

ПОЛНЫЙ ДИАПАЗОН СКОРОСТЕЙ  
СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ БИРКГОФА  
ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ  
И. В. Подвигин, В. В. Рыжиков

**Аннотация.** Для эргодического потока реализуется диапазон скоростей сходимости средних Биркгофа от максимальной скорости до сколь угодно медленной путем подбора усредняемой функции. Для обмоток тора при этом обеспечена непрерывность усредняемых функций. Это дополняет классический результат Кренгеля о медленных скоростях сходимости средних для эргодических автоморфизмов.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

**Ключевые слова:** скорости сходимости в эргодических теоремах, специальное представление потока, одомер, обмотка тора.

*Качуровскому Александру Григорьевичу  
по случаю его 65-летия*

### 1. Введение

Для эргодического сохраняющего меру потока  $T_t$  на вероятностном пространстве  $(X, m)$  и функции  $f \in L_1(X, m)$  теорема Биркгофа утверждает, что временные средние

$$A(f, t, x) := \frac{1}{t} \int_0^t f(T_s x) ds$$

сходятся для почти всех  $x \in X$  к пространственному среднему  $\int f dm$ .

Для некоторых функций указанная сходимость может быть равномерной. Именно такая сходимость фигурирует в настоящей статье. Наша цель — показать управление скоростью сходимости средних путем подбора усредняемой функции. Последняя ищется в виде функционального ряда. В результате для заданного потока реализуется диапазон скоростей от так называемой максимальной скорости до сколь угодно медленной. Для эргодических обмоток тора при этом найдены непрерывные реализации усредняемых функций. Мы также рассмотрим общий случай эргодических потоков без периодических траекторий. Здесь применяется теорема Рудольфа о специальном представлении потока, когда функция возвращения мало отличается от константы. Теорему Рудольфа можно рассматривать как непрерывный аналог леммы Рохлина — Халмоша. Следует отметить, что Кренгель в работе [1] использовал эту лемму, а в [2] для

---

Работа Подвигина И.В. выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 6 FWNF-2026-0022).

медленных сходимостей применялось деликатное обобщение леммы Рохлина — Халмоша, принадлежащее Альперну [3]. Эффект замедления скорости сходимости возможен и в случае весовых усреднений, что показано в [4]. Замечательно, что в определенных ситуациях весовые усреднения дают сверхбыстрые сходимости со скоростью  $o(\frac{1}{t})$ , см. [5]. В предлагаемой статье рассматриваются только классические средние Биркгофа, для которых максимальная скорость сходимости средних не может быть  $o(\frac{1}{t})$  в случае ненулевой усредняемой функции.

## 2. Сходимость с максимальной скоростью

Пусть  $X = [0, 1)$ , в качестве потока рассмотрим вращение окружности, т. е.  $T_t x = \{x + t\}$  (дробная часть суммы  $x + t$ ). Очевидно, что для функции  $f \in L_1(X, m)$  с нулевым средним для всех  $x$  выполнено  $A(f, t, x) = 0$  при  $t \in \mathbb{Z}$  и

$$|A(f, t, x)| \leq \frac{\|f\|_1}{t}, \quad t > 0.$$

Таким образом, сходимость в теореме Биркгофа равномерная с максимальной возможной скоростью (скорость вида  $o(1/t)$  может быть только в случае нулевой функции) [6]. Отметим, что дискретные суммы Биркгофа могут вести себя совсем иначе (см., например, [7, 8]).

Выше мы упомянули вырожденный случай, когда все фазовое пространство потока является периодической траекторией. Максимальная скорость сходимости средних возникает и в неэргодическом случае, когда каждая точка фазового пространства имеет ограниченную (периодическую) траекторию. А именно, пусть  $\mathcal{P}(x)$  — период точки  $x \in X$  относительно потока  $T_t$ , т. е. такое минимальное число  $t > 0$ , что  $T_t x = x$ ; полагаем для непериодических точек  $\mathcal{P}(x) = \infty$ . Если  $\mathcal{P} \in L_\infty(X, m)$ , то сходимость эргодических средних также будет с максимальной скоростью, но уже, вообще говоря, не равномерная. Действительно, полагая  $0 < t = N\mathcal{P}(x) + r$ ,  $0 \leq r < \mathcal{P}(x)$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left| A(f, t, x) - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\mathcal{P}(x)}^{(k+1)\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds + \frac{1}{t} \int_{N\mathcal{P}(x)}^t f(T_s x) ds - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds \right| \\ &= \left| \left( \frac{N}{t} - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \right) \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds + \frac{1}{t} \int_0^r f(T_s x) ds \right| \leq \frac{2}{t} \int_0^{\mathcal{P}(x)} |f(T_s x)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, наличие медленных скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа связано с неограниченностью (т. е. непериодичностью) траекторий потока. Ниже будем рассматривать только такие случаи.

