УДК 519.21

О случайном блуждании со специфическим алгоритмом переключений

On a Random Walk with a Specific Switching Algorithm [1]

В.И. Лотов

Аннотация

Изучаются свойства траекторий случайного блуждания с независимыми слагаемыми, у которого распределение скачков меняется между F_1 и F_2 в соответствии со следующим правилом. Распределение F_1 с положительным математическим ожиданием сохраняется до момента первого достижения траекторией множества $(-\infty, -a)$, $a \geq 0$, после чего происходит переключение на блуждание с отрицательным сносом, соответствующим распределению F_2. Это продолжается до момента первого достижения траекторией горизонтальной границы на уровне $b \geq 0$, после чего распределение скачков вновь переключается на F_1, и так далее. В работе приводятся оценки для вероятностей конечности моментов переключений и для вероятности равенства бесконечности супремума траектории, а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. В общем случае найдены двойные преобразования над совместными распределениями моментов переключений и положений процесса в эти моменты, а также получены асимптотические представления для них при $a \to \infty$, $b \to \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2.

The properties of random walk trajectories with independent increments are studied, where the jump distribution alternates between F_1 and F_2 according to the following rule. The distribution F_1, which has a positive expectation, remains in effect until the trajectory first reaches the set $(-\infty, -a)$, $a \geq 0$. At this point, the process switches to a random walk with a negative drift corresponding to the distribution F_2. This continues until the trajectory first hits the horizontal boundary at level $b \geq 0$, after which the jump distribution switches back to F_1, and so on.

The paper provides estimates for the probabilities that the switching times are finite, as well as the probability that the supremum of the trajectory is infinite. Exact formulas for these characteristics are also derived in certain special cases.

In the general case, double transforms of the joint distributions of the switching times and the process positions at those times are obtained. Asymptotic representations for these transforms are also established as $a \to \infty$, $b \to \infty$, under Cramér type conditions on the distributions F_1 and F_2.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: случайное блуждание с переключениями, моменты остановки, экстремумы траектории.

Keywords: random walk with switchings, stopping times, trajectory extremes

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0030).

1 Введение. Оценки сверху

Рассматриваемые в работе случайные блуждания с переключениями обычно относят к разряду осциллирующих, то есть таких, у которых распределение скачков траектории меняется при достижении некоторых регулирующих уровней. Например, это может происходить вследствие желания ограничить в некоторой степени выход траектории выше какого-то уровня или даже выход за пределы полосы, регулируя тем самым движение траектории в обоих направлениях. Свойства осциллирующих случайных блужданий с различными механизмами переключений изучались во многих работах, см., например, [1]–[4] и литературу там. Интерес к исследованиям таких случайных блужданий возникает при построении различных стохастических моделей, в том числе в теории систем обслуживания и теории управления запасами.

Обычно в большинстве известных конструкций механизм переключений способствует перенаправлению траектории вниз, если она забралась слишком высоко, либо наоборот, переключение стимулирует движение вверх, чтобы ограничить сползание вниз. В настоящей работе рассматривается весьма специфический механизм переключений. Если траектория с положительным сносом впервые ушла ниже горизонтальной границы на уровне $-a \le 0$, то с этого момента она далее движется с отрицательным сносом. Если же после этого траектория в какой-то момент достигнет множества $[b, \infty)$, $b \ge 0$, то снос опять меняется на положительный, и так далее. Тем самым механизм переключений в некотором смысле отслеживает возможности скорейшего ухода траектории в одном из двух направлений. Оказывается, подобная конструкция представляет интерес в исследованиях моделей стохастического градиентного спуска в одномерных ландшафтах [5], что в свое время явилось стимулом к написанию работы автора [6]. Отметим, что ряд асимптотических результатов для случайных блужданий с такого сорта специфическими переключениями содержится в недавних работах [7]–[8].

В [6] предполагалось, что $a = b = 0$. Настоящая работа продолжает и расширяет исследования [6] в более общей ситуации.

Итак, пусть имеются две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n^+,\ n \ge 1\}$ и $\{\xi_n^-,\ n \ge 1\}$ такие, что

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < x) = F_1(x), \quad \mathbf{P}(\xi_1^- < x) = F_2(x), \quad \mathbf{E}\,\xi_1^+ > 0, \quad \mathbf{E}\,\xi_1^- < 0,$$

при этом $\mathbf{P}(\xi_1^+ < 0) > 0$, $\mathbf{P}(\xi_1^- > 0) > 0$. Обозначим частичные суммы этих последовательностей через

$$S_n^\pm = \xi_1^\pm + \ldots + \xi_n^\pm, \quad n \ge 1, \quad S_0^\pm = 0,$$

и введем марковское случайное блуждание $\{X_n,\ n \ge 0\}$ следующим образом.

Пусть $X_0 = 0$, и для $1 \le n \le \eta_1^-$ положим $X_n = S_n^+$, где

$$\eta_1^- = \eta_1^-(a) = \inf\{n \ge 1 :\ S_n^+ < -a\}, \quad a \ge 0.$$

При этом полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$. Ясно, что $\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) < 1$ вследствие положительности сноса последовательности S_n^+. После достижения момента η_1^- на событии $\{\eta_1^- < \infty\}$ скачки процесса X_n будем выбирать из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-,\ n \ge 1\}$. Если $\eta_1^- = k$ и $X_k = x,\ x < -a$, то при $k < n \le \eta_2^+$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^-,$$

где

$$\eta_2^+ = k + \inf\{n \ge 1 :\ x + S_n^- \ge b\}, \quad b \ge 0.$$

Далее на траекториях, удовлетворяющих условию $\{\eta_2^+ < \infty\}$, процесс X_n вновь эволюционирует скачками с положительным средним, выбираемым из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^+,\ n \geq 1\}$. Если $\eta_2^+ = k$ и $X_k = x$, $x \geq b$, то для $\eta_2^+ < n \leq \eta_3^-$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^+,$$

где

$$\eta_3^- = k + \inf\{n \geq 1 :\ x + S_n^+ < -a\},$$

и так далее. Таким образом, получаем последовательность моментов переключения $\{\eta_k^\pm,\ k \geq 1\}$,

$$\eta_0^+ = 0,\ \eta_{2k-1}^- = \inf\{j > \eta_{2k-2}^+ :\ X_j < -a\},$$
$$\eta_{2k}^+ = \inf\{j > \eta_{2k-1}^- :\ X_j \geq b\}, \qquad k \geq 1.$$

Введем события

$$A_k^\pm = \{\eta_k^\pm < \infty\},\ k \geq 1.$$

Ясно, что $A_1^- \supset A_2^+ \supset A_3^- \supset \ldots$.

Положим

$$\overline{X} = \sup\{X_n,\ n \geq 0\}, \qquad \underline{X} = \inf\{X_n,\ n \geq 0\}.$$

В работе приводятся оценки для вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$, $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$ и $\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty)$ (теоремы 1, 2 и их следствия), а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. Найдены двойные преобразования над совместными распределениями пар $(\eta_k^\pm, X_{\eta_k^\pm})$ (теоремы 3, 4), а также получены асимптотические представления для них при $a \to \infty$, $b \to \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2 (теорема 5 и ее следствие).

