведённая по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

определитель матрицы равен -1 и обратим, поэтому нулевое решение единственно. Следовательно, по теореме исходная система тоже имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

С другой стороны, для исходной системы можно убедиться в единственности нулевого решения в радикале непосредственно. Перепишем её в следующем виде:

$$\begin{cases} x + (3 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = (1 + y)^{-1}y$, подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$((1 + y)^{-1} + (3 - x))y = 0.$$

Так как коэффициент при y обратим (как сумма обратимого и необратимого элементов локального кольца), получаем, что $y = 0$, значит, и $x = 0$.

4. Образы элементов $w_\alpha(1)$, $x_\alpha(1)$

Напомним, что мы перешли к изоморфизму φ' , который при факторизации R по J переходит в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

Рассмотрим матрицы

$$h_\alpha(-1) = \omega_\alpha^{-2} = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \Phi$$

(вид некоторых из этих матриц в выбранном базисе можно найти в приложении). Это диагональные матрицы порядка 2 с элементами ± 1 на диагонали, причём все они содержат одинаковое количество элементов -1 . Значит, по следствию 1 образ $h_\alpha(-1)$ при изоморфизме сопряжён $h_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(-1)$.

Лемма 1. *Образы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ можно сопряжением одновременно привести к $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. Поскольку образы коммутирующих матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ также коммутируют, их можно привести к диагональному виду. При изоморфизме у матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ не меняются собственные значения и их кратности, значит, диагональный вид останется таким же с точностью до перестановки элементов на диагонали. Следовательно, можно произвести сопряжение (заменой базиса) и привести образы матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ к диагональному виду, а затем выполнить сопряжение матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$.

В случае $\varepsilon = 1$ аналогичное рассуждение даёт нужный результат. \square

Теперь будем считать, что мы заменили исходный изоморфизм новым, переводящим $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ в $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.

Рассмотрим матрицы $x_\alpha(1)$, $w_\alpha(1) = \omega_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Лемма 2. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}.$$

Доказательство. В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$ выполнено, в числе прочих, следующее соотношение (см. [36]):

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha \beta}(\pm t), \quad (2)$$

где знак зависит только от корней α, β (и не зависит ни от t , ни от выбора базиса), причём этот знак совпадает для пар корней α, β и $\alpha, -\beta$. В частности, отсюда легко получить такое же соотношение для $w_\beta(t)$, $t \in R^*$:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha w_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} &= \omega_\alpha (x_\beta(t) x_{-\beta}(-t^{-1}) x_\beta(t)) \omega_\alpha^{-1} = \\ &= x_{w_\alpha \beta}(\pm t) x_{-w_\alpha \beta}(\mp t^{-1}) x_{w_\alpha \beta}(\pm t) = w_{w_\alpha \beta}(\pm t). \end{aligned} \quad (3)$$

Если в каком-то соотношении должен быть выбран знак минус, то достаточно потом обратить полученную матрицу, поскольку в силу (1) $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$ и $w_\alpha(-t) = (w_\alpha(t))^{-1}$.

Группа Вейля системы корней порождается простыми отражениями, а также действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ и используя соотношения (3) (при $t = 1$), можно выразить все матрицы ω_α , $\alpha \in \Phi$.

Аналогично, так как α_1, α_2 — корни двух возможных различных длин, снова благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины можно из соотношений (2) (при $t = 1$) выразить все матрицы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$. \square

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из $\text{GL}_n(R, J)$ (то есть сравнимой с единичной по модулю радикала J), которое переведёт образы матриц $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ в матрицы $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1), x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1), \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}$ соответственно, то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$, причём по-прежнему при факторизации R по J она будет переходить в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \bar{\rho}$.

Лемма 3. *Указанное сопряжение существует.*

Доказательство. Пользуясь предложением 1, обозначим образы матриц $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ через $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1) + A, x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1) + B, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)} + C, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)} + D$, где $A, B, C, D \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы.

