UDC 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ ПРОСТЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ГРУППАМИ $L_m(q)$ ДЛЯ НЕЧЁТНЫХ q [1]

Ю. М. Мао, С. Ц. Ма, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Посвящается памяти С.С. Кутателадзе

Аннотация. Пусть m — натуральное число, p — простое нечётное число, G — периодическая группа, насыщенная множеством конечных простых групп $L_m(q)$, где $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$. Если централизаторы инволюций в G — локально конечные группы, то G изоморфна $L_m(F)$, где F — некоторое локально конечное поле характеристики p.

Ключевые слова: локально конечная группа, локально конечное поле, насыщенность, простая линейная группа.

Keywords: locally finite group, locally finite field, group saturated with a set, simple linear group.

Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из $\mathfrak{M}$ (или насыщена множеством $\mathfrak{M}$), если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторому элементу множества $\mathfrak{M}$.

В настоящей работе доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть p — простое нечётное число, m — натуральное число, большее четырёх. Если G — периодическая группа с локально конечными централизаторами инволюций, насыщенная конечными простыми группами $L_m(p^n)$, $n \in \mathbb{N}$, то G изоморфна $L_m(F)$ для некоторого локально конечного поля F характеристики p.

Отметим, что в [1] этот результат доказан при $m = 4$. При $m \leqslant 3$ известны более общие результаты (см., например, обзор [2]).

§1. Обозначения и предварительные результаты

[1]Работа первых двух авторов выполнена при поддержке государственного фонда естественных наук Китая (проект 12371021), работа третьего автора выполнена за счёт гранта Российского научного фонда № 25-41-10008, работа четвёртого автора выполнена в рамках государственного задания Института математики им.С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2026-0017).

Пусть V — векторное пространство размерности $m \geqslant 5$ над конечным полем P нечётного порядка p^n, где p — простое число, n — натуральное число. Пусть $b(V) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ — фиксированный упорядоченный базис V, $S = SL(V)$ — специальная линейная группа невырожденных линейных преобразований пространства V, т.е. подгруппа $GL(V)$, состоящая из преобразований с определителем, равным единице.

Далее, пусть $L = L_m(P) = PSL_m(P) = S/Z(S)$, где $Z(S)$ — центр S, образ S при естественном гомоморфизме S на простую линейную группу $L_m(p^n)$.

Обозначим через $H = H(m, q)$ подгруппу S, состоящую из линейных преобразований, сохраняющих разложение V в прямую сумму двух подпространств V_1 и V_2, натянутых соответственно на векторы $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_3, v_4, \dots, v_,\}$. Очевидно, $H = (SL(V_1) \times SL(V_2)) \langle h \rangle$, где матрица h в базе $b(V)$ диагональна с диагональю $\{\alpha, 1, \alpha^{-1}, 1, \dots, 1\}$. Здесь α означает некоторый фиксированный элемент поля $GF(q)$, порождающий мультипликативную группу поля $GF(q)$.

Отметим, что H является C_1-подгруппой S типа $GL_2(q) \oplus GL_{m-2}(q)$ в обозначениях [3 и 4] (см., в частности, таблицы 2.2 и 2.3 в [3] и таблицу 4.1.A в [4]) и содержит максимальную абелеву подгруппу из S, изоморфную прямому произведению $m-1$ циклических подгрупп порядка $q-1$.

Подгруппа H содержит централизатор в S инволюции t_1 из центра H_1, и $C_H(t_1) = C_S(t_1) = H_1 \times H_2$ (здесь $H_i = SL(V_i)$). Образ $H_1 \times H_2$ при естественном гомоморфизме S на $PSL_m(q)$ равен центральному произведению $\overline{H}_1 \circ \overline{H}_2$, где $\overline{H}_1 \simeq H_1$, $\overline{H}_2 \simeq H_2$.

Обозначим через r инволюцию, являющуюся образом t_1 при естественном гомоморфизме S на простую группу $L_m(q) = PSL_m(q)$.

Пусть t_1^S — множество инволюций, сопряжённых с t_1 в S, и $r^{\overline{S}}$ — множество инволюций, сопряжённых с r в $\overline{S} = S/Z(S)$.

Лемма 1.

1. Инволюция a из S принадлежит t_1^S тогда и только тогда, когда $\dim(C_V(a)) = m-2$.

2. Пусть Γ — граф, множество вершин которого совпадает с t_1^S, и две вершины a, b смежны, если инволюции a и b перестановочны. Тогда Γ связен, и если a и b не смежны, то найдётся $c \in t_1^S$, смежная и с a, и с b.