Положим

$$\overline{S} = \sup\{S_n^-,\ n \geq 0\}, \qquad \underline{S} = \inf\{S_n^+,\ n \geq 0\}.$$

Эти случайные величины конечны с вероятностью 1, свойства их распределений весьма подробно изложены в [9, гл. 12].

Пусть также

$$p_1(x) = \mathbf{P}(\underline{S} < -x), \qquad p_2(x) = \mathbf{P}(\overline{S} \geq x).$$

Теорема 1 *При всех $k \geq 1$ имеют место оценки*

$$\mathbf{P}(A_{2k}^+) \leq p_1(a) p_1^{k-1}(a+b) p_2^k(a+b), \quad \mathbf{P}(A_{2k-1}^-) \leq p_1(a) p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b). \tag{1}$$

Доказательство. Если $\eta_1^- < \infty$, то до момента η_1^- скачки блуждания $\{X_n\}$ совпадают по распределению с ξ_1^+ и $\mathbf{P}(A_1^-) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = p_1(a)$.

Для траекторий, удовлетворяющих условию $\eta_{2k-1}^- < \infty$, $k \geq 1$, будем фиксировать значение $X_{\eta_{2k-1}^-} = -x < -a$ и далее рассматривать последующую часть траектории X_n, стартующую в момент времени η_{2k-1}^- с точки $-x$. Скачки этой части траектории до момента η_{2k}^+ не зависят от предыстории при фиксации положения в момент η_{2k-1}^- и будут иметь одинаковое распределение с ξ_1^-. Не ограничивая общности, эти скачки будем выбирать из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-\}$. Пусть $\tilde{S}_i$ — сумма первых i членов этой вероятностной копии, $\tilde{S}_i = 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty,\ \eta_{2k-1}^- < \infty)$$

$$= \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty,\ X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx,\ \eta_{2k-1}^- < \infty)$$

$$= \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(-x + \sup_{i\ge 0} \tilde{S}_i \ge b,\ X_{\eta^-_{2k-1}} \in -dx,\ \eta^-_{2k-1} < \infty)$$

$$= \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(\sup_{i\ge 0} \tilde{S}_i \ge b + x)\, \mathbf{P}(X_{\eta^-_{2k-1}} \in -dx,\ \eta^-_{2k-1} < \infty). \qquad (2)$$

Далее это выражение будем анализировать в разных условиях. Во-первых, в подынтегральном выражении при $x > a$ можно использовать оценку

$$\mathbf{P}(\sup_{i\ge 0} \tilde{S}_i \ge b + x) \le \mathbf{P}(\overline{S} > a + b),$$

что дает нам неравенство

$$\mathbf{P}(\eta^+_{2k} < \infty) \le \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(\overline{S} > a+b)\, \mathbf{P}(X_{\eta^-_{2k-1}} \in -dx,\ \eta^-_{2k-1} < \infty) = p_2(a+b)\mathbf{P}(\eta^-_{2k-1} < \infty).$$

В частности,

$$\mathbf{P}(\eta^+_2 < \infty) \le p_1(a)p_2(a+b). \qquad (3)$$

Аналогично получаем при $k \ge 1$

$$\mathbf{P}(\eta^-_{2k+1} < \infty) = \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(x + \inf_{i\ge 0} \tilde{\tilde{S}}_i < -a)\, \mathbf{P}(X_{\eta^+_{2k}} \in dx,\ \eta^+_{2k} < \infty)$$

$$= \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x)\, \mathbf{P}(X_{\eta^+_{2k}} \in dx,\ \eta^+_{2k} < \infty), \qquad (4)$$

откуда сразу же следует

$$\mathbf{P}(\eta^-_{2k+1} < \infty) \le \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - b)\, \mathbf{P}(X_{\eta^+_{2k}} \in dx,\ \eta^+_{2k} < \infty) = p_1(a+b)\mathbf{P}(\eta^+_{2k} < \infty), \quad (5)$$

где $\tilde{\tilde{S}}_i$ обозначает сумму первых i случайных величин из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi^+_n\}$. Из (3) и (5) при $k = 1$ получаем

$$\mathbf{P}(\eta^-_3 < \infty) \le p_1(a)p_1(a+b)p_2(a+b), \qquad \mathbf{P}(\eta^+_4 < \infty) \le p_1(a)p_1(a+b)p_2^2(a+b),$$

и так далее. Тем самым завершается доказательство теоремы 1. □

Неравенства (1) ранее установлены в [6] при $a = b = 0$. Там же обсуждались возможности нахождения величин $p_1(0),\ p_2(0)$ в точном виде и проведено их вычисление в случае экспоненциальных хвостов распределений случайных величин $\xi^\pm_1$.

Следствие 1 *Имеют место оценки*

$$\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \le \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)},$$

$$P(\overline{X} = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \ge 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)},$$

$$\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) \le 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a+b)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}.$$

Доказательство. В теореме 1 установлено, в частности, что $\mathbf{P}(A_k^{\pm}) \to 0$ с экспоненциальной скоростью при $k \to \infty$. Отсюда следует, что множество траекторий, имеющих бесконечное число переключений, имеет нулевую вероятность. Перечисляя теперь траектории с конечным количеством переключений, для которых $\overline{X} = +\infty$ и для которых $\underline{X} = -\infty$, приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty, \eta_5^- = \infty) + \cdots, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty,\ \eta_2^+ = \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty,\ \eta_4^+ = \infty) + \cdots. \quad (7)$$

Действительно, если рассматривать целиком траекторию случайного блуждания $\{S_n^+, n \geq 0\}$, то хорошо известно, что $\mathbf{P}(\sup\{S_n^+,\ n \geq 0\} = \infty) = 1$. Рассмотрим теперь событие $\{\eta_1^- = \infty\}$. На нем траектории процесса X_n совпадают с траекториями случайного блуждания $\{S_n^+\}$, которые никогда не опускаются ниже прямой на уровне $-a$. Разумеется, супремум каждой такой траектории по-прежнему равен бесконечности, но вероятностная мера этого пучка траекторий уже меньше единицы:

$$\mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) = 1 - \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = 1 - p_1(a) < 1.$$

Далее рассмотрим событие $\{\eta_1^- < \infty,\ \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$. Оно содержит траектории процесса X_n, которые впервые достигли уровня $-a$ в момент времени η_1^-, затем, поменяв распределение скачков, в момент времени η_2^+ впервые достигли уровня $b \geq 0$, после чего уже не опускались ниже уровня $-a$. Таким образом, оставшаяся часть траектории процесса X_n после момента времени η_2^+ являет собой траекторию случайного блуждания с положительным сносом, супремум которой равен бесконечности. И это происходит на событии $\{\eta_1^- < \infty,\ \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$, которое совпадает с $\{\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$ в силу свойства $A_1^- \supset A_2^+$. Рассмотрение дальнейших слагаемых в (6) происходит аналогично.