В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$ выполнено следующее соотношение на коммутатор соответствующих корневых элементов (см. [36]):

$$(x_\alpha(t), x_\beta(u)) = \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi, \\ i, j \in \mathbb{N}}} x_{i\alpha + j\beta}(c_{ij} t^i u^j), \quad (4)$$

где $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ — групповой коммутатор (обозначаемый для удобства круглыми скобками, чтобы не путать с коммутатором в алгебре Ли), произведение в правой части берётся по всем корням $i\alpha + j\beta$, $i, j \in \mathbb{N}$, расположенным в некотором фиксированном порядке, а c_{ij} —

целые числа, зависящие только от α, β и от выбранного порядка корней (и не зависящие от t, u), причём если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $c_{11} = N_{\alpha\beta}$. В случае нашей системы корней Φ типа \mathbf{G}_2 произведение в правой части всегда состоит не более чем из четырёх элементов, и все коэффициенты c_{ij} принимают значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Ещё раз подчеркнём, что благодаря целочисленности c_{ij} все участвующие в соотношении корневые элементы легко выражаются через соответствующие корневые элементы без коэффициентов c_{ij} — достаточно воспользоваться свойством (1).

Итак, рассмотрим набор образов всех соотношений вида (2), (3), (4) при $t = u = 1$, а также соотношений $h_{\alpha_i}(-1) = \omega_{\alpha_i}^2$, $i = 1, 2$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц A, B, C, D , то есть относительно $4n^2 = 4 \cdot 14^2 = 784$ переменных из радикала. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что $A = B = C = D = 0$. Однако компьютерное вычисление показывает, что это не так, линеаризованная система, приведённая по модулю радикала J (отметим, что в результате все коэффициенты такой системы будут равны 0 или ± 1), может иметь ненулевое решение, а именно, её ранг равен 732 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$). Это означает, что действительно требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует такое сопряжение, которое сохраняет $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ и при этом позволяет занулить ровно 52 переменные (то есть после этого сопряжения соответствующие элементы матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц). Таким образом, получаем систему относительно $784 - 52 = 732$ переменных, приведённая по модулю радикала линеаризация которой оказывается системой полного ранга, равного 732, и поэтому имеет только нулевое решение, откуда по теореме о линеаризации заключаем, что $A = B = C = D = 0$ и найденное сопряжение является искомым. \square

5. Образы элементов $x_\alpha(t)$

Итак, на данном этапе изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$.

Следствие 2. Если $\varepsilon = 1$, то кольцо R имеет характеристику 3.

Доказательство. Рассмотрим корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ и следующие соотношения вида (4):

$$(x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_6}(1)) = 1,$$

$$(x_{\alpha_2}(1), x_{\alpha_4}(1)) = x_{\alpha_5}(\pm 3).$$

Поскольку $\delta(\alpha_1) = \alpha_2, \delta(\alpha_6) = \alpha_4$, отсюда сразу следует $\pm 3 = 0$ в R . \square

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon = 0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon = 1$, где $t \mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [36]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t') + T$ ($\varepsilon = 0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)}) + T$ ($\varepsilon = 1$), где $T \in M_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T = 0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и, соответственно, T . Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 5. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t \mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t' , что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 4. Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:

$$\omega_\alpha, \alpha \in \Phi; \quad x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(t).$$

Доказательство. По аналогии с леммой 2, данное утверждение сразу следует из соотношений (2), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1, α_2 — это корни двух возможных различных длин. \square

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_2}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t') + S$ и $x_{\alpha_2}(t') + T$ соответственно ($\varepsilon = 0$) или через $x_{\alpha_2}(t') + S$ и $x_{\alpha_1}((t')^3) + T$ соответственно ($\varepsilon = 1$), где $S, T \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из

радикала J . Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{7,11} = 0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $S = T = 0$.

Возьмём набор образов тех соотношений вида (2) и (4), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T , то есть (с учётом условия $T_{7,11} = 0$) относительно $2n^2 - 1 = 2 \cdot 14^2 - 1 = 391$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 391 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что $S = T = 0$.

6. Доказательство теоремы 2

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon = 0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon = 1$). Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через $\rho: R \rightarrow R$.

Лемма 5. *Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.*

Доказательство. Инъективность отображения ρ , а также эндоморфизма F при $\varepsilon = 1$, очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0) = 1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (4) для корней α_1 и α_5 :

$$(x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_5}(u)) = x_{\alpha_1 + \alpha_5}(tu) = x_{\alpha_6}(tu)$$

(это рассуждение остаётся в силе и при $\varepsilon = 1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). \square

Следствие 3. *Отображение ρ является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R' ; в случае $\varepsilon = 1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F .*

Теперь докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R . Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы $C \in \text{GL}(V)$ выполнено

$$i_C \varphi(E_{\text{ad}}(\Phi, R)) = CE_{\text{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$$

(причём при $\varepsilon = 0$ имеет место равенство). Покажем, что $R' = R$.