3. Если $\overline{\Gamma}$ — граф, множество вершин которого совпадает с $r^{\overline{S}}$, и две вершины смежны, если они перестановочны, то $\overline{\Gamma}$ связен.

Доказательство. Пункт 1 вытекает из определения t_1^S.

Докажем п. 2. Если $m \geqslant 6$ и a, b — две различные вершины графа, то $\dim\left(C_V(\langle a, b\rangle)\right) \geqslant m-4 \geqslant 2$, и в $C_V(\langle a, b\rangle)$ найдётся подпространство

W_1 размерности 2. Если W_2 — дополнение к W_1 в V, то подгруппа из S, сохраняющая разложение V в прямую сумму $W_1 \oplus W_2$ содержит инволюцию $c \in t_1^S$, перестановочную и с a, и с b. При этом рёбра (a, c) и (c, b) осуществляют связь a с b.

При $m = 5$ связность графа проверяется его непосредственным построением.

Пункт 3 вытекает из пункта 2, поскольку образы перестановочных вершин из Γ при гомоморфизме S на $\overline{S}$ перестановочны в $\overline{S}$.

Обозначим через N_i одномерное пространство $v_i GF(q)$ и C_2-подгруппу W типа $GL_1(q) \wr S_m$ из S, действующую на слагаемых разложения $V = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$ (см. §4.2 и таблицу 4.2.A в [4]). Подгруппа W изоморфна полупрямому произведению абелевой группы $(q-1)^{m-1}$ и группы W^*, изоморфной симметрической группе $\mathrm{Sym}(m)$. Подгруппа $(q-1)^{m-1}$ содержится в H, и поскольку W — максимальная подгруппа в S, то справедлива

Лемма 2. Если $\overline{W}^*$ — образ W^* при гомоморфизме S на $\overline{S} = PSL_m(q)$, то $\langle H, W^* \rangle = S$.

§2. Доказательство теоремы

По условию G насыщена множеством $\mathfrak{M} = \{L_m(q) \mid q = p^n, n \in \mathbb{N}\}$. Определим множество

$$\mathfrak{M}(G) = \{X \in \mathfrak{M} \mid X \text{ изоморфна некоторой подгруппе } G\}.$$

Если множество $\mathfrak{M}(G)$ конечно, то, очевидно, теорема верна. В дальнейшем будем считать, что множество $\mathfrak{M}(G)$ бесконечно. Пусть t — инволюция из G. Если $C_G(t)$ — конечная группа, то по теореме В.П. Шункова из [5], G — локально конечная группа, и заключение теоремы вытекает из результата А.В. Боровика [6]. Таким образом, можно предполагать, что централизатор любой инволюции из G бесконечен, и G содержит конечную подгруппу X, изоморфную $L_m(q)$, где $q \geqslant 5$.

Пусть V — векторное пространство размерности m над полем порядка q, $S - SL(V)$ — специальная линейная группа линейных преобразований пространства V. Зафиксируем упорядоченный базис $b(V) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ пространства V и элементы ψ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такие, что $v_i\psi_i = -v_i$, $v_j\psi_i = v_j$ при $j \neq i$.

Отметим следующие общеизвестные факты.

Лемма 3. Пусть A — подгруппа из $GL(V)$, порождённая всеми преобразованиями ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $A_S = A \cap SL(V)$. Тогда A (соответственно, A_S) — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа в $GL(V)$ (соответственно, в S), и любая элементарная абелева 2-подгруппа из $GL(V)$

(соответственно, из S) сопряжена в $GL(V)$ (соответственно, в S) с подгруппой из A (соответственно, из A_S).

Отождествим подгруппу X группы G с образом S при гомоморфизме S на $\overline{S} = S/Z(S) = PSL_m(q)$.

Лемма 4. $C_G(r)$ — бесконечная группа.

Доказательство. Предположим противное. По теореме Шункова [5], G — локально конечная группа. По результату Боровика [6], G удовлетворяет заключению теоремы.

Лемма 5. $C_G(r)$ — счётная группа.

Доказательство. Как доказано раньше, G содержит конечную подгруппу X, изоморфную $L_m(q)$, $q \geqslant 5$, и содержащую r. При этом $C_x(r) = \overline{H}_1 \circ \overline{H}_2$, где $\overline{H}_1 \simeq SL_2(q)$, $\overline{H}_2 \simeq SL_{m-2}(q)$. Пусть $C = C_G(\overline{H}_2 U)$, где U — некоторая циклическая подгруппа порядка $q-1$ из $\overline{H}_1$. Тогда C — локально циклическая и, в частности, счётная группа. Пусть $C_1 = U$, $C_2, \ldots,$ — возрастающая счётная последовательность различных циклических подгрупп, объединение которых равно C. По условию, каждая подгруппа C_i, $i = 1, 2, \ldots$ содержится в подгруппе P_i, содержащей r и изоморфной $L_m(q_i)$, где q_i выбрано наименьшим из возможных. При этом $C_G(r)$ совпадает с объединением счётной возрастающей последовательности конечных групп $C_{p_i}(r)$ и поэтому счётна.