Точно так же в правой части формулы (7) происходит перебор пучков траекторий, которые после очередного попадания в полуплоскость ниже уровня $-a$ начинают блуждать с отрицательным сносом и больше никогда не достигают уровня $b \geq 0$; это означает, что каждый раз инфимум оставшейся части траектории равняется минус бесконечности.

Отметим, что события $\{\overline{X} = +\infty\}$ и $\{\underline{X} = -\infty\}$ несовместны, и $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) + \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = 1$.

Из теоремы 1 и (7) следует

$$\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \leq \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) + \ldots$$
$$\leq p_1(a) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b) = \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}.$$

Одновременно из теоремы 1 и (6) выводим

$$\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) \leq \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty) + \cdots$$
$$\leq 1 - p_1(a) + p_1(a)p_2(a+b) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b)$$

$$= 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a+b)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}.$$

Следствие доказано. □

Если $a > 0$ и $b > 0$, то можно предложить другие оценки для $\mathbf{P}(A_k^\pm)$. Для этого обозначим $\varphi^\pm(\lambda) = \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi_1^\pm\}$, и предположим, что выполнены следующие условия крамеровского типа:

$$\varphi^-(C) < \infty \quad \text{для некоторого} \quad C > 0, \quad \varphi^-(C) > 1; \tag{8}$$

$$\varphi^+(c) < \infty \quad \text{для некоторого} \quad c < 0, \quad \varphi^+(c) > 1. \tag{9}$$

Функции φ^- и φ^+ выпуклы вниз соответственно на интервалах $[0, C]$ и $[c, 0]$, и уравнения $\varphi^\pm(\lambda) = 1$ имеют ненулевые вещественные решения μ и ν такие, что

$$\varphi^-(\nu) = 1, \quad \varphi^+(-\mu) = 1, \qquad \text{при этом} \qquad 0 < \nu < C, \quad 0 < \mu < -c.$$

Известно [10, §22, теорема 16], что при $x \geq 0$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}(\overline{S} \geq x) \leq e^{-\nu x}, \qquad \text{если выполнено условие} \quad (8),$$

$$\mathbf{P}(\underline{S} \leq -x) \leq e^{-\mu x}, \qquad \text{если выполнено условие} \quad (9).$$

Итак, пусть выполнено (8). Тогда правую часть равенства (2) можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(\sup_{i\geq 0} \tilde{S}_i \geq b + x)\, \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx,\ \eta_{2k-1}^- < \infty)$$

$$\leq \int\limits_{(a,\infty)} e^{-\nu(b+x)}\, \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx,\ \eta_{2k-1}^- < \infty)$$

$$\leq e^{-\nu(a+b)} \int\limits_{(a,\infty)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx,\ \eta_{2k-1}^- < \infty) = e^{-\nu(a+b)}\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Аналогично при выполнении условия (9) из (4) выводим

$$\mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) = \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x)\, \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx,\ \eta_{2k}^+ < \infty),$$

$$\leq \int\limits_b^\infty e^{-\mu(a+x)}\, \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx,\ \eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)}\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-(\mu+\nu)(a+b)}\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Добавим еще, что

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) \leq e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)}\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = e^{-\nu(a+b)}e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)}\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) = e^{-(\mu+\nu)(a+b)}e^{-\mu a},$$

и так далее. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 *Пусть $a > 0$, $b > 0$ и выполнены условия* (8) *и* (9), *тогда для всех $k \geq 1$*

$$\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) \leq e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)}e^{-\mu a}, \qquad \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)}\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Используя эти неравенства, можно переписать оценки, полученные ранее в следствии 1.

Следствие 2 *В условиях теоремы 2 справедливы оценки*

$$\mathbf{P}(\underline{X}=-\infty)\le \exp\{-\mu a\}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)\}=\frac{\exp\{-\mu a\}}{1-\exp\{-(\mu+\nu)(a+b)\}},$$

$$\mathbf{P}(\overline{X}=+\infty)=1-\mathbf{P}(\underline{X}=-\infty)\ge 1-\frac{\exp\{-\mu a\}}{1-\exp\{-(\mu+\nu)(a+b)\}},$$

$$\mathbf{P}(\overline{X}=+\infty)\le 1-\exp\{-\mu a\}+\exp\{-\mu a-\nu(a+b)\}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)\}$$

$$=1-\exp\{-\mu a\}+\frac{\exp\{-\mu a-\nu(a+b)\}}{1-\exp\{-(\mu+\nu)(a+b)\}}.$$

2 Точные формулы

Изучение распределений граничных функционалов для случайных блужданий с прямолинейными горизонтальными границами обычно приводит к нахождению решений в точном виде только в известных частных ситуациях. Однако нахождение в явном виде преобразований Лапласа–Стилтьеса искомых распределений оказывается доступным в значительно более широких классах задач. В связи с этим в данной секции сначала будем интересоваться преобразованиями Лапласа–Стилтьеса совместных распределений пар $\left(\eta_k^{\pm}, X_{\eta_k^{\pm}}\right)$, $k\ge 1$.

Введем двойные преобразования над распределениями этих векторов:

$$U_k(z,\lambda):=\mathbf{E}\left(z^{\eta_k^-}\exp\{\lambda X_{\eta_k^-}\};\ \eta_k^-<\infty\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int\limits_{(-\infty,-a)}e^{\lambda y}\,\mathbf{P}(\eta_k^-=n,\ X_{\eta_k^-}\in dy),$$

$$V_k(z,\lambda):=\mathbf{E}\left(z^{\eta_k^+}\exp\{\lambda X_{\eta_k^+}\};\ \eta_k^+<\infty\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int\limits_{b}^{\infty}e^{\lambda y}\,\mathbf{P}(\eta_k^+=n,\ X_{\eta_k^+}\in dy),$$

здесь $|z|\le 1$, $\quad \mathrm{Re}\lambda=0$.

Ниже будут введены два оператора, назовем их $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, которые действуют на множестве введенных двойных преобразований и с помощью которых будут получены рекуррентные соотношения вида

$$U_{2k+1}(z,\lambda)=(\mathbf{A}V_{2k})(z,\lambda),\qquad V_{2k}(z,\lambda)=(\mathbf{B}U_{2k-1})(z,\lambda),\quad k\ge 1. \tag{10}$$

Перейдем к введению этих операторов. Для этого потребуется использовать теорему 1 из [11], формулировка которой требует введения дополнительных обозначений и подробного описания.