Лемма 6. *Если для некоторого $C \in \text{GL}(V)$ имеет место включение $CE_{\text{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$, где R' — подкольцо в R , то $R' = R$.*

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij} . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} ((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 &= E_{6,12}, \\ \omega_{\alpha_6}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 \omega_{\alpha_6}^{-1} &= E_{12,6}. \end{aligned}$$

Произведение этих матричных единиц даёт матричную единицу $E_{6,6}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции (6, 6) равен t . Таким образом, с помощью нашей группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{6,6}$, где $t \in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R . Так как $CE_{\text{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\text{ad}}(\Phi, R')$, то подкольцо кольца $M_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $M_n(R')$, порождённое элементами группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{6,6})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R' .

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов i, j , что элементы $C_{i,6}$

и $(C^{-1})_{6,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,6}t(C^{-1})_{6,j} = (C(tE_{6,6})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

то есть

$$C_{i,6}R^*(C^{-1})_{6,j} = R^* \subset R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^* , поэтому в действительности $R \subset R'$, что даёт требуемое равенство $R' = R$. \square

Следствие 4. *Отображение ρ является автоморфизмом кольца R ; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R , то есть в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 3. При этом выполнено $CE_{\text{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.*

Таким образом, показано, что композиция $i_C\varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \text{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon\rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.

7. Доказательство теоремы 3

Пусть $C \in \text{GL}_n(R)$ — матрица из нормализатора группы $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Наша цель — показать, что $C \in R^* \cdot G(R)$.

Если J — максимальный идеал (радикал) кольца R , то матрицы из $M_n(J)$ образуют радикал в кольце матриц $M_n(R)$, поэтому

$$C \cdot M_n(J) \cdot C^{-1} = M_n(J),$$

следовательно,

$$C \cdot (1 + M_n(J)) \cdot C^{-1} = 1 + M_n(J),$$

то есть

$$C \cdot E_{\text{ad}}(\Phi, R, J) \cdot C^{-1} = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J),$$

так как $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J) = E_{\text{ad}}(\Phi, R) \cap (1 + M_n(J))$. Значит, образ \bar{C} матрицы C при факторизации кольца R по радикалу J индуцирует автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(k) = E_{\text{ad}}(\Phi, k)$, где k — поле вычетов R/J характеристики 3.

Лемма 7. *Любой автоморфизм-сопряжения группы Шевалле типа \mathbf{G}_2 над полем k характеристики 3 является внутренним.*

Доказательство. Предположим, что некоторая матрица $C \in \text{GL}_n(k)$ лежит в нормализаторе группы $G(k)$. Тогда автоморфизм-сопряжение i_C стандартен (см. [36]), то есть $i_C = i_g \circ \delta^\varepsilon \circ \rho$, где $g \in G(k)$, δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — полевой автоморфизм. Следовательно, $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \delta^\varepsilon\rho$, $C' \in \text{GL}_n(k)$. Заметим, что для любого $\alpha \in \Phi$ выполнено $\delta^\varepsilon\rho(x_\alpha(1)) = \delta^\varepsilon(x_\alpha(1)) = x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$.

Допустим, что $\varepsilon = 1$. Тогда имеем $C'x_\alpha(1) = x_{\delta(\alpha)}(1)C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Достаточно записать эти соотношения, рассматриваемые как уравнения относительно неизвестной матрицы $C' \in M_n(k)$, для корней, положительно порождающих всю систему, а именно $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$. Вычисление показывает, что пространство решений полученной системы линейных уравнений над полем k одномерно и не содержит решений, соответствующих обратимым матрицам. Это приводит к противоречию с предположением $\varepsilon = 1$.

Таким образом, $\varepsilon = 0$ и $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \rho$, то есть сопряжение матрицей C' задаёт полевой автоморфизм ρ . Значит, $C'x_\alpha(1) = x_\alpha(1)C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Следовательно, матрица C' скалярна и автоморфизм i_C — внутренний. \square

Из леммы 7 следует, что $i_{\bar{C}} = i_{g'}$, $g' \in G(k)$. Возьмём произвольный элемент $g \in G(R)$, для которого выполнено $\bar{g} = g'$, и рассмотрим матрицу $C' = g^{-1} \cdot C$. Очевидно, эта матрица также нормализует группу $G(R)$, при этом $\bar{C}' = 1$. Таким образом, описание матриц из нормализатора группы $G(R)$ сведено к описанию матриц из нормализатора данной группы, сравнимых с единичной по модулю радикала J .