**Пример специального эргодического потока.** Пусть  $S : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  — биекция, сохраняющая меру Лебега  $\mu$  на  $[0, 1)$ . Определим поток  $T_t$  на  $[0, 1) \times [0, 1)$ , действие которого описывается так: все точки  $(x, y)$  из  $[0, 1) \times [0, 1)$  движутся с единичной скоростью вертикально вверх до встречи с границей

квадрата, т. е.  $T_t(x, y) = (x, y + t)$ . При достижении граничной точки  $(x, 1)$  перескакивают в  $(Sx, 0)$  и далее продолжают движение вверх, пока не окажутся в  $(S^2x, 0)$  и т. д. Мы склеили точку  $(x, 1)$  с  $(Sx, 0)$ , точки движутся с постоянной скоростью, и при этом движении сохраняется площадь (т. е. мера  $m = \mu \times \mu$  на квадрате). Полученный поток эргодичен относительно меры  $m$  только в случае эргодичности преобразования  $S$  относительно меры Лебега  $\mu$  на отрезке. Такой поток называют специальным потоком над автоморфизмом  $S$  с постоянной функцией возвращения.

Заметим, что для не зависящей от  $x$  функции на  $[0, 1) \times [0, 1)$  с нулевым средним утверждение о равномерной сходимости с максимальной скоростью в теореме Биркгофа очевидно (аргументация не отличается от случая вращения окружности). Далее рассматривается специальный поток над 2-одометром с постоянной функцией возвращения.

**Диадический одометр.** Рассмотрим 2-одометр  $S$ , он действует на отрезке  $[0, 1)$  следующим образом. Для всякого разбиения отрезка  $[0, 1)$  на  $2^n$  отрезков вида  $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$  преобразование  $S$  циклически переставляет эти маленькие отрезки. При этом каждый такой отрезок переходит в себя при действии степени  $S^{2^n}$ . А ограничение этой степени на маленький отрезок подобно исходному одометру.

Дадим явное определение такого преобразования  $S$ . Число  $x \in [0, 1)$  представим в двоичной записи:  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ . Положим

$$S(0, 0 \dots) = (0, 1 \dots), \quad S(0, 10 \dots) = (0, 01 \dots),$$

$$S(0, \underbrace{11 \dots 11}_m 0 \dots) = (0, \underbrace{00 \dots 00}_m 1 \dots),$$

где остальные разряды, обозначенные многоточием, остаются без изменений. Одометр также называется адическим сдвигом, машиной сложения, преобразованием фон Неймана, автоморфизмом с двоично-рациональным спектром. На рис. 1 изображен его (самоподобный) график.

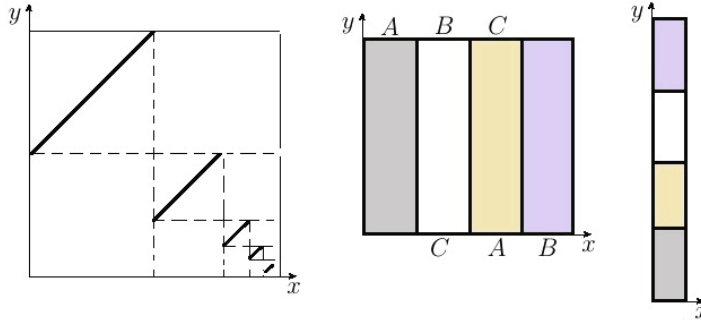


Рис. 1. Самоподобный график 2-одометра (слева); реализация  $M_n$ ,  $n = 2$ , с помощью потока над 2-одометром (справа).

**Специальный поток над одометром.** Для изучения потока над 2-одометром мы будем для всякого  $n \in \mathbb{N}$  отождествлять пространство  $M = [0, 1) \times [0, 1)$  с прямоугольником  $M_n = [0, \frac{1}{2^n}) \times [0, 2^n)$ .