Итак, в этой теореме рассматривается произвольное случайное блуждание $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $n\ge 1$, $S_0=0$, порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и пусть $\tau\ge 0$ — произвольный момент остановки для этого блуждания, возможно, несобственный. Предположим, что известно двойное преобразование над распределением пары случайных величин $\left(\tau, S_\tau\right)$:

$$g(z,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\mathbf{P}(\tau=n,\ S_n\in dy),\qquad |z|\le 1,\quad \mathrm{Re}\lambda=0. \tag{11}$$

Если $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$, то в этом случае $g(z,\lambda) \equiv e(z,\lambda) \equiv 1$. На событии $\{\tau < \infty\}$ вводятся случайные величины

$$\tau_+(b) = \inf\{n \ge \tau:\ S_n \ge b\}, \qquad \tau_-(a) = \inf\{n \ge \tau:\ S_n < -a\}.$$

Особенностью этих величин является то, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки τ. Возникает вопрос: как выразить двойные преобразования над распределениями векторов $(\tau_-(a),\, S_{\tau_-(a)})$, $(\tau_+(b),\, S_{\tau_+(b)})$ через $g(z,\lambda)$. Теорема 1 в [11] утверждает, что

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_-(a)}\exp\{\lambda S_{\tau_-(a)}\};\ \tau_-(a) < \infty\right) = (Ag)(z,\lambda), \quad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda \ge 0,$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_+(b)}\exp\{\lambda S_{\tau_+(b)}\};\ \tau_+(b) < \infty\right) = (Bg)(z,\lambda), \quad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda \le 0.$$

Участвующие здесь операторы A и B определяются ниже следующим образом. Пусть

$$\eta_+ = \min\{n \ge 1:\ S_n \ge 0\}, \qquad \eta_- = \min\{n \ge 1:\ S_n < 0\}, \qquad \chi_\pm = S_{\eta_\pm},$$

— соответственно первые лестничные моменты и лестничные высоты для случайного блуждания S_n, и пусть для $|z| \le 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$,

$$r_-(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_-}\exp\{\lambda\chi_-\};\ \eta_- < \infty\right), \tag{12}$$

$$r_+(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_+}\exp\{\lambda\chi_+\};\ \eta_+ < \infty\right), \tag{13}$$

— компоненты известной факторизации ([9, гл. 12])

$$1 - z\mathbf{E}\exp\{\lambda\,\xi_1\} = r_-(z,\lambda)r_+(z,\lambda).$$

Условимся обозначать через Π множество функций f, имеющих вид

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}dF(y), \qquad \mathrm{Re}\lambda = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |dF(y)| < \infty.$$

Здесь F — произвольная функция с конечной полной вариацией. Наконец, введем операторы A и B следующим образом. Для всякой функции $f \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$,

$$(Af)(z,\lambda) = r_-(z,\lambda)\left[r_-^{-1}(z,\lambda)\,f(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}, \quad a > 0,$$

$$(Bf)(z,\lambda) = r_+(z,\lambda)\left[r_+^{-1}(z,\lambda)\,f(\lambda)\right]^{[b,\infty)}, \quad b > 0,$$

где принято обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}dF(y)\right]^D = \int_D e^{\lambda y}dF(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Функция f в этом определении может также зависеть от z. Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z, но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Стоящие в квадратных скобках функции $r_\pm^{-1}(z,\lambda)$ по переменной λ также принадлежат Π для $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, это известно из [9, гл. 12].

Итак, выбирая в качестве f введенную в (11) функцию g, получим утверждение теоремы 1 из [11]. Если же в этой теореме с самого начала $\mathbf{P}(S_\tau \geq b) = 1$, то, очевидно, будем иметь в этом случае $(Bg)(z,\lambda) \equiv g(z,\lambda)$.

Хорошо известно, что движение траектории случайного блуждания вверх к горизонтальной границе осуществляется, шаг за шагом, независимыми случайными скачками, одинаково распределенными с первой лестничной высотой χ_+, а промежутки времени между этими скачками независимы и одинаково распределены с первым лестничным моментом η_+. Поэтому вполне естественным является тот факт, что двойное преобразование над распределением пары случайных величин $\big(\tau_+(b), S_{\tau_+(b)}\big)$ выражается через двойное преобразование над лестничной парой $\big(\eta_+, \chi_+\big)$, которое почти совпадает с соответствующей компонентой факторизации.

Отметим важную особенность приведенной теоремы. Распределение скачков случайного блуждания до момента τ может быть произвольным и никак не влияет на результат, используется только знание функции g. Участвующие в определении операторов A и B компоненты факторизации определяются скачками блуждания S_n после момента τ, распределения скачков блуждания после момента τ не обязаны совпадать с распределениями скачков до τ.

Обратимся к первому из соотношений (10). Для его обоснования применим теорему 1 из [11], положив $\tau = \eta^+_{2k}$ и напомнив, что после момента η^+_{2k} до момента η^-_{2k+1} приращения процесса X_n распределены одинаково с ξ^+_1. Поэтому берем независимую вероятностную копию последовательности $\{\xi^+_n\}$, строим по ней последовательные суммы и для использования в формуле (12) в качестве η_- берем номер первой отрицательной суммы из них, а χ_- будет равно величине этой суммы. Оператор A в этой ситуации будем обозначать как $\mathbf{A}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_-(z,\lambda)$ будем обозначать просто $r(z,\lambda)$, для краткости опуская индекс. При рассмотрении второго соотношения в (10) роль момента остановки τ выполняет $\tau = \eta^-_{2k-1}$, и дальнейшие скачки процесса X_n распределены одинаково с ξ^-_1. Поэтому в формуле (13) в качестве η_+ берем номер первой неотрицательной суммы, построенной по независимой вероятностной копии последовательности ξ^-_n, а χ_+ полагаем равным величине этой суммы. Оператор B в этой ситуации будем обозначать через $\mathbf{B}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_+(z,\lambda)$ для краткости будем обозначать просто $R(z,\lambda)$.

Таким образом, применение теоремы 1 из [11] влечет справедливость соотношений (10), в которых операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задаются формулами

$$(\mathbf{A}g)(z,\lambda) = r(z,\lambda)\big[r^{-1}(z,\lambda)\, g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a)}, \quad a > 0,$$

$$(\mathbf{B}g)(z,\lambda) = R(z,\lambda)\big[R^{-1}(z,\lambda)\, g(\lambda)\big]^{[b,\infty)}, \quad b > 0.$$

Получаем теперь из (10)

$$U_1(z,\lambda) = (\mathbf{A}e)(z,\lambda),$$

$$V_2(z,\lambda) = (\mathbf{BA}e)(z,\lambda),$$

$$U_3(z,\lambda) = (\mathbf{ABA}e)(z,\lambda),$$

и так далее. В итоге устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 3 *При* $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, *для всех* $a > 0$, $b > 0$ *и* $k \geq 1$ *имеют место соотношения*

$$U_{2k-1}(z,\lambda) = (\mathbf{A}(\mathbf{BA})^{k-1}e)(z,\lambda), \qquad V_{2k}(z,\lambda) = ((\mathbf{BA})^{k}e)(z,\lambda), \tag{14}$$

в которых степени операторов понимаются как суперпозиции.