Далее будем считать, что изначальная матрица C сравнима с единичной по модулю радикала: $C = 1 + Y$, $Y \in M_n(J)$.

Для каждого $\alpha \in \Phi$ имеет место равенство

$$Cx_\alpha(1)C^{-1} = x_\alpha(1) \cdot g_\alpha, \quad g_\alpha \in E_{\text{ad}}(\Phi, R, J),$$

или, эквивалентно,

$$Cx_\alpha(1) = x_\alpha(1)g_\alpha C. \quad (5)$$

Любой элемент $g_\alpha \in E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ можно разложить в произведение вида

$$t_{\alpha_1}(1 + a_{\alpha_1,1})t_{\alpha_2}(1 + a_{\alpha_2,2})x_{\alpha_1}(b_{\alpha_1,1}) \cdots x_{\alpha_6}(b_{\alpha_6,6})x_{-\alpha_1}(c_{\alpha_1,1}) \cdots x_{-\alpha_6}(c_{\alpha_6,6}),$$

где $a_{\alpha_1,1}, a_{\alpha_2,2}, b_{\alpha_1,1}, \dots, b_{\alpha_6,6}, c_{\alpha_1,1}, \dots, c_{\alpha_6,6} \in J$ (см., например, [12]).

Рассматривая набор соотношений вида (5) для корней $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$, положительно порождающих всю систему, мы получаем систему полиномиальных уравнений относительно неизвестных $Y_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$, лежащих в радикале. Однако чтобы иметь возможность применить к ней метод линеаризации, необходимо произвести некоторые дополнительные преобразования.

Заметим, что при умножении матрицы C на матрицы из $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ и на скаляры, сравнимые с 1 по модулю радикала J , по-прежнему получается матрица из нормализатора группы $G(R)$, сравнимая с единичной по модулю J .

Лемма 8. *Существует такой набор элементов $d, a_1, a_2 \in 1 + J$, $b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6 \in J$, что для матрицы*

$$\begin{aligned} C' = & d \cdot t_{\alpha_1}(a_1)t_{\alpha_2}(a_2) \\ & \cdot x_{-\alpha_2}(b_2)x_{-\alpha_6}(b_6)x_{-\alpha_5}(b_5)x_{-\alpha_4}(b_4)x_{-\alpha_3}(b_3)x_{-\alpha_1}(b_1) \\ & \cdot C \\ & \cdot x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_3}(c_3)x_{\alpha_4}(c_4)x_{\alpha_5}(c_5)x_{\alpha_6}(c_6)x_{\alpha_2}(c_2) \end{aligned}$$

выполнено $C' = 1 + Y'$, где $Y' \in M_n(J)$ содержит нули на конкретных $n + 1 = 15$ позициях (явно указанных в доказательстве).

Доказательство. Положим $C^{(0)} = C$.

Рассмотрим позицию (α_5, α_6) и умножим $C^{(0)}$ слева на $x_{-\alpha_1}(-C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(0)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(0)})$. В результате получим матрицу $C^{(1)}$, у которой $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(1)} = 0$.

Рассмотрим позицию (α_4, α_6) и умножим $C^{(1)}$ слева на $x_{-\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(1)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(1)})$. Получим матрицу $C^{(2)}$, у которой $C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(2)} = 0$ и при этом также сохраняется $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(2)} = 0$, так как в матрице $x_{-\alpha_3}(t)$ строка, соответствующая α_5 , содержит лишь диагональную единицу и все остальные нули.