Квадрат  $M$  есть объединение кусков траекторий длины 1 для точек, принадлежащих нижней границе. Но  $M$  можно представить как  $M_n$  — объединение траекторий длины  $2^n$  для точек из отрезка  $[0, 2^{-n}) \times \{0\}$ . На рис. 1 изображено это для  $n = 2$ . Введем координаты  $x_n, y_n$  на таком прямоугольнике  $M_n$ .

Рассмотрим функции  $f \in L_1(M)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- (1)  $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$ , где  $f_n \in L_1(M_n)$  такие, что
- (2)  $\int_0^{2^n} f_n(x_n, y_n) dy_n = 0$  для каждого  $x_n \in [0, 2^{-n})$  и
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,1} < \infty$ , где  $\|f_n\|_{\infty,1} = \sup_{x_n \in [0, 2^{-n})} \int_0^{2^n} |f_n(x_n, y_n)| dy_n$ .

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда средние  $A(f, t, (x, y))$  для потока над 2-одометром равномерно сходятся к 0 при  $t \rightarrow \infty$  с максимальной скоростью.

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что условие (2) влечет за собой равенство нулю среднего значения функции  $f$ . Покажем, что для всех  $t > 0$  и всех  $(x, y) \in M$

$$|A(f, t, (x, y))| \leq \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,1}}{t}.$$

Действительно, пусть  $2^{N-1} < t \leq 2^N$ , тогда

$$\begin{aligned} |A(f, t, (x, y))| &\leq \left| A \left( \sum_{n=1}^N f_n, t, (x, y) \right) \right| + \left| A \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n, t, (x, y) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N |A(f_n, t, (x, y))| + \sum_{n=N+1}^{\infty} A(|f_n|, t, (x, y)). \end{aligned}$$

Для каждого слагаемого второй суммы сразу получаем оценку

$$\begin{aligned} A(|f_n|, t, (x, y)) &= \frac{1}{t} \int_0^t |f_n(T_s(x_n, y_n))| ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2^n - y_n} |f_n(x_n, s + y_n)| ds + \frac{1}{t} \int_0^{t + y_n - 2^n} |f_n(x'_n, s)| ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{2^n} |f_n(x_n, s)| ds + \frac{1}{t} \int_0^{2^n} |f_n(x'_n, s)| ds \leq \frac{2 \|f_n\|_{\infty,1}}{t}. \end{aligned}$$

Здесь мы считали, что  $t + y_n > 2^n$ , в противном случае не возникнет множителя 2 в итоговой оценке.

Для слагаемых первой суммы воспользуемся условием (2):

$$\begin{aligned}
 tA(f_n, t, (x, y)) &= \int_0^{2^n - y_n} f_n(x_n, y_n + s) ds + \underbrace{\int_0^{2^n} f_n(x_n^{(1)}, s) ds}_{=0} + \\
 &\quad \cdots + \underbrace{\int_0^{2^n} f_n(x_n^{(k)}, s) ds}_{=0} + \int_0^{t - k2^n - y_n} f_n(x_n^{(k+1)}, s) ds.
 \end{aligned}$$

Здесь  $k \in \mathbb{N}$  — наибольшее натуральное число, для которого  $t - 2^n k - y_n \geq 0$ . Отсюда уже получаем оценку для слагаемых первой суммы:

$$|A(f_n, t, (x, y))| \leq \frac{1}{t} \left| \int_0^{2^n - y_n} f_n(x_n, y_n + s) ds + \int_0^{t - k2^n - y_n} f_n(x_n^{(k+1)}, s) ds \right| \leq \frac{2\|f_n\|_{\infty, 1}}{t}.$$

Суммируя неравенства для обеих сумм, приходим к требуемой оценке для временных средних. Теорема 2.1 доказана.

### 3. Медленная сходимость средних Биркгофа для потока над диадическим одометром

Отказ от условия (3) из изложенного выше примера позволяет получить сколь угодно медленную скорость сходимости временных средних. Покажем это.