После нахождения двойных преобразований возникает вопрос об их обращении. В общем случае формулы (14) трудны для вычисления в явном виде. При использовании операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ хотелось бы иметь явные выражения компонент факторизации $r(z,\lambda)$ и $R(z,\lambda)$ через характеристики исходных распределений F_1 и F_2, однако это доступно далеко не всегда. Классы распределений, для которых это удается сделать, обсуждаются в [6]. Ниже продемонстрируем вычисление величин (14) при выполнении условий

$$\mathbf{P}(\xi_1^- \geq t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0. \tag{15}$$

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < t) = r\exp\{\beta t\}, \quad t < 0, \quad \beta > 0. \tag{16}$$

Эта ситуация подробно рассмотрена в [3]. Функция $\varphi^+(\lambda)$ конечна при $-\beta < \lambda \leq 0$, $\varphi^-(\lambda)$ определена при $0 \leq \lambda < \alpha$. Обе функции выпуклы вниз, поэтому с учетом требований $\mathbf{E}\,\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\,\xi_1^+ > 0$ нетрудно видеть, что при $0 < z \leq 1$ уравнение $1 - z\varphi^+(\lambda) = 0$ имеет единственный отрицательный корень. Обозначим его $\lambda(z)$, и обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1 - z\varphi^-(\lambda) = 0$. Ясно, что условие (15) влечет введенное ранее условие (8), условие (16) влечет (9). Во введенных ранее обозначениях $\lambda(1) = -\mu$, $\Lambda(1) = \nu$. В [3] показано, что при выполнении условий (15) и (16) функции $r(z,\lambda)$ и $R(z,\lambda)$ имеют весьма простую форму.

$$r(z,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta}, \qquad R(z,\lambda) = \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha}.$$

Более того, там же показано, что если функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} dG(y), \quad \mathrm{Re}\lambda = 0,$$

где полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{A}g)(z,\lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta}\, g\big(\lambda(z)\big)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a}.$$

Действительно,

$$r(z,\lambda)\big[r^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a)} = r(z,\lambda)\left[\left(1 + \big(\lambda(z)+\beta\big)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\lambda-\lambda(z))y}\, dy\right)g(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta}(\lambda(z)+\beta)\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda(z)(y-t)}\, dG(t)dy = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta} g(\lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\lambda)a}.$$

Если же функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dG(y), \qquad \mathrm{Re}\lambda = 0,$$

где также полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{B}g)(z,\lambda) = R(z,\lambda)\big[R^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)}$$

$$= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha}\left[\left(1 + \big(\alpha - \Lambda(z)\big)\int\limits_0^\infty e^{(\lambda-\Lambda(z))y}\,dy\right)g(\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha}(\alpha - \Lambda(z))\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-\Lambda(z)(y-t)}\,dG(t)dy = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha}g(\Lambda(z))e^{(\lambda-\Lambda(z))b}.$$

Эти утверждения позволяют вычислить

$$(\mathbf{A}e)(z,\lambda) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta}\,e^{(\lambda(z)-\lambda)a},$$

$$(\mathbf{BA}e)(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\cdot\frac{\lambda(z)+\beta}{\Lambda(z)+\beta}\,e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a}\,e^{(\lambda-\Lambda(z))b},$$

$$(\mathbf{ABA}e)(z,\lambda) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda(z)-\alpha}\cdot\frac{\lambda(z)+\beta}{\Lambda(z)+\beta}\,e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(a+b)}\,e^{(\lambda(z)-\lambda)a},$$

$$((\mathbf{BA})^2e)(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\cdot\frac{\lambda(z)+\beta}{\Lambda(z)+\beta}\cdot\frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda(z)-\alpha}\cdot\frac{\lambda(z)+\beta}{\Lambda(z)+\beta}\,e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(2a+b)}\,e^{(\lambda-\Lambda(z))b},$$

и так далее, т. е.

$$(\mathbf{BA})^k e(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\,\delta_1^k(z)\,\delta_2^{k-1}(z)\mu^{ka+(k-1)b}(z)\,e^{(\lambda-\Lambda(z))b} \tag{17}$$

для всех $k \geq 1$, где $\mu(z) = e^{\lambda(z)-\Lambda(z)}$ и

$$\delta_1(z) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\Lambda(z)+\beta}, \qquad \delta_2(z) = \frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda(z)-\alpha}.$$

Для $0 < z < 1$ выполняется $-\beta < \lambda(z) < 0$ и $0 < \Lambda(z) < \alpha$; поэтому $|\delta_i(z)| < 1$, $i = 1, 2$.

Далее,

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^2e)(z,\lambda) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta}\,\delta_1^2(z)\,\delta_2^2(z)\mu^{2(a+b)}(z)\,e^{(\lambda(z)-\lambda)a}.$$

Продолжая эти вычисления, убеждаемся, что

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^ke)(z,\lambda) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta}\,\delta_1^k(z)\,\delta_2^k(z)\mu^{k(a+b)}(z)\,e^{(\lambda(z)-\lambda)a}.$$

Таким образом, получена

Теорема 4 *Пусть выполнены условия* (15) *и* (16). *Тогда при* $0 < z < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, *для всех* $a > 0$, $b > 0$ *и* $k \geq 1$ *имеют место соотношения*

$$U_{2k-1}(z,\lambda) = \frac{\lambda(z)+\beta}{\lambda+\beta}\,\delta_1^{k-1}(z)\,\delta_2^{k-1}(z)\,\mu^{(k-1)(a+b)}(z)\,e^{(\lambda(z)-\lambda)a},$$

$$V_{2k}(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\,\delta_1^k(z)\,\delta_2^{k-1}(z)\,\mu^{ka+(k-1)b}(z)\,e^{(\lambda-\Lambda(z))b}.$$

Следствие 3 *В условиях теоремы 4*

$$\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda X_{\eta^-_{2k-1}}\};\,\eta^-_{2k-1}<\infty\right)=\lim_{z\to 1}U_{2k-1}(z,\lambda)=\frac{\beta-\mu}{\lambda+\beta}\,\delta_1^{k-1}\,\delta_2^{k-1}\,d^{(k-1)(a+b)}\,e^{-(\mu+\lambda)a},$$

$$\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda X_{\eta^+_{2k}}\};\,\eta^+_{2k}<\infty\right)=\lim_{z\to 1}V_{2k}(z,\lambda)=\frac{\nu-\alpha}{\lambda-\alpha}\,\delta_1^{k}\,\delta_2^{k-1}\,d^{ka+(k-1)b}\,e^{(\lambda-\nu)b},$$

$$\mathbf{P}(\eta^-_{2k-1}<\infty)=\frac{\beta-\mu}{\beta}\,\delta_1^{k-1}\,\delta_2^{k-1}\,d^{(k-1)(a+b)}\,e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta^+_{2k}<\infty)=\frac{\alpha-\nu}{\alpha}\,\delta_1^{k}\,\delta_2^{k-1}\,d^{ka+(k-1)b}\,e^{-\nu b},$$

где обозначено

$$\delta_1=\delta_1(1)=\frac{\beta-\mu}{\nu+\beta},\qquad \delta_2=\delta_2(1)=\frac{\alpha-\nu}{\mu+\alpha},\qquad d=e^{-(\mu+\nu)}.$$