Рассмотрим позицию (α_3, α_6) и умножим $C^{(2)}$ слева на $x_{-\alpha_4}(C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(2)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(2)})$. Получим матрицу $C^{(3)}$, у которой $C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(3)} = 0$ и при этом все предыдущие нулевые позиции также остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_1, α_6) и умножим $C^{(3)}$ слева на $x_{-\alpha_5}(C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(3)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(3)})$. Получим матрицу $C^{(4)}$, у которой $C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(4)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (h_1, α_6) и умножим $C^{(4)}$ слева на $x_{-\alpha_6}(C_{h_1, \alpha_6}^{(4)}/(2C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(4)}))$. Получим матрицу $C^{(5)}$, у которой $C_{h_1, \alpha_6}^{(5)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_5) и умножим $C^{(5)}$ слева на $x_{-\alpha_2}(-C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(5)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(5)})$. Получим матрицу $C^{(6)}$, у которой $C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(6)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Далее рассмотрим позицию (α_6, α_5) и умножим $C^{(6)}$ уже справа на $x_{\alpha_1}(-C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(6)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(6)})$. Получим матрицу $C^{(7)}$, у которой $C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(7)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_2) и умножим $C^{(7)}$ справа на $x_{\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(7)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(7)}))$. Получим матрицу $C^{(8)}$, у которой $C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(8)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, h_2) и умножим $C^{(8)}$ справа на $x_{\alpha_4}(C_{\alpha_4, h_2}^{(8)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(8)})$. Получим матрицу $C^{(9)}$, у которой $C_{\alpha_4, h_2}^{(9)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_4, -\alpha_2)$ и умножим $C^{(9)}$ справа на $x_{\alpha_5}(C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(9)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(9)})$. Получим матрицу $C^{(10)}$, у которой $C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(10)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_5, -\alpha_1)$ и умножим $C^{(10)}$ справа на $x_{\alpha_6}(C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(10)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(10)})$. Получим матрицу $C^{(11)}$, у которой $C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(11)} = 0$ и все предыдущие нуле-

вые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_3) и умножим $C^{(11)}$ справа на $x_{\alpha_2}(C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(11)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(11)}))$. Получим матрицу $C^{(12)}$, у которой $C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(12)} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Таким образом, матрица $C^{(12)}$ содержит ровно 12 (недиагональных) нулевых позиций.

Положим $C^{(13)} = (C_{h_1, h_1}^{(12)})^{-1} \cdot C^{(12)}$. Тогда $C_{h_1, h_1}^{(13)} = 1$, то есть $Y_{h_1, h_1}^{(13)} = 0$, при этом, очевидно, все предыдущие нулевые позиции сохраняются.

Осталось применить умножения на диагональные матрицы t_{α_1} и t_{α_2} . Заметим, что у $t_{\alpha_1}(a)$ на позиции (α_6, α_6) стоит a и на позиции (α_4, α_4) стоит 1, а у $t_{\alpha_2}(a)$ на позиции (α_4, α_4) стоит a и на позиции (α_6, α_6) стоит 1, при этом у обеих матриц на позиции (h_1, h_1) стоит 1. Следовательно, если положить $C' = C^{(15)} = t_{\alpha_1}((C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(13)})^{-1}) \cdot t_{\alpha_2}((C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(13)})^{-1}) \cdot C^{(13)}$, то получим $C'_{\alpha_4, \alpha_4} = C'_{\alpha_6, \alpha_6} = 1$, то есть $Y'_{\alpha_4, \alpha_4} = Y'_{\alpha_6, \alpha_6} = 0$, при этом все предыдущие нулевые позиции также сохраняются. \square

Итак, рассмотрим матрицу $C' = 1 + Y'$ из леммы 8. Как уже отмечалось, C' по-прежнему нормализует группу $G(R)$ и сравнима с единичной по модулю J .

Теперь вернёмся к системе уравнений вида (5). Аналогичные уравнения справедливы для матрицы C' . Имеем систему уравнений относительно $n^2 - (n + 1) + 4n = 237$ неизвестных $Y'_{ij}, a_{\alpha, i}, b_{\alpha, i}, c_{\alpha, i}$, лежащих в радикале. Как показывает вычисление, линейаризация данной системы является системой полного ранга, равного 237, поэтому имеет единственное нулевое решение. По теореме о линейаризации отсюда, в частности, следует, что $Y' = 0$, то есть $C' = 1$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Основная теорема 1 теперь немедленно следует из доказанных теорем 2 и 3.

Автор выражает благодарность Елене Игоревне Буниной за внимание к работе, ценные замечания и консультации.

8. Приложение

8.1. Знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$

Напомним, что при $\alpha + \beta \in \Phi$ структурные константы $N_{\alpha\beta}$ базиса Шевалле выражаются формулой

$$N_{\alpha\beta} = \pm(r + 1),$$

где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Как уже упоминалось в работе, существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$. Более подробные сведения об этом можно найти, например, в [27, 34]. Готовые таблицы структурных констант для систем корней некоторых типов можно также найти, например, в [20, 29].