Пусть задана быстро растущая последовательность  $p_n$  натуральных чисел. Обозначим  $L_n = d_n 2^{p_n - 1}$ , где  $d_n \in (0, 1/2)$ . Рассмотрим на  $M_n = [0, 2^{-p_n}) \times [0, 2^{p_n})$  функцию  $f_n$ , которая на прямоугольнике  $[0, 2^{-p_n}) \times [0, L_n)$  равна  $a_n > 0$ , на прямоугольнике  $[0, 2^{-p_n}) \times [2^{p_n - 1}, 2^{p_n - 1} + L_n)$  равна  $-a_n$ , а в остальных точках  $M_n$  равна нулю. Нетрудно проверить, что для любого  $x_n \in [0, 2^{-p_n})$

$$\int_0^{2^{p_n}} f_n(x_n, y_n) dy_n = 0, \quad \int_0^{2^{p_n}} |f_n(x_n, y_n)| dy_n = 2a_n L_n.$$

Чтобы для функции  $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$  не выполнялось условие (3) из леммы 1, накладываем условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n 2^{p_n} = \infty.$$

При этом чтобы  $f \in L_1(M)$ , достаточно сходимости ряда из  $L_1(M_n)$ -норм функций  $f_n$ , т. е. ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n$ . Мы же потребуем более сильное условие

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n d_n) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $f$  — построенная выше функция и  $t_n = 2^{p_n-2}$ . Тогда последовательность средних  $A(f, t_n, (x, y))$  для потока над 2-одометром равномерно сходится к 0 при  $n \rightarrow \infty$  со скоростью  $\mathcal{O}(a_n d_n)$ .

Доказательство. Представляя

$$A(f, t_n, (x, y)) = A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y)\right) + A(f_n, t_n, (x, y)) + A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right),$$

замечаем, что для всех  $(x, y) \in M$

$$A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y)\right) = 0.$$

Это следует из того, что промежуток интегрирования  $[0, t_n)$  разбивается на конечное число промежутков длины  $2^{p_m}$  для каждого  $m = 1, \dots, n-1$ . Это действительно будет так, поскольку  $2^{p_n-2}$  делится на  $2^{p_m}$ . Отсюда возникает уточняющее условие на возрастающую последовательность  $p_n$ :

$$p_{n+1} \geq p_n + 2.$$

А на интервале длины  $2^{p_m}$  интеграл от  $f_m$  по переменной  $y_m$  равен нулю.

Теперь обратим внимание на распределение значений функции

$$A_n(x, y) = A(f_n, t_n, (x, y)).$$

На множестве меры  $\frac{1}{2} - d_n$  функция  $A_n(x, y)$  равна 0, на множестве меры  $1/4 - d_n/2$  она равна  $2a_n d_n$  (максимальное значение) и на множестве с такой же мерой  $A_n(x, y)$  равна  $-2a_n d_n$  (минимальное значение). Остальные промежуточные значения меняются линейным образом.

Покажем теперь, как оцениваются значения функции  $A\left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right)$ .

Будем считать, что для всех  $m > n$  выполняется условие

$$2^{p_n-2} < d_m 2^{p_m-1}.$$

Поскольку теперь длина промежутка интегрирования, равная  $2^{p_n-2}$ , существенно меньше  $L_m$  при  $m > n$ , то наибольшее по модулю значение среднего  $A(f_m, t_n, (x, y))$  будет  $a_m$ . Таким образом,

$$\left|A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right)\right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} A(|f_m|, t_n, (x, y)) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n d_n).$$

Собирая оценки вместе, получим для всех  $(x, y) \in M$

$$A(f, t_n, (x, y)) = \mathcal{O}(a_n d_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3.1 доказана.

Значения  $A(f, t_n, (x, y))$  на множестве меры, близкой к  $1/2$ , по модулю близки к  $2a_n d_n$ . Для большинства остальных точек значения функции  $A(f, t_n, (x, y))$  асимптотически являются  $o(a_n d_n)$ . Таким образом, нельзя получить оценку вида  $o(a_n d_n)$ . При этом для заданных последовательностей  $a_n$  и  $d_n$  мы можем выбирать  $t_n \rightarrow \infty$ , растущую сколь угодно быстро. Тем самым получаем сколь угодно медленную сходимость средних Биркгофа, причем распределение значений этих средних таково, что на почти половине пространства функция принимает значения асимптотически бесконечно большие по сравнению со значениями, которые функция принимает на оставшейся части пространства.

#### 4. Медленные сходимости средних Биркгофа в общем случае

Мы показали, как реализуется медленная сходимость средних для потока над 2-одометром. Аналогичный эффект можно получить в общем случае. Мы отчасти повторяем предыдущее построение, при выборе  $t_{n+1}$  и  $f_{n+1}$  применяем специальное прямоугольное представление потока Рудольфа и эргодическую теорему Биркгофа. Момент  $t_{n+1}$  выбирается таким, что средние  $A(f_1 + \dots + f_n, t_{n+1}, x)$  для большинства  $x$  чрезвычайно малы по сравнению с  $a_{n+1}$ .