Замечание 1. Отметим, что результаты следствия 3 можно получить и без теоремы 4. Действительно, при одновременном выполнении условий (15) и (16) абсолютные значения всех перескоков блуждания $\{X_n,n\ge 1\}$ в моменты $\eta^\pm_k$ имеют условные экспоненциальные распределения и не зависят от моментов достижения уровня, а именно: при $k\ge 1$

$$\mathbf{P}(X_{\eta^-_{2k-1}}+a\in dy\,|\,\eta^-_{2k-1}<\infty)=\beta e^{\beta y}dy,\qquad y<0,$$

$$\mathbf{P}(X_{\eta^+_{2k}}-b\in dy\,|\,\eta^+_{2k}<\infty)=\alpha e^{-\alpha y}dy,\qquad y>0.$$

Кроме того, известно, что если выполнено (15), то с вероятностью 1 конечен супремум $\overline{S}$ траектории блуждания $\{S^-_n\}$ и

$$\mathbf{P}(\overline{S}=0)=\frac{\nu}{\alpha},$$

$$\mathbf{P}(\overline{S}\in dx)=\left(1-\frac{\nu}{\alpha}\right)\nu e^{-\nu x}dx,\qquad x>0,$$

см. [9, гл. 12, пример 5.1]. Здесь, напомним, ν — единственный положительный корень уравнения $\varphi^-(\lambda)=1$, $0<\nu<\alpha$. Аналогично, если выполнено (16), то

$$\mathbf{P}(\underline{S}=0)=\frac{\mu}{\beta},$$

$$\mathbf{P}(\underline{S}\in dx)=\left(1-\frac{\mu}{\beta}\right)\mu e^{\mu x}dx,\qquad \text{если}\ \ x<0,$$

здесь $\varphi^+(-\mu)=1$.

Вычисляя в точном виде правую часть (2), получаем для $k\ge 1$

$$\mathbf{P}(\eta^+_{2k}<\infty)=\int\limits_{-\infty}^{-a}\mathbf{P}(\overline{S}\ge b-x)\,\mathbf{P}(X_{\eta^-_{2k-1}}+a\in dx\,+a|\,\eta^-_{2k-1}<\infty)\,\mathbf{P}(\eta^-_{2k-1}<\infty)$$

$$=\left(1-\frac{\nu}{\alpha}\right)\int\limits_{(-\infty,0)}e^{-\nu(b-y+a)}\beta e^{\beta y}dy\mathbf{P}(\eta^-_{2k-1}<\infty)=\left(1-\frac{\nu}{\alpha}\right)\frac{\beta e^{-\nu(a+b)}}{\beta+\nu}P(\eta^-_{2k-1}<\infty).$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu a}.$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right)\frac{\beta e^{-\mu a - \nu(a+b)}}{\beta + \nu}.$$

Для правой части (4) находим

$$\mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) = \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x)\,\mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b \,|\, \eta_{2k}^+ < \infty)\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty)$$

$$= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\int_0^\infty e^{-\mu(a+b+y)}\alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\frac{\alpha e^{-\mu(a+b)}}{\alpha + \mu}\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty)$$

$$= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right)\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\mu)(\beta+\nu)} e^{-(\mu+\nu)(a+b)} P(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Приведенные соотношения полностью определяют значения вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$ при всех $k \geq 1$.

Кроме того, при выполнении условий (15) и (16) легко вычисляются все слагаемые в формуле (6) для подсчета $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$, поскольку действуя, как и в (4), получаем при всех $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty,\ \eta_{2k+1}^- = \infty)$$

$$= \int_b^\infty (1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -x - a))\ \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b \mid \eta_{2k}^+ < \infty)\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty)$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu(a+b+y)}\right) \alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty)$$

$$= \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha + \mu} e^{-\mu(a+b)}\right)\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty).$$

Замечание 2. Вместо условий (15) и (16) можно рассмотреть более общую ситуацию, в которой плотность распределения F_1 на отрицательной полуоси равна линейной комбинации экспонент с постоянными коэффициентами, и одновременно плотность распределения F_2 на положительной полуоси также равна линейной комбинации экспонент. В этих условиях участвующие в определении операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ функции

$$r(z,\lambda), \quad r^{-1}(z,\lambda), \quad R(z,\lambda), \quad R^{-1}(z,\lambda) \tag{18}$$

будут рациональными, они выражаются через показатели экспонент в плотностях и через корни уравнений $1 - z\varphi^\pm(\lambda) = 0$ (которые еще надо найти). Соответствующие объяснения приведены в [6]. Разложение рациональных функций (18) на простые дроби делает доступным в этой ситуации нахождение точных формул для выражений вида $(\mathbf{A}g)(z,\lambda)$ и $(\mathbf{B}g)(z,\lambda)$, однако дальнейшее вычисление суперпозиций вида $((\mathbf{BA})^k g)(z,\lambda)$ при больших k окажется чрезвычайно громоздким процессом.

3 Асимптотические представления функций $U_k(z,\lambda)$ и $V_k(z,\lambda)$ при $a\to\infty$, $b\to\infty$

Как уже отмечалось, нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Демонстрацией этого факта является теорема 4 и ее следствие. В граничных задачах для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений (или хотя бы их преобразований Лапласа-Стилтьеса) в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассматривать схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания, и такие работы имеются. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено большое число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными неограниченно удаляющимися горизонтальными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А.А. Боровковым [12] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Этому направлению будем следовать в данной секции, пользуясь разработанными в [13] асимптотическими представлениями для введенных выше операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

В этом разделе всюду будем предполагать, что при некоторых $c_i>0$, $i=1,\dots,4$, выполнено условие (A) крамеровского типа, состоящее из следующих трех пунктов:

(A)
1) $|\varphi^-(\lambda)|<\infty$ для $-c_1\le \operatorname{Re}\lambda\le c_2$, $\varphi^-(c_2)>1$;
2) $|\varphi^+(\lambda)|<\infty$ для $-c_3\le \operatorname{Re}\lambda\le c_4$, $\varphi^+(-c_3)>1$;
3) распределения случайных величин $\xi_1^\pm$ содержат абсолютно непрерывные компоненты.

Напомним, что $\mathbf{E}\,\xi_1^-<0$ и $\mathbf{E}\,\xi_1^+>0$. Как и в теореме 4, в этих условиях, но уже для вещественных значений z, достаточно близких к единице, т. е. для $1-\delta\le z\le 1$ при некотором $\delta>0$, уравнение $1-z\varphi^+(\lambda)=0$ имеет единственный отрицательный корень, обозначим его $\lambda(z)$. Также обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1-z\varphi^-(\lambda)=0$, и по-прежнему сохраним обозначения $\lambda(1)=-\mu$, $\Lambda(1)=\nu$.

В [13] доказаны две леммы, которые в обозначениях нашей работы имеют следующий вид.