8.2. Построение представления, некоторые элементы группы Шевалле

В пространстве представления возьмём следующий базис:

$$v_1 = x_{\alpha_1}, \dots, v_6 = x_{\alpha_6},$$

$$v_7 = x_{-\alpha_1}, \dots, v_{12} = x_{-\alpha_6},$$

$$v_{13} = h_1, v_{14} = h_2.$$

Выпишем, к примеру, образы элементов x_α базиса, соответствующих простым корням, а также некоторые элементы группы Шевалле:

$$h_{\alpha_1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 000 & 0 \\ 0 & -1 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 000 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 00 & -1 & 00 & 0 & 00 & 0 & 000 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & -1 & 0 & 0 & 00 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 1 & 0 & 00 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & -1 & 00 & 0 & 000 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & -1 & 0 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 0 & 1 & 0 & 000 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & -1 & 00 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & -1 & 00 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 00 & 0 & 0 & 01 \end{pmatrix}, \quad h_{\alpha_2}(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0000 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 00 & 0 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & -1 & 0 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & -1 & 0 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & -1 & 0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0 & -1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0 & 010 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 0 & 0 & 0 & 001 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

- [1] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов \mathbf{B}_2 и \mathbf{G}_2 над локальными кольцами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3–29.
- [2] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа \mathbf{B}_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3–46.
- [3] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов \mathbf{A}_ℓ , \mathbf{D}_ℓ , \mathbf{E}_ℓ над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47–80.
- [4] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов \mathbf{A}_ℓ , \mathbf{D}_ℓ , \mathbf{E}_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35–59.
- [5] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов \mathbf{A}_ℓ , \mathbf{D}_ℓ , \mathbf{E}_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // *Алгебра и логика.* — 2009. — Т. 48, вып. 4. — С. 443–470.
- [6] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа \mathbf{G}_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49–66.
- [7] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа \mathbf{G}_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 57–62.
- [8] Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n , GL_n над некоторыми локальными кольцами // *Мат. заметки.* — 1980. — Т. 28, вып. 2. — С. 187–204.
- [9] Петечук В. М. Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$ // *Мат. заметки.* — 1982. — Т. 31, вып. 5. — С. 657–668.
- [10] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // *Мат. сб.* — 1982. — Т. 117, вып. 4. — С. 534–547.

- [11] Шевалле К. О некоторых простых группах // Математика: Период. сб. перев. иностр. статей. — 1958. — Т. 2, вып. 1. — С. 3–53.
- [12] Abe E. Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474–494.
- [13] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. — 1989. — Vol. 83. — P. 1–17.
- [14] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Analysis. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74–90.
- [15] Borel A., Tits J. Homomorphismes “abstraites” de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 97, no. 3. — P. 499–571.
- [16] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie. — Hermann, 1968.
- [17] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with $1/2$ // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323, no. 8. — P. 2270–2289.
- [18] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154–170.
- [19] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Comm. Algebra. — 2024. — Vol. 52, no. 6. — P. 2313–2327.
- [20] Carter R. W. Simple groups of Lie type. — London: Wiley, 1989.
- [21] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155, no. 1. — P. 44–94.
- [22] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231–237.
- [23] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over \mathbb{Q} -algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 47, no. 1. — P. 81–97.

- [24] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357–2361.
- [25] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 521–541.
- [26] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226, no. 2. — P. 719–741.
- [27] Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E. Computing in groups of Lie type // Math. Comp. — 2004. — Vol. 73, no. 247. — P. 1477–1498.
- [28] Costa D. L., Keller G. E. On the normal subgroups of $\mathbf{G}_2(A)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 351, no. 12. — P. 5051–5088.
- [29] Gilkey P. B., Seitz G. M. Some representations of exceptional Lie algebras // Geom. Dedicata. — 1988. — Vol. 25. — P. 407–416.
- [30] Humphreys J. E. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908–911.
- [31] Humphreys J. E. Introduction to Lie algebras and representation theory. — New York: Springer, 1978.
- [32] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. — 2010. — Vol. 324, no. 10. — P. 2608–2619.
- [33] McDonald B. R. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 215. — P. 145–159.
- [34] Samelson H. Notes on Lie algebras. — New York: Springer, 1990.
- [35] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 12. — P. 606–615.
- [36] Steinberg R. Lectures on Chevalley groups. — Yale Univ., 1967.

- [37] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings.
I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. —
P. 73–113.