Для выбора  $f_{n+1}$  используется теорема о специальном прямоугольном представлении (см., например, [9, гл. 11, § 4]). По теореме Рудольфа для апериодического эргодического потока  $T_t$  на вероятностном пространстве  $(X, m)$  и любых положительных чисел  $p, q$  таких, что  $p/q$  иррационально, существует специальное представление потока с функцией, принимающей два значения:  $p$  и  $q$ . Таким образом, фазовое пространство потока можно разбить на два измеримых множества, которые мы отождествляем с прямоугольниками. Первое множество состоит из отрезков траекторий длины  $p$ , а второе — длины  $q$ .

**Теорема 4.1.** Пусть  $T_t$  — апериодический эргодический поток на вероятностном пространстве  $(X, m)$  и  $\varphi(t) \rightarrow +0$ . Тогда найдется функция  $f \in L_1(X, m)$  с нулевым средним такая, что для п.в.  $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, x)| = +\infty.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности можно считать, что  $\varphi(t)$  монотонно стремится к нулю. Функцию  $f \in L_1(X, m)$  ищем в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n),$$

где  $f_n$  строится следующим образом. В представлении Рудольфа выбираем параметры высот прямоугольников:  $p = h_n$  и  $q = h_n + \varepsilon_n$ . При этом

$$h_n c_n + (h_n + \varepsilon_n) d_n = 1$$

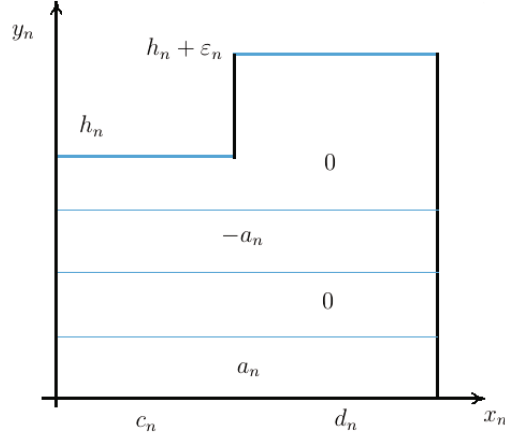
и  $h_n \rightarrow +\infty, \varepsilon_n \rightarrow 0$ .

Функция  $f_n(x_n, y_n)$ , будет зависеть только от высоты  $y_n$ . А именно, пусть  $f_n = a_n$  при  $0 \leq y_n < h_n/4$ ;  $f_n = -a_n$  при  $h_n/2 \leq y_n < 3h_n/4$ , а на остальной части  $f_n$  равна 0 (рис. 2).

Всю эту «картинку» обратным изоморфизмом измеримо реализуем в исходном пространстве  $(X, m)$  (точке  $x$  соответствует пара  $(x_n, y_n)$ ). Обозначение для функции оставляем таким же. Пусть  $\delta_n \rightarrow +0$  и  $t_n = h_n \delta_n$ . Для управления эргодическими средними зададим асимптотические условия на все последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n d_n + 4\delta_n < 1, \tag{I}$$

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = \alpha_n a_n = o(a_n), \tag{II}$$

Рис. 2. Представление Рудольфа с параметрами  $h_n$  и  $h_n + \varepsilon_n$ .

$$\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1}}{h_n a_n \delta_n} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{a_n \alpha_n}{\varphi(t_n)} \rightarrow +\infty. \quad (III)$$

По условию (I) мы задаем последовательности  $\varepsilon_n$  и  $\delta_n$ . Далее, по условию (II) определяем  $a_n$  и, самое важное для управления эргодическими средними, задаем рост  $h_n$  условиями (III).

Как и ранее, представим  $A(f, t_n, x)$  в виде суммы трех слагаемых:

$$A(f, t_n, x) = A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, x\right) + A(f_n, t_n, x) + A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, x\right).$$

Для третьего слагаемого из условия (II) для всех  $x \in X$  имеем

$$\left| A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, x\right) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n).$$

Для первого слагаемого из первой части условия (III) ввиду зануления интеграла на целых отрезках траекторий для всех  $x \in X$  имеем

$$A\left(\sum_{m=1}^{n-1} |f_m|, t_n, x\right) \leq \frac{2}{t_n} \sum_{m=1}^{n-1} a_m h_m \leq 2a \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1}}{h_n \delta_n} = o(a_n).$$

Для второго слагаемого нетрудно посчитать, что оно принимает значение  $a_n$  на множестве меры  $(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n)$ , на другом множестве такой же меры — значение  $-a_n$ , и на множестве меры не меньше  $2(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n)$  принимает нулевое значение. Остальные значения по модулю не превосходят  $a_n$ .

Таким образом,  $A(f, t_n, x) = \mathcal{O}(a_n)$  для всех  $x \in X$ . При этом на некотором множестве  $\mathcal{D}_n$  меры

$$m(\mathcal{D}_n) = 2(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n) = 2(1/4 - \delta_n)(1 - \varepsilon_n d_n) > 1/2 - 2\delta_n - \frac{\varepsilon_n d_n}{2}$$

имеем

$$|A(f, t_n, x)| = a_n + o(a_n);$$

а на некотором множестве  $\mathcal{E}_n$  с такой же оценкой на меру

$$m(\mathcal{E}_n) > \frac{1}{2} - 2\delta_n - \frac{\varepsilon_n d_n}{2}$$

будет

$$|A(f, t_n, x)| = o(a_n).$$

Пусть  $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{E}_n \cup \mathcal{D}_n)$ . Тогда, учитывая (I), имеем

$$m(\mathcal{F}) > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n d_n + 4\delta_n > 0.$$

Для всех  $x \in \mathcal{F}$  для рассматриваемых средних

$$\text{либо } |A(f, t_n, x)| = a_n(1 + \alpha_n), \quad \text{либо } |A(f, t_n, x)| = \alpha_n a_n.$$

В любом случае для таких  $x$  из второго условия в (III) получим

$$\frac{|A(f, t_n, x)|}{\varphi(t_n)} \rightarrow +\infty,$$

т. е. для  $x \in \mathcal{F}$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, x)| = +\infty.$$

Для п.в.  $x \in X \setminus \mathcal{F}$  будет выполняться такое же соотношение ввиду закона нуля или единицы для скорости сходимости [10].

### 5. О медленной сходимости временных средних для обмотки тора и непрерывной функции

Оказывается, что усреднение непрерывной функции вдоль траекторий гладкого потока можно совместить с эффектом медленной сходимости средних. Для этого подходящим образом будем сглаживать функции  $f_n$ , рассмотренные выше. Пусть  $T_t(x, y) = (\{x + t\}, \{y + ct\})$ ,  $(x, y) \in M$ , — эргодическая обмотка тора вдоль вектора  $(1, c)$ , где  $c$  — иррациональное число, которое приближается рациональными дробями  $p_n/q_n$  так, что

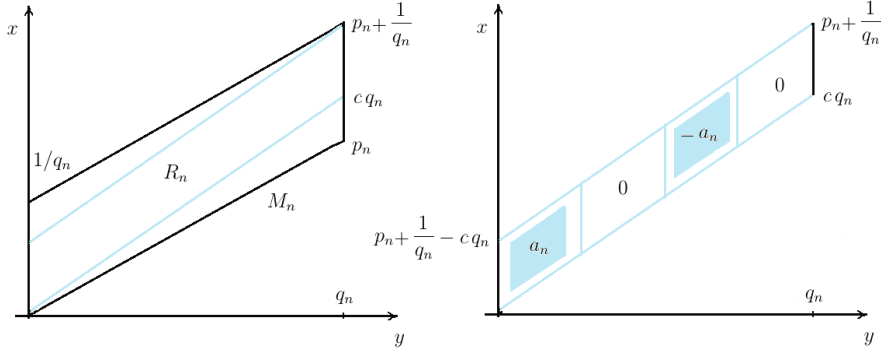
$$0 < c - \frac{p_n}{q_n} = \beta_n \frac{1}{q_n^2} = o\left(\frac{1}{q_n^2}\right).$$

Рассматривая обмотку тора вдоль вектора  $(1, p_n/q_n)$ , отождествим тор  $M$  с узким параллелограммом  $M_n$  со стороной длины  $\sqrt{p_n^2 + q_n^2}$ , параллельной этому вектору, и стороной длины  $1/q_n$ , параллельной оси  $OX$ . Внутри этого параллелограмма, рассмотрим параллелограмм  $R_n$ , направленный вдоль потока  $T_t$ .

Нетрудно видеть, что площадь параллелограмма  $R_n$  равна

$$1 - q_n^2 \left(c - \frac{p_n}{q_n}\right) = 1 - \beta_n.$$

На  $M_n$  выберем координаты  $x_n \in [0, 1/q_n]$  вдоль оси  $OX$  и  $y_n \in [0, q_n\sqrt{1+c^2}]$  вдоль вектора  $(1, c)$ . Построим гладкую функцию  $f_n(x_n, y_n)$ , которая по модулю не превосходит  $a_n > 0$ , с условием  $\sum_n a_n < \infty$ . А именно, разделим  $R_n$  на четыре равные по площади части. На первой четверти  $f_n$  равна  $a_n$  на множестве, отделенном от границы и площади близкой к  $1/4$ . На оставшейся части этой

Рис. 3. Параллелограмм  $R_n$  и определение функции  $f_n$  на нем.

четверти  $f_n$  гладко убывает до нуля на границе. На втором и четвертом параллелограммах  $f_n$  равна 0. На третьей четверти значения антисимметричны значениям на первой четверти (рис. 3).

Вне прямоугольника  $R_n$  и на его границе пусть  $f_n$  равна 0. Также считаем, что

$$\int_0^{q_n \sqrt{1+c^2}} f_n(x_n, y_n) dy_n = 0$$

для каждого  $x_n \in [0, 1/q_n]$ .

В результате получим непрерывную функцию  $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$ .

Пусть  $\varphi(t) \rightarrow +0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Положим  $t_n = \delta_n q_n \sqrt{1+c^2}$ , а также пусть выполняются условия (II) и (III), где вместо  $h_n$  берем  $q_n$ .

**Теорема 5.1.** Пусть  $f$  — построенная выше функция. Тогда эргодические средние  $A(f, t, (x, y))$  для обмотки тора вдоль вектора  $(1, c)$  удовлетворяют для п.в.  $(x, y) \in M$  соотношению

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, (x, y))| = +\infty.$$

Доказательство. Временное среднее представим в виде

$$A(f, t_n, (x, y)) = A \left( \sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y) \right) + A(f_n, t_n, (x, y)) + A \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y) \right).$$

Для всех  $(x, y) \in M$  имеем очевидную оценку для третьего слагаемого

$$\left| A \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y) \right) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} A(|f_m|, t_n, (x, y)) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n).$$

Чтобы оценить первое слагаемое в указанной выше сумме, воспользуемся занулением интегралов вдоль траектории потока. На большей части отрезков траекторий, вдоль которых берется интеграл, вклад в интеграл нулевой в силу

выбора функций  $f_m$ . Нам нужно оценить только значения интегралов вдоль начальной и конечной частей отрезков траектории. А именно, для каждого  $m = 1, \dots, n$  и всех  $(x, y) \in M$

$$t_n A(f_m, t_n, (x, y)) = \int_0^{q_m \sqrt{1+c^2} - y_m} f_m(T_s(x_m, y_m)) ds + \underbrace{\int_0^{q_m \sqrt{1+c^2}} f_m(x_m^{(1)}, s) ds}_{=0} + \dots + \underbrace{\int_0^{q_m \sqrt{1+c^2}} f_m(x_m^{(k-1)}, s) ds}_{=0} + \int_0^{y_m} f_m(x_m^{(k)}, s) ds.$$

Отсюда уже получаем

$$\left| A \left( \sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y) \right) \right| \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2a_m q_m \sqrt{1+c^2}}{t_n} = \mathcal{O} \left( \frac{q_1 + \dots + q_{n-1}}{\delta_n q_n} \right) = o(a_n).$$

Второе слагаемое ведет себя так же, как и в теореме 4.1 для общего случая. А именно, на множестве, близком по мере к  $1/2$ , средние  $|A(f, t_n, (x, y))| = a_n + o(a_n)$ , а на другом множестве, также близком по мере к  $1/2$ , средние ведут себя как  $o(a_n)$ . Теорема 5.1 доказана.

## 6. Заключительные замечания

С тематикой скоростей сходимости эргодических средних сопряжено большое количество нерешенных задач.

**Сходимость средних и гладкость усредняемой функции.** Построенная в теореме 5.1 функция является лишь непрерывной. Интересен вопрос о существовании гладких функций со сколь угодно медленной скоростью сходимости средних. Как показал Ковада [11] (см. также [12]), начиная с некоторого показателя гладкости, зависящего от скорости аппроксимации иррационального числа  $c$ , скорость сходимости эргодических средних для обмотки тора будет максимальной  $\mathcal{O}(1/t)$ .

**Возможные распределения средних Биркгофа.** Мы показали, как выбор подходящей усредняемой функции реализует диапазон скоростей сходимости от максимальной до сколь угодно медленной. Эффекты замедления скоростей сходимости средних можно обнаруживать для широкого класса групповых действий (см. [4]). Интерес представляет не только оценка скоростей сходимости, но и более общая задача о возможных распределениях значений средних Биркгофа. Благодаря выбору усредняемой функции этими распределениями можно управлять. Например, пусть мы хотим, чтобы распределение значений функции  $A(f, t_n, x)$  для эргодического потока было сколь угодно близко к распределению значений, например, функции  $c_n s^2$ ,  $s \in [0, 1]$ , относительно меры Лебега на  $[0, 1]$ . Если числа  $c_n$  достаточно быстро стремятся к  $+0$ , задача решается методом, похожим на изложенный выше, при подходящем выборе функций  $f_m$ .

**Поиск оптимальных весовых распределений.** Как уже отмечалось, при рассмотрении весовых усреднений возможно увеличение диапазона быстрых скоростей сходимости средних (см. [5], а также ссылки в этой работе).

В связи с этим возникает ряд новых задач. Сформулируем следующие частные случаи.

Пусть  $f$  — функция с нулевым средним заданной гладкости  $k \geq 1$ . Для эргодического сдвига  $T$  на торе рассмотрим всевозможные выпуклые суммы вида

$$A_w(f, N, x) = \sum_{n=1}^N w_{n,N} f(T^n x),$$

где  $w = (w_{1,N}, \dots, w_{N,N})$  — вероятностный вектор.

При каких вероятностных распределениях коэффициентов  $w_{n,N}$  при заданном достаточно большом  $N$  нормы  $\|A_w\|$  (в пространствах  $L_1$  или  $L_2$ , или  $L_\infty$ ) будут минимальны?

Аналогичный вопрос ставится для непрерывного времени и обмоток тора. Для средних

$$A_w(f, t, x) = \int_0^t w(s, t) f(T_s x) ds,$$

где  $w \geq 0$  и  $\int_0^t w(s, t) ds = 1$  для каждого  $t > 0$ , ищем  $\inf_w \|A_w\|$ .

Даже в случае вращения окружности такие задачи представляются нетривиальными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Krengel U. On the speed of convergence in the ergodic theorem // Monatsh. Math. 1978. V. 86, N 1. P. 3–6.
2. Рыжиков В. В. Медленные сходимости эргодических средних // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 742–746.
3. Alpern S. Return times and conjugates of an antiperiodic transformation // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1, N 2. P. 135–143.
4. Рыжиков В. В. Медленная сходимость взвешенных средних для потоков и действий счетных аменабельных групп // Успехи мат. наук. 2025. Т. 80, № 5. С. 179–180.
5. Tong Z., Li Y. Quantitative uniform exponential acceleration of averages along decaying waves // Изв. РАН. Сер. мат. 2025. V. 89, N 6. P. 131–161.
6. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А. Максимальная поточечная скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2020. Т. 498. С. 18–25.
7. Кочергин А. В. О росте сумм Биркгофа над поворотом окружности // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 836–848.
8. Кочергин А. В. О возвращаемости значений сумм Биркгофа для поворота окружности и гёльдеровой функции // Теория вероятностей и ее применения. 2025. Т. 70, № 4. С. 715–725.
9. Корнфельд И. П., Синий Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
10. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А. Закон нуля или единицы в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // Мат. тр. 2021. Т. 24, № 2. С. 65–80.
11. Kowada M. Convergence rate in the ergodic theorem for an analytic flow on the torus // Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Maruyama, G., Prokhorov, Y.V. (eds)). Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. P. 251–254. (Lecture Notes Math.; V. 330).
12. Ladouceur S., Weber M. Note a propos d'un resultat de Kowada sur les flots analytiques //

Seminaire de probabilites. 1992. V. 26. P. 608–618.

*Поступила в редакцию 24 января 2024 г.*

*После доработки 25 февраля 2025 г.*

*Принята к публикации 25 февраля 2025 г.*

Подвигин Иван Викторович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
[ipodvigin@math.nsc.ru](mailto:ipodvigin@math.nsc.ru)

Рыжиков Валерий Валентинович  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
механико-математический факультет,  
Ленинские горы, 1, Москва 119991  
[vryzh@mail.ru](mailto:vryzh@mail.ru)