Лемма 1 *Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g, имеющей вид*

$$g(\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda y}dG(y),\qquad \int_0^\infty |dG(y)|<\infty,$$

при $1-\delta\le z<1$, $\operatorname{Re}\lambda\ge-\mu$ и некотором $\varepsilon>0$ имеет место представление

$$(\mathbf{A}g)(z,\lambda)=u_z(\lambda)e^{(\lambda(z)-\lambda)a}g\big(\lambda(z)\big)+r(z,\lambda)\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda y}d\theta_z(y),$$

в котором $u_z(\lambda)=r(z,\lambda)\big((\lambda-\lambda(z))r'(z,\lambda(z))\big)^{-1}$ и равномерно по z

$$\int_{-\infty}^{-a}|d\theta_z(y)|=O\big(e^{-(\mu+\varepsilon)a}\big)\int_0^\infty\big|dG(y)\big|,\qquad a\to\infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $[b,\infty)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} \big|d\theta_z(y)\big| = O\big(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}\big) \int\limits_{b}^{\infty} \big|dG(y)\big|, \qquad a\to\infty.$$

Лемма 2 *Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g, имеющей вид*

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} |dG(y)| < \infty,$$

при $1-\delta \le z < 1$, $\operatorname{Re}\lambda \le \nu$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$(\mathbf{B}g)(z,\lambda) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b} g\big(\Lambda(z)\big) + R(z,\lambda) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda y} d\varphi_z(y),$$

в котором $v_z(\lambda) = R(z,\lambda)\big((\lambda-\Lambda(z)\big)R'(z,\Lambda(z))\big)^{-1}$ и равномерно по z

$$\int\limits_{b}^{\infty} \big|d\varphi_z(y)\big| = O\big(e^{-(\nu+\varepsilon)b}\big) \int\limits_{-\infty}^{0} \big|dG(y)\big|, \qquad b\to\infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $(-\infty,-a)$, то

$$\int\limits_{b}^{\infty} \big|d\varphi_z(y)\big| = O\big(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}\big) \int\limits_{-\infty}^{-a} \big|dG(y)\big|, \qquad b\to\infty.$$

Замечание 3. В дальнейшем потребуется рассматривать значения величин $(\mathbf{A}g)(z,\Lambda(z))$ и $(\mathbf{B}g)(z,\lambda(z))$. Для них остаточные члены в леммах 1 и 2 будут иметь следующий вид (здесь буквой C обозначены некоторые константы):

$$\left| r(z,\Lambda(z)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\Lambda(z)y} d\theta_z(y)\right| \le C\, e^{-\Lambda(z)a} \int\limits_{-\infty}^{-a} \big|d\theta_z(y)\big| = O\big(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a}\big) \int\limits_{0}^{\infty} \big|dG(y)\big|, \;\; a\to\infty,$$

$$\left| R(z,\lambda(z)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda(z)y} d\varphi_z(y)\right| \le C e^{\lambda(z)b} \int\limits_{b}^{\infty} \big|d\varphi_z(y)\big| = O\big(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b}\big) \int\limits_{-\infty}^{0} \big|dG(y)\big|, \;\; b\to\infty,$$

с заменой $O\big(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a}\big)$ и $O\big(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b}\big)$ соответственно на $O\big(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)(a+b)}\big)$ и $O\big(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)(a+b)}\big)$ в упомянутых выше случаях, касающихся носителей функции G.

Замечание 4. Вернемся к соотношениям (14). В этих формулах каждое применение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеет вид $(\mathbf{A}g)(z,\lambda)$ или $(\mathbf{B}g)(z,\lambda)$, где, в силу теоремы 1 из [11], функция $g = g(z,\lambda)$ в каждом случае есть двойное преобразование Лапласа–Стилтьеса над двумерным распределением момента первого достижения некоторого уровня и положения в этот момент. По этой причине каждый раз выполняется

$$g(z,\lambda) = \int e^{\lambda y} dG_z(y), \qquad \int |dG_z(y)| \le 1.$$

Более того, для всякого $k \geq 1$ в силу (14) имеем

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^{k-1}e)(z,\lambda) = U_{2k-1}(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\eta^-_{2k-1}} \exp\{\lambda X_{\eta^-_{2k-1}}\};\, \eta^-_{2k-1} < \infty\right)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, \mathbf{P}(\eta^-_{2k-1} = n,\, X_{\eta^-_{2k-1}} \in dy),$$

и в представлении

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^{k-1}e)(z,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

будем иметь равномерно по z

$$\|G_z\| := \int\limits_{-\infty}^{-a} |dG_z(y)| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, \mathbf{P}(\eta^-_{2k-1} = n,\, X_{\eta^-_{2k-1}} \in dy) \right\| \leq P(A^-_{2k-1}).$$

Напомним, что ранее обозначено $P(A^\pm_k) = \mathbf{P}(\eta^\pm_k < \infty)$. Далее, по тем же соображениям при всех $k \geq 1$

$$((\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, \mathbf{P}(\eta^+_{2k} = n,\, X_{\eta^+_{2k}} \in dy),$$

и в представлении

$$((\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

выполняется равномерно по z

$$\|G_z\| = \int\limits_{b}^{\infty} |dG_z(y)| = \left\| \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, \mathbf{P}(\eta^+_{2k} = n,\, X_{\eta^+_{2k}} \in dy) \right\| \leq \mathbf{P}(A^+_{2k}).$$

Отметим, что двустороннее условие Крамéра (A) влечет одновременное выполнение ранее введенных односторонних условий (8) и (9), поэтому ниже будем пользоваться экспоненциальными оценками теоремы 2 для вероятностей $P(A^\pm_k)$ в приведенных оценках для $\|G_z\|$.

Теорема 5 *Пусть выполнено условие (A). Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $a \to \infty$, $b \to \infty$ равномерно по $1-\delta < z < 1$ выполняется*

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta^-_1} \exp\{\lambda X_{\eta^-_1}\};\, \eta^-_1 < \infty\right) = (\mathbf{A}e)(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a}\big(1 + O(e^{-\varepsilon a})\big), \qquad (19)$$

и для $k \geq 1$

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta^+_{2k}} \exp\{\lambda X_{\eta^+_{2k}}\};\, \eta^+_{2k} < \infty\right) = ((\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$$

$$= v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z)\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)}\big(1 + O(e^{-\varepsilon(a+b)})\big), \qquad (20)$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta^-_{2k+1}} \exp\{\lambda X_{\eta^-_{2k+1}}\};\, \eta^-_{2k+1} < \infty\right) = (\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$$

$$= u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)}\big(1 + O(e^{-\varepsilon(a+b)})\big), \qquad (21)$$

где для краткости обозначено $h_1(z) = u_z(\Lambda(z))$, $h_2(z) = v_z(\lambda(z))$.

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения основываются на применении лемм 1 и 2, а также оценок, содержащихся в последующих замечаниях. Отметим также, что в силу известных свойств компонент факторизации абсолютные значения функций $r(z,\lambda)$, $R(z,\lambda)$, $u_z(\lambda)$ и $v_z(\lambda)$ ограничены равномерно по z каждая в своей области аналитичности по переменной λ.