Пусть $C_G(r) = \{c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, j \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 6. Существует счётная возрастающая последовательность подгрупп $X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots$ группы G, объединение которых содержит $G_G(r)$, такая, что каждая X_i изоморфна $L_m(q_i)$ для некоторого $q_i = p^{n_i}$.

Доказательство. Пусть $X_1 = X$ — выбранная ранее подгруппа в G, изоморфная $L_m(q)$ для некоторого q. Пусть k_1 — наименьшее число с условием, что $c_{k_1} \notin C_{X_1}(r)$, и пусть X_2 — изоморфная $L_m(q^*)$ для некоторого q^* подгруппа, содержащая $\langle c_{k_1}, C_{X_1}(r)\rangle$. Пусть уже построен отрезок $X_1 < X_2 < \cdots < X_i$, удовлетворяющий условиям леммы.

Пусть теперь k_i — наименьшее число с условием, что $c_{k_i} \notin C_{X_i}(r)$, и пусть X_{i+1} — изоморфная $L_m(q^{**})$ для некоторого q^{**} подгруппа, содержащая $\langle c_{k_i}, C_{X_i}(r)\rangle$. По п. 3 леммы 1, $X_i \leq X_{i+1}$. Аналогичным образом определим $X_{i+2}, \ldots$. Лемма доказана.

Лемма 7. Объединение последовательности X_1, $X_2, \ldots$ совпадает с G.

Доказательство. Пусть заключение неверно и $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Предположим, что в $G \setminus Y$ существует инволюция s, сопряжённая с r в G. Поскольку $C_G(r) \leq Y$, то $\langle r, s\rangle$ содержится в конечной подгруппе D, изоморфной $L_m(p^k)$ для некоторого k, По п. 3 леммы 1, $\overline{S}$ содержится в

Y; противоречие.

Таким образом, $r^G \leq Y$. С другой стороны, $r \in X_i$ для любого i, то есть $\langle r^{X_i} \rangle = X_i$ и $\langle r^G \rangle \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Лемма доказана.

Так как каждая подгруппа X_i конечна, то G локально конечна, и заключение теоремы вытекает из [6].

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ряд замечаний, способствоваших существенному улучшению текста работы.

Список литературы

[1] Го В.Б., Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами $L_4(q)$. Алгебра и логика, 60, №6 (2021), 549–556.

[2] А.А. Кузнецов, К.А. Филиппов. Группы, насыщенные заданным множеством групп. Сибирские электронные математические известия, №8 (2011), 230–246.

[3] J.N. Bray, D.F. Holt, C. M. Roney-Dougal. The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. Cambridge University Press. 2013.

[4] P. Kleidman, M. Liebeck. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge University Press. 1990.

[5] В.П. Шунков, О периодических группах с почти регулярной инволюцией. Алгебра и логика, 11, №4 (1972), 470–493.

[6] А.В. Боровик, Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы. Сиб. матем. ж., 24, №6 (1983), 26–35.

Адреса авторов:

МАО Юемэй, Школа математики и статистики, Университет Датуна в Шаньси, г. Датун, Шаньси, 037009, КНР. e-mail: maoyuemei@126.com

МА Сяоцзянь, Школа математики и статистики, Университет Датуна в Шаньси, г. Датун, Шаньси, 037009, КНР. e-mail: mxj790808@163.com

ЛЫТКИНА Дарья Викторовна, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: daria.lytkin@gmail.com.

МАЗУРОВ Виктор Данилович, Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Ак. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: vic.mazurov@gmail.com

Authors: MAO Yuemei, School of Mathematics and Statistics, ShanXi DaTong University, Datong, Shanxi, 037009, P.R. CHINA. e-mail: maoyuemei@126.com

MA Xiaojian, School of Mathematics and Statistics, ShanXi DaTong University, Datong, Shanxi, 037009, P.R. CHINA. e-mail: mxj790808@163.com

LYTKINA Daria Viktorovna, Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, 630090, Novosibirsk, RUSSIA. e-mail: daria.lytkin@gmail.com.

MAZUROV Victor Danilovich, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ak. Koptyg Ave., 4, 630090, Novosibirsk, RUSSIA; Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, 630090, Novosibirsk, RUSSIA. e-mail: vic.mazurov@gmail.com