Воспользуемся методом математической индукции. Соотношение (19) сразу следует из леммы 1:

$$(\mathbf{A}e)(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a} + O\big(e^{-(\mu+\varepsilon)a}\big) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a}(1+O(e^{-\varepsilon a})).$$

Далее, применяя лемму 2 и оценки, сформулированные в замечаниях 3 и 4, получаем

$$(\mathbf{BA}e)(z,\lambda) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b}\Big(u_z(\Lambda(z))\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O\big(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a}\big)\Big)$$

$$+\mathbf{P}(A_1^-)\, O\big(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}\big)$$

$$= v_z(\lambda)\, e^{(\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z))\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O\big(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a-\nu b}\big) + O\big(e^{-\mu a-(\nu+\varepsilon)(a+b)}\big)$$

$$= v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z))\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a}\big(1+O(e^{-\varepsilon(a+b)})\big).$$

Предположим, что для некоторого $k \geq 1$ выполнено (20). Тогда

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a}$$

$$\times\Big(v_z(\lambda(z))\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z)\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)}\big(1+O(e^{-\varepsilon(a+b)})\big)\Big)$$

$$+\mathbf{P}(A_{2k}^+)\, O\big(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}\big) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)}$$

$$+O\big(e^{-\mu a-(k(\mu+\nu)+\varepsilon)(a+b)}\big) + e^{-\nu(a+b)-\mu a} e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)}\, O\big(e^{-(\mu+\nu+\varepsilon)(a+b)}\big)$$

$$= u_z(\lambda)\, e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)}\big(1+O\big(e^{-\varepsilon(a+b)}\big)\big).$$

В частности, из установленного выше равенства (20) при $k=1$ следует справедливость (21) при $k=1$. Пусть теперь выполнено (21) для произвольного $k \geq 1$. Тогда

$$((\mathbf{BA})^{k+1}e)(z,\lambda) = (\mathbf{B}(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b}$$

$$\times\Big(u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z)\, e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)}\big(1+O(e^{-\varepsilon(a+b)})\big)\Big)$$

$$+\mathbf{P}(A_{2k+1}^-)\, O\big(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}\big) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)}$$

$$+O(e^{-\varepsilon(a+b)-(k+1)(\mu+\nu)a-k(\mu+\nu)b}) + e^{-k(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a} O\big(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}\big)$$

$$= v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\Lambda(z))b} h_1^{k+1}(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(k+1)a+kb}\big(1+O\big(e^{-\varepsilon(a+b)}\big)\big).$$

Таким образом, представления (20) и (21) выполняются для всех $k \geq 1$. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что при дополнительном выполнении условий (15) и (16) остаточные члены в формулах (19)–(21) исчезают.

По-видимому, утверждения теоремы 5 сохранятся в силе, если вместо двусторонних условий Крамéра в (A) ограничиться односторонними при соблюдении требований $\mathbf{E}\,\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\,\xi_1^+ > 0$, как это происходило в теореме 4. Однако доказательство теоремы 5 использует леммы 1 и 2 из [13], где предполагалось именно выполнение двусторонних условий. Разумеется, значения величин $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$ определяются распределениями случайных величин на обеих полуосях.

Обращение по переменной z полученных главных членов асимптотики функций $((\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$ и $(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$ является весьма сложной задачей и в данной работе производиться не будет. Более доступной выглядит возможность обращения по пространственной переменной λ, хотя для этого потребуются дополнительные сведения о факторизационных компонентах $r(z,\lambda)$ и $R(z,\lambda)$.

Следствие 4 *Пусть выполнено условие* (A), *тогда существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda X_{\eta_1^-}\};\, \eta_1^- < \infty\right) = \lim_{z\to 1}(\mathbf{A}e)(z,\lambda) = u_1(\lambda)\, e^{-\mu a}\bigl(1 + O(e^{-\varepsilon a})\bigr), \quad a\to\infty,$$

и для $k \ge 1$ *при* $a\to\infty$, $b\to\infty$

$$\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\};\, \eta_{2k}^+ < \infty\right) = \lim_{z\to 1}((\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$$

$$= v_1(\lambda)\, e^{(\lambda-\nu)b} h_1^k(1) h_2^{k-1}(1)\, e^{-(\mu+\nu)(ka+(k-1)b)}\bigl(1 + O(e^{-\varepsilon(a+b)})\bigr),$$

$$\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k+1}^-}\};\, \eta_{2k+1}^- < \infty\right) = \lim_{z\to 1}(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z,\lambda)$$

$$= u_1(\lambda)\, e^{-(\mu+\lambda)a} h_1^k(1) h_2^k(1) e^{-(\mu+\nu)k(a+b)}\bigl(1 + O(e^{-\varepsilon(a+b)})\bigr).$$

Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение текста и полезные замечания.

Список литературы

[1] *Рогозин Б. А., Фосс С. Г.* Возвратность осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 1. С. 161–169.

Rogozin B.A. and Foss S.G. Recurrency of an Oscillating Random Walk // Theory of Probability and its Applications. 1978. V. 23, N 1. P. 155—162.

[2] *Keilson J. and Servi L.D.* Oscillating random walk models for GI / G/I vacation systems with Bernoulli schedules // J. Appl. Probab. 1986. V. 23, N 1. P. 790–802.

[3] *Лотов В.И.* Об осциллирующих случайных блужданиях // Сиб. мат. журнал. 1996. Т. 37, № 4. С. 869–880.

Lotov V.I. On oscillating random walks // Siberian Math. J. 1996. V. 37, N. 4. P. 764-–774.

[4] *Лотов В.И., Ким Д.К.* Асимптотика стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания // Сиб. мат. журнал. 2004. Т. 45, № 5. С. 1112–1129.

Kim D.K., Lotov V.I. Asymptotics of the stationary distribution of an oscillating random walk // Siberian Math. J. 2004. V. 45, N 5. P. 915–930.

[5] *D. Dudukalov, A. Logachov, V. Lotov, T. Prasolov, E. Prokopenko, A. Tarasenko* Convergence, Sticking and Escape: Stochastic Dynamics Near Critical Points in SGD // ArXiv. 2505.18535.

[6] *Лотов В.И.* Об одной модели осциллирующего случайного блуждания // Мат. заметки. 2026. Т. 119, № 5. С. 721–731. (https://www.mathnet.ru/rus/mzm14799).

[7] *Ветрова Е.Л.* Асимптотика вероятностей больших уклонений для простого осциллирующего случайного блуждания // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, № 1. С. 89–94.

[8] *M. Peigne, C. Pham and T. D Vo* A local limit theorem for lattice oscillating random walks // Arxiv. 2509.15647.

[9] *Боровков А.А.* Теория вероятностей // ЛИБРОКОМ, М. 2009.

Borovkov A.A. Probability Theory. Springer, London. 2013.

[10] *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. 1972. М., Наука.

A.A. Borovkov Stochastic Processes in Queueing Theory. 1976, Springer, New York.

[11] *Лотов В.И.* Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева. Москва, 1989. С. 117–121. https://www.mathnet.ru/person11317, п. 63.

Lotov V.I. On an approach to two-sided boundary problems. In: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, P. 117–121.

[12] *Боровков А.А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.

A.A. Borovkov New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms // In: Select. Transl. Math. Statist. Probab. 1965. V. 5. P. 315–372.

[13] *Лотов В.И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сиб. мат. журнал. 1999. Т.40, № 5. С. 1095–1108.

Lotov V.I. Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks // Siberian Math. J. 1999. V. 40, N 5. P. 925–937.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru